

# SISTEMI ad 1 gdl

## VIBRAZIONI LIBERE DEL SISTEMA MOLLA - SMORZATORE

Equazione del moto:

$$c\dot{x} + kx = 0$$

Si tratta di un sistema del primo ordine, la cui equazione caratteristica è:

$$cx + k = 0$$

La radice dell'equazione caratteristica:

$$z_1 = -k/c$$

è reale.

La soluzione dell'equazione del moto è:

$$x(t) = A_1 e^{-\frac{k}{c}t}$$

la costante  $A_1$  si determina in funzione della condizione iniziale:

$$x(0) = x_0 \quad \text{da cui si ha: } A_1 = x_0$$

L'integrale generale è pertanto:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{k}{c}t}$$

## VIBRAZIONI LIBERE SISTEMA MASSA - SMORZATORE

Equazione del moto:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} = 0$$

Si tratta di un sistema del primo ordine, infatti si può scrivere:

$$\begin{cases} m\dot{y} + cy = 0 \\ y = \dot{x} \end{cases}$$

L'equazione caratteristica della  $m\dot{y} + cy = 0$  è:

$$mz + c = 0$$

la cui radice è:

$$z_1 = -c/m \quad (\text{reale})$$

La soluzione dell'equazione del moto in  $y(t)$  è:

$$y(t) = B_1 e^{-\frac{c}{m}t}$$

La costante  $B_1$  si determina in funzione della condizione iniziale:

$$y(0) = v_0 \quad \text{da cui si ha: } B_1 = v_0$$

E' pertanto:

$$y(t) = v_0 e^{-\frac{c}{m}t}$$

da cui:

$$x(t) = B_2 - \frac{m}{c} v_0 e^{-\frac{c}{m}t}$$

La costante  $B_2$  si determina in funzione della condizione iniziale:

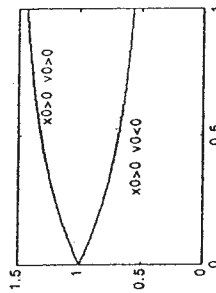
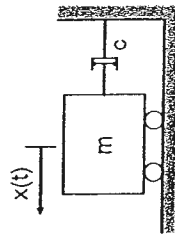
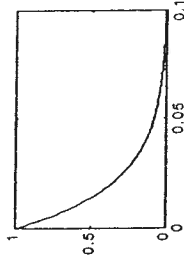
$$x(0) = x_0$$

da cui si ha:

$$B_2 = x_0 + \frac{m}{c} v_0$$

L'integrale generale è pertanto:

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{c} v_0 \left( 1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right)$$



## VIBRAZIONI LIBERE DEL SISTEMA MASSA - MOLLA

Equazione del moto:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Si tratta di un sistema del secondo ordine, la cui equazione caratteristica è:

$$mz^2 + k = 0$$

Le radici dell'equazione caratteristica:

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\omega_n$$

sono immaginarie.

Il rapporto  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  viene detto *pulsazione naturale* del sistema.

La soluzione dell'equazione del moto è:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t}$$

Introducendo le relazioni di Eulero:  $e^{\pm i\omega_n t} = \cos \omega_n t \pm i \sin \omega_n t$

si ottiene:  $x(t) = (C_1 + C_2) \cos \omega_n t + i(C_1 - C_2) \sin \omega_n t$

da cui:

$$x(t) = D \cos \omega_n t + E \sin \omega_n t$$

Imponendo le condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0$$

si ottiene:

$$\dot{x}(0) = v_0$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

Si noti che, posto:  $D = G \sin \psi$  e  $E = G \cos \psi$ , si ha:

oppure ponendo:  $D = F \cos \varphi$  e  $E = F \sin \varphi$ , si ha:

$$x(t) = G \sin(\omega_n t + \psi)$$

$$x(t) = F \cos(\omega_n t - \varphi)$$

### Osservazione

La risposta di un sistema ad un gdl può essere rappresentata nel piano spostamento-velocità, noto anche come *spazio degli stati* o *piano delle fasi*.

Consideriamo la risposta nella forma:

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \varphi)$$

e la corrispondente velocità:

$$\dot{x}(t) = -\omega_n A \sin(\omega_n t - \varphi)$$

da queste possiamo ricavare:

$$\frac{x(t)}{A} = \cos(\omega_n t - \varphi)$$

e

$$-\frac{\dot{x}(t)}{\omega_n A} = \sin(\omega_n t - \varphi)$$

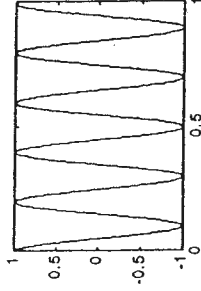
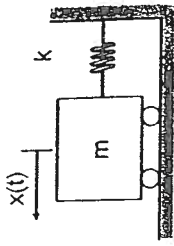
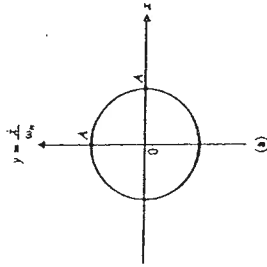
che quadrando e sommando

un membro a membro danno

luogo alla:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{\omega_n^2 A^2} = 1$$

ossia all'equazione di una ellisse i cui semiasse sono funzioni della costante  $A$  da determinarsi in funzione delle condizioni iniziali.



# VIBRAZIONI LIBERE DEL SISTEMA MASSA - MOLLA - SMORZATORE

Equazione del moto:  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

Si tratta di un sistema del secondo ordine, la cui equazione caratteristica è:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

Le radici dell'equazione caratteristica sono:  $\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$

La soluzione dell'equazione del moto è:  $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

Si definisce **smorzamento critico**  $c_{cr}$  il valore della costante di smorzamento per il quale si ha:

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad \text{da cui:} \quad c_{cr} = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$$

Per un sistema smorzato si definisce **fattore di smorzamento**  $\zeta$  il rapporto tra la costante di smorzamento  $c$  e lo smorzamento critico  $c_{cr}$ :

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_n} \quad \text{da cui:}$$

Utilizzando il fattore di smorzamento,

le due radici dell'equazione caratteristica diventano:

$$\lambda_{1,2} = \omega_n \left( -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

e la soluzione dell'equazione del moto diventa:

$$x(t) = C_1 e^{\omega_n \left( -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) t} + C_2 e^{\omega_n \left( -\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) t}$$

La natura delle due radici, e di conseguenza il comportamento del sistema, dipende dall'ammontare dello smorzamento. Occorre distinguere tre casi:

**Caso 1 (sistemi "poco smorzati"):**  $\zeta < 1, 0 < c < c_{cr}$

La quantità  $(\zeta^2 - 1)$  è negativa e le due radici sono complesse e coniugate e si possono esprimere come:

$$\lambda_{1,2} = \omega_n \left( -\zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2} \right)$$

Introducendo la nuova costante  $\omega_d$ , detta **pulsazione naturale del sistema smorzato**:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

si ha:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$$

e l'integrale dell'equazione del moto diventa:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ C_1 e^{i\omega_d t} + C_2 e^{-i\omega_d t} \right\}$$

Introducendo le relazioni di Eulero:  $e^{\pm i\omega_d t} = \cos \omega_d t \pm i \sin \omega_d t$

si ottiene:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ (C_1 + C_2) \cos \omega_d t + i(C_1 - C_2) \sin \omega_d t \right\}$$

da cui:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ D \cos \omega_d t + E \sin \omega_d t \right\}$$

L'ultima espressione può anche assumere la forma:

$$x(t) = X e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

oppure la:

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \varphi_0)$$

Le costanti (D, E), (X,  $\varphi$ ) oppure ( $X_0$ ,  $\varphi_0$ ) si trovano imponendo le condizioni iniziali:

$$D = x_0$$

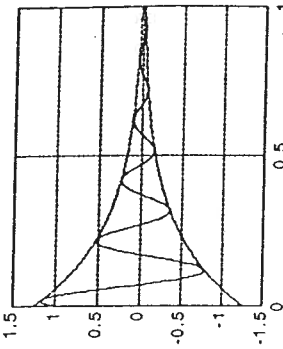
$$x(0) = x_0$$

si ottiene:

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad E = \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}$$

Il moto risulta oscillatorio, pseudoperiodico, smorzato:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ x_0 \cos \omega_d t + \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right\}$$



**Caso 2 (sistemi con smorzamento critico):**  $\zeta = 1, c = c_{cr}$

Le due radici dell'equazione caratteristica sono reali, coincidenti, negative e pari a:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$$

L'integrale dell'equazione del moto diventa:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t}$$

ovvero:

$$\dot{x}(t) = C_1 e^{-\omega_n t} + C_2 e^{-\omega_n t} - \omega_n (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t}$$

Si ha inoltre:

$$\dot{x}(t) = z_1 C_1 e^{z_1 t} + z_2 C_2 e^{z_2 t}$$

Le costanti  $C_1$  e  $C_2$  si trovano imponendo le condizioni

iniziali:

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

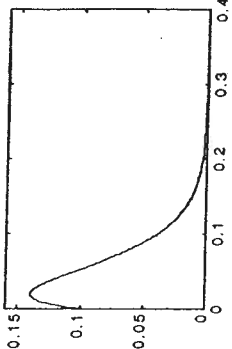
si ottiene:

$$C_1 = x_0$$

$$C_2 = v_0 + \omega_n x_0$$

Il moto risulta apertodico smorzato:

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + \omega_n x_0)t] e^{-\omega_n t}$$



**Caso 3 (sistemi "molto smorzati"):**  $\zeta > 1, c > c_{cr}$

Le due radici dell'equazione caratteristica sono reali, distinte ed entrambe negative:

$$z_1 = \omega_n \left( -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) < 0, \quad z_2 = \omega_n \left( -\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) < 0$$

