CONTROLLO DI SISTEMI ROBOTICI

- Stima dello stato in ambiente deterministico
- Stima ottima dello stato in ambiente stocastistico

Ringraziamenti

- Queste dispense sono state preparate utilizzando il materiale (testo e figure) del Prof. Thomas Parisini, dell'Università di Trieste - Dipartimento di Elettrotecnica, Elettronica e Informatica

- Home page: *http://control.units.it/parisini/*

Stima dello Stato

- Quanto visto finora sulla retroazione dello stato assume che ciascuna componente dello stato del sistema sia nota in ciascun istante di tempo. In molti casi tuttavia lo stato del sistema non è interamente accessibile per varie ragioni:
  - Alcune variabili di stato possono essere **non misurabili** (per esempio la temperatura in una parte non accessibile di un motore a reazione);
  - Il sensore che servirebbe per la misura è **troppo costoso**;
  - L’ambiente genera disturbi così elevati da rendere le misure **troppo rumorose** e quindi inaffidabili
- Allora **si rende necessario stimare lo stato del sistema** sulla base delle informazioni disponibili (tipicamente ingressi e uscite in un determinato intervallo di tempo)

Stima dello stato – Caratteristiche desiderabili

La stima $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ dello stato di un sistema dinamico $\boldsymbol{x}$(t) per essere accettabile deve possedere le seguenti caratteristiche:

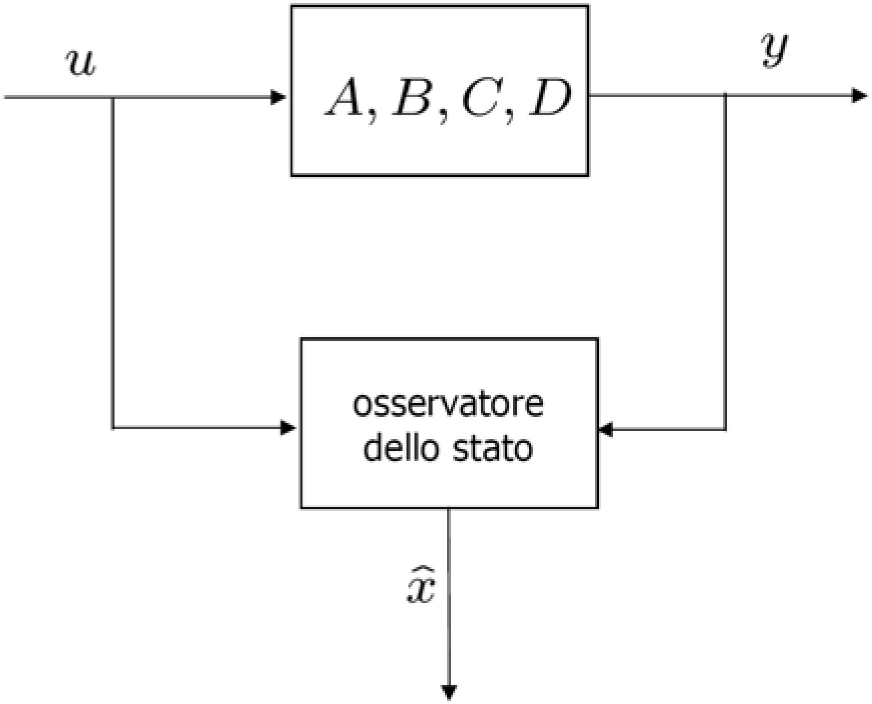
- **Asintoticità**: l'errore di stima $\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$ convergere a zero per $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{e}(t) = \lim_{t\to\infty} [\boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)] = \boldsymbol{0}$$

- **Dinamica arbitraria**: l'errore di stima converge a zero con velocità che può essere scelta arbitrariamente dal progettista

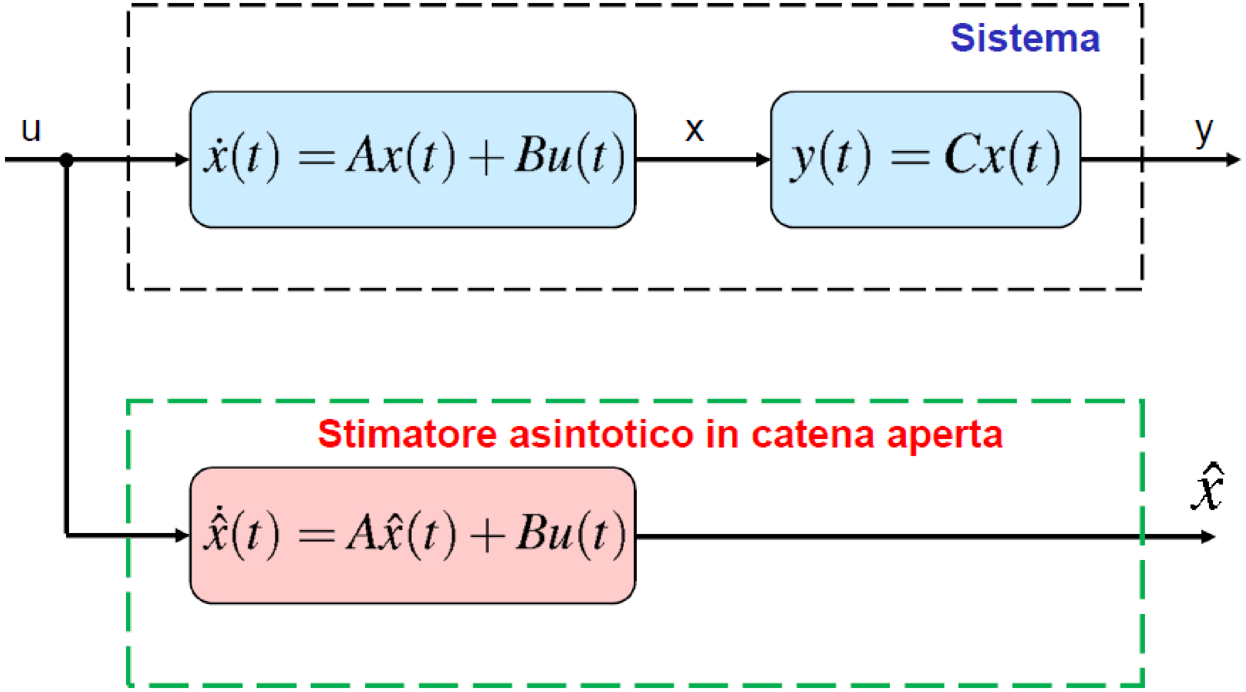
Osservatore dello stato

- Il dispositivo che, sulla base della conoscenza di ingresso $\boldsymbol{u}$ e uscita $\boldsymbol{y}$ in un certo intervallo di tempo, fornisce una stima $\hat{\boldsymbol{x}}$, dello stato $\boldsymbol{x}$ di un sistema dinamico prende il nome di **osservatore dello stato**



Osservatore asintotico dello stato in catena aperta

- L'osservatore asintotico dello stato in catena aperta, detto anche osservatore modello, (rappresentato dal seguente schema a blocchi) genera una stima dello stato sulla base della conoscenza dell'ingresso, ipotizzando un modello lineare stazionario per il sistema

