



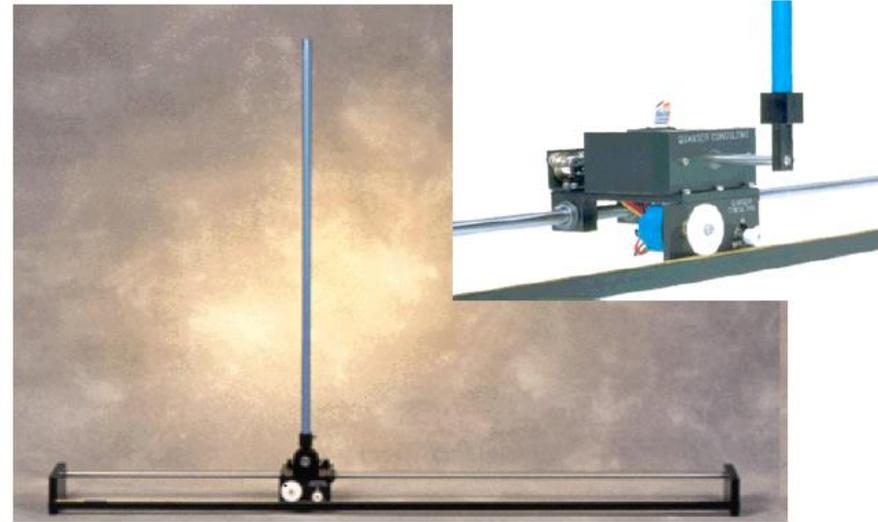
Tecniche di controllo multivariabile

Note Applicative

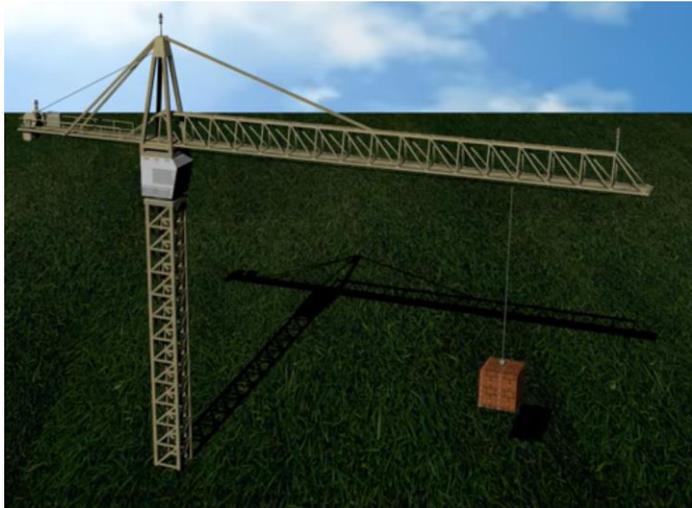
Pendolo inverso – sistema didattico



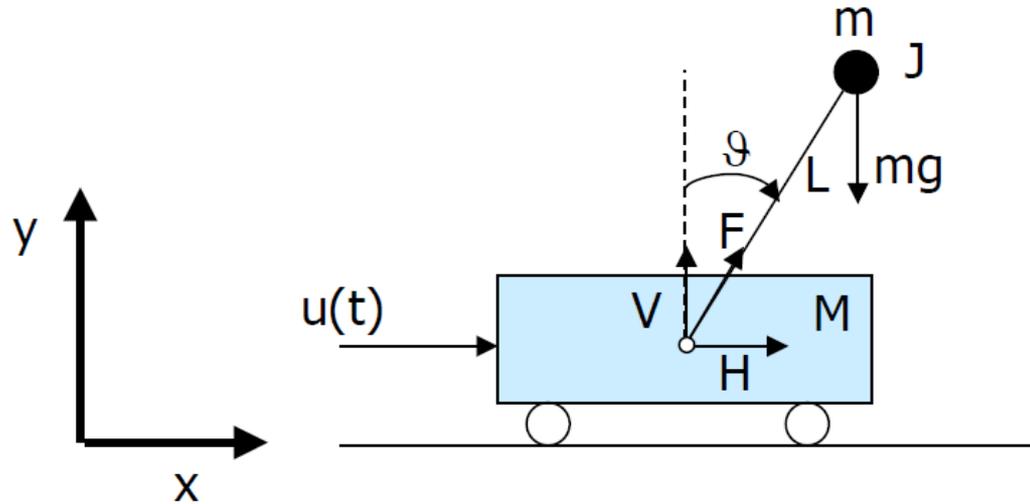
QUANSER
INNOVATE. EDUCATE.