L'integrale dell'equazione del moto è:

$$x(t) = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}$$

e la sua derivata:

$$\dot{x}(t) = z_1 C_1 e^{z_1 t} + z_2 C_2 e^{z_2 t}$$

Le costanti  $C_1$  e  $C_2$  si trovano imponendo le condizioni

iniziali:

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

da cui:

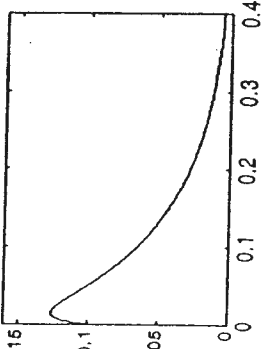
$$C_1 + C_2 = x_0$$

$$z_1 C_1 + z_2 C_2 = v_0$$

$$C_1 = \frac{x_0 \omega_n \left( \sqrt{\zeta^2 - 1} - \zeta \right) + v_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

ed infine:

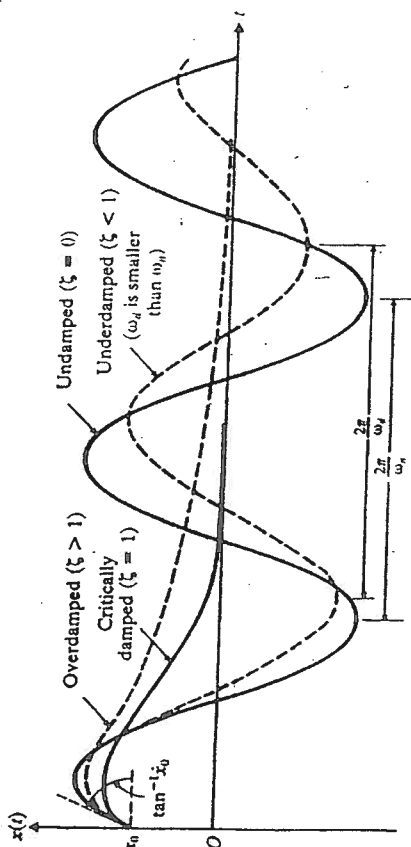
$$C_2 = \frac{-x_0 \omega_n \left( \sqrt{\zeta^2 - 1} - \zeta \right) - v_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$



Il moto risulta aperiodico smorzato:

$$x(t) = \frac{x_0 \omega_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) + v_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\omega_n \zeta t} + \frac{-x_0 \omega_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) - v_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\omega_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) t}$$

La seguente figura confronta il moto del sistema massa - molla - smorzatore nei tre differenti casi (caso 1: sistema "poco smorzato"; caso 2: sistema con smorzamento critico; caso 3: sistema "molto smorzato").

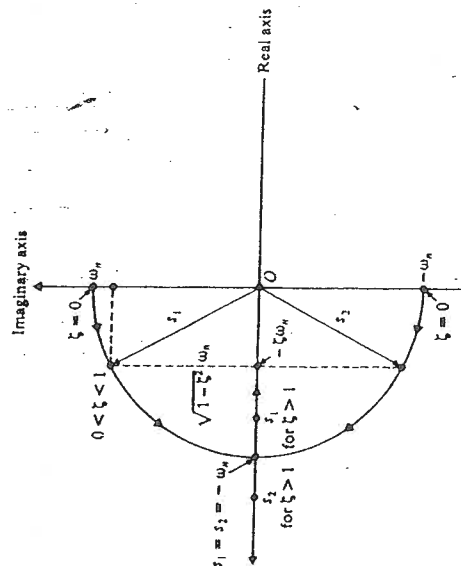


#### Osservazione

La natura delle due radici dell'equazione caratteristica,  $z_1$  e  $z_2$ , e i corrispondenti valori del fattore di smorzamento  $\zeta$ , possono essere rappresentati in un piano complesso.

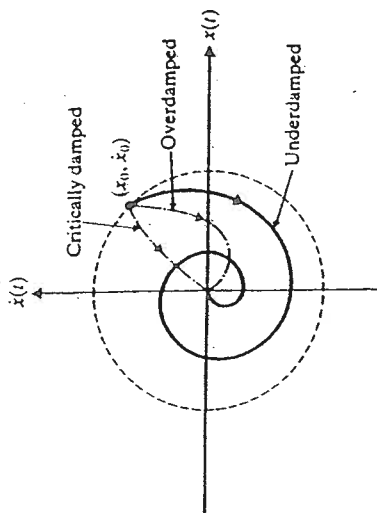
La semicirconferenza di raggio  $\omega_n$  rappresenta il luogo delle radici per valori di  $\zeta$  compresi tra 0 ed 1. Questo tipo di rappresentazione permette di vedere l'effetto del fattore di smorzamento  $\zeta$  sul comportamento del sistema. Infatti per  $\zeta = 0$ , si hanno le due radici immaginarie  $z_1 = i\omega_n$  e  $z_2 = -i\omega_n$ ; per  $0 < \zeta < 1$ , le radici sono complesse e coniugate e collocate simmetricamente rispetto all'asse reale; quando  $\zeta = 1$ , le due radici sono coincidenti e pari a  $-\omega_n$ ; infine per  $\zeta > 1$ , entrambe giacciono sull'asse reale (per  $\zeta \rightarrow \infty$ , una tende a 0 mentre l'altra tende a  $-\infty$ ).

Luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema massa - molla - smorzatore.



#### Osservazione

La risposta libera del sistema massa - molla smorzato può essere rappresentata nel piano delle fasi, come indicato in figura.



#### DETERMINAZIONE DEL FATTORE DI SMORZAMENTO: METODO DEL DECREMENTO LOGARITMICO

A differenza dei componenti massa e rigidità, lo smorzamento non può essere determinato mediante prove statiche. Il valore del fattore di smorzamento può essere ricavato sperimentalmente misurando l'ampiezza decrescente di oscillazioni successive.

Si consideri infatti l'oscillazione libera di un sistema con smorzamento inferiore a quello critico ( $\zeta < 1$ ). Presi due istanti di tempo corrispondenti a due massimi consecutivi, il rapporto tra le ampiezze dell'oscillazione risulta:

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{X_0 e^{-\zeta \omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \phi_0)}{X_0 e^{-\zeta \omega_n t_2} \cos(\omega_d t_2 - \phi_0)}$$

Ma  $t_2 = t_1 + T$ , dove  $T$  è il periodo dell'oscillazione ( $T = 2\pi/\omega_d$ ) di conseguenza si ha:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\zeta \omega_n t_1}}{e^{-\zeta \omega_n (t_1 + T)}} = e^{\zeta \omega_n T}$$

$$\text{Si definisce decremento logaritmico il logaritmo naturale del rapporto } x_1/x_2: \quad \delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \zeta \omega_n T$$

Dalla definizione di pulsazione naturale del sistema smorzato si ha poi:

$$\delta = \frac{2\pi \zeta \omega_n}{\omega_d} = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Per valori del fattore di smorzamento sufficientemente piccoli ( $\zeta < 0.4$ ), si può porre con buona approssimazione:

$$\delta \approx 2\pi \zeta$$

Se si considerano, anziché due oscillazioni successive,  $n$  oscillazioni successive, si ottiene:

$$\frac{x_1}{x_{n+1}} = \frac{x_1}{x_2} \frac{x_2}{x_3} \frac{x_3}{x_4} \dots \frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{n \delta \omega_n T} \quad \text{il cui logaritmo naturale vale:} \quad \ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right) = n \zeta \omega_n T = n \delta$$

In definitiva risulta: 
$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{x_1}{x_{n+1}} \right)$$

In conclusione, se si riesce a misurare in via sperimentale il rapporto,  $x_1/x_{n+1}$  è poi possibile risalire al valore del fattore di smorzamento  $\zeta$ .

#### VIBRAZIONI LIBERE CON ATTRITO COULOMBIANO (SMORZAMENTO COULOMBIANO)

Una comune causa di smorzamento nei sistemi meccanici è l'attrito secco, denominato anche attrito coulombiano. L'attrito Coulombiano è caratterizzato dalla relazione:

$$F = \begin{cases} \mu N & \dot{x} > 0 \\ 0 & \dot{x} = 0 \\ -\mu N & \dot{x} < 0 \end{cases}$$

dove  $F$  è la forza d'attrito,  $N$  la forza normale e  $\mu$  il coefficiente di attrito cinetico. La forza di attrito  $F$  si oppone sempre alla velocità relativa tra i corpi a contatto. Facendo riferimento alla fig. 4.1, l'equazione del moto si modifica a seconda del verso della velocità della massa  $m$ :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= -\mu mg & \dot{x} > 0 \\ m\ddot{x} + kx &= \mu mg & \dot{x} < 0 \end{aligned}$$

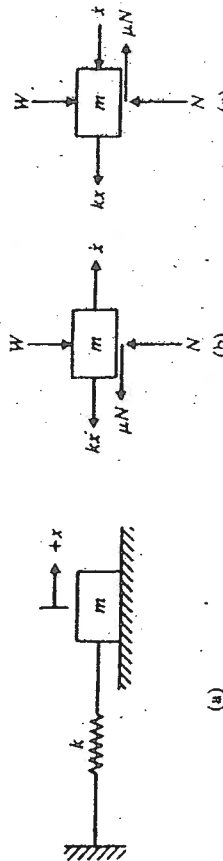


Fig. 4.1 - Sistema massa - molla con attrito coulombiano.