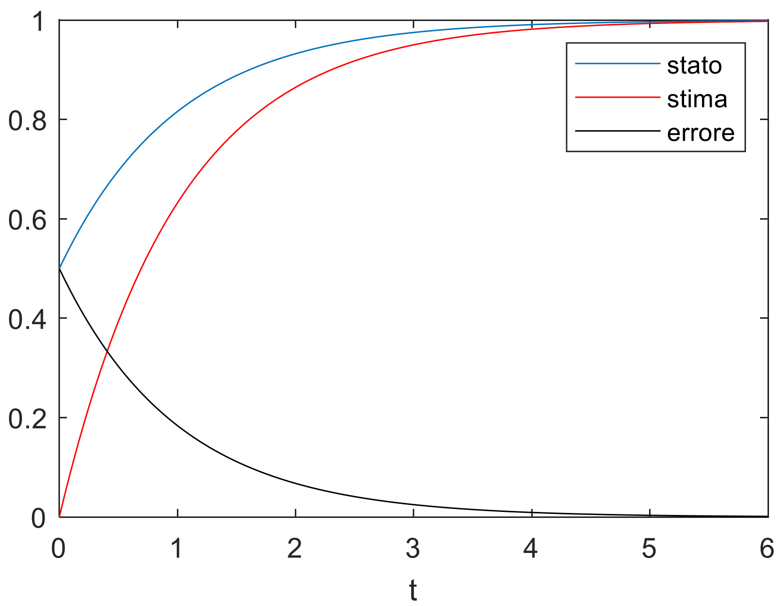


Osservatore asintotico dello stato in catena aperta

- Supponendo che il sistema sia LTI, con matrici **A**, **B** note, l'errore di stima risulta:

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \qquad \hat{\boldsymbol{x}}(t) = e^{At}\hat{\boldsymbol{x}}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

$$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t) = e^{At}(\boldsymbol{x}_0 - \hat{\boldsymbol{x}}_0) = e^{At}\boldsymbol{e}_0$$

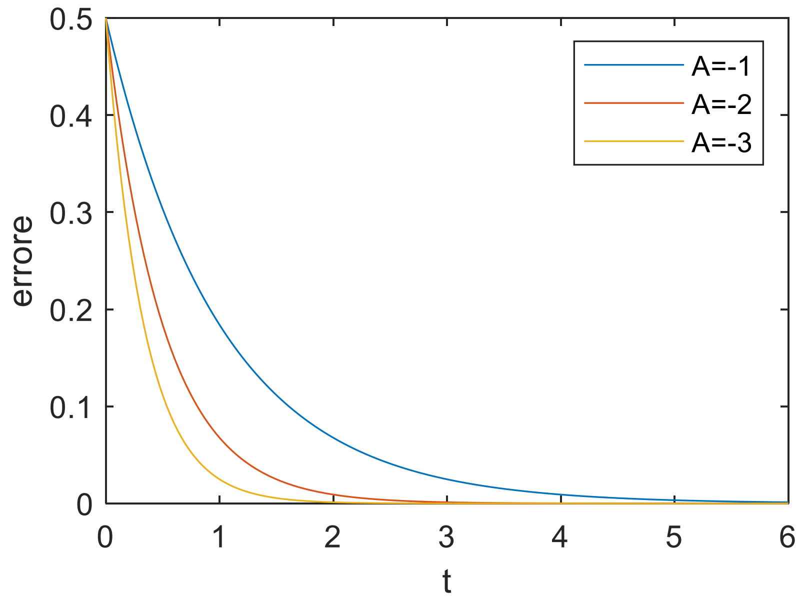


Esempio con:

$$A = -1, B = 1, u(t) = 1,$$
$$x_0 = 0.5, \hat{x}_0 = 0$$

Osservatore asintotico dello stato in catena aperta

- L’errore di stima converge a zero quando il tempo tende all’infinto solo se il sistema sotto osservazione è asintoticamente stabile (autovalori di **A** a parte reale negativa);
- L’errore di stima converge a zero tanto più velocemente quanto più sono negativi gli autovalori di **A**;
- La dinamica dell’errore **non** può essere scelta arbitrariamente dal progettista



Osservatore asintotico dello stato in catena chiusa

- Dato il sistema LTI con ingressi e uscite misurabili:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

- Si definisce osservatore asintotico dello stato in catena chiusa, o osservatore identità o di Luenberger il seguente sistema dinamico:

Matrice opportunamente scelta

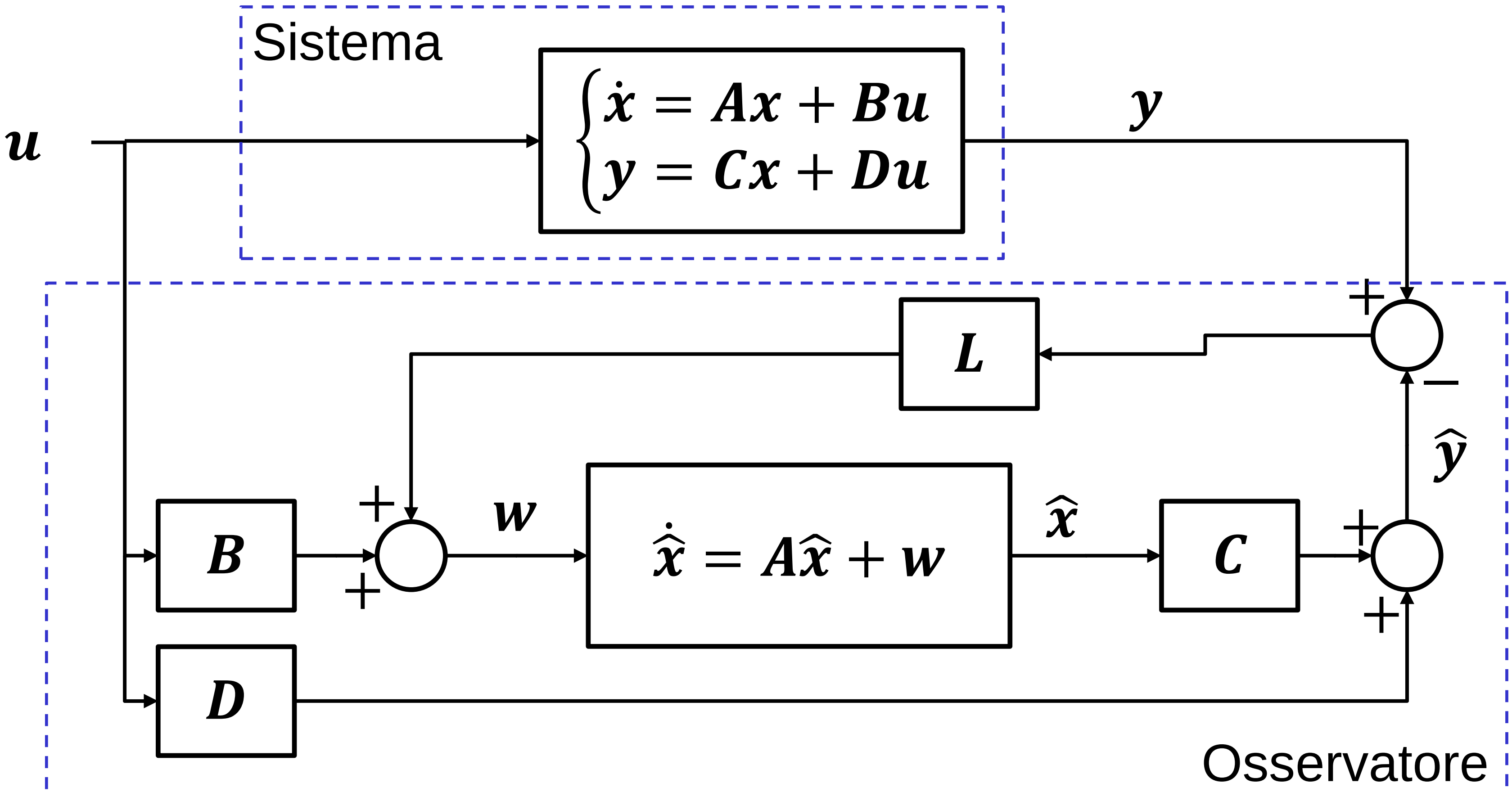
$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t)) \\ \hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

