Linguaggi e Traduttori – Tempo: 2 ore

Prof. Marco Gavanelli

13 giugno 2022

Esercizio 1 (3 punti)

Si consideri il linguaggio $L = \{a^* a^n c^n | n > 0\} \cup \{a^k c^k a^* | k > 0\}$.

Si scriva una grammatica non ambigua che genera il linguaggio L; si fornisca la grammatica di livello più basso possibile nella classificazione secondo Chomsky (intendendo il livello 3 come minimo e il livello 0 come massimo).

Si classifichi la grammatica secondo Chomsky.

Se è possibile, si mostri l'albero di derivazione della stringa *aaaccc*.

Esercizio 2 (6 punti)

Si consideri la grammatica $G = \langle \{a, b, d\}, \{S, A, B, C\}, P, S \rangle$, dove:

$$P = \begin{array}{l} S \to aAB \mid BAC. \\ A \to aAdA \mid \epsilon \\ B \to bAd \mid dCb \\ C \to dS \mid \epsilon \end{array}$$

1. Si classifichi la grammatica secondo Chomsky.
2. La grammatica è LL(1)? Se sì, si scriva la parsing table del PDA riconoscitore. Se no, si motivi il perché.
3. Qualora nel punto precedente si sia riusciti ad ottenere un automa, si mostri il riconoscimento delle stringhe *ddabdb* e *aadadb* mostrando l'evoluzione dello stack.

Esercizio 3 (4 punti)

Si consideri il linguaggio L generato dall'espressione regolare

$$(a(b^*) + b)^* a$$

Si mostri un automa riconoscitore per tale linguaggio.

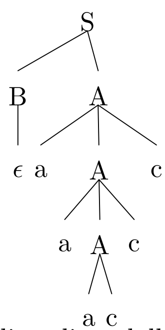
L'automa è deterministico? Se non lo è, si trovi un automa deterministico equivalente.

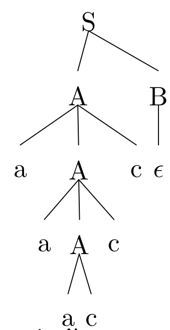
Soluzione 1

Si noti come le stringhe dell'insieme $L' = \{a^n c^n \mid n > 0\}$ siano in comune ad entrambi gli insiemi con cui il linguaggio è definito; la grammatica più immediata $G = \langle \{a, b, c\}, \{S, A, B\}, P, S\rangle$

$$P = \begin{cases} S \to BA \mid AB \\ A \to aAc \mid ac \\ B \to aB \mid \epsilon \end{cases}$$

risulta quindi ambigua. In questa grammatica, si riescono a derivare in due modi diversi tutte le stringhe in cui il numero di b è 0; ad esempio la stringa *aaaccc* ha due alberi di derivazione:





Si può quindi togliere dalla grammatica il caso in cui c'è un numero pari a zero di b, togliendo la stringa vuota dal linguaggio generato da B:

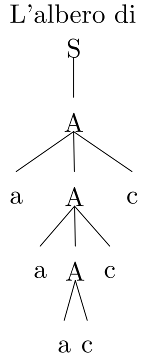
$$P = \begin{array}{l} S \to BA \mid AB \\ A \to aAc \mid ac \\ B \to aB \mid a \end{array}$$

A questo punto, è necessario ri-aggiungere il linguaggio L', che è proprio il linguaggio generato da A:

$$P = \begin{array}{l} S \to BA \mid AB \mid A \\ A \to aAc \mid ac \\ B \to aB \mid a \end{array}$$

La grammatica è di tipo 2 (context free).

L'albero di derivazione:



Soluzione 2

1. La grammatica è di tipo 2 (context-free).

2. Per verificare sela grammatica è LL(1), verifichiamo se la parsing table presenta conflitti. Scriviamo gli insiemi FIRST e FOLLOW dei non terminali:

	$FIRST$	$FOLLOW$
S	$\{a, b, d\}$	$\{b, \$\}$
A	$\{a, \epsilon\}$	$\{b, d, \$\}$
B	$\{b, d\}$	$\{a, b, d, \$\}$
C	$\{d, \epsilon\}$	$\{b, \$\}$

La parsing table:

	a	b	d	$
S	$S \to aAB$	$S \to BAC$	$S \to BAC$	
A	$A \to aAdA$	$A \to \epsilon$	$A \to \epsilon$	$A \to \epsilon$
B		$B \to bAd$	$B \to dCb$	
C		$C \to \epsilon$	$C \to dS$	$C \to \epsilon$

La parsing table non presenta conflitti, quindi la grammatica è LL(1).