Pendolo inverso – ... con applicazioni reali



Pendolo inverso con carrello - Modello



La posizione dell'asta rispetto al carrello è individuata da ϑ mentre x individua la posizione del carrello.

L'azione di controllo è esercitata tramite la forza lineare $u(t)$ applicata al carrello.

Lo studio di tale sistema "didattico" è utile per le analogie con molte altre applicazioni di controllo di vario genere (es. i sistemi guida missili, il controllo di gru, il Segway® ecc.).

Pendolo inverso con carrello - Modello



Il sistema è composto da due sottosistemi: **l'asta e il carrello.**

L'asta è vincolata al carrello tramite una cerniera che vincola il movimento alla rotazione attorno all'asse della cerniera (perpendicolare a xy).

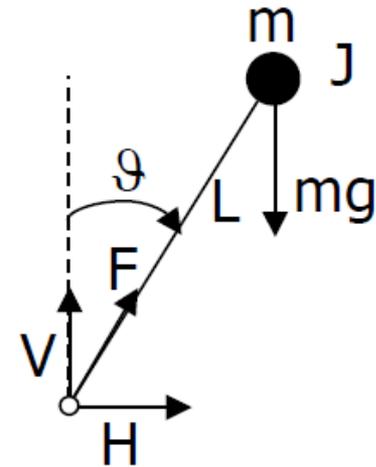
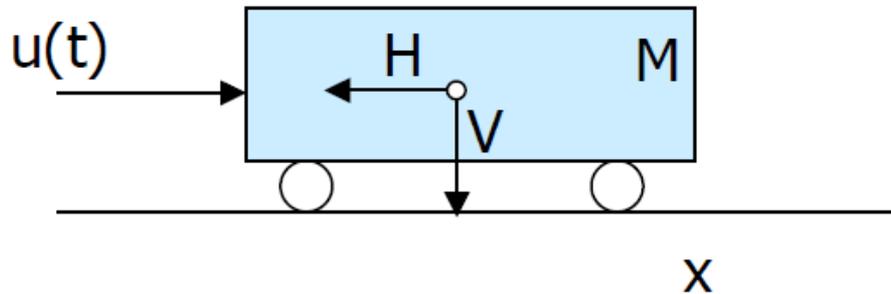
Il carrello può muoversi solo lungo l'asse x per l'azione di una forza $u(t)$. L'asta e il carrello interagiscono tramite una forza F di reazione, diretta lungo l'asta, che può essere scomposta in una componente verticale V e una componente orizzontale H .

Ipotesi semplificative: no attriti nella cerniera e fra carrello e piano di scorrimento, masse concentrate nei baricentri, inerzia dell'asta trascurabile.

Il modello del sistema si può ottenere facendo bilanci di forza e coppia sia per l'asta che per il carrello.

