

Geometria delle masse

4.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti sono state studiate le regole cinematiche che governano il movimento di un sistema meccanico. Nel prossimo capitolo si introdurranno invece le leggi della dinamica, che mettono in relazione le forze agenti su un sistema meccanico con il suo movimento. Per affrontare lo studio della dinamica dei sistemi, è però necessario premettere alcuni concetti relativi alla distribuzione di massa di un sistema meccanico. Infatti, già al livello elementare costituito dalla terza legge di Newton per un punto materiale $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, si osserva che la relazione tra la forza agente \mathbf{F} e l'accelerazione del punto materiale \mathbf{a} esiste un fattore di proporzionalità costituito dalla massa m del punto.

Per procedere allo studio della dinamica di sistemi meccanici formati da uno o più corpi rigidi di dimensioni non puntiformi, è necessario introdurre i concetti di *baricentro di massa* e di *momento di inerzia di massa*. Nel prossimo capitolo si mostrerà poi come utilizzando tali grandezze sia possibile definire il campo delle azioni di inerzia che si esercitano sul singolo corpo rigido ed estendere, mediante il principio di D'Alembert, la terza legge di Newton in modo da rendere possibile lo studio della dinamica di sistemi di corpi rigidi.

4.2 Baricentro di massa

Per introdurre l'argomento, si consideri un sistema formato da un insieme di N punti materiali, rigidamente collegati tra loro, in modo da formare un corpo rigido. Si fissi un sistema di riferimento solidale con il corpo e si indichi con m_k , x_k e y_k rispettivamente la massa e le due coordinate che definiscono la posizione della generica k -esima massa rispetto al sistema di riferimento scelto (Figura 4.1).

Si definisce baricentro (o centro di massa) del corpo il punto le cui coordinate sono fornite dalle espressioni:

$$x_G = \sum_{k=1}^N \frac{m_k x_k}{M} \quad y_G = \sum_{k=1}^N \frac{m_k y_k}{M} \quad (4.1)$$

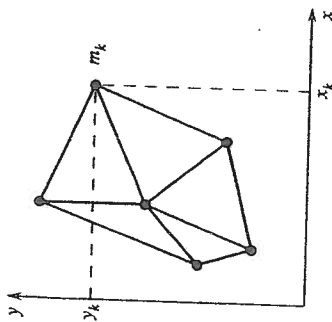


Figura 4.1 Baricentro di un sistema di punti discreti.

ossia sono pari al rapporto tra la somma dei momenti statici $m_k x_k$, $m_k y_k$ e la massa totale M del corpo. La (4.1) può interpretarsi anche come la media delle coordinate dei punti del corpo, pesata attraverso le masse dei singoli punti.

Passando a considerare un corpo rigido continuo, la sommatoria (4.1) diviene un integrale esteso al volume del corpo, mentre la massa di un elemento infinitesimo di volume dV è pari al prodotto ρdV in cui ρ è la densità del materiale, in generale funzione della posizione all'interno del corpo:

$$x_G = \frac{1}{M} \int_V \rho(x, y, z) x dV \quad y_G = \frac{1}{M} \int_V \rho(x, y, z) y dV \quad (4.2)$$

Nel caso in cui si abbia un corpo omogeneo (quindi con ρ costante) e di spessore costante h (Figura 4.2), la massa infinitesima diviene $dm = \rho h dA$ e la (4.2) risulta:

$$x_G = \frac{\rho h}{M} \int_A x dA = \frac{1}{A} \int_A x dA \quad y_G = \frac{\rho h}{M} \int_A y dA = \frac{1}{A} \int_A y dA \quad (4.3)$$

essendo, nell'ipotesi fatta, la massa totale $\rho h A = M$. In pratica, se il corpo è omogeneo e a spessore costante, la posizione del centro di massa coincide con la posizione del baricentro geometrico della figura che rappresenta il contorno del corpo.

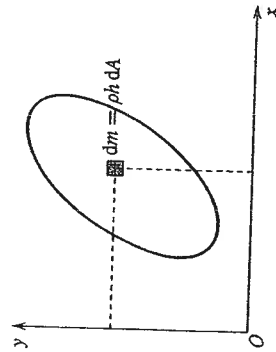


Figura 4.2 Ricerca del baricentro per un corpo a spessore costante.