3. Riconoscimento LL(1):

Input	Stack
ddabdb$	S$
ddabdb$	BAC$
ddabdb$	dCbAC$
dabdb$	CbAC$
dabdb$	dSbAC$
abdb$	SbAC$
abdb$	aABbAC$
bdb$	ABbAC$
bdb$	BbAC$
bdb$	bAdbAC$
db$	AdbAC$
db$	dbAC$
b$	bAC$
$	AC$
$	C$
$	$

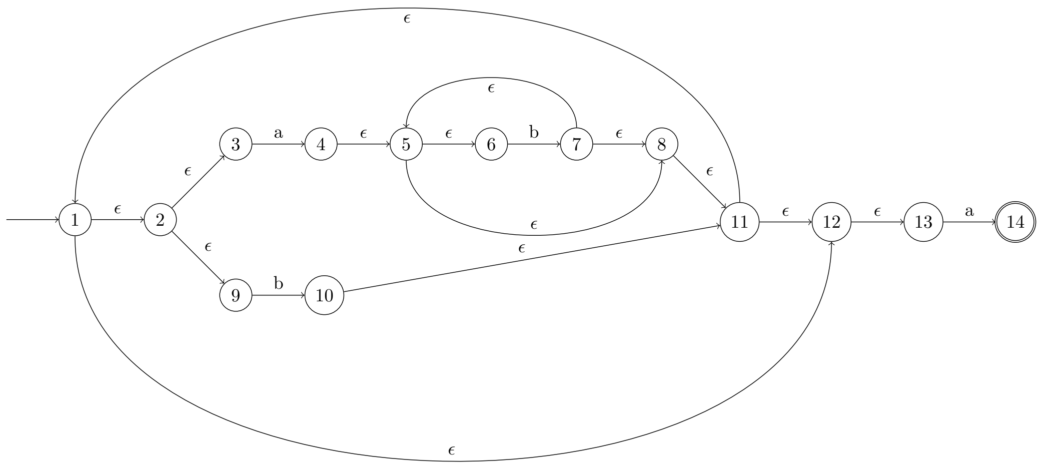
stringa riconosciuta

Input	Stack
aadadb$	S$
aadadb$	aAB$
adadb$	AB$
adadb$	aAdAB$
dadb$	AdAB$
dadb$	dAB$
adb$	AB$
adb$	aAdAB$
db$	AdAB$
db$	dAB$
b$	AB$
b$	B$
b$	bAd$
$	Ad$
$	d$

stringa *non* riconosciuta

Soluzione 3

Dalla espressione regolare si può ottenere direttamente l'automa riconoscitore con ϵ-mosse:



Ovviamente tale automa è non deterministico, visto che contiene ϵ-mosse.

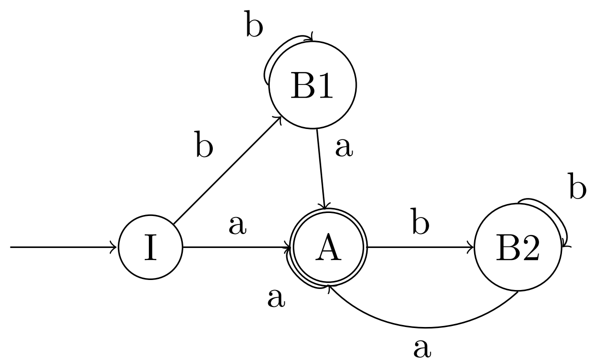
L'automa riconoscitore senza ϵ-mosse (deterministico) ha come nodi degli insiemi di nodi dell'automa con ϵ-mosse; ciascuno di questi insiemi è la ϵ-closure di un nodo dell'automa originario. La tabella di transizione diventa:

$Nodo$	a	b
$\{1,2,3,9,12,13\}$	$\{4,5,6,8,11,1,2,3,9,12,13,14\}$	$\{10,11,1,2,3,9,12,13\}$
$\{4,5,6,8,11,1,2,3,9,12,13,14\}$	$\{4,5,6,8,11,1,2,3,9,12,13,14\}$	$\{7,5,6,8,11,1,2,3,9,12,13\}$
$\{10,11,1,2,3,9,12,13\}$	$\{4,5,6,8,11,1,2,3,9,12,13,14\}$	$\{10,11,1,2,3,9,12,13\}$
$\{7,5,6,8,11,1,2,3,9,12,13\}$	$\{4,5,6,8,11,1,2,3,9,12,13,14\}$	$\{7,5,6,8,11,1,2,3,9,12,13\}$

Se rinominiamo i nodi:

$$I = \{1,2,3,9,12,13\}$$
$$A = \{4,5,6,8,11,1,2,3,9,12,13,14\}$$
$$B1 = \{10,11,1,2,3,9,12,13\}$$
$$B2 = \{7,5,6,8,11,1,2,3,9,12,13\}$$

l'automa può essere rappresentato in forma grafica:


b
B1
b
a
a
b
b
I
A
B2
a
a