Pendolo inverso con carrello - Modello

N.B. Forze di reazione uguali ed opposte a causa del vincolo dato dalla cerniera



Pendolo inverso con carrello - Modello

Dinamica dell'asta

Dal bilancio delle forze sulla massa m (la massa dell'asta è supposta trascurabile), si ottiene che:

$$m\vec{a}_a = \vec{F} + m\vec{g}$$

Tenendo conto che l'accelerazione di gravità è diretta nel senso negativo dell'asse y e che H e V sono, rispettivamente, le componenti lungo l'asse x e lungo l'asse y della forza F , il bilancio di forze può essere scritto come una coppia di equazioni che descrivono il comportamento dell'asta lungo l'asse x e lungo l'asse y :

$$\begin{cases} m \frac{d^2}{dt^2} (x + L \sin \vartheta) = H \\ m \frac{d^2}{dt^2} (L \cos \vartheta) = V - mg \end{cases}$$

Pendolo inverso con carrello - Modello

Il bilancio delle coppie ci dà la seguente equazione:

$$J\ddot{\vartheta} = VL \sin \vartheta - HL \cos \vartheta$$

Che, trascurando J , diventa: $VL \sin \vartheta = HL \cos \vartheta$

La dinamica dell'asta, pertanto, è rappresentata dalle seguenti equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2}{dt^2} (x + L \sin \vartheta) = H \\ m \frac{d^2}{dt^2} (L \cos \vartheta) = V - mg \\ VL \sin \vartheta = HL \cos \vartheta \end{array} \right.$$

Pendolo inverso con carrello - Modello

Dinamica del carrello

La dinamica del carrello si ottiene semplicemente da:

$$M\vec{a}_c = \vec{u} + \vec{F}_{car}$$

Siccome il carrello può muoversi solo lungo l'asse x (le forze agenti sono H e u), l'equazione che descrive la dinamica del carrello è:

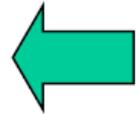
$$M\ddot{x} = u - H$$

Pendolo inverso con carrello - Modello

Svolgendo i calcoli, dalle equazioni dinamiche dell'asta, si trova che:

$$V(t) = mg - mL\ddot{\vartheta} \sin \vartheta - mL\dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta$$

$$H(t) = m\ddot{x} + mL\ddot{\vartheta} \cos \vartheta - mL\dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta$$



sostituendo le espressioni di $V(t)$ e di $H(t)$ nel bilancio di coppia e nella dinamica del carrello, si può **compattare il modello** come segue:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + mL\ddot{\vartheta} \cos \vartheta - mL\dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta = u(t) \\ m\ddot{x} \cos \vartheta + mL\ddot{\vartheta} - mg \sin \vartheta = 0 \end{cases}$$

Modello
Completo
COMPATTO

Pendolo inverso con carrello - Modello

Oppure, esprimendo le equazioni nella forma più consueta per modelli nello spazio degli stati:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{mL\dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta - mg \sin \vartheta \cos \vartheta + u}{M + m \sin^2 \vartheta} \\ \ddot{\vartheta} = \frac{-mL\dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + (M + m)g \sin \vartheta - u \cos \vartheta}{(M + m \sin^2 \vartheta)L} \end{cases}$$

che, ponendo

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T = [x \quad \dot{x} \quad \vartheta \quad \dot{\vartheta}]^T$$

diventa una $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ come segue...

Pendolo inverso con carrello - Modello

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{mLx_4^2 \sin x_3 - mg \sin x_3 \cos x_3 + u}{M + m \sin^2 x_3} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{-mLx_4^2 \sin x_3 \cos x_3 + (M + m)g \sin x_3 - u \cos x_3}{(M + m \sin^2 x_3)L} \end{array} \right.$$

Pendolo inverso con carrello – Controllo LQ

I punti di equilibrio sono tutti i vettori $x_p = [x_d \ 0 \ 0 \ 0]^T$
con x_d qualunque, oppure:

$$x_p = [x_d \ 0 \ \pm \pi \ 0]^T$$

che corrispondono ovviamente al pendolo sulla verticale verso l'alto (instabile) o verso il basso (stabile).

