



# TECNICHE DI CONTROLLO MULTIVARIABILE

**Tecniche di controllo per sistemi  
non lineari**

# Indice

- Introduzione
- Metodi di analisi per sistemi nonlineari
- Metodi di progetto per il controllo nonlineare: panoramica
- Linearizzazione tramite feedback (*Feedback Linearization*) ed applicazioni
- Controllo robusto a struttura variabile (*Variable Structure o Sliding Mode Control*) ed applicazioni

Slotine, Jean-Jacques E., and Weiping Li.  
***Applied nonlinear control.***  
Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall, 1991.

# Sistemi dinamici lineari e non lineari

- **Sistema dinamico**: oggetto o fenomeno il cui comportamento (manifestato da *uscite* misurabili) evolve nel tempo in funzione degli stimoli esterni (*ingressi*) **presenti e passati** (a causa dello *stato*)
- Descrizione formale: **modello matematico** (eq. differenziali)

- **Modelli lineari:**

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

- **Modelli nonlineari:**

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\end{aligned}$$

# Il problema della modellazione di sistemi fisici

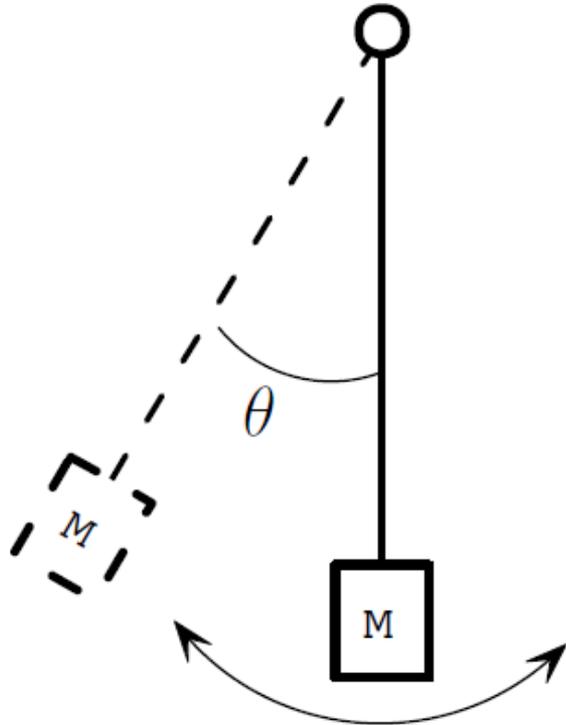


- Base di partenza: conoscenza delle **leggi fisiche** (più spesso *nonlineari* che *lineari*)
- Possibili motivi che portano ad ottenere modelli lineari:
  - approssimazione di una funzione con i primi termini di una serie di Taylor
  - eliminazione dal modello di fenomeni trascurabili (es. variazione parametri per effetti termici)
  - ipotesi sulle condizioni di lavoro (es. ingressi variabili in intervalli piccoli)
- Anche se il modello lineare è ottenuto con ipotesi semplificative (es.  $u \in [u_{min}, u_{max}]$ ), il sistema reale non sempre può essere vincolato in modo da soddisfarle

# Controllo di sistemi dinamici

- **Controllo Lineare** (analisi e progetto basati su modelli lineari):
  - disciplina matura con basi teoriche ben assestate
  - innumerevoli applicazioni industriali (v. PID)
  - prestazioni soddisfacenti per *ampie (?)* condizioni di funzionamento
- **Controllo Nonlineare** (analisi e progetto basati su modelli nonlineari):
  - i modelli lineari sono sempre un'approssimazione della *realtà*, valida per *limitate (!)* condizioni di funzionamento
  - alcune nonlinearità non sono approssimabili linearmente (es. discontinuità)
  - anche l'adattamento *on-line* di parametri del controllore è formalmente una nonlinearità
  - il progetto richiede maggiore approfondimento delle leggi fisiche che determinano la dinamica del sistema (v. stabilità del pendolo)