Innovazione (differenza tra uscita misurata e stimata)

Uscita stimata sulla base dello stato stimato

Osservatore asintotico dello stato in catena chiusa

- L'osservatore di Luenberger è un sistema dinamico rappresentato dal seguente schema a blocchi



Osservatore di Luenberger, note

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t)) \\ \hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

- L'osservatore di Luenberger è un sistema dinamico lineare;
- L'ordine di questo sistema è lo stesso del sistema sotto osservazione;
- Lo stato dell'osservatore è $\hat{\boldsymbol{x}}$, cioè la stima dello stato del sistema sotto osservazione;
- Nell'equazione che regola l'evoluzione nel tempo dello stato dell'osservatore compare, oltre all'ingresso $\boldsymbol{u}$, anche un termine correttivo, dato da $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}})$, con $\boldsymbol{L}$ scelta dal progettista

Osservatore di Luenberger, dinamica della stima

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} + Du \end{cases}$$

- Sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + (B - LD)u + Ly$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + \begin{bmatrix} B - LD & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$

- Pertanto:
  - La dinamica dello stato stimato è governata da $(A - LC)$
  - Il vettore d'ingresso dell'osservatore è composto dall'ingresso e dall'uscita del sistema sotto osservazione

Osservatore di Luenberger – Dinamica dell'errore

- Definendo l'errore di stima $\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$, si trova che la relativa dinamica è data da:

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} - [\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}})]$$

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} - [\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{u})]$$

$$\dot{\boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{e}$$

- Pertanto l'errore di stima è un sistema lineare autonomo (senza ingresso) la cui funzione di transizione è:

$$\boxed{\boldsymbol{e}(t) = e^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})t}\,\boldsymbol{e}(0)}$$

Osservatore di Luenberger – Dinamica dell'errore

$$\boldsymbol{e}(t) = e^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})t}\,\boldsymbol{e}(0)$$

- L'errore converge a zero quando il tempo tende all'infinito indipendentemente dall'errore iniziale se gli autovalori di $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}$ sono a parte reale negativa

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}$ stabile $\longrightarrow$ $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{e}(t) = 0$ $\longrightarrow$ asintoticità

- È possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori di $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}$ tramite la scelta opportuna di $\boldsymbol{L}$ (matrice di dimensioni $n \times p$) se e solo se la coppia $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ è **osservabile**

$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ osservabile $\longrightarrow$ dinamica arbitraria dell'errore di stima

Osservatore di Luenberger – Dinamica dell'errore

- Se non si hanno specifiche sulla velocità di convergenza dell'errore di stima basta scegliere $\boldsymbol{L}$ (guadagno dell'osservatore di Luenberger) in modo che $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}$ abbia autovalori a parte reale negativa, così facendo l'errore di stima tende a zero almeno per t tendente a infinito
- Se il sistema in esame è osservabile la dinamica dell'errore di stima (e quindi la velocità di convergenza) può essere arbitrariamente fissata attraverso la scelta di $\boldsymbol{L}$
- Se il sistema non è completamente osservabile, è ancora possibile progettare l'osservatore di Luenberger se gli autovalori della parte non osservabile sono a parte reale negativa (sistema **rilevabile**)

Osservatore di Luenberger – Scelta di L

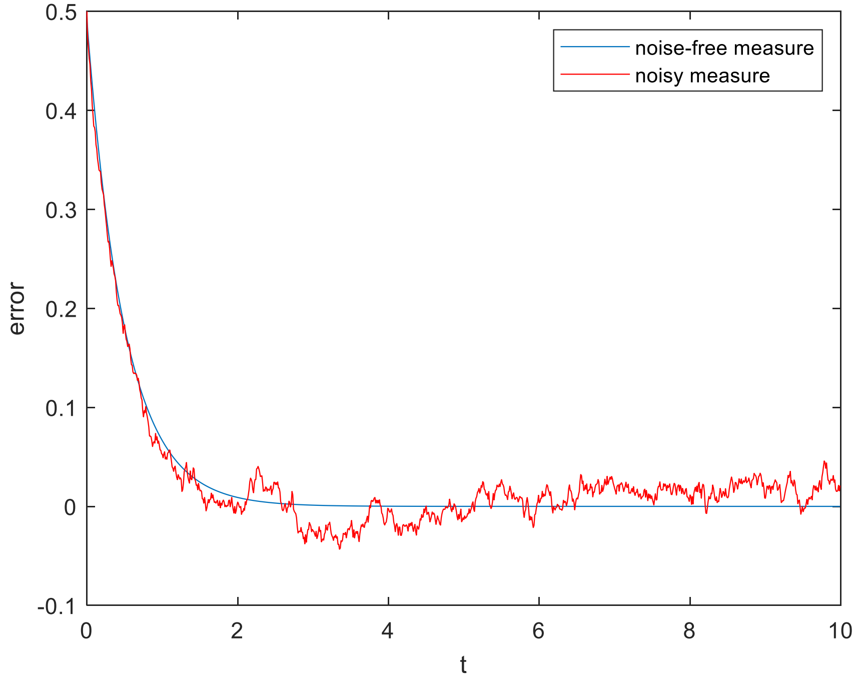
- È ovviamente auspicabile non solo che l'errore di stima vada a zero, ma anche che vada a zero in maniera **sufficientemente veloce**
- Pertanto gli autovalori dell'osservatore dovranno essere sufficientemente lontani dall'asse immaginario
- Tuttavia, autovalori troppo negativi rendono l'osservatore troppo sensibile all'inevitabile **rumore** di misura, riducendo l'accuratezza della stima
- Riassumendo il progetto dell'osservatore deve tenere conto di due opposte esigenze:
  - **Rapidità di convergenza della stima**
  - **Insensibilità al rumore di misura**