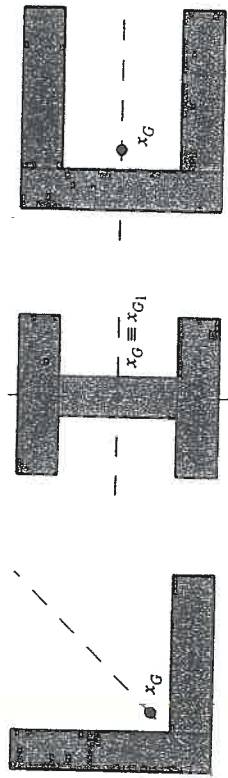


Figura 4.3 Individuazione della posizione del baricentro di figure geometriche che presentano assi di simmetria.

Se il corpo presenta un asse di simmetria, ossia ha una distribuzione di massa simmetrica rispetto a un asse, il baricentro appartiene a tale asse. Se poi il corpo presenta due assi di simmetria, il baricentro si troverà sull'intersezione dei due assi (Figura 4.3).

Inoltre, non è sempre necessario utilizzare la definizione (4.2) o (4.3) per il calcolo del baricentro del corpo. Se questo è scomponibile in forme geometriche semplici delle quali sia già noto il baricentro, è possibile calcolare il baricentro dell'intero corpo in forma analoga alla (4.1), considerando la media pesata dei singoli baricentri delle sottoparti nelle quali è stato suddiviso il corpo (Figura 4.3).

$$x_G = \sum_{k=1}^N \frac{m_k x_{Gk}}{M} \quad y_G = \sum_{k=1}^N \frac{m_k y_{Gk}}{M} \quad (4.4)$$

4.2.1 Il baricentro come centro delle forze peso

In questa applicazione si vuole mostrare, attraverso un esempio, come il baricentro costituisca anche il centro delle forze peso di un corpo, ossia il punto al quale è possibile ridurre il risultante delle forze peso distribuite agenti sul corpo. L'esempio è condotto, per semplicità, considerando un corpo composto da N punti materiali rigidamente collegati tra loro. Il risultato ottenuto ha comunque validità generale.

Il corpo sia composto di punti tutti appartenenti al piano individuato dagli assi coordinati (xy) , la direzione y sia la verticale, lungo cui agisce la forza peso, esprimibile come un vettore diretto verso il basso, ossia in verso opposto alla direzione positiva dell'asse y , il cui modulo è pari al prodotto della massa del punto per l'accelerazione di gravità g , come mostrato nella Figura 4.4.

Si calcoli il momento di tutte le forze peso, rispetto a un polo O' scelto ad arbitrio sul piano. Il modulo del momento vale:

$$M_{O'} = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{O'}) m_k g \quad (4.5)$$

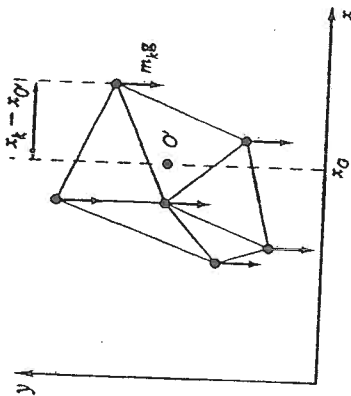


Figura 4.4 Significato del baricentro come centro delle forze peso.

Si ricerca ora quella particolare posizione del polo O' per la quale si annulla il modulo del momento delle forze peso, ossia:

$$\sum_{k=1}^N x_k m_k = x_{O'} \sum_{k=1}^N m_k \quad (4.6)$$

da cui si ottiene:

$$x_{O'} = \frac{\sum_{k=1}^N x_k m_k}{M} = x_G \quad (4.7)$$

Questo risultato mostra che il momento delle forze peso si annulla per tutti e soli i punti che hanno la stessa ascissa del baricentro, ossia che la retta di applicazione della forza peso passa per il baricentro.

4.3 Momento di inerzia di massa

Come visto, il baricentro indica il punto in cui è possibile concentrare tutta la massa di un corpo rigido, il momento di inerzia di massa invece indica come la massa è distribuita nel corpo. Nel caso di corpi in moto piano, si considererà, nella maggior parte dei casi, il momento di inerzia rispetto ad assi perpendicolari al piano direttore, la cui traccia su detto piano è un punto.

Il momento di inerzia di massa rispetto a un asse è definito come (Figura 4.5):

$$J_O = \int_V r^2 dm = \int_V (x^2 + y^2) dm \quad (4.8)$$

in cui l'origine del sistema di riferimento è collocata nel punto traccia dell'asse rispetto a cui si sta valutando il momento di inerzia. Il momento di inerzia di massa è quindi la somma (o integrale) dei momenti del secondo ordine delle masse