L'equazione del moto si può scrivere nella forma:

$$m\ddot{x} + \mu mg \operatorname{sgn}(\dot{x}) + kx = 0$$

dove  $\operatorname{sgn}(\tau)$ , detta funzione segno, è definita come segue:

$$\operatorname{sgn}(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau > 0 \\ 0 & \tau = 0 \\ -1 & \tau < 0 \end{cases}$$

L'equazione del moto è pertanto una equazione differenziale non lineare e, in quanto tale, non può essere risolta con i metodi tradizionali. Si può procedere suddividendo il dominio dei tempi in intervalli corrispondenti ai cambiamenti di verso della velocità (vedi pagine 8-10).  
 In alternativa, si può procedere con metodi numerici di integrazione.

**Case 1.** When  $x$  is positive and  $dx/dt$  is positive, or when  $x$  is negative and  $dx/dt$  is positive (i.e., for the half cycle during which the mass moves from left to right) the equation of motion can be obtained using Newton's second law (see Fig. 2.33b)

$$m\ddot{x} = -kx - \mu N \quad \text{or} \quad m\ddot{x} + kx = -\mu N \quad (2.107)$$

This is a second order nonhomogeneous differential equation. The solution can be verified by substituting Eq. (2.108) into Eq. (2.107)

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t - \frac{\mu N}{k} \quad (2.108)$$

where  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  is the frequency of vibration, and  $A_1$  and  $A_2$  are constants whose values depend on the initial conditions of this half cycle.

**Case 2.** When  $x$  is positive and  $dx/dt$  is negative, or when  $x$  is negative and  $dx/dt$  is negative (i.e., for the half cycle during which the mass moves from right to left), the equation of motion can be derived from Fig. 2.33(c) as

$$-kx + \mu N = m\ddot{x} \quad \text{or} \quad m\ddot{x} + kx = \mu N \quad (2.109)$$

The solution of Eq. (2.109) is given by

$$x(t) = A_3 \cos \omega_n t + A_4 \sin \omega_n t + \frac{\mu N}{k} \quad (2.110)$$

where  $A_3$  and  $A_4$  are constants to be found from the initial conditions of this half cycle. The term  $\mu N/k$  appearing in Eqs. (2.108) and (2.110) is a constant representing the virtual displacement of the spring under the force  $\mu N$ , if it were applied as a static force. Equations (2.108) and (2.110) indicate that in each half cycle the motion is harmonic, with the equilibrium position changing from  $\mu N/k$  to  $-(\mu N/k)$  every half cycle, as shown in Fig. 2.34.

To see the motion characteristics of the system more clearly, let us assume the initial conditions to be

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.111)$$

That is, the system starts with zero velocity and displacement  $x_0$  at  $t = 0$ . Since  $x = x_0$  at  $t = 0$ , the motion starts from right to left. Let  $x_0, x_1, x_2, \dots$  denote the amplitudes of motion at successive half cycles. Using Eqs. (2.110) and (2.111), we can evaluate the constants  $A_3$  and  $A_4$ :

$$A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{k}, \quad A_4 = 0$$

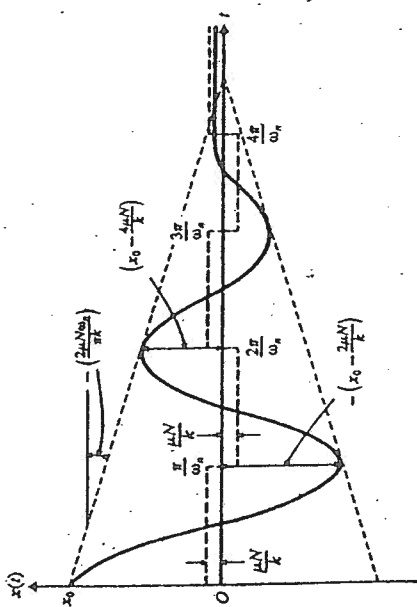


Fig. 4.2 - Risposta libera del sistema massa-molla con attrito coulombiano.

Thus Eq. (2.110) becomes

$$x(t) = \left( x_0 - \frac{\mu N}{k} \right) \cos \omega_n t + \frac{\mu N}{k} \quad (2.112)$$

This solution is valid for half the cycle only, i.e., for  $0 \leq t \leq \pi/\omega_n$ . When  $t = \pi/\omega_n$ , the mass will be at its extreme left position and its displacement from equilibrium position can be found from Eq. (2.112):

$$-x_1 = x\left(t = \frac{\pi}{\omega_n}\right) = \left( x_0 - \frac{\mu N}{k} \right) \cos \pi + \frac{\mu N}{k} = -\left( x_0 - \frac{2\mu N}{k} \right) \quad (2.113)$$

Since the motion started with a displacement of  $x = x_0$  and in a half cycle the value of  $x$  became  $-(x_0 - (2\mu N/k))$ , the reduction in magnitude of  $x$  in time  $\pi/\omega_n$  is  $2\mu N/k$ .

In the second half cycle, the mass moves from left to right, so Eq. (2.108) is to be used. The initial conditions for this half cycle are

$$x(t = 0) = \text{value of } x \text{ at } t = \frac{\pi}{\omega_n} \text{ in Eq. (2.112)} = -\left( x_0 - \frac{2\mu N}{k} \right)$$

and

$$\begin{aligned} \dot{x}(t = 0) &= \text{value of } \dot{x} \text{ at } t = \frac{\pi}{\omega_n} \text{ in Eq. (2.112)} \\ &= \left\{ \text{value of } -\omega_n \left( x_0 - \frac{\mu N}{k} \right) \sin \omega_n t \text{ at } t = \frac{\pi}{\omega_n} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Thus the constants in Eq. (2.108) become

$$-A_1 = -x_0 + \frac{3\mu N}{k}, \quad A_2 = 0$$

so that Eq. (2.108) can be written as

$$x(t) = \left( x_0 - \frac{3\mu N}{k} \right) \cos \omega_n t - \frac{\mu N}{k} \quad (2.114)$$

This equation is valid only for the second half cycle—that is, for  $\pi/\omega_n \leq t \leq 2\pi/\omega_n$ . At the end of this half cycle the value of  $x(t)$  is

$$x_2 = x\left(t = \frac{2\pi}{\omega_n}\right) \text{ in Eq. (2.114)} = x_0 - \frac{4\mu N}{k}$$

and

$$\dot{x}\left(t = \frac{2\pi}{\omega_n}\right) \text{ in Eq. (2.114)} = 0$$

These become the initial conditions for the third half cycle, and the procedure can be continued until the motion stops. The motion stops when  $x_n \leq \mu N/k$ , since the restoring force exerted by the spring ( $kx$ ) will then be less than the friction force  $\mu N$ . Thus the number of half cycles ( $r$ ) that elapse before the motion ceases is given by

$$x_0 - r \frac{2\mu N}{k} \leq \frac{\mu N}{k}$$

or that is,

$$r \geq \left\{ \frac{x_0 - \frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}} \right\} \quad (2.115)$$

Infine, si notino le seguenti caratteristiche di un sistema con attrito coulombiano:

- \* L'equazione del moto è non lineare (è lineare se il sistema ha smorzamento viscoso).
- \* Il sistema conserva la frequenza naturale del sistema non smorzato (la frequenza naturale del sistema con smorzamento viscoso è inferiore a quella del sistema non smorzato).
- \* Il moto è periodico (in un sistema con smorzamento viscoso può essere aperiodico).
- \* Il sistema giunge all'arresto in maniera lineare (se lo smorzamento è viscoso il sistema si avvicina asintoticamente alla quiete, senza raggiungerla mai).



# VIBRAZIONI LIBERE CON SMORZAMENTO STRUTTURALE (ISTERETICO)

Si prendano in esame la molla e lo smorzatore viscoso disposti in parallelo come in figura 4.3(a). Se si considera un moto armonico  $x(t) = X \sin \omega t$ , la forza esercitata vale:

$$F(t) = kx + c\dot{x} = xX \sin \omega t + cX\omega \cos \omega t = kx \pm c\omega \sqrt{X^2 - x^2} = kx \pm c\omega \sqrt{X^2 - x^2}$$

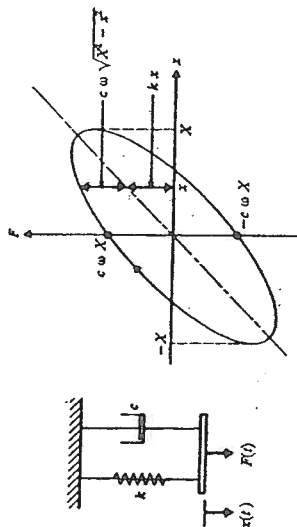


Fig. 4.3 - Molla - smorzatore viscoso.

L'andamento della forza  $F(t)$  in funzione della deformazione  $x$  è una curva chiusa come illustrato in figura 4.3(b). L'area interna a tale curva corrisponde all'energia dissipata dallo smorzatore in un ciclo del moto armonico ed è data da:

$$\Delta W = \oint F dx = \int_0^{2\pi/\omega} F \dot{x} dt = \pi c \omega X^2$$

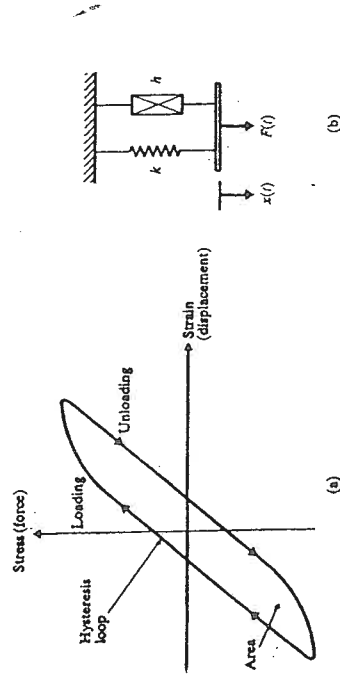


Fig. 4.4 - Molla - smorzatore isteretico.