Osservatore di Luenberger – Scelta di L

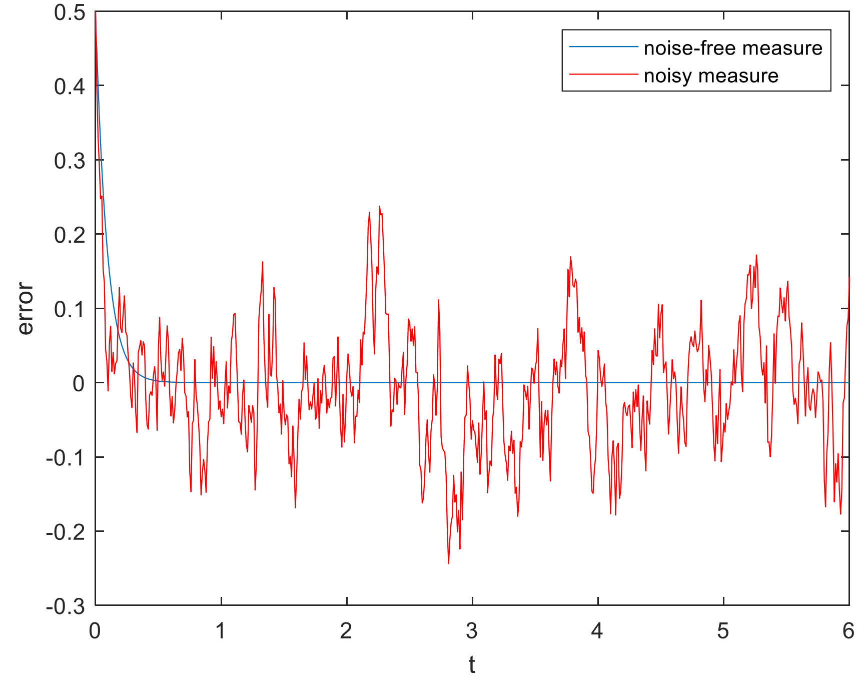
Esempio con:

$$A = -1, B = 1, C = 1, D = 0, u(t) = 1, x_0 = 0.5, \hat{x}_0 = 0$$

$$L = 1, (A - LC) = -2$$



$$L = 10, (A - LC) = -11$$



Osservatore di Luenberger – Scelta di L

- La presenza del rumore di misura è quindi l'unica ragione che impedisce l'impiego di autovalori arbitrariamente negativi e quindi stime arbitrariamente veloci
- Questo perché l'osservatore è tipicamente implementato tramite un calcolatore digitale dove non esistono limitazioni all'impiego di guadagni elevati

- Nel caso della scelta del guadagno **K** della retroazione dello stato invece vi è anche il limite fisico dovuto alle massime sollecitazioni che gli attuatori possono tollerare

Stima Ottima dello stato in ambiente stocastico

- Il rumore pone un vincolo alla durata del transitorio dell'osservatore;

- Assumendo di poter caratterizzare il rumore che coinvolge le misure $\boldsymbol{y}$ e i disturbi sullo stato $\boldsymbol{x}$ come **processi stocastici**, è possibile scegliere la matrice $\boldsymbol{L}$, in maniera **ottima** rispetto ad un determinato criterio

- Il sistema che realizza tale ottimizzazione è il filtro di Kalman-Bucy (comunemente noto come **filtro di Kalman**)

Rudolf Kalman…

- Kalman R. E., *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems,* Transactions of the ASME--Journal of Basic Engineering (1960)

Il presidente Barack Obama ha conferito, il 7 Ottobre 2009, la National Medal of Science al Prof. Rudolf Kalman. Immagine della cerimonia alla Casa Bianca preso dal link: http://sting.deis.unibo.it/sting/Img/

Il Filtro di Kalman

- Il filtro di Kalman è un osservatore ottimo sotto certe ipotesi sul rumore e rispetto ad un certo criterio di ottimalità
- Si consideri il seguente modello di un sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \end{cases}$$

- Con:
  - $\boldsymbol{w}(t)$ rumore di processo
  - $\boldsymbol{v}(t)$ rumore di misura
  - $\boldsymbol{y}(t)$ misure
  - $\boldsymbol{\Gamma}$ matrice d'ingresso dei disturbi

$\boldsymbol{w}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$: Variabili indipendenti non manipolabili, non note e non misurabili ma caratterizzabili statisticamente

Filtro di Kalman – ipotesi sul rumore

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}(t) \end{cases}$$

- Si assume che $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{v}$ siano processi stocastici Gaussiani, stazionari e a media nulla:

$$E\big(\boldsymbol{w}(t)\big) = 0, \forall t \qquad E\big(\boldsymbol{v}(t)\big) = 0, \forall t$$

$$E\big(\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}^T(t)\big) = \boldsymbol{W}, \forall t \qquad E\big(\boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{v}^T(t)\big) = \boldsymbol{V}, \forall t$$

$$E\big(\boldsymbol{w}(t_1)\boldsymbol{w}^T(t_2)\big) = \boldsymbol{0}, \forall t_1 \neq t_2 \qquad E\big(\boldsymbol{v}(t_1)\boldsymbol{v}^T(t_2)\big) = \boldsymbol{0}, \forall t_1 \neq t_2$$

- Con:
  - $\boldsymbol{W}$ matrice di covarianza del rumore di processo
  - $\boldsymbol{V}$ matrice di covarianza del rumore di misura
  - $\boldsymbol{W}$ e $\boldsymbol{V}$ matrici simmetriche definite positive

Filtro di Kalman – ipotesi sul rumore

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}(t) \end{cases}$$

- I rumori di processo e di misura sono fra loro indipendenti:

$$E\left(\boldsymbol{w}(t_1)\boldsymbol{v}^T(t_2)\right) = \boldsymbol{0}, \forall t_1, t_2$$

- Si assume infine che lo stato iniziale sia una variabile aleatoria Gaussiana con media e covarianza nota, indipendente dalle altre:

$$E\left(\boldsymbol{x}(0)\right) = \boldsymbol{x}_0$$

$$E[(\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_0)^T] = \boldsymbol{P}_{e0}$$

$\boldsymbol{P}_e(t)$ matrice di covarianza dell'errore di stima

Filtro di Kalman stazionario (teorema)

- Nelle ipotesi enunciate, se le coppie $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\Gamma})$ e $(\boldsymbol{A}, \mathbf{C})$ sono rispettivamente controllabile e osservabile, allora l'osservatore:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}) \\ \hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}} \end{cases} \longrightarrow \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}$$

- è **stabile** ed **ottimo** perché minimizza la covarianza dell'errore di stima a regime $\lim_{t\to\infty} E[(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})^{\boldsymbol{T}}] = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P_e}(t)$

- Scegliendo il guadagno come segue:

$$\boldsymbol{L} \Rightarrow \boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{P}_e^* \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{V}^{-1}$$

- Dove $\boldsymbol{P}_e^*$ è l'unica soluzione simmetrica e definita positiva dell'equazione algebrica di Riccati duale:

$$\boldsymbol{P}_e \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_e - \boldsymbol{P}_e \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_e + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Gamma}^T = \boldsymbol{0}$$

Osservazione

- L'equazione algebrica di Riccati appena vista si può ottenere dall'equazione di Riccati per il controllo LQ

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{S} + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$$

Effettuando le seguenti sostituzioni:

- $\boldsymbol{S} \rightarrow \boldsymbol{P}_e$
- $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A}^T$
- $\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C}^T$
- $\boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{\Gamma}^T$
- $\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{W}$
- $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{V}$