Si può notare che le approssimazioni lineari in queste due tipologie di punti non dipendono da x_d , inoltre sia nell'equilibrio stabile che in quello instabile il valore di equilibrio dell'ingresso è $u_p = 0$

Questo significa che il problema di controllo lineare è relativamente più semplice che in altri tipi di problemi, nei quali le approssimazioni lineari potrebbero essere differenti a seconda del punto di equilibrio e, soprattutto, richiedere diverse condizioni "nominali" per l'ingresso.

Pendolo inverso con carrello – Controllo LQ

Considerando i punti di equilibrio $x_p = [x_d \ 0 \ 0 \ 0]^T$

con x_d qualunque, possiamo ottenere:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

Con linearizzazione approssimata: $\dot{\mathbf{x}} \approx \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{[x=0, u=0]} \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_{[x=0, u=0]} u$

Oppure, considerando che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x_3 \approx x_3 \\ \cos x_3 \approx 1 \\ \sin^2 x_3 = 1 - \cos^2 x_3 \approx 0 \\ \dot{x}_3 \approx 0 \end{array} \right.$$

Pendolo inverso con carrello – Controllo LQ

Otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-mg}{M}x_3 + \frac{u}{M} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(M+m)g}{ML}x_3 - \frac{u}{ML} \end{cases}$$

Perciò:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{ML} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{ML} \end{pmatrix}$$

Pendolo inverso con carrello – Controllo LQ

Cerchiamo: $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$

tale da minimizzare: $\mathbf{J} = \int_0^{+\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + uRu) dt$

Se la coppia (\mathbf{A}, \mathbf{B}) è stabilizzabile, la soluzione al progetto LQ è:

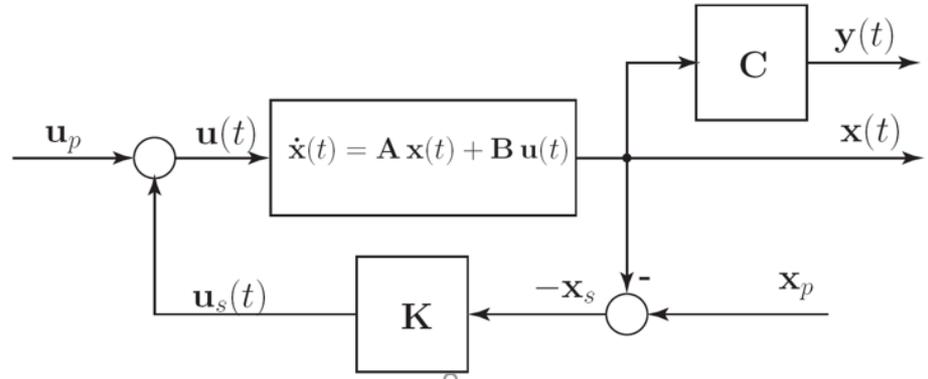
$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S}$$

nella quale \mathbf{S} è la soluzione della Equazione Algebrica di Riccati (ARE):

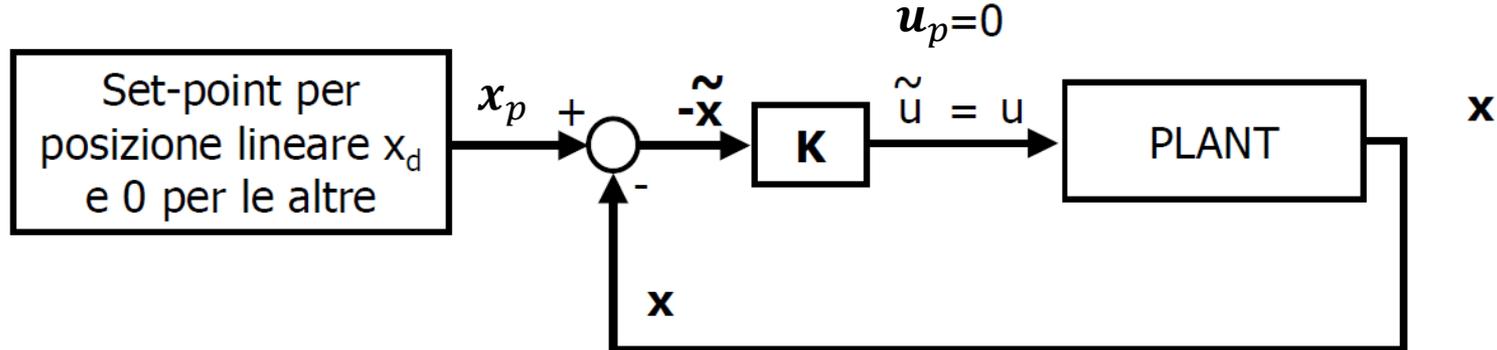
$$\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} = \mathbf{0}$$