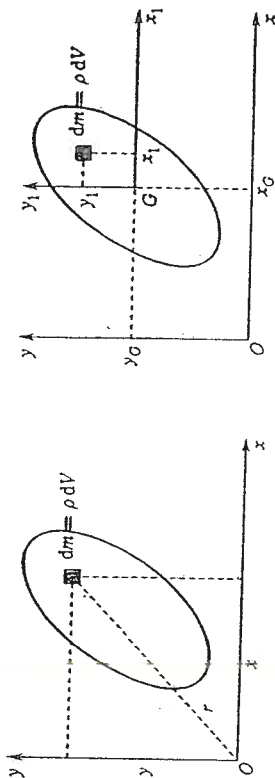


Figura 4.5 Calcolo del momento di inerzia di massa per una figura piana.

di ogni porzione infinitesima del corpo $dm = \rho dV$. Nel caso di corpo omogeneo e di spessore costante h , l'espressione si semplifica nella:

$$J_O = \rho h \int_A r^2 dA = \rho h \int_A (x^2 + y^2) dA \quad (4.9)$$

Diversamente dal baricentro, la cui posizione fisica sul corpo viene definita indipendentemente dal riferimento scelto, il valore del momento di inerzia di massa dipende dal punto (traccia dell'asse) rispetto al quale viene calcolato. Per lo studio della dinamica del corpo, e dei sistemi di corpi è conveniente scegliere come punto privilegiato per il calcolo del momento di inerzia il baricentro del corpo.

Il momento di inerzia J_G diviene così una caratteristica del corpo rigido, e il momento di inerzia rispetto a un polo qualsiasi, può essere calcolato utilizzando la *legge del trasporto*, qui di seguito definita.

Si consideri un sistema di riferimento fisso con il corpo, la cui origine sia collocata nel baricentro G . Il momento di inerzia rispetto al polo O è esprimibile considerando le coordinate (x_G, y_G) del baricentro, rispetto al sistema di riferimento (Oxy) , e le coordinate (x_1, y_1) dei punti del corpo rispetto al riferimento fisso con il corpo stesso:

$$J_O = \int_V ((x_G + x_1)^2 + (y_G + y_1)^2) \rho dV \quad (4.10)$$

Sviluppando l'espressione e riorganizzando i termini, si ha:

$$\begin{aligned} J_O &= (x_G^2 + y_G^2) \int_V \rho dV + 2x_G \int_V x_1 \rho dV + \\ &\quad + 2y_G \int_V y_1 \rho dV + \int_V (x_1 + y_1)^2 \rho dV \end{aligned} \quad (4.11)$$

Si osserva che gli integrali del secondo e terzo termine rappresentano il momento statico del corpo rispetto all'origine del riferimento (x_1, y_1) . Essendo *first moments*.

fisso con il corpo, risulta che tali integrali sono nulli. L'ultimo termine rappresenta invece il momento di inerzia calcolato rispetto a un asse (perpendicolare al piano $x - y$), passante per il baricentro G del corpo. La (4.9) risulta pertanto:

$$J_O = (x_G^2 + y_G^2)M + \int_V (x_1 + y_1)^2 \rho dV = M \overline{OG}^2 + J_G \quad (4.12)$$

che esprime la legge del trasporto: il momento di inerzia rispetto a un asse diverso dall'asse baricentrico, può esprimersi come la somma del momento di inerzia baricentrico più il prodotto della massa del corpo per il quadrato della distanza tra il baricentro e il punto considerato.

Anche per il calcolo del momento di inerzia baricentrico di un corpo scomponibile in forme semplici, è possibile utilizzare la legge del trasporto:

$$J_G = \sum_{k=1}^N (J_{G_k} + M_k \overline{GG_k}^2) \quad (4.13)$$

avendo indicato con G il baricentro del corpo composto, con $\overline{GG_k}$ le distanze tra il baricentro del corpo G e quello di ogni singolo componente G_k , e con M_k la massa di ciascuna parte componente il corpo.

È uso definire il momento di inerzia baricentrico anche mediante la nozione di raggio giratorio, definito come:

$$J_G = M \rho^2 \quad (4.14)$$

quel valore che, moltiplicato al quadrato per la massa del corpo, fornisce il valore del momento di inerzia J_G . Esso indica, in modo qualitativo, come la massa è distribuita in rapporto alla dimensione del corpo.