Come accennato in precedenza, quando un corpo è sottoposto alternativamente a trazione e compressione, lo smorzamento causato dall'attrito nello scorrimento tra le fibre interne del materiale all'atto della deformazione è chiamato smorzamento isteretico o strutturale. Il fenomeno da luogo ad un loop nella curva tensione - deformazione (o forza e spostamento), come rappresentato in figura 4.4(b). L'energia dissipata ad ogni ciclo di carico e scarico del materiale è uguale all'area racchiusa dal loop di isteresi.

L'analogia tra le figure 4.3(b) e 4.4(b) può essere impiegata per definire una costante di smorzamento strutturale. Infatti si è trovato sperimentalmente che l'energia perduta per ciclo a causa dello smorzamento

strutturale è indipendente dalla frequenza del carico, ma approssimativamente proporzionale al quadrato della sua ampiezza. Pertanto si può porre:

$$\Delta W = c \omega X^2 = \pi \omega c_{eq} X^2 \quad \text{da cui:} \quad c_{eq} = \frac{c}{\omega \pi} = \frac{h}{\omega \pi}$$

Introducendo ora la rappresentazione del moto armonico mediante numeri complessi,  $x(t) = X e^{i\omega t}$ , la forza nel sistema di figura 4.3(a) vale:

$$F(t) = kx + c\dot{x} = X e^{i\omega t} + ic\omega X e^{i\omega t} = (k + ic\omega)X$$

Analogamente, la forza nel sistema molla - smorzatore isteretico di figura 4.4(a), può essere espressa come:

$$F(t) = (k + i\eta)x = k(1 + i\frac{\eta}{k})x = k(1 + i\eta)x = \tilde{k}x$$

dove  $\tilde{k}$  è nota come **rigidezza complessa** del sistema e  $\eta$  è una costante adimensionale detta **fattore di smorzamento strutturale**.

## METODI ENERGETICI (INTRODUZIONE AL METODO DI RAYLEIGH)

Si osservi che in sistemi non smorzati, come il sistema massa - molla, l'equazione del moto può essere scritta sfruttando il principio di conservazione dell'energia. Infatti, in assenza di forze non conservative, l'energia totale del sistema si mantiene costante, ovvero:

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

$$\text{Nel caso specifico si ha:} \quad T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2$$

da cui si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = \dot{x} (m \ddot{x} + k x) = 0 \quad \text{ed infine:} \quad m \ddot{x} + k x = 0$$

Il principio di conservazione dell'energia può essere impiegato anche per determinare direttamente la pulsazione naturale del sistema. Indicate con 1 e 2 le configurazioni del sistema corrispondenti a due istanti generici, si ha:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Se si considera come istante 1 quello in cui il sistema passa per la posizione di equilibrio statico (scelta come riferimento per l'energia potenziale) e, di conseguenza, l'energia cinetica è massima, si avrà:

$$U_1 = 0 \quad T_1 = T_{MAX}$$

Se come istante 2 si prende quello in cui è massimo lo spostamento del sistema dalla sua posizione di equilibrio statico (e quindi è nulla la velocità), l'energia potenziale è massima e si annulla l'energia cinetica:

$$T_2 = 0 \quad U_2 = U_{MAX}$$

Per il principio di conservazione dell'energia segue che:

$$T_{MAX} = U_{MAX}$$

L'applicazione di questa equazione, permette di determinare direttamente la frequenza naturale del sistema. Ci si proponga infatti di trovare la pulsazione naturale del sistema conservativo massa - molla. Se si assume il moto armonico nella forma:

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \varphi),$$

$$\text{allora risulta: } T_{MAX} = \frac{1}{2} m \dot{x}_{MAX}^2 = \frac{1}{2} m \omega_n^2 A^2$$

$$\text{che eguagliate forniscono: } m \omega_n^2 = k \quad \text{da cui: } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Il metodo energetico per il calcolo della frequenza naturale è di fondamentale importanza. Infatti, per sistemi più complessi, la determinazione delle frequenze naturali spesso è così complicata da divenire praticamente impossibile. In tali casi si vedrà come una generalizzazione del metodo energetico, nota come *metodo di Rayleigh* conduce, anche se con una certa approssimazione, al risultato. Vengono ora presentati alcuni esempi di applicazione del metodo.

#### Effetto di una molla con massa non trascurabile

Si consideri il sistema massa-molla di figura 4.5 in cui la molla ha massa non trascurabile. Indicata con  $l$  la lunghezza della molla, se  $x$  è lo spostamento del suo estremo inferiore, lo spostamento alla generica distanza  $y$  dall'estremo fisso è pari a  $y(x/l)$ . Indicata con  $M$  la massa della molla e con  $dm$  la massa di un tratto di molla di lunghezza infinitesima  $dy$  ( $dm = dy M/l$ ), l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema si esprimono come segue:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \int dm \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{M}{l} \int_0^l \left( \frac{y}{l} \right)^2 \dot{x}^2 dy = \frac{1}{2} \left( m + \frac{M}{3} \right) \dot{x}^2; \quad V = \frac{1}{2} k x^2$$

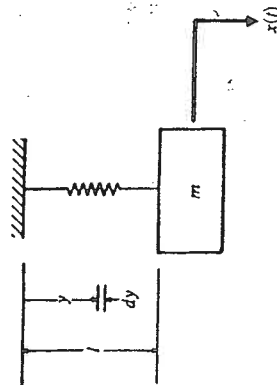


Fig. 4.5 - Sistema massa - molla.

Se si assume il moto armonico della massa  $m$  nella forma  $x(t) = A \cos(\omega_n t - \varphi)$ , si ha:

$$T_{MAX} = \frac{1}{2} \left( m + \frac{M}{3} \right) A^2 \omega_n^2 = V_{MAX} = \frac{1}{2} k A^2$$

da cui si ricava la pulsazione naturale del sistema:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{M}{3}}}$$

In conclusione l'effetto della massa della molla può essere messo in conto aggiungendo un terzo della sua massa alla massa principale del sistema.

#### Manometro

I sistemi fluidi, come quelli solidi, sono soggetti a moti vibratori.

Con riferimento al manometro a tubo illustrato in figura 4.6, impiegando il metodo energetico, si può calcolare la frequenza naturale di oscillazione del fluido nel tubo. Detta  $S$  la sezione del tubo,  $\rho$  la densità del fluido e  $g$  l'accelerazione di gravità, se  $x$  è lo spostamento del liquido dalla posizione di equilibrio, l'energia potenziale e cinetica del fluido sono date da:

$$V = \rho g S x \frac{x}{2} + \rho g S x \frac{x}{2} = \rho g S x^2; \quad T = \frac{1}{2} \rho S l \dot{x}^2$$

Assunto un moto armonico del liquido nella forma  $x(t) = A \cos \omega_n t$ , si ha:

$$T_{MAX} = \frac{1}{2} \rho S l A^2 \omega_n^2 = V_{MAX} = \rho g S A^2$$

da cui si ricava la pulsazione naturale del fluido:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

Si osserva che la pulsazione naturale è indipendente dalla natura del fluido, ma dipende solo dalla lunghezza del tubo. Ad esempio per un tubo avente lunghezza pari a  $l = 0.5$  m, la pulsazione naturale è circa uguale a 1 Hz.

#### Pulsazione naturale di una trave appoggiata (metodo di Rayleigh)

Si consideri la trave appoggiata di figura 4.7, avente massa  $m$ , con una massa concentrata  $M$  in mezzzeria.

Si tratta ora di assumere una "ragionevole deformata" per la trave vibrante.

A questo scopo si consideri la deformata statica corrispondente ad un carico in mezzzeria (vedi Appendice A3):

$$y(x) = \left[ \frac{3x}{l} - 4 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right] y_{MAX} \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

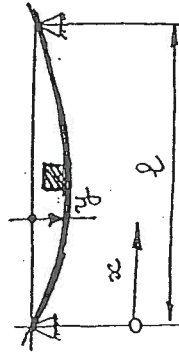


Fig. 4.7 - Trave appoggiata con massa in mezzzeria.

Assunta quest'ultima come "ragionevole deformata" per la trave vibrante  $[v(x,t) = y(x) \cos \omega_n t]$ , l'energia cinetica massima si può scrivere come:

$$T_{MAX} = \frac{1}{2} M \omega_n^2 y_{MAX}^2 + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} \omega_n^2 y_{MAX}^2 \left[ \frac{3x}{l} - 4 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{l}{2}}^l \omega_n^2 y_{MAX}^2 \left[ \frac{3x}{l} - 4 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right]^2 dx$$

che diviene:

$$T_{MAX} = \frac{1}{2} \omega_n^2 y_{MAX}^2 \left( M + \frac{17}{35} m \right)$$

Mentre per l'energia potenziale si ha:

$$V_{MAX} = \frac{1}{2} k y_{MAX}^2 \quad \text{dove } k \text{ è la rigidezza flessionale della trave pari a: } k = \frac{48EI}{l^3}$$

$$\text{In conclusione risulta: } \omega_n = \sqrt{\frac{48EI}{l^3 \left( M + \frac{17}{35} m \right)}}$$

Il metodo di Rayleigh è una generalizzazione del metodo dell'energia: viene assunta una "ragionevole deformata" per il sistema vibrante e in base a questa vengono determinati ed eguagliati i valori massimi di energia cinetica e potenziale. Ovviamente, il risultato sarà tanto più accurato quanto più la deformata assunta si avvicina a quella reale.