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} &= A\,x + Bu + \Gamma w \\ y &= C\,x + v \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se i rumori di processo e misura sono descritti da

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V = \rho > 0, \; W = 1$$

il filtro ottimo è dato da

$$L^* = P_e^* C^T V^{-1}$$

dove P_e^* è la soluzione simmetrica e definita positiva di

$$P_e A^T + A P_e - P_e C^T V^{-1} C P_e + \Gamma W \Gamma^T = 0$$

Esempio

Sostituendo si perviene all'equazione:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P_e + P_e \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\rho} P_e \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \;\; 1] P_e + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \;\; 0]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione definita positiva è $P_e^* = \begin{bmatrix} \sqrt{2\sqrt{\rho}} & \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} & \sqrt{2\rho\sqrt{\rho}} \end{bmatrix}$

da cui $L^* = P_e^* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\rho} = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{2\rho\sqrt{\rho}} \end{bmatrix} \frac{1}{\rho}$

Esempio – Osservazione

$$L^* = P_e^* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\rho} = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{2\rho\sqrt{\rho}} \end{bmatrix} \frac{1}{\rho}$$

Entrambe le componenti della matrice di guadagno dell'osservatore sono funzioni monotone decrescenti di ρ .

Quindi se la covarianza dell'errore di misura aumenta, il guadagno dell'osservatore ottimo diminuisce.

Questo è del tutto ragionevole, perché se le misure sono molto rumorose è opportuno che l'osservatore dia loro meno credito nell'aggiornare il proprio stato.

Filtro di Kalman stazionario - tempo discreto

- La formulazione del problema del filtro di Kalman per sistemi a tempo discreto è analoga al caso continuo:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k-1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k-1) + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{w}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{v}(k) \end{cases}$$

- Con:
  - $\boldsymbol{w}(k)$ rumore di processo
  - $\boldsymbol{v}(k)$ rumore di misura
  - $\boldsymbol{y}(k)$ misure
  - $k \in N$ passo di campionamento
  - $\boldsymbol{\Gamma}$ matrice d'ingresso dei disturbi

Variabili indipendenti non manipolabili, non note e non misurabili ma caratterizzabili statisticamente

Filtro di Kalman tempo discreto - ipotesi sul rumore

- Anche in questo caso si assume che $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{v}$ siano processi stocastici Gaussiani, stazionari, a media nulla e covarianza nota:

$$E\left(\boldsymbol{w}(k)\right) = \boldsymbol{0}, \forall t \qquad E\left(\boldsymbol{v}(k)\right) = \boldsymbol{0}, \forall t$$

$$E\left(\boldsymbol{w}(k)\boldsymbol{w}^T(k)\right) = \boldsymbol{W}, \forall k \qquad E\left(\boldsymbol{v}(k)\boldsymbol{v}^T(k)\right) = \boldsymbol{V}, \forall k$$

$$E\left(\boldsymbol{w}(k_1)\boldsymbol{w}^T(k_2)\right) = \boldsymbol{0}, \forall k_1 \neq k_2 \qquad E\left(\boldsymbol{v}(k_1)\boldsymbol{v}^T(k_2)\right) = \boldsymbol{0}, \forall k_1 \neq k_2$$

- Vale inoltre:

$$E\left(\boldsymbol{w}(k_1)\boldsymbol{v}^T(k_2)\right) = \boldsymbol{0}, \forall t_1, t_2$$

$$E\left(\boldsymbol{x}(0)\right) = \boldsymbol{x}_0$$

$$E[(\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_0)^T] = \boldsymbol{P}_{e0}$$

Teorema - Filtro di Kalman stazionario, tempo discreto

- Nelle ipotesi enunciate, se le coppie $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\Gamma})$ e $(\boldsymbol{A}, \mathbf{C})$ sono rispettivamente controllabile e osservabile, allora l'osservatore:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\hat{\boldsymbol{x}}(k-1) + \boldsymbol{Bu}(k-1) + \boldsymbol{Ly}(k-1)$$

- è **stabile** ed **ottimo** perché minimizza la covarianza dell'errore di stima a regime $\lim_{k\to\infty} E[(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})^{\boldsymbol{T}}]$

- Scegliendo il guadagno come segue:

$$\boldsymbol{L} \Rightarrow \boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{P}_e^* \boldsymbol{C}^T (\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_e \boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{V})^{-1}$$

- Dove $\boldsymbol{P}_e^*$ è l'unica soluzione simmetrica e definita positiva dell'equazione algebrica di Riccati duale:

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{P}_e - \boldsymbol{P}_e \boldsymbol{C}^T [\boldsymbol{V} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_e \boldsymbol{C}^T]^{-1} \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_e]\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Gamma}^T = \boldsymbol{P}_e$$

Filtro di Kalman non stazionario (tempo variante)

- Il filtro di Kalman fornisce la stima dello stato di un sistema dinamico in cui sono presenti variabili non manipolabili, non note e non misurabili (rumore e disturbi). Affronta quindi il problema della stima in ambiente stocastico;
- Tale formulazione risulta più aderente ai problemi che il progettista si trova ad affrontare.
- Il criterio di ottimalità della stima considerato finora era riferito alla covarianza dell'errore di stima **a regime**.
- Il filtro di Kalman può essere realizzato anche come dispositivo di stima ottima 'on-line' con $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(t)$ calcolato in modo da minimizzare la covarianza dell'errore di stima all'istante t

Filtro di Kalman tempo continuo, non stazionario

- Si consideri il modello:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}(t) \end{cases}$$

- Con $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}$ processi stocastici Gaussiani a media nulla e matrici di covarianza note $\boldsymbol{W}, \boldsymbol{V}$

- L'osservatore (identità) con modello

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(t)(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t)) \\ \hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{cases}$$

- Che minimizza la covarianza dell'errore di stima all'istante *t*

$$E[\boldsymbol{e}(t)\boldsymbol{e}^T(t)]$$

Filtro di Kalman tempo continuo, non stazionario

- È dato da:

$$\boldsymbol{L}(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{V}^{-1}$$

- Con $\boldsymbol{P}(t)$ soluzione dell'equazione differenziale duale di Riccati:

$$\dot{\boldsymbol{P}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Gamma}^T$$

$$\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{P}_0$$

- Si può dimostrare che tale matrice coincide con la covarianza dell'errore di stima

$$\boldsymbol{P}(t) = E[\boldsymbol{e}(t)\boldsymbol{e}^T(t)]$$

e che il valore atteso dell'errore di stima è nullo: $\mathrm{E}[\boldsymbol{e}(t)] = 0$

Predizione e Filtraggio

Osservazioni

Il filtro di Kalman come predittore/ricostruttore ottimo

Teoria della predizione e filtraggio - cenni

- Con riferimento a sistemi a tempo discreto, un osservatore ‘on-line’ genera la stima dello stato di un sistema dinamico sulla base di campioni di ingressi e uscite acquisiti fino al passo corrente *k*. Quindi appartenenti all’insieme

$$Y_k = \{\boldsymbol{u}(\tau), \boldsymbol{y}(\tau)\} \text{ con } \tau \leq k$$

- La stima prodotta all’istante k è genericamente data da $\hat{\boldsymbol{x}}(k+m)$

