II-1 Equazioni differenziali lineari. Introduzione

Sia $\mathcal{M}_n$ lo spazio delle matrici quadrate reali di ordine n. In questo paragrafo tratteremo la classe particolare delle equazioni differenziali *lineari*, cioé della forma:

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \tag{37}$$

con $A : I \to \mathcal{M}_n$ e $\mathbf{b} : I \to \mathbf{R}^n$ continue. La funzione matriciale $A(t)$ si dice *matrice dei coefficienti* mentre la funzione vettoriale $\mathbf{b}(t)$ si dice *termine noto*. L'equazione differenziale:

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \tag{38}$$

che si ottiene dalla (37) sopprimendo il termine noto si dice *equazione omogenea associata* alla (37).

Tenuto conto dell'Osservazione 4 e del Teorema 6, il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{39}$$

per ogni scelta di $t_0 \in I$ e di $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{R}^n$, ammette una ed una sola soluzione massimale globale $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$, ovvero definita in tutto I, e tale soluzione é di classe $C^1(I)$ in t. Viceversa, se la matrice dei coefficienti é continua e se $\mathbf{y}(t)$ é una funzione di classe $C^1(I)$, allora é continua in I la funzione:

$$t \to \mathbf{y}'(t) - A(t)\mathbf{y}(t).$$

Dunque, sempre nell'ipotesi che $A(t)$ sia continua, si puó considerare l'operatore lineare di $C^1(I, \mathbf{R}^n)$ in $C^0(I, \mathbf{R}^n)$(2):

$$L_A : \mathbf{y} \to \mathbf{y}'(t) - A(t)\mathbf{y}(t), \quad t \in I, \ \mathbf{y} \in C^1(I, \mathbf{R}^n). \tag{40}$$

Se poi $\mathbf{b} \in C^0(I, \mathbf{R}^n)$, l'insieme delle soluzioni dell'equazione (37) é l'immagine inversa di $\mathbf{b}$ tramite L_A. Allora, un ben noto risultato di algebra lineare consente di enunciare il seguente

(2) Con il simbolo $C^k(I, \mathbf{R}^n)$ si intende l'insieme delle funzioni $\mathbf{y}(t)$ di classe C^k in I a valori in $\mathbf{R}^n$.

Teorema 8

Sia $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo aperto e siano A e $\mathbf{b}$ funzioni continue in I a valori in $\mathcal{M}_n$ ed in $\mathbf{R}^n$, rispettivamente. Sia poi $\mathbf{w}$ una qualsiasi soluzione (una soluzione *particolare*) della equazione inomogenea (37). Allora, l'integrale generale della (37) é l'insieme:

$$\mathrm{ker} L_A \cup \{\mathbf{w}\}\,,$$

ovvero l'isieme costituito da tutte e sole le funzioni $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, con $\mathbf{v}$ che varia nell'insieme $\mathrm{ker} L_A$ delle soluzioni dell'equazione omogenea associata (38).

Dunque, il problema della determinazione dell'insieme delle soluzioni della equazione inomogenea (37) si condurrá in due passi. Nel primo, si tratterá di determinare l'integrale generale della omogenea associata (38), nel secondo di determinare una soluzione particolare dell'equazione completa (37). Nel prossimo paragrafo affronteremo il primo aspetto del problema.

II-2 Equazioni differenziali lineari omogenee

In questo paragrafo tratteremo il problema della determinazione dell'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea:

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \tag{41}$$

dove $A(t)$ é continua nell'intervallo $I \subset \mathbf{R}$, ovvero il nucleo dell'operatore L_A definito nella (40). Essendo L_A un operatore lineare, il suo nucleo é uno spazio vettoriale. La struttura di questo spazio vettoriale é descritta dal seguente

Teorema 9

Comunque si scelga $t_0 \in I$, l'applicazione:

$$\mathbf{v} \in \mathrm{ker} L_A \to \mathbf{v}(t_0) \in \mathbf{R}^n \tag{42}$$

é un isomorfismo di $\mathrm{ker} L_A$ su $\mathbf{R}^n$. Quindi, dim $\mathrm{ker} L_A = n$ e una sua base é costituita dalle soluzioni dei problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_k \qquad k = 1, ..., n \end{cases} \tag{43}$$

essendo $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n$ una qualsiasi base di $\mathbf{R}^n$.