Pendolo inverso con carrello – Controllo LQ

➔ Schema di controllo con set-point diverso dall'origine

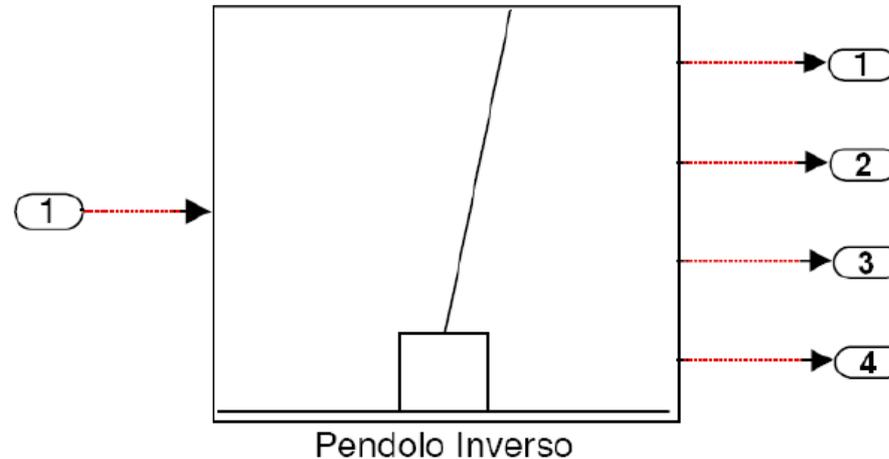


➔ Schema di controllo con $u_p = 0, x_p = [x_d, 0, 0, 0]$



Pendolo inverso con carrello – Controllo LQ in Matlab

Dato un modello Simulink con il solo sistema da controllare e nodi di I/O:



all'interno del quale le condizioni iniziali dello stato siano modificabili, è possibile usare la funzione

```
[A, B, C, D] = linmod('nome_modello_sim', ...)
```

per ottenere le matrici A, B, C e D dell'approssimazione lineare.

Pendolo inverso con carrello – Controllo LQ in Matlab

Date le matrici A e B (C si suppone sempre l'identità, cioè lo stato completamente misurabile, e $D = 0$) dell'approssimazione lineare in un determinato punto di lavoro, è possibile progettare un controllore ottimo con la funzione:

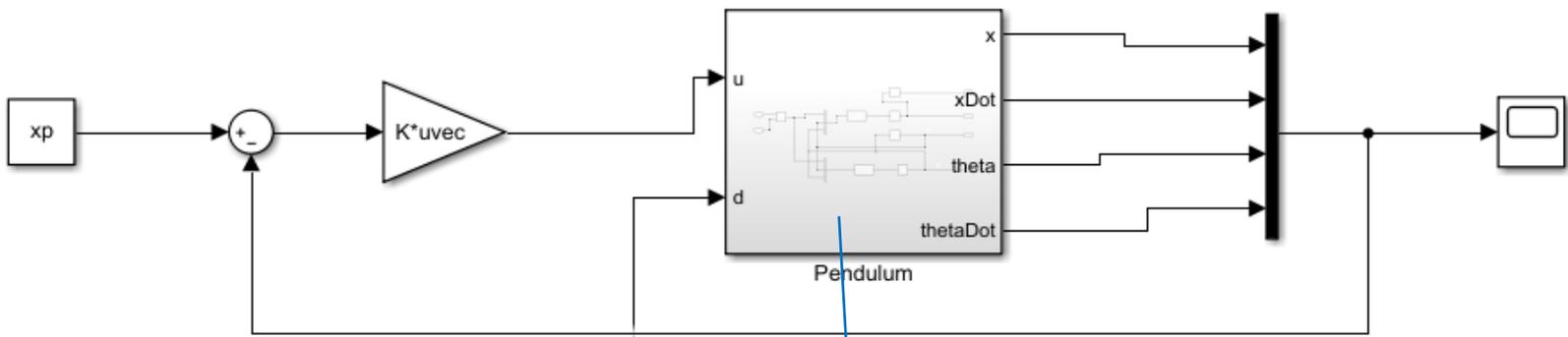
$$[K, S, E] = \text{lqr}(A, B, Q, R, N)$$

nella quale le matrici Q, R e N determinano la funzione costo:

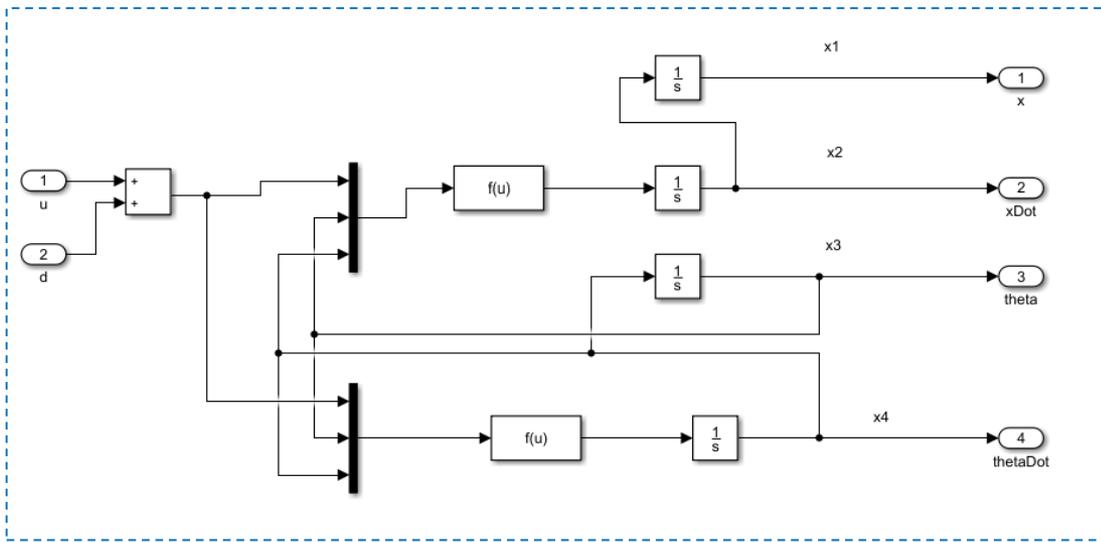
$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u) dt$$

K è la matrice dei guadagni della retroazione dello stato, S è la soluzione dell'equazione di Riccati ed E è il vettore degli autovalori del sistema in anello chiuso.