# VIBRAZIONI FORZATE

## Scrittura delle equazioni del moto

Si consideri il semplice sistema di fig. 4.8 costituito da un disco omogeneo di raggio  $R$ , massa  $m$  e momento di inerzia baricentrico  $J_G$ . Si analizi per semplicità il solo moto piano e si supponga che il disco rotoli senza strisciare su una guida rettilinea richiamato da una molla di costante elastica  $k$  e da uno smorzatore viscoso di caratteristica  $c$ . Nel baricentro del disco è applicata una forza esterna  $f(t)$ . Il moto del sistema è descritto da due variabili fisiche, ad esempio, la traslazione  $x$  del baricentro del disco e la rotazione  $\theta$  subita dallo stesso, ma poiché il disco rotola senza strisciare, il sistema è dotato di un solo gdl, essendo la coordinate  $x$  e  $\theta$  correlate dalla relazione:

$$x(t) = R \theta(t)$$

Assunta ora, come variabile indipendente per descrivere il moto del sistema vibrante, la traslazione  $x$  del baricentro, si procede alla scrittura dell'equazione del moto impiegando diversi metodi.

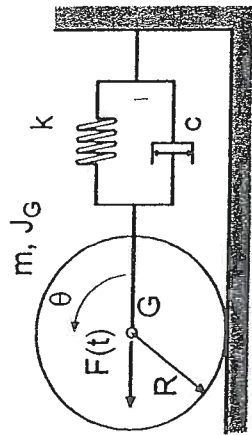


Fig. 4.8 - Sistema ad 1 gdl.

## Principio di d'Alembert

La risultante delle forze applicate ad un sistema meccanico, comprese quelle di inerzia, è nulla; pertanto, scrivendo le equazioni di equilibrio dinamico nelle direzioni orizzontale e verticale e il momento alla rotazione rispetto al baricentro  $G$  del disco, si ottengono le seguenti tre equazioni:

$$-m \ddot{x} - c\dot{x} - kx + f(t) + T = 0$$

$$-J_G \ddot{\theta} - TR = 0$$

$$mg - N = 0$$

dove  $g$  è l'accelerazione di gravità, mentre  $N$  e  $T$  sono rispettivamente la componente normale e tangenziale della

reazione esercitata dal vincolo sul disco.

Tenendo conto del legame tra  $x$  e  $\theta$ , si ha:

$$-m \ddot{x} - c\dot{x} - kx + f(t) + T = 0$$

$$-J_G \ddot{\theta} - TR = 0$$

$$mg - N = 0$$

ossia tre equazioni, di cui due differenziale a coefficienti costanti, nelle tre incognite  $x$ ,  $T$  e  $N$ ; la terza equazione è disaccoppiata dalle prime due.

L'applicazione del principio di d'Alembert presenta perciò uno svantaggio e un vantaggio: si ha un numero di equazioni superiore al numero di gdl, ma insieme alla legge di moto si riescono a determinare anche le reazioni vincolari  $T$  e  $N$ .

Dalle prime due equazioni si riesce ad eliminare l'incognita  $T$  giungendo alla:

$$\left( m + \frac{J_G}{R^2} \right) \ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

Essendo il sistema particolarmente semplice, era possibile giungere direttamente all'equazione del moto scrivendo l'equilibrio dinamico alla rotazione rispetto al centro di istantanea rotazione tra disco e guida.

## Principio dei lavori virtuali

Condizione necessaria a sufficiente per l'equilibrio di un sistema, è che sia nullo il lavoro delle forze attive esterne e interne su di esso agenti, comprese quelle di inerzia, a seguito di spostamenti virtuali (infinitesimi e compatibili con i vincoli), invertibili, dei loro punti di applicazione.

Considerato uno spostamento infinitesimo e compatibile con i vincoli  $\delta x$ , si ha:

$$\text{lavoro virtuale compiuto dalle forze inerziali: } \delta W_I = -m \ddot{x} \delta x - J_G \ddot{\theta} \delta \theta$$

lavoro virtuale compiuto dalle forze elastiche e viscosse:

$$\delta W_{ke} = -k x \delta x - c \dot{x} \delta \dot{x}$$

lavoro virtuale compiuto dalle forze esterne:

$$\delta W_e = f(t) \delta x$$

Applicando il PLV, si ha:  $\delta W_I + \delta W_{ke} + \delta W_e = -m \ddot{x} \delta x - J_G \ddot{\theta} \delta \theta - k x \delta x - c \dot{x} \delta \dot{x} + f(t) \delta x = 0$

Che, tenuto conto del legame tra  $x$  e  $\theta$  e della seguente:

$$\delta \theta = \frac{\delta x}{R}$$

diventa: 
$$\left( -m \ddot{x} - J_G \frac{\ddot{x}}{R^2} - k x - c \dot{x} + f(t) \right) \delta x = 0$$

In altre parole l'equazione del moto è:

$$\left( m + \frac{J_G}{R^2} \right) \ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

## Equazioni di Lagrange

Per un sistema ad un gdl l'equazione di Lagrange può essere scritta come segue (vedi anche App. A2):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = Q$$

in cui  $q$  è la generica coordinata indipendente scelta per descrivere il moto del sistema. Risulta conveniente scrivere le varie forme di energia esprimendole dapprima in funzione di coordinate fisiche: tali coordinate possono essere per esempio spostamenti dei baricentri (o rotazioni) dei diversi corpi che compongono il sistema, allungamenti relativi delle estremità di elementi elastici, spostamenti dei punti di applicazione delle forze, ecc...

In seguito si introducono i legami tra le variabili fisiche e la coordinata generalizzata prescelta. Se si considera, come unica variabile indipendente, lo spostamento  $x$  del baricentro del disco:  $q = x$ , e come variabili fisiche la rotazione  $\theta$  e l'allungamento  $\Delta l$  della molla, le espressioni delle varie forme di energia risultano le seguenti:

energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2$$

energia potenziale:

$$V = \frac{1}{2} k \Delta l^2$$

lavoro virtuale compiuto dalla forza dissipativa viscosa:

$$\delta W_d = -c \dot{\Delta l} \delta \dot{\Delta l}$$

lavoro virtuale compiuto dalla forza esterna:

$$\delta W_e = f(t) \delta x$$

Introducendo i legami tra le variabili fisiche e la coordinata generalizzata  $q = x$ , i vari termini dell'equazione di Lagrange risultano:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_G \frac{\dot{x}^2}{R^2} \right] \right) = \frac{d}{dt} \left[ m \dot{x} + \frac{J_G}{R^2} \dot{x} \right] = m \ddot{x} + \frac{J_G}{R^2} \ddot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_G \frac{\dot{x}^2}{R^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} k x^2 \right) = k x$$

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici



$$Q = \frac{\delta W}{\delta x} = -c\dot{x} + f(t)$$

In definitiva:

$$\left( m + \frac{J_G}{R^2} \right) \ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

#### ECCITAZIONE ARMONICA

Si consideri il sistema ad un gdl di figura 4.9, dove la massa  $m$  è soggetta ad una forza armonica  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ . L'equazione del moto è:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

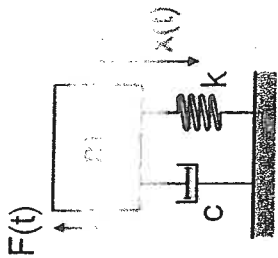


Fig. 4.9 - Sistema ad un gdl smorzato.

In particolare, l'integrale della omogenea (che caratterizza la fase di transitorio), per valori di smorzamento inferiori a quello critico, si può esprimere nella forma:

$$x_{go}(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \{ A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t \}$$

dove  $A_1$  e  $A_2$  sono costanti che dipendono dalle condizioni iniziali e  $\omega_d$  è la pulsazione naturale del sistema smorzato ( $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ). Si tratta di un moto periodico smorzato che, dopo un certo tempo, si annulla.

Trascorso il transitorio, resta l'integrale particolare le cui costanti  $X_0$  e  $\psi$  dipendono dalle caratteristiche del sistema e dell'eccitazione. Si trova facilmente, ad esempio impiegando la rappresentazione di figura 4.10, che:

$$X_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} = \frac{F_0/m\omega_n^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\tan \psi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2\zeta \omega/\omega_n}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

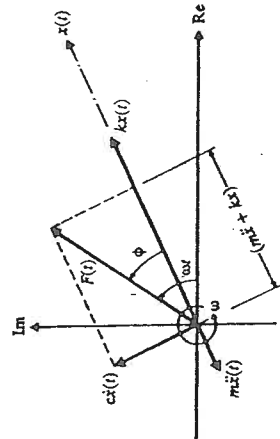


Fig. 4.10 - Rappresentazione dell'equazione del moto nel piano complesso.

Gli andamenti, corrispondenti a diversi valori del fattore di smorzamento  $\zeta$ , di ampiezza  $X_0$  e fase  $\psi$  della risposta forzata a regime, sono riportati in figura 4.11, in funzione del rapporto  $(\omega/\omega_n)^2$ . In figura 4.11(a), l'ampiezza è stata divisa per la freccia statica, ossia per la deformazione della molla sotto l'azione della forza statica  $F_0$ .