- Si parla allora di:
  - **Predizione** se $m > 0$;
  - **Filtraggio (ricostruzione)** se $m = 0$

Filtro di Kalman come predittore/ricostruttore ottimo

- Modello del filtro di Kalman come predittore a un passo

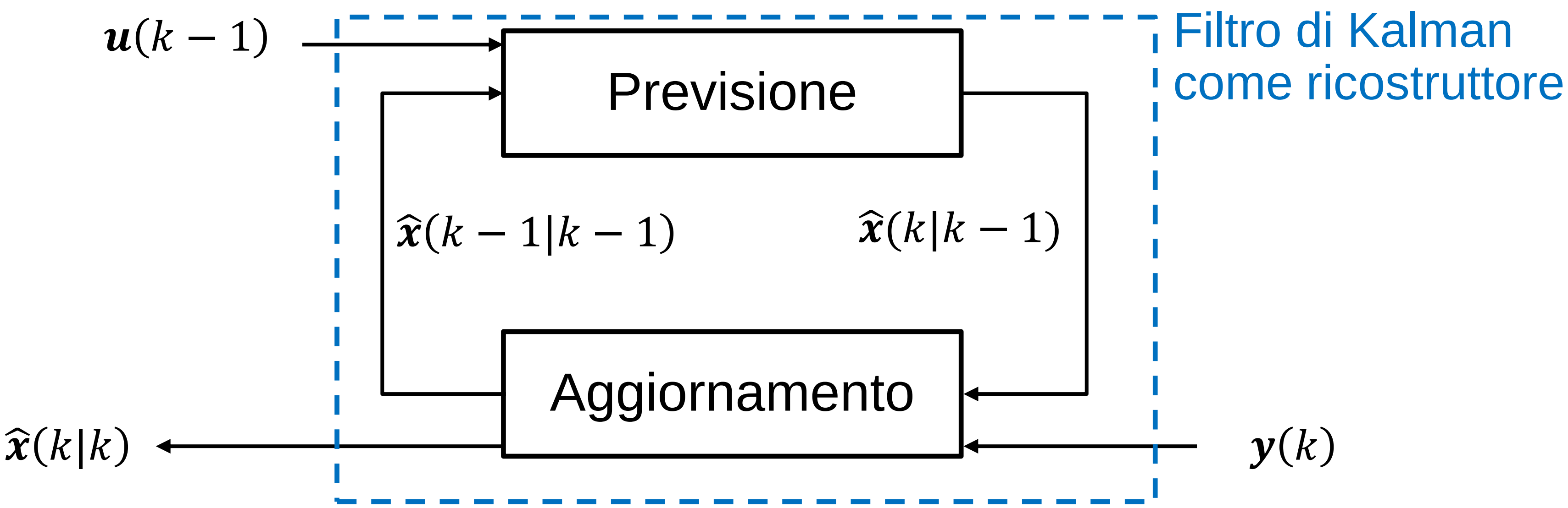
$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{w}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{v}(k) \end{cases}$$

- Modello del filtro di Kalman come ricostruttore

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k-1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k-1) + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{w}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{v}(k) \end{cases}$$

Filtro di Kalman come ricostruttore ottimo

- Il filtro di Kalman tempo discreto, non stazionario rappresenta il ricostruttore ottimo dello stato in ambiente stocastico
- Tale ricostruttore è solitamente implementato secondo il seguente schema:



Algoritmo – Filtro di Kalman come ricostruttore ottimo

- I passi di previsione e aggiornamento sono così realizzati:
  - **Previsione**:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(k-1|k-1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k-1)$$

$$\boldsymbol{P}(k|k-1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k-1|k-1)\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{W}$$

  - **Aggiornamento** (o correzione):

$$\boldsymbol{L}(k) = \boldsymbol{P}(k|k-1)\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k|k-1)\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{V})^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k|k) = \hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1) + \boldsymbol{L}(k)[\boldsymbol{y}(k) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1)]$$

$$\boldsymbol{P}(k|k) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{C})\boldsymbol{P}(k|k-1)$$

- Dove:
  - Il simbolo $(.|k)$ indica che la variabile è stata calcolata con le informazioni disponibili al passo k

Filtro di Kalman come ricostruttore ottimo - Osservazioni

- Alcune osservazioni:
  - Previsione e aggiornamento avvengo entrambe al passo k
  - La previsione dello stato stimato avviene sulla base del **modello** del sistema
  - L'aggiornamento dello stato stimato avviene sulla base dell'**innovazione (misure)**, moltiplicata per il guadagno $\boldsymbol{L}$
  - L'algoritmo del filtro di Kalman stima il valore dello stato al passo corrente sulla base di:
    - Acquisizioni di ingressi al passo precedente e misure al passo corrente
    - Stima dello stato calcolata al passo precedente
    - Matrice di covarianza dell'errore di stima calcolata al passo precedente

Confronto fra ambiente deterministico e stocastico

Deterministico:

- Previsione esatta (a meno dell'errore di stima iniziale)
- L'innovazione costituisce un'informazione esatta sull'errore di stima
- L'innovazione è utilizzata per estinguere l'errore di stima iniziale
- Il guadagno $\boldsymbol{L}$ determina la velocità di convergenza

Stocastico:

- La previsione non è esatta a causa della presenza del rumore di processo
- L'innovazione è utilizzata per correggere l'errore di previsione
- L'innovazione non fornisce un'informazione completamente attendibile a causa del rumore di misura
- Il guadagno $\boldsymbol{L}$ combina in maniera **ottima** nell'aggiornamento le informazioni non attendibili provenienti da previsione e innovazione (**modello** vs **misure**)

Influenza del rumore sulla stima

- $\boldsymbol{W} > \boldsymbol{V}$ indica che il rumore di processo prevale sul rumore di misura. Pertanto la stima ricostruita tramite il modello (previsione) dovrà essere fortemente corretta dall'innovazione (aggiornamento) che risulta essere un'informazione più affidabile.

$\boldsymbol{L} \uparrow$

- $\boldsymbol{W} < \boldsymbol{V}$ indica che il rumore di misura prevale sul rumore di processo. Pertanto la stima ricostruita tramite il modello (previsione) costituisce un'informazione più affidabile di quella fornita dall'innovazione. Pertanto la correzione (aggiornamento) dovrà essere piccola.