Applicazione: momento di inerzia baricentrico di una corona circolare omogenea Data una corona circolare di spessore costante h , e raggi interno ed esterno rispettivamente R_1 e R_2 , collocando il riferimento nel baricentro del corpo (Figura 4.6), il momento di inerzia baricentrico è definito come:

$$J_G = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho h r dr d\theta$$

Gli estremi dei due integrali sono indipendenti tra loro, per cui è possibile riorganizzare la scrittura nei seguenti termini:

$$J_G = \rho h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi h \rho \left(\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} \right)$$

il cui risultato è:

$$J_G = \frac{\pi h (R_2^2 - R_1^2)}{2} (R_2^2 + R_1^2) = M \frac{(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$

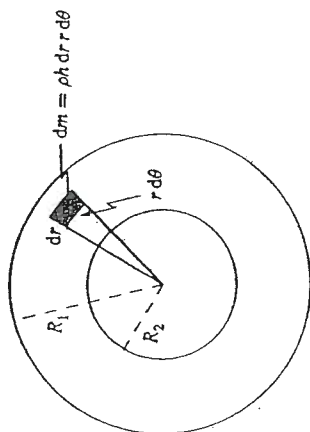


Figura 4.6 Calcolo del momento di inerzia di massa per un corpo a sezione di corona circolare e spessore costante.

Esaminando i due casi estremi si ottiene, per $R_1 = 0$, $R_2 = R$, ossia il disco pieno:

$$J_G = M \frac{R^2}{2} \quad \rho = R \frac{\sqrt{2}}{2}$$

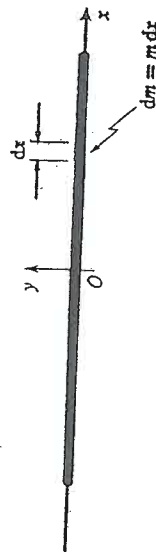
mentre per $R_1 = R_2 = R$, ossia l'anello sottile:

$$J_G = M R^2 \quad \rho = R$$

Si osserva che nel secondo caso il raggio giratorio è pari alla dimensione dell'anello, in quanto la massa è posta alla massima distanza dal baricentro, mentre nel primo caso, essendo uniformemente distribuita, risulta ovviamente inferiore al raggio R .

Si può quindi affermare che, a parità di massa, se si vuole massimizzare il momento di inerzia conviene utilizzare un solido simile all'anello sottile, quale per esempio una corona circolare con spessore piccolo rispetto al proprio raggio medio.

Applicazione: momento di inerzia baricentrico di un'asta Si consideri un'asta omogenea di lunghezza L e massa totale M (Figura 4.7). Posto il sistema di riferimento nel centro geometrico dell'asta, che per simmetria ne costituisce



anche il baricentro, si indichi con $m = \frac{M}{L}$ la massa per unità di lunghezza dell'asta. Il momento di inerzia baricentrale dell'asta sarà in questo caso definito dall'integrale semplice:

$$J_G = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 m dx$$

lo sviluppo di tale integrale porta a:

$$J_G = m \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{mL^3}{12} = \frac{ML^2}{12} \quad (4.15)$$

4.4 Esercizi

Esercizio 1: momento di inerzia baricentrico di un rettangolo omogeneo. In questo caso si consideri un solido costituito da un rettangolo di base L , altezza b e spessore h in direzione perpendicolare al piano (Figura 4.8). Per simmetria il baricentro del corpo coincide con il suo centro geometrico. Posta in tale punto l'origine del sistema di riferimento il calcolo del momento di inerzia baricentrale è effettuato con un integrale doppio secondo le due coordinate x e y :

$$J_G = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-b/2}^{b/2} (x^2 + y^2) dm$$

Supposto il corpo omogeneo, ne consegue $dm = \rho h dx dy$, e quindi:

$$J_G = \rho h \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \int_{-b/2}^{b/2} dy + \rho h \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy$$

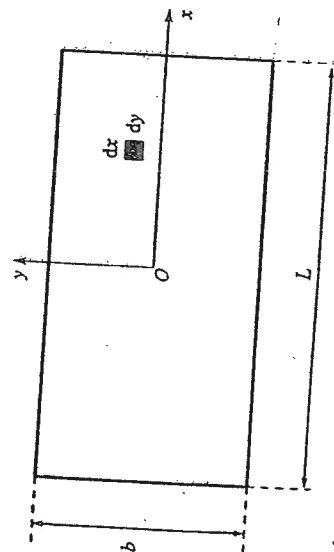


Figura 4.8 Calcolo del momento di inerzia di massa per un corpo a sezione rettangolare.

lo sviluppo dell'integrale porta a:

$$J_G = \rho h \frac{b}{3} \left[x^3 \right]_{-L/2}^{L/2} + \rho h \frac{L}{3} \left[y^3 \right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{\rho h}{3} \left(b \frac{L^3}{4} + L \frac{b^3}{4} \right)$$

ossia:

$$J_G = \frac{\rho h b L}{12} (L^2 + b^2) = \frac{M}{12} (L^2 + b^2)$$

Si osservi che facendo tendere a zero l'altezza b del rettangolo si ottiene il risultato già ricavato per l'asta omogenea.