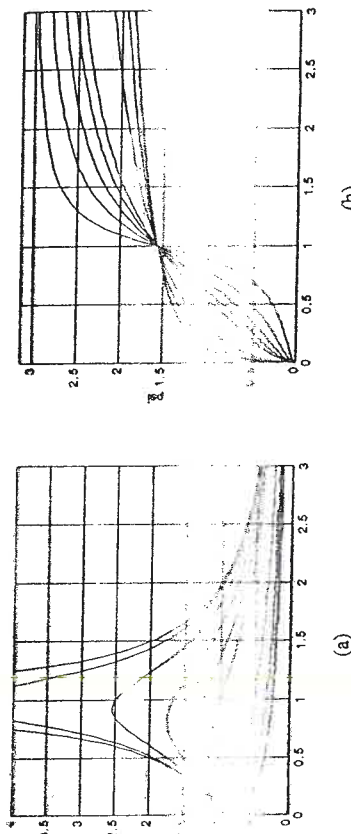


Fig. 4.11 - Ampiezza (a) e fase (b) della risposta forzata a regime, in funzione del rapporto  $(\omega/\omega_n)^2$ .

Si parla di **risonanza di ampiezza** quando l'ampiezza dell'oscillazione a regime  $X_0$  raggiunge il valore massimo. Tale condizione si ha per  $\omega/\omega_n = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  e il valore dell'ampiezza vale:

$$X_{RA} = \frac{F_0/k}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Si parla, invece, di **risonanza di fase** quando  $\omega/\omega_n = 1$ , ovvero quando la fase  $\psi$  è pari a  $\pi/2$ . In tale condizione il valore dell'ampiezza a regime vale:

$$X_{RF} = \frac{F_0/k}{2\zeta}$$

In figura 4.12 è riportato l'andamento del rapporto tra  $X_{RF}$  e  $X_{RA}$  in funzione del fattore di smorzamento  $\zeta$ . Si nota come le due risonanze tendono a coincidere al diminuire di  $\zeta$ .

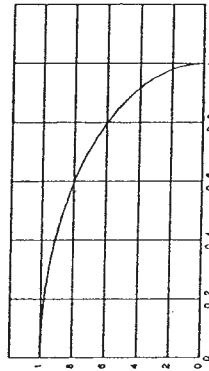


Fig. 4.12 - Rapporto tra  $X_{RF}$  e  $X_{RA}$  in funzione del fattore di smorzamento  $\zeta$ .

#### FUNZIONE RISPOSTA IN FREQUENZA (FRF)

Si consideri l'eccitazione armonica rappresentata in forma complessa  $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ .

L'equazione del moto per un sistema ad un grado di libertà con smorzamento viscoso risulta nella forma:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = F_0 e^{i\omega t}$$

Poiché l'effettiva eccitazione è costituita dalla sola parte reale di  $F(t)$ , la risposta del sistema sarà anch'essa costituita dalla sola parte reale di  $z(t)$ ,  $x(t) = \text{Re}[z(t)]$ , dove  $z(t)$  è una quantità complessa che soddisfa l'equazione differenziale del moto.

Ipotizzata una soluzione particolare del tipo:  
 $z = Z_0 e^{i(\omega t - \psi)} = Z_0 e^{-i\psi} e^{i\omega t} = Z e^{i\omega t}$ ,  
 se si sostituisce nella equazione differenziale, si ha:  
 $-m\omega^2 Z + i c \omega Z + k Z = F_0$   
 e si ottiene:  $Z = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + i c \omega}$ .

Quest'ultima può essere scritta come:  
 $\frac{Z}{F_0} = \frac{1}{k - m\omega^2 + i c \omega} = \frac{1/k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + i 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}} = H(i\omega)$   
 che è nota come *funzione risposta in frequenza* del sistema.

Si tratta naturalmente di una quantità complessa:  $H(i\omega) = |H(i\omega)| e^{-i\psi}$ , in cui:

$$|H(i\omega)| = \frac{1/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad \text{e} \quad \text{tg } \psi = \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Infine, ricordando che  $Z = Z_0 e^{-i\psi}$ , risulta:

$$Z_0 = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}; \quad \text{tg } \psi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

La risposta del sistema è, come detto, costituita dalla sola parte reale di  $z(t)$ , ovvero:

$$x(t) = \text{Re}[z(t)] = \text{Re}[Z_0 e^{i(\omega t - \psi)}] = Z_0 \cos(\omega t - \psi).$$

In definitiva, come ovvio, si ritrova il risultato del paragrafo precedente.

#### DETERMINAZIONE DELLO SMORZAMENTO: METODO DELLA BANDA DI MEZZA POTENZA

Si considerino i valori del rapporto  $r = \omega/\omega_n$  per i quali l'ampiezza della risposta a regime vale  $1/\sqrt{2}$  l'ampiezza in condizioni di risonanza di fase. In altre parole:

$$\frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\zeta \sqrt{2}} \quad \text{cioè:} \quad (1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2 = 8\zeta^2 \quad \text{cioè:} \quad r^4 + 2(2\zeta^2 - 1)r^2 + 1 - 8\zeta^2 = 0$$

$$r_{1,2}^2 = 1 - 2\zeta^2 \pm \sqrt{1 + 4\zeta^4 - 4\zeta^2} = 1 - 2\zeta^2 \pm 2\zeta \sqrt{1 + \zeta^2}$$

Per valori piccoli dello smorzamento si ha  $\zeta^2 \ll 1$  per cui si può approssimare:  $r_{1,2}^2 = 1 \pm 2\zeta^2$

$$\zeta = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4}$$

da cui si ricava il valore del fattore di smorzamento:  
 In definitiva, se si approssima  $\omega_n = (\omega_2 + \omega_1)/2$ , si ha:

$$\zeta = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{4\omega_n^2} = \frac{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1)}{(\omega_2 + \omega_1)^2} = \frac{1}{2} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n}$$

L'intervallo di pulsazioni comprese tra  $\omega_1$  e  $\omega_2$  viene chiamato *banda di mezza potenza*. Tale denominazione deriva dal fatto che la potenza media dissipata ad ogni ciclo per effetto dell'attrito viscoso, in corrispondenza di  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , è approssimativamente la metà di quella dissipata in condizioni di risonanza di fase.

Infatti, in generale, l'espressione della potenza media dissipata in un ciclo dallo smorzatore viscoso, per un moto armonico  $x(t) = X \cos(\omega t - \psi)$  è:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T c \dot{x} \dot{x} dt = \frac{1}{2} c X^2 \omega^2$$

$$\text{Si ha quindi:} \quad \frac{P_{m,2}}{P_{m,RF}} = \frac{c X_{1,2}^2 \omega_{1,2}^2}{c X_{RF}^2 \omega_n^2} = \frac{r_{1,2}^2}{2} = \frac{1 \pm 2\zeta^2}{2}$$

Quanto detto fornisce la base per un metodo di rilevazione sperimentale dello smorzamento. Infatti, trovato sperimentalmente l'andamento dell'ampiezza della risposta a regime in funzione del rapporto  $r$ , si possono determinare  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_n$ , e quindi si può calcolare  $\zeta$ .

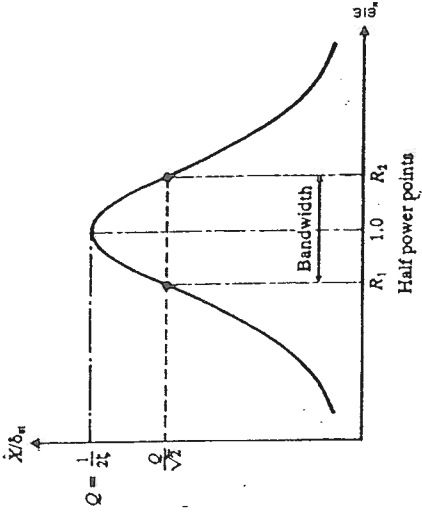


Fig. 4.13 - Banda di mezza potenza.

#### ECCITTAZIONE PROPORZIONALE AL QUADRATO DELLA FREQUENZA

Un caso particolare si ha quando la forza eccitatrice ha ampiezza proporzionale al quadrato della pulsazione  $\omega$ . Tale situazione si verifica, ad esempio, nelle macchine con rotori squilibrati. L'equazione del moto è:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A\omega^2 \cos \omega t$$

La risposta a regime risulta del tipo:  $x(t) = X_0 \cos(\omega t - \psi)$

con: 
$$X_0 = \frac{A \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{\sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}}; \quad \text{tg } \psi = \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

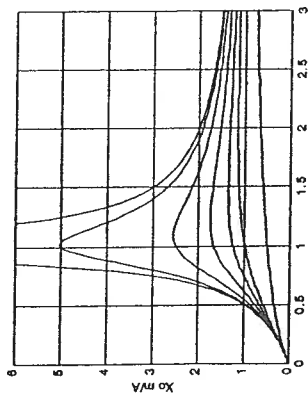


Fig. 4.14 - Ampiezza del rapporto  $X_0/A$  in funzione del rapporto  $(\omega/\omega_n)^2$  nel caso di oscillazioni forzate con eccitazione sinusoidale di ampiezza proporzionale a  $\omega$ .

#### ECCITAZIONE ARMONICA IN RISONANZA (DI FASE)

Si consideri il caso particolare in cui la forza eccitatrice ha pulsazione  $\omega$  coincidente con la pulsazione naturale  $\omega_n$  del sistema. In altre parole siamo in condizione di risonanza di fase.

Per il sistema non smorzato, l'equazione del moto è:

$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega_n t$  ovvero:  $\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_n t$

L'integrale particolare è:  $x_p(t) = X t \omega_n \sin \omega_n t$  con:

$$X = \frac{1}{2} \frac{F_0}{k}$$

L'integrale generale dell'omogenea associata è del tipo:

$$x_{go}(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$$

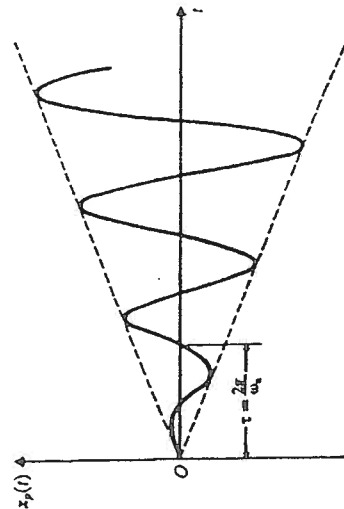


Fig. 4.15 - Risposta del sistema non smorzato all'eccitazione armonica in risonanza.