Pendolo inverso con carrello – Controllo LQ in Matlab



Disturbo esterno (treno di impulsi)



N.B. i blocchi $f(u)$ rappresentano le funzioni non lineari della slide 12

Pendolo inverso con carrello – Controllo Sliding Mode

Passo I - cancellazione parziale delle nonlinearità:

Applicando la legge di controllo:

$$u = (M + m \sin^2 x_3)v - (mLx_4^2 \sin x_3 - mg \sin x_3 \cos x_3)$$

si semplifica (tramite feedback) il modello (ancora non lineare) a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{mLx_4^2 \sin x_3 - mg \sin x_3 \cos x_3 + u}{M + m \sin^2 x_3} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{-mLx_4^2 \sin x_3 \cos x_3 + (M + m)g \sin x_3 - u \cos x_3}{(M + m \sin^2 x_3)L} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = v \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{g \sin x_3 - v \cos x_3}{L} \end{array} \right.$$

Pendolo inverso con carrello – Controllo Sliding Mode

Passo II – Feedback Linearization (approssimata):

N.B. La linearizzazione completa input-state non è possibile!

Però, se consideriamo come uscita del sistema la seguente

$$y = h(\mathbf{x}) = x_1 + L \ln \left(\frac{1 + \sin x_3}{\cos x_3} \right)$$

si può ottenere il seguente cambiamento di variabili ($y = \Phi_1(\mathbf{x}) = z_1$)

$$\dot{y} = x_2 + \frac{Lx_4}{\cos x_3} \quad (= \Phi_2(\mathbf{x}) = z_2)$$

$$\ddot{y} = \tan x_3 \left(g + \frac{Lx_4}{\cos x_3} \right) \quad (= \Phi_3(\mathbf{x}) = z_3)$$

$$\ddot{\ddot{y}} = \left(\frac{2}{\cos^3 x_3} - \frac{1}{\cos x_3} \right) Lx_4^3 + \left(\frac{3g}{\cos^2 x_3} - 2g \right) x_4 - \underbrace{2x_4 \tan x_3 v}_{\text{trascurato!}} \quad (= \Phi_4(\mathbf{x}) = z_4)$$

$$y^{(4)} = f_1(\mathbf{x}) + g_1(\mathbf{x})v = \dot{z}_4$$

Pendolo inverso con carrello – Controllo Sliding Mode

Per completezza, le funzioni che compaiono nell'ultima equazione sono:

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{\sec(x_3)}{L} \left(g^2 \tan(x_3) + 9 g L x_4^2 \sec(x_3) \tan(x_3) + 5 L^2 x_4^4 \sec(x_3)^2 \tan(x_3) + g (3 L x_4^2 + 2 g \cos(x_3)) \sin(x_3) \tan(x_3)^2 + L^2 x_4^4 \tan(x_3)^3 \right)$$

$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{\sec(x_3) (-g - 3 L x_4^2 \sec(x_3)) + (-3 L x_4^2 - 2 g \cos(x_3)) \sin(x_3) \tan(x_3)}{L}$$

Pendolo inverso con carrello – Controllo Sliding Mode

Passo III – progetto Sliding Mode Control

N.B. L'uscita sulla quale fare il tracking è quella definita in precedenza:

$$e = y - y_d \quad (\text{comunque } y_d = 0)$$

$$\begin{aligned} s(\mathbf{x}, t) &= \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^3 e \\ &= \ddot{e} + 3\lambda\ddot{e} + 3\lambda^2\dot{e} + \lambda^3e \end{aligned}$$

Pendolo inverso con carrello – Controllo Sliding Mode

INFINE, poichè:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= e^{(4)} + 3\lambda\ddot{e} + 3\lambda^2\dot{e} + \lambda^3\dot{e} \\ &= y^{(4)} + 3\lambda\ddot{y} + 3\lambda^2\dot{y} + \lambda^3\dot{y} \\ &= f_1(\mathbf{x}) + g_1(\mathbf{x})v + 3\lambda\ddot{y} + 3\lambda^2\dot{y} + \lambda^3\dot{y} \\ &= b(\mathbf{x}) + a(\mathbf{x})v \end{aligned}$$

Dalla precedente si può verificare che la legge di controllo:

$$v = -\frac{b(\mathbf{x})}{a(\mathbf{x})} + K \text{sign}(s)$$

porta il sistema in Sliding Mode sulla superficie $s(\mathbf{x},t)$ con opportuno K