$\boldsymbol{L} \downarrow$

Influenza del rumore sulla stima

- La dinamica della matrice di covarianza dell’errore di stima può essere riscritta come:

$$\boldsymbol{P}(k) = \underbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{A}^T}_{\substack{\text{Influenza della}\\ \text{dinamica del}\\ \text{sistema}}} + \underbrace{\boldsymbol{W}}_{\substack{\text{Incremento dovuto}\\ \text{al rumore di}\\ \text{processo}}} - \underbrace{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{M})(\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{V})^{-1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{M}^T)}_{\substack{\text{Decremento dovuto}\\ \text{all'aumento di}\\ \text{informazione dato}\\ \text{dalle misure acquisite}}}$$

Con $\boldsymbol{M}$ matrice simmetrica funzione di $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}$

Esempio Numerico

- Consideriamo un semplice sistema del primo ordine descritto dalle equazioni:

rumore bianco Gaussiano

$$\begin{cases} x(k) = x(k-1) \\ y(k) = x(k) + v(k) \end{cases} \qquad v = WG(0, \sigma^2)$$

- Lo stato del sistema in assenza di rumore/incertezza rimane costante e pari al valore iniziale x(0)
- Consideriamo inoltre:

$$E[x(0)] = \hat{x}_0 = -2 \qquad var[e(0)] = P_0 = 0.5$$

$$V = \sigma^2 = 1$$

Esempio

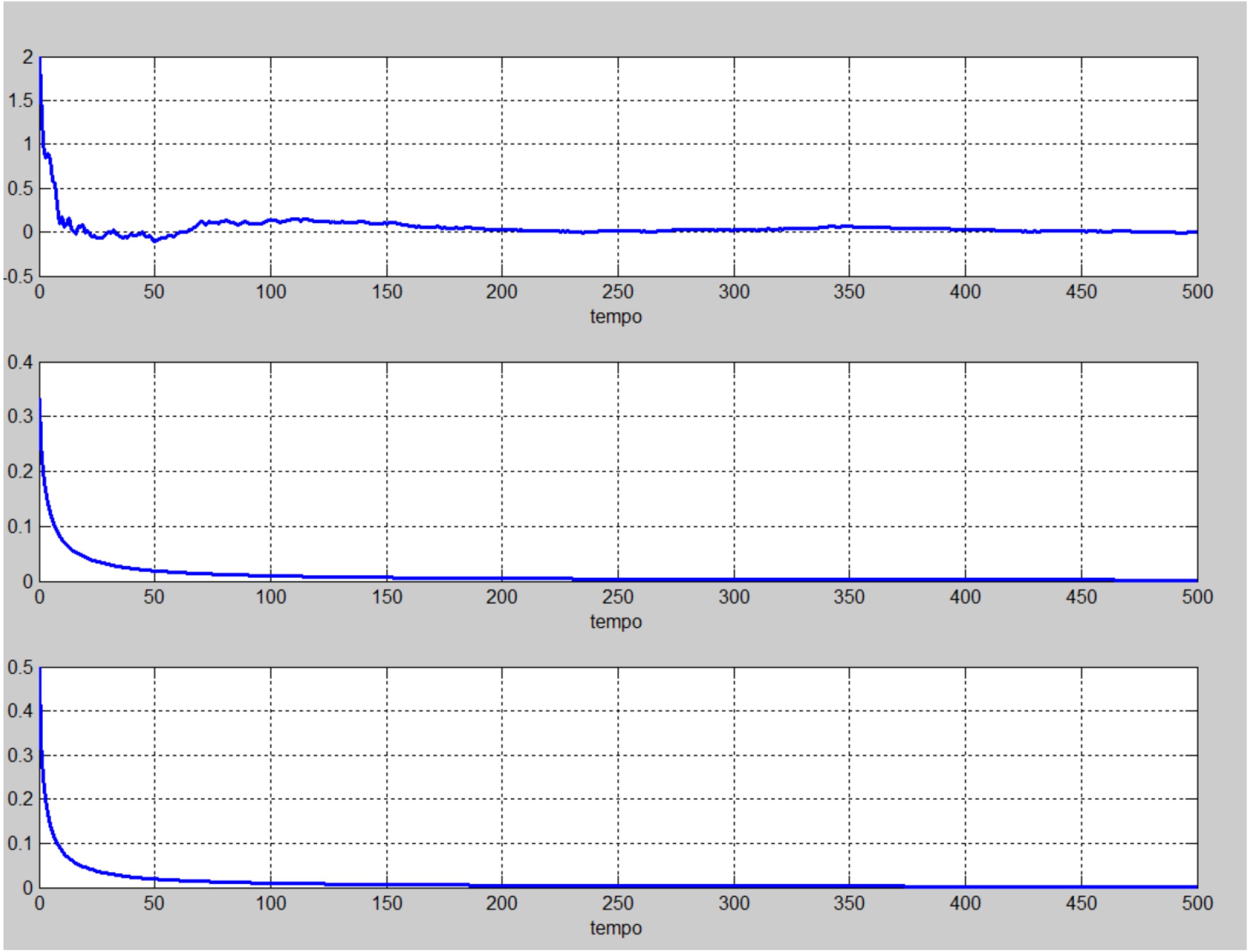
- Il filtro di Kalman (ricostruttore ottimo) è allora dato dalle seguenti equazioni:

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k-1) + L(k)[y(k) - \hat{x}(k-1)]$$

$$L(k) = \frac{P(k-1)}{P(k-1) + \sigma^2} \longrightarrow$$ Guadagno del ricostruttore ad ogni passo

$$P(k) = \frac{\sigma^2 P(k-1)}{P(k-1) + \sigma^2} \longrightarrow$$ Equazione d'aggiornamento dell'incertezza