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t + \frac{1}{2} \frac{F_0}{k} t \omega_n \sin \omega_n t$$

Introducendo le condizioni iniziali si ha:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{1}{2} \frac{F_0}{k} t \omega_n \sin \omega_n t$$

Si può osservare che l'integrale particolare dell'equazione completa è una oscillazione di ampiezza che cresce linearmente nel tempo. Il suo andamento è rappresentato in figura 4.15.

Per il sistema smorzato, l'equazione del moto è:

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega_n t$  ovvero:  $\ddot{x} + 2\zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_n t$

L'integrale particolare è:  $x_p(t) = X \sin \omega_n t$  con:  $X = \frac{\frac{F_0}{k}}{2\zeta}$

L'integrale generale dell'omogenea associata è del tipo:

$$x_{go}(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \{ A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t \}$$

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = -\frac{F_0/k}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$$

in cui, se le condizioni iniziali sono nulle, risulta:

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa, il cui andamento è riportato in figura 4.16, è:

$$x(t) = \frac{F_0/k}{2\zeta} \left[ \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t + \sin \omega_n t \right]$$

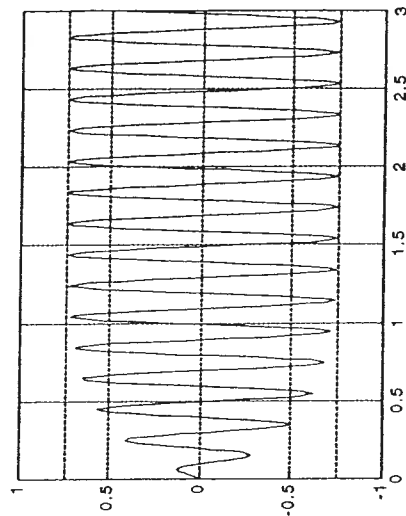


Fig. 4.16 - Risposta del sistema smorzato all'eccitazione armonica in risonanza.

# FENOMENO DEL BATTIMENTO

Si consideri il caso dell'eccitazione armonica in cui il sistema sia privo di smorzamento. L'equazione del moto si riduce alla seguente:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad \text{ovvero:} \quad \ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

E l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$x(t) = x_{go}(t) + x_p(t) = x_{go}(t) + X_0 \cos \omega t$$

dove:  $x_{go}(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$  e  $x_p(t) = X_0 \cos \omega t$

$$\text{con } X_0 = \frac{F_0/m}{|\omega_n^2 - \omega^2|} = \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Introdotti le condizioni iniziali, risulta:

$$x(t) = (x_0 - X_0) \cos \omega_n t + \frac{x_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + X_0 \cos \omega t$$

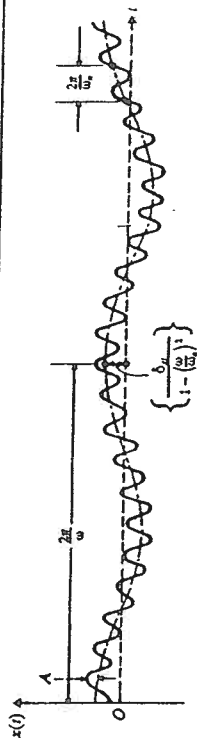


Fig. 4.17 - Risposta del sistema non smorzato all'eccitazione armonica ( $\omega < \omega_n$ ).

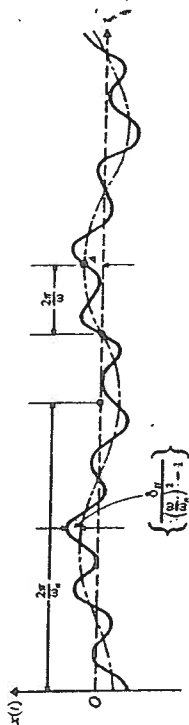


Fig. 4.18 - Risposta del sistema non smorzato all'eccitazione armonica ( $\omega > \omega_n$ ).

Il moto risulta la sovrapposizione di due moti: uno ha pulsazione pari a quella della forzante, l'altro ha pulsazione pari a quella naturale del sistema. La figura 4.17 rappresenta il caso in cui la pulsazione della forzante è inferiore a  $\omega_n$  ( $\omega < \omega_n$ ), mentre la situazione opposta è rappresentata in figura 4.18 ( $\omega > \omega_n$ ).

Ora, se la pulsazione  $\omega$  della forzante è molto vicina alla pulsazione naturale del sistema, pur mantenendosi distinta da quest'ultima, nasce un fenomeno noto come *battimento*. In questo tipo di vibrazione l'ampiezza aumenta e diminuisce con andamento regolare. Il fenomeno può essere spiegato considerando il caso in cui entrambe le condizioni iniziali siano nulle; allora si ha:

$$x(t) = X_0 (\cos \omega t - \cos \omega_n t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t)$$

$$\text{che si può scrivere anche come:} \quad x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2} \left( 2 \sin \frac{\omega_n + \omega}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_n - \omega}{2} t \right)$$

Ipotizzando che  $\omega$  sia poco più piccola di  $\omega_n$  e ponendo:

$$\omega_n - \omega = 2\varepsilon,$$

dove  $\varepsilon$  è una piccola quantità positiva, risulta  $\omega_n \approx \omega$  e:

$$\omega_n + \omega \approx 2\omega.$$

Pertanto:  $\omega_n^2 - \omega^2 = 4\varepsilon\omega$

In conclusione la legge di moto assume la forma:

$$x(t) = \left( \frac{F_0/m}{2\varepsilon\omega} \right) \sin \varepsilon t \sin \omega t$$

Il moto può essere inteso come un moto avente pulsazione  $\omega$  la cui ampiezza varia lentamente ( $\varepsilon$  è piccolo) con periodo  $2\pi/\varepsilon$  (vedi figura 4.19).

La *frequenza di battimento*  $\omega_b$  è definita come:

$$\omega_b = 2\varepsilon = \omega_n - \omega$$

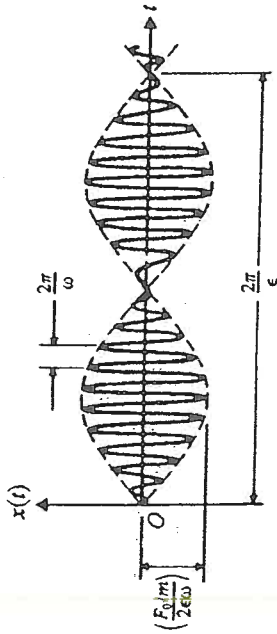


Fig. 4.19 - Fenomeno del battimento.

**VIBRAZIONI FORZATE CON SMORZAMENTO STRUTTURALE (ISTERETICO)**

L'equazione del moto per un sistema ad un grado di libertà con smorzamento strutturale è:

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\omega} \dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Se si introduce la variabile complessa  $z$ , con  $x = \text{Re}(z)$ , si ha:

$$m\ddot{z} + \frac{h}{\omega} \dot{z} + kz = \frac{F_0}{\omega} e^{i\omega t}$$

Ipotizzata una soluzione particolare del tipo:

$$z = Z_0 e^{i(\omega t - \psi)} = Z_0 e^{-i\psi} e^{i\omega t} = Z e^{i\omega t},$$

se si sostituisce nella equazione differenziale, si ottiene:

$$-m\omega^2 Z + i h \omega Z + kZ = F_0$$

che, introducendo il fattore di smorzamento strutturale  $\eta$ , si può scrivere:  $-m\omega^2 Z + k(1 + i\eta)Z = F_0$

e si ottiene:

$$Z = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + i\eta k}$$

Ricordando che  $Z = Z_0 e^{-i\psi}$ , risulta:

$$Z_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\eta k)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \eta^2}};$$

$$\tan \psi = \frac{\eta k}{k - m\omega^2} = \frac{\eta}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

La risposta del sistema,  $x(t)$ , è costituita dalla sola parte reale di  $z(t)$ , ovvero:

$$x(t) = \text{Re}[z(t)] = \text{Re}[Z_0 e^{i(\omega t - \psi)}] = Z_0 \cos(\omega t - \psi).$$

Si può notare che, nel caso di smorzamento strutturale, la risposta  $x(t)$  raggiunge il suo valore massimo,  $F_0/(k\eta)$ , in corrispondenza della risonanza  $\omega = \omega_n$ , al contrario di quanto avviene nel caso di smorzamento viscoso in cui il massimo è raggiunto per  $\omega < \omega_n$ . Inoltre, per valori non nulli di  $\eta$ , l'angolo  $\psi$  non si annulla mai (nientemeno per  $\omega = 0$ ); ciò significa che nel caso di smorzamento strutturale l'eccitazione e la risposta non possono mai essere in fase.