Dim.

L'applicazione definita dalla (41) é evidentemente lineare, in conseguenza delle definizioni di somma di funzioni e di prodotto di uno scalare per una funzione. Inoltre, poiché per ogni $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{R}^n$, il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione, esso é anche biettivo. Dunque, é un isomorfismo. $\odot$

Definizione 4

Ogni matrice $Y(t) \in \mathcal{M}_n$ le cui colonne costituiscono una base di $\ker L_A$ si dice una *matrice fondamentale* relativa alla equazione omogenea (41).

Non é difficile verificare, per sostituzione diretta, che ogni matrice fondamentale $Y(t)$ soddisfa l'equazione differenziale:

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \qquad t \in I. \tag{44}$$

Tuttavia, non é detto che ogni soluzione della (44) sia una matrice fondamentale. A questo proposito, sussiste il seguente

Teorema 10

Sia $Y(t)$ una soluzione dell'equazione differenziale (44). Allora, $Y(t)$ é una matrice fondamentale se e soltanto se esiste almeno un $t^* \in I$ per cui $\det Y(t^*) \neq 0$.

Dim.

La condizione é necessaria. Infatti, se $Y(t)$ é fondamentale, essa soddisfa la (44) e inoltre, essendo le sue colonne linearmente indipendenti, si ha che $\det Y(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.

La condizione é sufficiente. Infatti, se $Y(t)$ é soluzione della (44), indichiamo con $\mathbf{y}_1(t), ..., \mathbf{y}_n(t)$ le sue colonne e supponiamo che esista un $t^* \in I$ per cui $\det Y(t^*) \neq 0$. Allora, il sistema $\mathbf{y}_1(t^*), ..., \mathbf{y}_n(t^*)$ di vettori di $\mathbf{R}^n$ é una base di $\mathbf{R}^n$, essendo un sistema di n vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^n$. Ma allora le colonne $\mathbf{y}_1(t), ..., \mathbf{y}_n(t)$ di $Y(t)$ sono soluzioni degli n problemi di Cauchy (43) corrispondenti ai dati linearmente indipendenti $\mathbf{y}_1(t^*), ..., \mathbf{y}_n(t^*)$ e dunque costituiscono una base di $\ker L_A$. $\odot$

Poiché in uno spazio vettoriale esistono infinite basi, allo stesso modo esistono infinite matrici fondamentali relative all'equazione omogenea (41). L'insieme delle matrici fondamentali é caratterizzato dal seguente

Teorema 11

Se $Y_1(t)$ ed $Y_2(t)$ sono due matrici fondamentali relative alla (41), allora é possibile determinare una matrice costante non singolare C tale che:

$$Y_2(t) = Y_1(t)C.$$

Viceversa, se $Y_1(t)$ é una matrice fondamentale relativa alla (41) e se C é una matrice costante non singolare, anche la matrice $Y_1(t)C$ é una matrice fondamentale relativa all'equazione omogenea (41).

Dim.

Siano $Y_1(t)$ ed $Y_2(t)$ due matrici fondamentali. Poniamo:

$$X(t) = Y_1^{-1}(t)Y_2(t). \tag{45}$$

(Osserviamo che $Y_1^{-1}(t)$ esiste in quanto $Y_1(t)$ é fondamentale.) Dalla (45) segue che:

$$Y_2(t) = Y_1(t)X(t). \tag{46}$$

Derivando rispetto al tempo la (46) e tenendo conto che $Y_1(t)$ ed $Y_2(t)$, essendo fondamentali, soddisfano la (44), si ha:

$$\begin{aligned} Y_2'(t) = A(t)Y_2(t) = Y_1(t)X'(t) + Y_1'(t)X(t) = Y_1(t)X'(t) + A(t)Y_1(t)X(t) = \\ = Y_1(t)X'(t) + A(t)Y_2(t). \end{aligned}$$

Dunque, deve necessariamente essere:

$$Y_1(t)X'(t) = 0. \tag{47}$$

La (47) implica che $X(t)$ é una matrice costante C (é sufficiente moltiplicare ambo i membri per $Y_1^{-1}(t)$, che esiste in quanto $Y_1(t)$ é fondamentale). Inoltre, essendo:

$$\det C = \det(Y_1^{-1}(t)Y_2(t)) = \det Y_1^{-1}(t)\, \det Y_2(t) \neq 0,$$

C é non singolare. La prima parte del teorema é dimostrata.