Esempio – 3

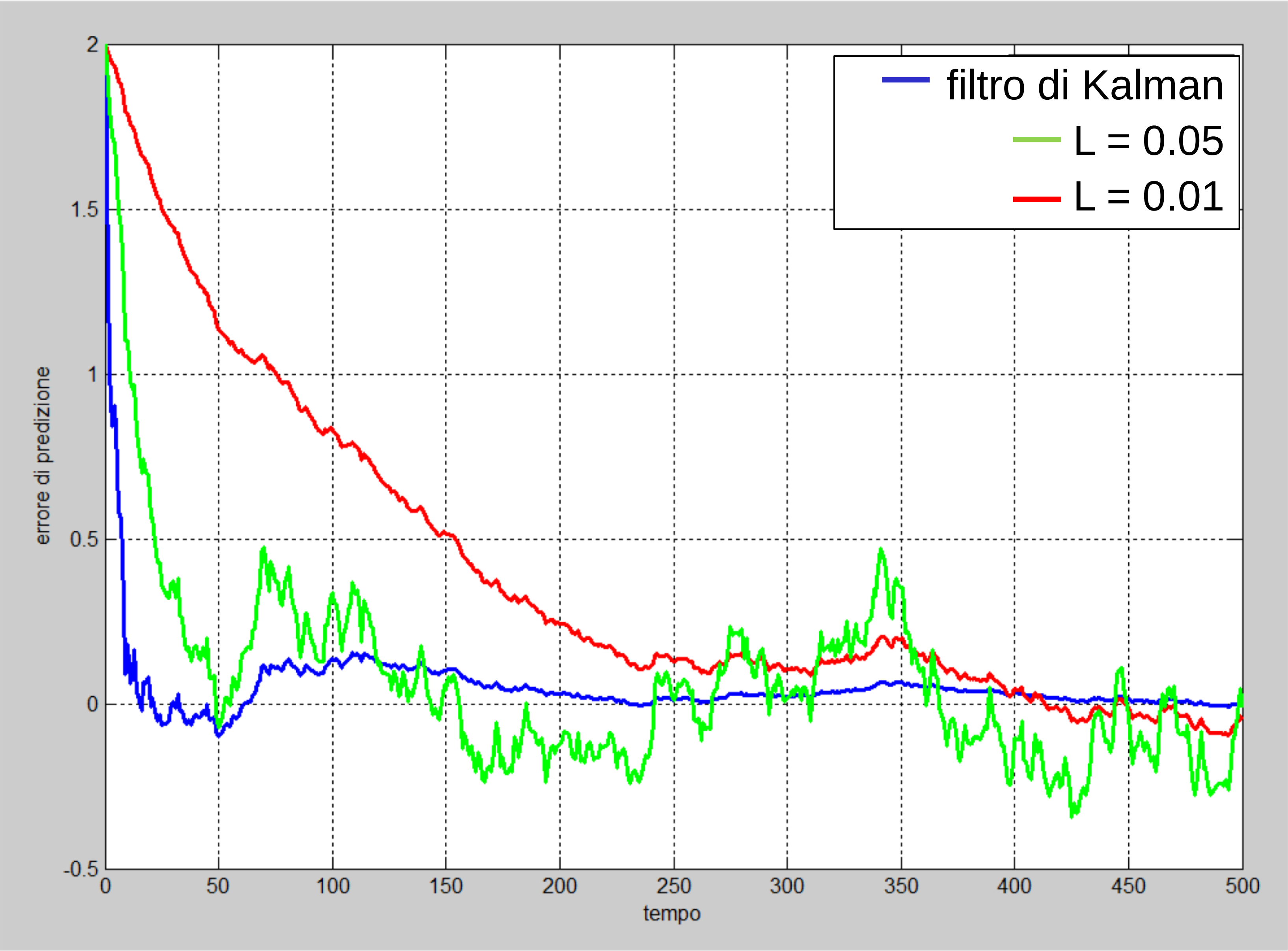


errore di stima

guadagno

varianza dell'errore di stima

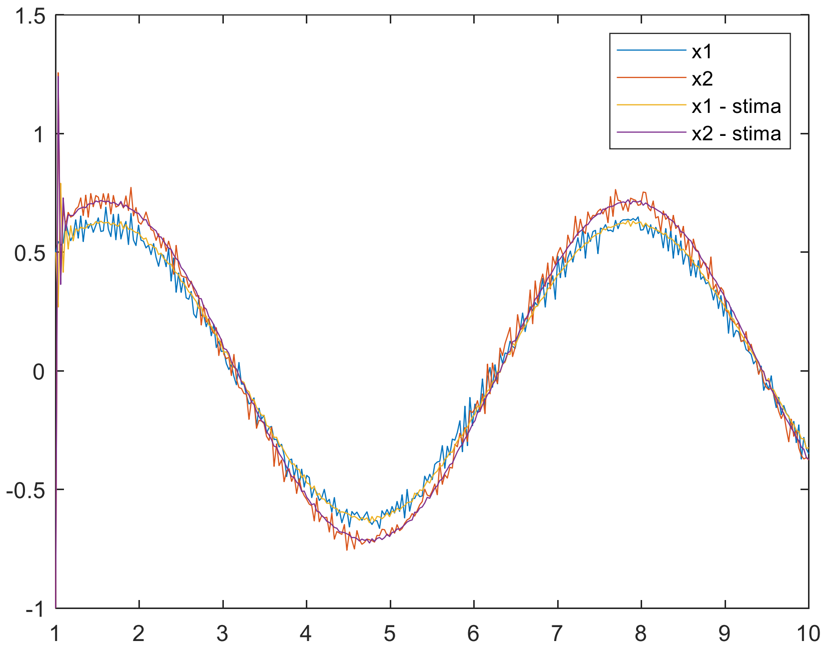
Esempio – 4


filtro di Kalman
L = 0.05
L = 0.01
errore di predizione
tempo
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

Esempio - Influenza delle matrici W e V sulla stima

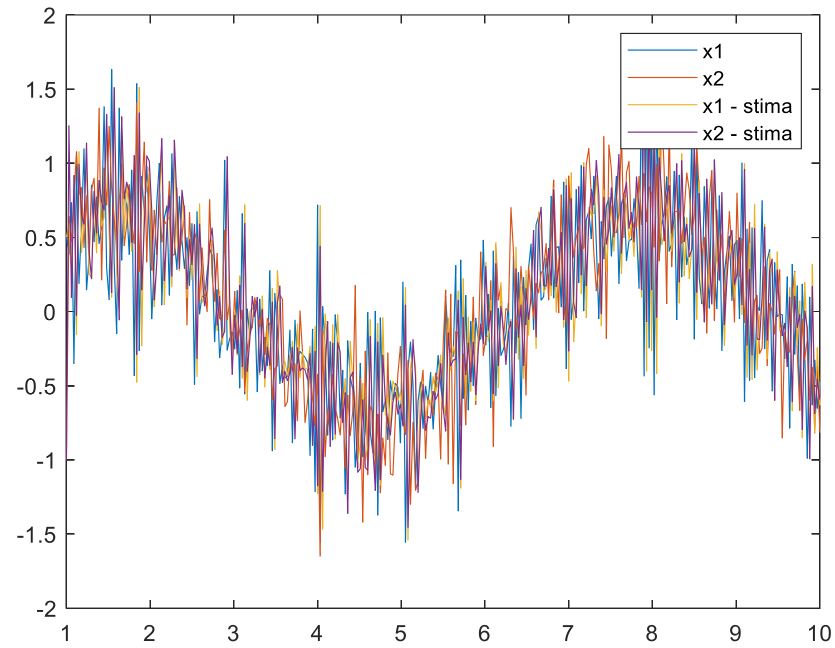
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.6 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = [1\ \ 0], u(t) = \sin(t)$$

$$\boldsymbol{W} = 10^{-3},\ \boldsymbol{V} = 0.1$$



Le stime 'seguono' il modello

$$\boldsymbol{W} = 0.1,\ \boldsymbol{V} = 0.01$$



Le stime 'seguono' le misure disponibili

Filtro di Kalman Esteso

- Il filtro di Kalman può essere esteso considerando un **modello non lineare** del tipo:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k-1), \boldsymbol{u}(k-1)) + \boldsymbol{w}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(k)) + \boldsymbol{v}(k) \end{cases}$$

$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ funzioni non lineari tempo discreto

Con le ipotesi sul rumore precedentemente assunte.

- L'algoritmo previsione-aggiornamento si modifica in:
  - **Previsione:**

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k-1), \boldsymbol{u}(k-1))$$

$$\boldsymbol{P}(k|k-1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(k-1|k-1)\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{W}$$

Filtro di Kalman Esteso

- L'algoritmo previsione-aggiornamento si modifica in:
  - **Aggiornamento:**

$$\boldsymbol{L}(k) = \boldsymbol{P}(k|k-1)\boldsymbol{C}^T\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(k|k-1)\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{V}\right)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k|k) = \hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1) + \boldsymbol{L}(k)[\boldsymbol{y}(k) - \boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1))]$$

$$\boldsymbol{P}(k|k) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{C})\boldsymbol{P}(k|k-1)$$

Dove $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{C}$ diventano matrici Jacobiane così definite:

- $\boldsymbol{A} = \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1),\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(k-1)}$
- $\boldsymbol{C} = \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1)}$

Filtro di Kalman Esteso - Considerazioni

- Il filtro di Kalman esteso non costituisce un osservatore **ottimo** dello stato;
- Le stime possono divergere se gli errori di modellazione o sulla stima dello stato iniziale presentano un elevato valore;
- La matrice di covarianza dell'errore di stima tende a sottostimare la reale covarianza