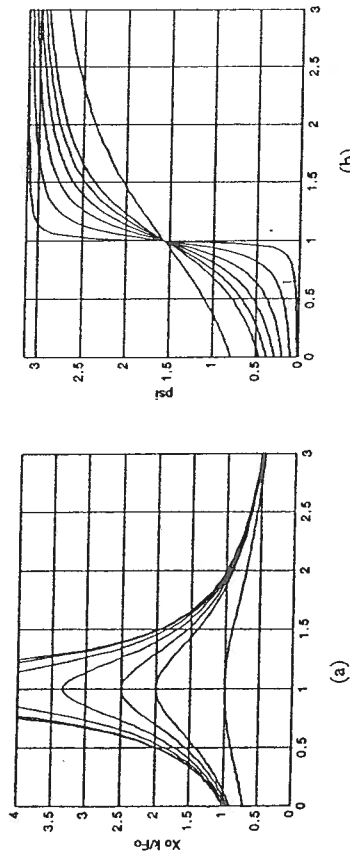


Fig. 4.20 - Smorzamento strutturale: ampiezza (a) e fase (b) della risposta forzata a regime, in funzione del rapporto  $(\omega/\omega_n)^2$ .

#### RISPOSTA ALL'IMPULSO

Si consideri una forza  $F$  nulla ovunque tranne che per l'intervallo di tempo  $\Delta t$  in cui ha un'ampiezza costante  $F_0$ .

La quantità:  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = F_0 \Delta t$  si dice **impulso** della forza  $F$ .

Si faccia ora tendere a zero l'intervallo  $\Delta t$ , imponendo che sia:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = I.$$

La forza  $F(t)$  che soddisfa questa condizione si dice **impulsiva**.

Ricordando che l'impulso di una forza è uguale alla variazione della quantità di moto, se una forza trasmette un impulso  $I$  ad un corpo di massa  $m$  inizialmente in quiete, il corpo stesso acquista una quantità di moto  $Q = I$ , e quindi una velocità data da  $v_0 = I/m$ .

Ne segue che la risposta forzata ad un'eccitazione impulsiva di impulso  $I$  di un corpo di massa  $m$ , inizialmente fermo, coincide con il moto libero relativo alle condizioni iniziali:

$$x(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = \frac{I}{m}$$

Infatti, a causa della durata molto breve (teoricamente nulla) della forza impulsiva, durante la sua applicazione il corpo rimane nella posizione iniziale. Pertanto si avrà:

$$x(t) = \frac{I}{m \omega_n} \sin \omega_n t \quad \text{per il sistema non smorzato}$$

$$x(t) = \frac{I}{m \omega_s} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_s t \quad \text{per il sistema smorzato (con } \zeta < 1)$$

Ovvero:  $x(t) = I h(t)$  avendo indicato con:  
la **risposta del sistema ad un impulso unitario**.

$$h(t) = \frac{1}{m \omega_s} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_s t$$

#### RISPOSTA ALL'ECCITAZIONE GENERICA

Si consideri una forza eccitatrice  $F(t)$  di forma arbitraria. Essa può essere immaginata come una successione di forze impulsive, ciascuna agente per un intervallo di tempo elementare  $d\tau$ , alle quali corrispondono gli impulsi elementari  $F(\tau)d\tau$ .

La risposta del sistema, all'istante  $t$ , per effetto dell'impulso elementare  $dI = F(\tau)d\tau$  agente al tempo  $\tau$ , sarà:

$$dx(t) = \frac{dI}{m \omega_s} e^{-\zeta \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_s (t-\tau) = dI h(t-\tau)$$

essendo  $h(t)$  la risposta del sistema al generico impulso unitario ( $I = 1$ ).

Se il sistema è lineare, la risposta sarà la somma delle risposte ai singoli impulsi elementari, ovvero:

$$x(t) = \int_0^t dx(t) = \int_0^t F(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

L'integrale a secondo membro viene detto **integrale di**  
**convoluzione** o **integrale di Duhamel**.

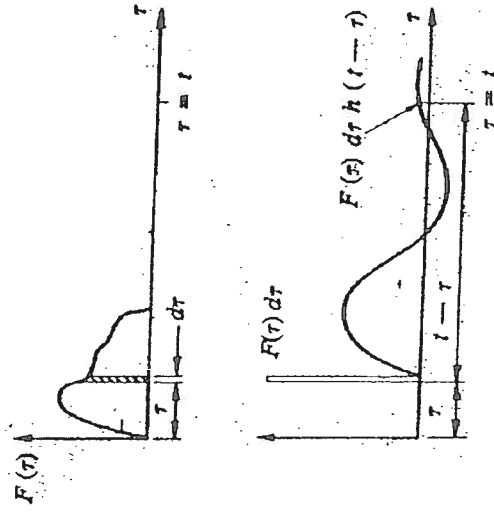


Fig. 4.21 - Forza eccitatrice di forma arbitraria e risposta del sistema all'impulso  $F(\tau)dz$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- \* E. Funaioli, A. Maggiore, U. Meneghetti, *Lezioni di Meccanica applicata alle macchine*, Vol. II, ed. Patron, Bologna.
- \* W. J. Palm, *Modeling, analysis, and Control of Dynamic Systems*, John Wiley & Sons, 1999.
- \* S. S. Rao, *Mechanical vibrations*, Third edition, Addison Wesley Pub. Company, 1995.
- \* G. Diana, F. Cheli, *Dinamica e Vibrazione dei Sistemi*, vol. I, ed. Utet, Torino, 1993.
- \* E. Pennestri, *Dinamica Tecnica e computazionale*, vol. I, ed. Ambrosiana, 2001.



# APPENDICE A1 - Equazioni differenziali ordinarie (EDO)

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = F(t) \quad (A.1.1)$$

$$\text{L'integrale generale è:} \quad x(t) = x_0(t) + x_p(t) \quad (A.1.2)$$

dove  $x_0(t)$  è l'integrale dell'equazione omogenea associata (A) e  $x_p(t)$  è un'integrale particolare della EDO (B).

A) Integrale generale dell'omogenea associata è:

$$x_0(t) = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} + \dots + C_n e^{z_n t} \quad (A.1.3)$$

dove  $z_1, z_2, \dots, z_n$  sono radici distinte dell'equazione caratteristica:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

e  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sono in generale numeri complessi.

Se l'equazione caratteristica ha  $m$  radici coincidenti, allora:

$$x_0(t) = C_1 e^{z_1 t} + C_2 t e^{z_1 t} + \dots + C_m t^{m-1} e^{z_1 t} + C_{m+1} e^{z_{m+1} t} + \dots + C_n e^{z_n t} \quad (A.1.4)$$

Le eventuali radici complesse vanno a coppie:  $z_1 = a + ib; \quad z_2 = a - ib$

Le costanti di integrazione si determinano in funzione delle condizioni iniziali che possono riguardare la posizione e/o la velocità:

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

B) Integrale particolare dell'equazione completa (A.1.1),  $x_p(t)$  dipende dal termine  $F(t)$ .

# APPENDICE A2 - Equazioni di Lagrange

## EQUAZIONI DI LAGRANGE

Se  $n$  è il numero di gdl del sistema considerato,  $n$  sono le equazioni di Lagrange che ne individuano il moto. Per un sistema ad un gdl l'equazione può essere scritta nella forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = Q$$

dove:  $q$  è la coordinata generalizzata,  $T$  e  $V$  sono rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale e la quantità:

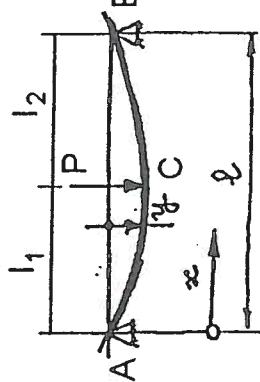
$$Q = \sum_j F_j \cdot \frac{\partial r_j}{\partial q} = \frac{\delta W}{\delta q}$$

è la forza generalizzata di tipo non conservativo.

In altri termini  $Q$  è la componente lagrangiana di tutte le forze agenti sul sistema, non comprese quelle inerziali (il cui effetto è considerato in  $T$ ) e quelle che ammettono potenziale, tipicamente le forze peso e le forze elastiche (queste ultime sono considerate in  $V$ ).

$Q$  viene calcolata come rapporto tra il lavoro virtuale  $\delta W$  delle forze non conservative (per uno spostamento virtuale  $\delta q$  della coordinata generalizzata  $q$ ) e lo spostamento virtuale stesso.

APPENDICE A3 – Deformata trave appoggiata



$$\text{Tratto AC} \quad y(x) = \frac{Pl^3}{6EI} \left[ \frac{l_2}{l} \left( 1 - \left( \frac{l_2}{l} \right)^2 - \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right) \right] \quad (\text{A3.1})$$

$$\text{Tratto CB} \quad y(x) = \frac{Pl^3}{6EI} \left[ \frac{l_2}{l} \left( 1 - \left( \frac{l_2}{l} \right)^2 - \left( \frac{l-x}{l} \right)^2 \right) \right] \quad (\text{A3.2})$$

$$\text{Punto C} \quad y(x=l_1) = \frac{1}{3} \frac{Pl^3 l_2}{EI l} \quad (\text{A3.3})$$

Se  $l_1 = l_2 = l/2$ , la (A3.1) diventa:

$$y(x) = \frac{Pl^3}{12EI} \left[ \frac{3x}{4l} - \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right] \quad (\text{A3.4})$$

$$\text{e in mezz'era, si ha:} \quad y\left(x = \frac{l}{2}\right) = y_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI} \quad (\text{A3.5})$$

Pertanto la freccia in una sezione a distanza  $x$  è:

$$y(x) = \frac{Pl^3}{48EI} \left[ \frac{3x}{l} - 4 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right] = y_{\max} \left[ \frac{3x}{l} - 4 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right] \quad (\text{A3.6})$$

Infine, essendo la rigidezza pari all'inverso della freccia corrispondente ad un carico unitario, la rigidezza flessionale della trave con carico in mezz'era è (vedi (A3.5)):

$$k = \frac{48EI}{l^3}$$