Siano ora $Y_1(t)$ una matrice fondamentale e C una matrice costante non singolare. Allora:

$$Y_1'(t) = A(t)Y_1(t). \tag{48}$$

Moltiplicando a destra ambo i membri della (48) per C si ha:

$$Y_1'(t)C = A(t)Y_1(t)C,$$

ovvero:

$$(Y_1(t)C)' = A(t)(Y_1(t)C)$$

visto che C é una matrice costante. Inoltre:

$$\det(Y_1(t)C) = \det Y_1(t) \, \det C \neq 0,$$

per cui $Y_1(t)C$ é una matrice fondamentale. L'asserto é cosí dimostrato. $\odot$

Il passo successivo consiste nel determinare una qualsiasi matrice fondamentale relativa all'equazione omogenea (41). Stante il Teorema 10, una matrice fondamentale é la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t) \\ Y(t_0) = I \end{cases} \tag{49}$$

dove I é la matrice identitá. Dunque, il problema é determinare la soluzione $Y(t)$ del problema di Cauchy (49). A tale proposito sussiste il seguente

Teorema 12

Poniamo:

$$B(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)ds \tag{50}$$

e supponiamo che:

$$A(t)B(t) = B(t)A(t) \qquad \forall t \in I. \tag{51}$$

Allora, la soluzione del problema di Cauchy (49), e quindi una matrice fondamentale relativa all'equazione omogenea (41), é data da:

$$Y(t) = \exp B(t).$$

(Per la definizione e le proprietá dell'esponenziale di una matrice si veda l'Appendice A.)

Dim.

Prima di dimostrare l'asserto proviamo che vale la formula:

$$\frac{d}{dt}B^m(t) = mA(t)B^{m-1}(t). \tag{52}$$

Per $m = 1$ la (52) segue direttamente dalla (50). Ora, ragionando per induzione, supposto che la (52) sia verificata per $m - 1$, proviamo che essa vale anche per m. Infatti:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}B^m(t) &= \frac{d}{dt}B^{m-1}(t)B(t) = \\ &= (m-1)A(t)B^{m-1}(t) + B^{m-1}(t)A(t) = mA(t)B^{m-1}(t)\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio é lecito stante la (51).

La soluzione al problema (49) sará ottenuta con il metodo delle approssimazioni successive (cf. Teorema 1). Costruiamo la successione $\{Y_m(t)\}$ ponendo:

$$\begin{aligned}&Y_0 = I \\ &Y_m(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)Y_{m-1}(s)ds \qquad m = 1, 2, ...\end{aligned} \tag{52}$$

Osserviamo ora che risulta:

$$Y_m(t) = I + B(t) + \frac{B^2(t)}{2} + ... + \frac{B^m(t)}{m!}. \tag{53}$$

Infatti, la (53) é vera per $m = 1$ in quanto:

$$Y_1(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)Y_0 ds = I + B(t).$$

Supponendo, poi, la (53) vera per $m - 1$, proviamola per m. Infatti, poiché risulta:

$$\begin{aligned}Y_m'(t) &= A(t)Y_{m-1}(t) = A(t)\big(I + B(t) + ... + \frac{B^{m-1}(t)}{(m-1)!}\big) = \\ &= A(t) + A(t)B(t) + ... + \frac{A(t)B^{m-1}(t)}{(m-1)!} = \\ &= \frac{d}{dt}B(t) + \frac{d}{dt}\frac{B^2(t)}{2} + ... + \frac{d}{dt}\frac{B^m(t)}{m!}\end{aligned}$$

si ha:

$$Y_m(t) = K + B(t) + \frac{B^2(t)}{2} + ... + \frac{B^m(t)}{m!}$$

dove K é una matrice costante. Ma, essendo $B(t_0) = 0$, si ha $I = Y_m(t_0) = K$, per cui:

$$Y_m(t) = I + B(t) + \frac{B^2(t)}{2} + ... + \frac{B^m(t)}{m!}$$

e cioé la (53). Ma la successione (52) converge alla soluzione $Y(t)$ del problema di Cauchy (49) (cf. Teorema 1). Dunque, ricordando la definizione di esponenziale di una matrice (vedi Appendice 1), si ha:

$$Y(t) = \lim_m Y_m(t) = \exp B(t)$$

e quindi l'asserto. $\odot$

La condizione (51), ovvero la commutativitá delle matrici $A(t)$ e $B(t)$ per ogni $t \in I$, é molto forte. Esiste, tuttavia, un'ampia classe di equazioni in cui essa é certamente verificata e precisamente la classe delle equazioni lineari omogenee *autonome*. Infatti, se A é una matrice *costante*, la (38) assume la forma:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}. \tag{54}$$

Vale allora il seguente

Teorema 13

La matrice:

$$Y(t) = e^{At}$$

é una matrice fondamentale relativa all'equazione (54).

Dim.

Infatti, dalla (50), si ha che:

$$B(t) = A(t - t_0).$$

La condizione (51) é quindi immediatamente verificata e dunque, a norma del Teorema 12, la matrice

$$e^{B(t)} = e^{At}e^{-At_0}, \tag{55}$$

é una matrice fondamentale relativa al problema (54). D'altra parte, moltiplicando la (55) a destra per la matrice costante non singolare $\exp(At_0)$, dal Teorema 11 segue immediatamente l'asserto. $\odot$

Dalla Definizione 4 una matrice fondamentale, avendo per colonne una base di $\ker L_A$, contiene tutte le informazioni sullo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea

(41). In particolare, la conoscenza di una matrice fondamentale consente di risolvere un qualsiasi problema di Cauchy relativo alla (41), come mostrato nel seguente

Teorema 14

Il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{56}$$

ha per soluzione:

$$\mathbf{y}(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0\,, \tag{57}$$

dove $Y(t)$ é una matrice fondamentale della $(56)_1$.

Dim.

La (57) é soluzione dell'equazione indefinita $(56)_1$, come si verifica direttamente:

$$\mathbf{y}'(t) = Y'(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 = A(t)Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 = A(t)y(t).$$

Inoltre, la (57) assume per t_0 il dato $\mathbf{y}_0$. Dunque, essa é la soluzione, unica, del problema (56). $\odot$

II-3 Il problema di Cauchy per un'equazione lineare inomogenea

Il Teorema 8 del paragrafo II-1 ci dice che per determinare l'integrale generale della equazione lineare inomogenea:

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \tag{58}$$

occorre e basta determinare l'insieme $\ker L_A$ delle soluzioni dell'equazione omogenea associata ed una soluzione particolare della (58). In questo paragrafo mostreremo come la conoscenza di una matrice fondamentale dell'omogenea é sufficiente anche per determinare tale soluzione particolare dell'equazione completa.

Teorema 15

La funzione:

$$\mathbf{y}(t) = Y(t) \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds \tag{59}$$

é una soluzione particolare dell'equazione inomogenea (58).

Dim.

La verifica é diretta. Infatti, derivando la (59) rispetto al tempo, si trova:

$$\mathbf{y}'(t) = Y'(t) \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds + Y(t)Y^{-1}(t)\mathbf{b}(t) = A(t)Y(t) \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds + \mathbf{b}(t) =$$
$$= A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t). \qquad \odot$$

Immediata conseguenza del precedente risultato é il seguente teorema, la cui dimostrazione é lasciata al lettore, che fornisce la soluzione del problema ai valori iniziali per la (58).

Teorema 16

Il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{60}$$

ha per soluzione:

$$\mathbf{y}(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 + Y(t) \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds. \tag{61}$$

Nel caso particolare che la matrice dei coefficienti della $(60)_1$ sia costante, la soluzione (61) del problema (60) diventa:

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\mathbf{b}(s)ds. \tag{62}$$