# Esempio: il pendolo



- **Approccio lineare:** dato  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$  (con  $\mathbf{x} = [\theta \ \dot{\theta}]^T$ ), modello valido in un intorno del punto di equilibrio  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (es. ipotesi  $\sin \theta \approx \theta$ ), verificare che gli autovalori di  $\mathbf{A}$  siano a parte reale negativa e/o trovare  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$  che li renda tali
- **Approccio nonlineare:** dato  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , modello valido  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ , verificare che  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  sia un punto a minima energia (ogni traiettoria dello stato tende a dissipare l'energia del sistema, es. per attrito, fino a raggiungere tale minimo) e/o trovare  $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  che renda il sistema *dissipativo* ( $\Rightarrow$  stabile)

# Esempio: il pendolo - Modello

Siano  $R$  la lunghezza del pendolo,  $M$  la massa appesa,  $g$  l'accelerazione di gravità,  $b$  il coefficiente di attrito viscoso alla cerniera e  $\tau$  la coppia esercitata, ad esempio, da un motore elettrico connesso alla cerniera, il modello dinamico del pendolo è rappresentato dall'equazione:

$$MR^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + MgR \sin \theta = \tau$$

nella quale  $\tau$  rappresenta l'ingresso di controllo. Considerando  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$  e  $u = \tau$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{R} \sin x_1 - \frac{b}{MR^2}x_2 + \frac{u}{MR^2}\end{aligned}$$

in forma  $\dot{x} = f(x, u)$  con  $x = [\theta \ \dot{\theta}]^T$  ed  $f(x, u) = [f_1(x, u) \ f_2(x, u)]^T$  nella quale chiaramente

$$f_1(x, u) = x_2$$

$$f_2(x, u) = -\frac{g}{R} \sin x_1 - \frac{b}{MR^2}x_2 + \frac{u}{MR^2}.$$

I punti di equilibrio ( $\dot{x} = 0$ ) sono dati dalle soluzioni della equazione  $f(x) = 0$ , cioè:

$$x_2 = 0, \quad \sin x_1 = 0$$

# Esempio: il pendolo - Linearizzazione

verificata dai punti di equilibrio  $(0, 0)$  e  $(\pi, 0)$  (nell'intervallo  $x_1 \in [0, 2\pi[$ ). Un modello linearizzato del sistema si può ottenere per approssimazione di Taylor delle funzioni  $f_1$  ed  $f_2$  rispetto ai due punti di equilibrio. Intuitivamente, questo corrisponde a considerare  $\sin x_1 \approx x_1$  se  $x_1 \approx 0$  e  $\sin x_1 \approx -x_1$  se  $x_1 \approx \pi$ , dalle quali si ottengono due differenti modelli di tipo  $\dot{x} = Ax + Bu$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{R} & -\frac{b}{MR^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{MR^2} \end{bmatrix} u$$

e

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\frac{g}{R} & -\frac{b}{MR^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{MR^2} \end{bmatrix} u$$

# Esempio: il pendolo – Analisi stabilità

Si noti che nel primo caso la matrice  $\mathbf{A}$  risulta avere autovalori:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4gM^2R^3}}{2MR^2} \longrightarrow < b \text{ (o immaginario)}$$

Mentre nel secondo caso:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4gM^2R^3}}{2MR^2} \longrightarrow > b$$

Tali autovalori sono sempre a parte reale negativa nel primo caso (punto di equilibrio stabile). Nel secondo caso un autovalore risulta invece sempre a parte reale positiva (punto di equilibrio instabile)

# Caratteristiche (buone) dei modelli LTI



La teoria del *Controllo Lineare* si concentra sui sistemi **Lineari Tempo-Invarianti (LTI)** del tipo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ , per i quali:

- esiste un **unico punto di equilibrio**, se  $\mathbf{A}$  è non singolare, ed esso è stabile *per ogni*  $\mathbf{x}(t_0)$ , se gli autovalori di  $\mathbf{A}$  hanno parte reale negativa
- la risposta del sistema è **determinabile analiticamente**
- noto l'andamento nel tempo di  $\mathbf{u}(t)$ , la risposta è data, per sovrapposizione degli effetti, da:

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)}_{\text{moto libero}} + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau}_{\text{moto forzato}}$$

# Caratteristiche (cattive) dei modelli non lineari

Nel caso più generale, la dinamica di un sistema è del tipo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ :

- il sistema può avere **molteplici punti di equilibrio**, la cui stabilità può dipendere dalle condizioni iniziali
- anche la risposta libera del sistema può essere stabilmente oscillatoria (**cicli limite** con oscillazioni auto-sostenute)
- le caratteristiche dei punti di equilibrio possono cambiare drasticamente (stabile, instabile, ciclo limite) in relazione a variazioni di parametri (**biforcazioni**)
- piccole differenze nelle condizioni iniziali possono dare luogo a grandissime differenze nella risposta del sistema (**comportamento caotico**)

# Approccio non lineare - Motivazioni

- L'esistenza di cicli limite, diversi punti di equilibrio, caoticità, etc. può essere rilevata solamente da modelli nonlineari e **non** da approssimazioni lineari
- Nota la presenza di cicli limite o comportamenti caotici, il controllo può essere progettato al fine di evitarne l'insorgenza (es. robotica e automazione) o di generarli/amplificarli (es. oscillatori elettronici)
- In passato, le applicazioni di controllo nonlineare sono state limitate dalle capacità dei sistemi di elaborazione, ma ora:
  - i microprocessori per il controllo sono sempre più potenti e meno costosi
  - velocità, precisione e robustezza richieste nelle moderne applicazioni robotiche o aeronautiche impongono analisi e progetto con modelli nonlineari

# Esempio: oscillatore di Van der Pol



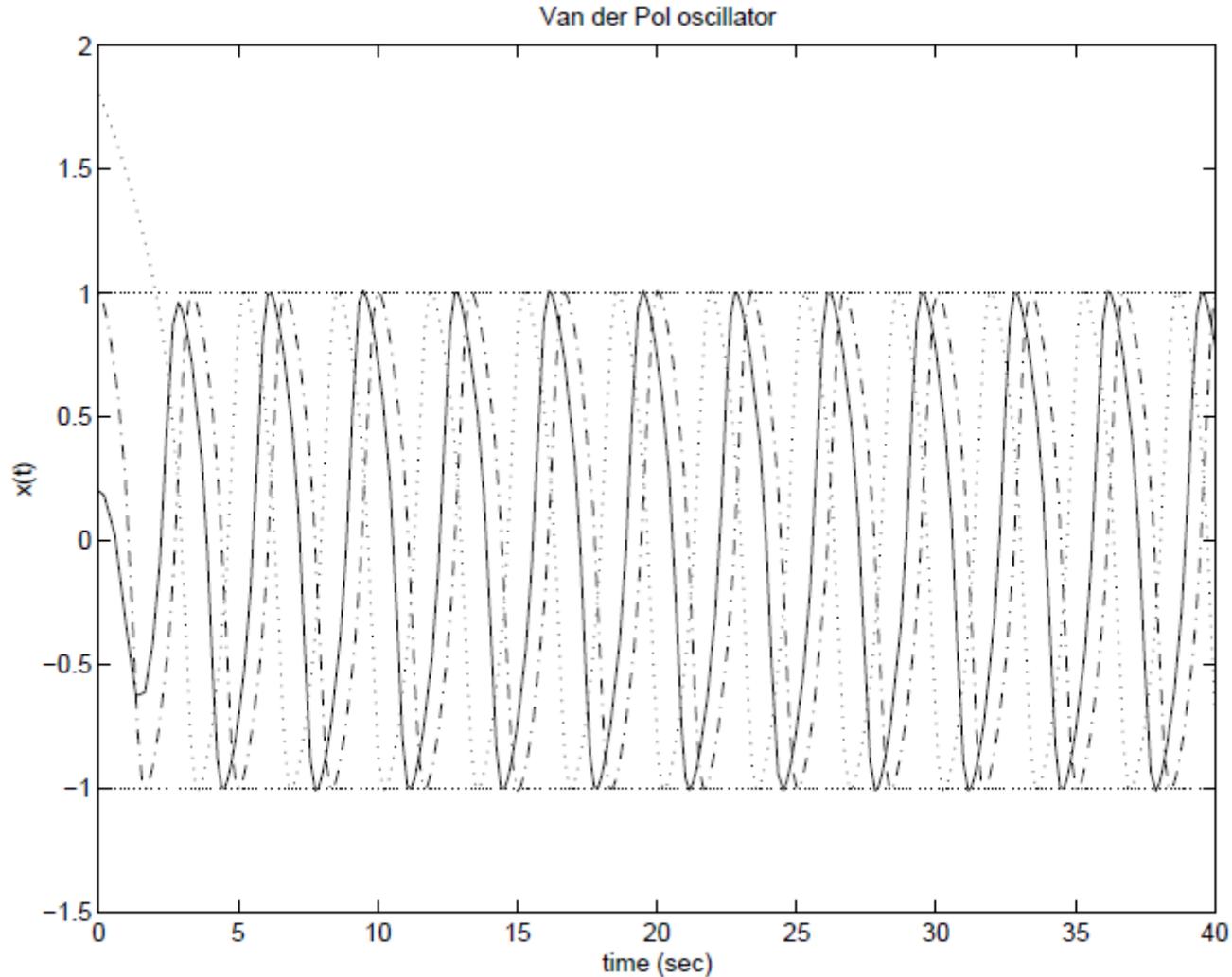
Tipico modello di un sistema caratterizzato da un ciclo limite, studiato da Balthasar Van der Pol negli anni '20:

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0$$

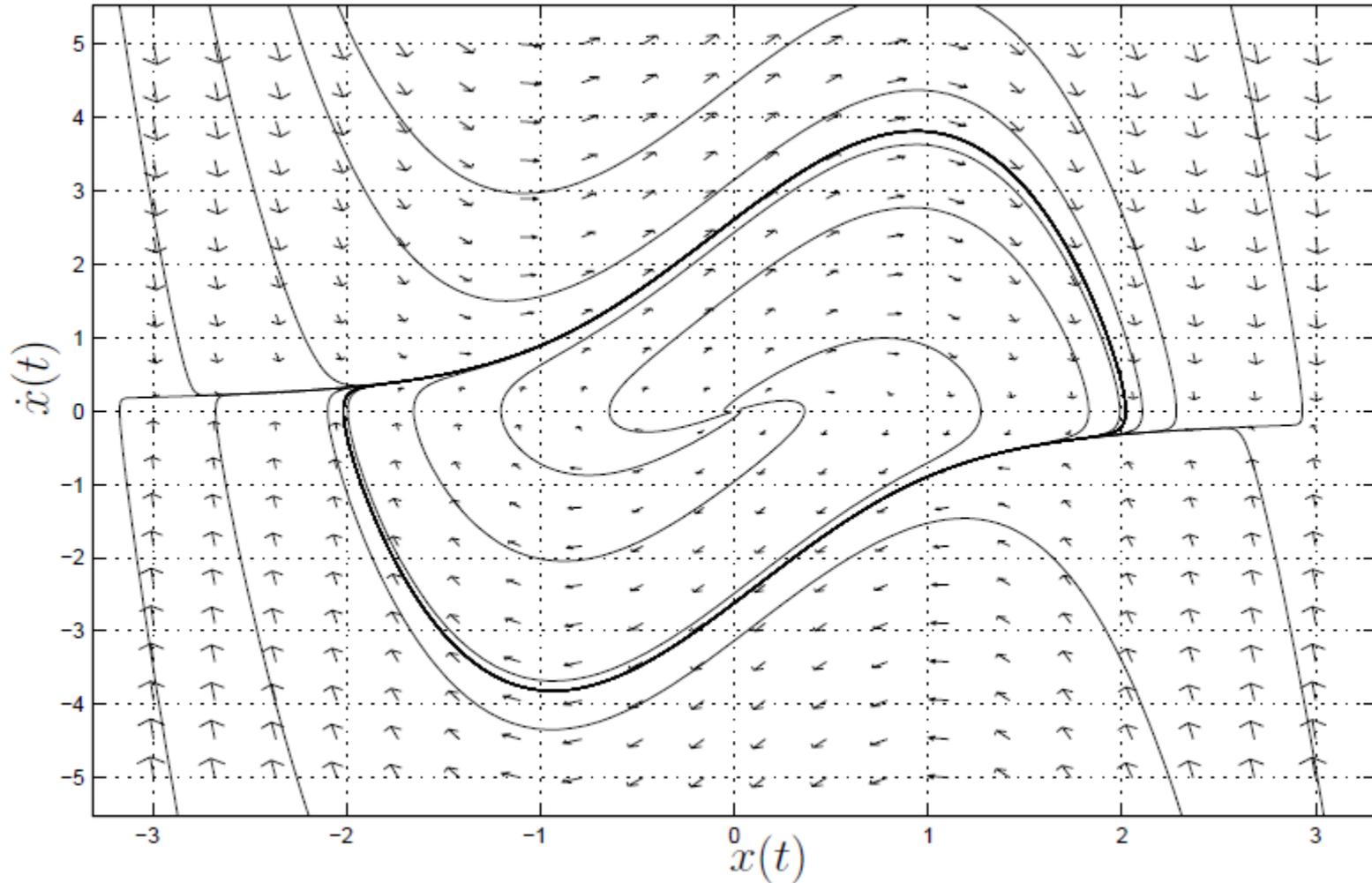
che descrive sia circuiti elettrici RLC con resistenze variabili non-linearmente, che gruppi massa-molla-smorzatore con un coefficiente di smorzamento dipendente dalla posizione (**NOTA:** no input!).

Il comportamento oscillatorio può essere spiegato considerando che se  $x^2 > 1$  lo smorzatore ha coefficiente positivo e quindi *dissipa* energia, mentre se  $x^2 < 1$  *fornisce* energia. Lo stato del sistema non può quindi né convergere a 0, né divergere all' $\infty$ .

# Esempio: oscillatore di Van der Pol - risposta



# Esempio: oscillatore di Van der Pol – Ciclo limite



# Analisi di sistemi non lineari - indice

- Metodi *grafici* (es. **piano delle fasi**)
- Metodi matematici (es. teoria di **Lyapunov**)

# Analisi nel piano delle fasi

- Si cerca di tracciare le traiettorie dello stato del sistema su un grafico bi(tri)dimensionale, solitamente ottenuta via simulazione
- Ovviamente, possibile solo per sistemi del secondo (terzo) ordine
- Il tempo non compare esplicitamente nel piano delle fasi
- Permette comunque di determinare la presenza di punti di equilibrio/cicli limite e di studiarne le caratteristiche

# Sistemi del secondo ordine



- Nella forma più generale:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

che per ogni condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  ha una soluzione  $\mathbf{x}(t)$ , il cui tracciato nel piano  $(x_1, x_2)$  per  $t \in [0, \infty)$  rappresenta una *traiettoria* del sistema.

- Una famiglia di traiettorie generate a partire da diverse condizioni iniziali costituisce una *mappa delle fasi*.

# Tipica dinamica del secondo ordine

- Una classe tipica di sistemi del secondo ordine (massa-molla-smorzatore, circuiti RLC) è quella descrivibile da un'equazione differenziale del tipo:

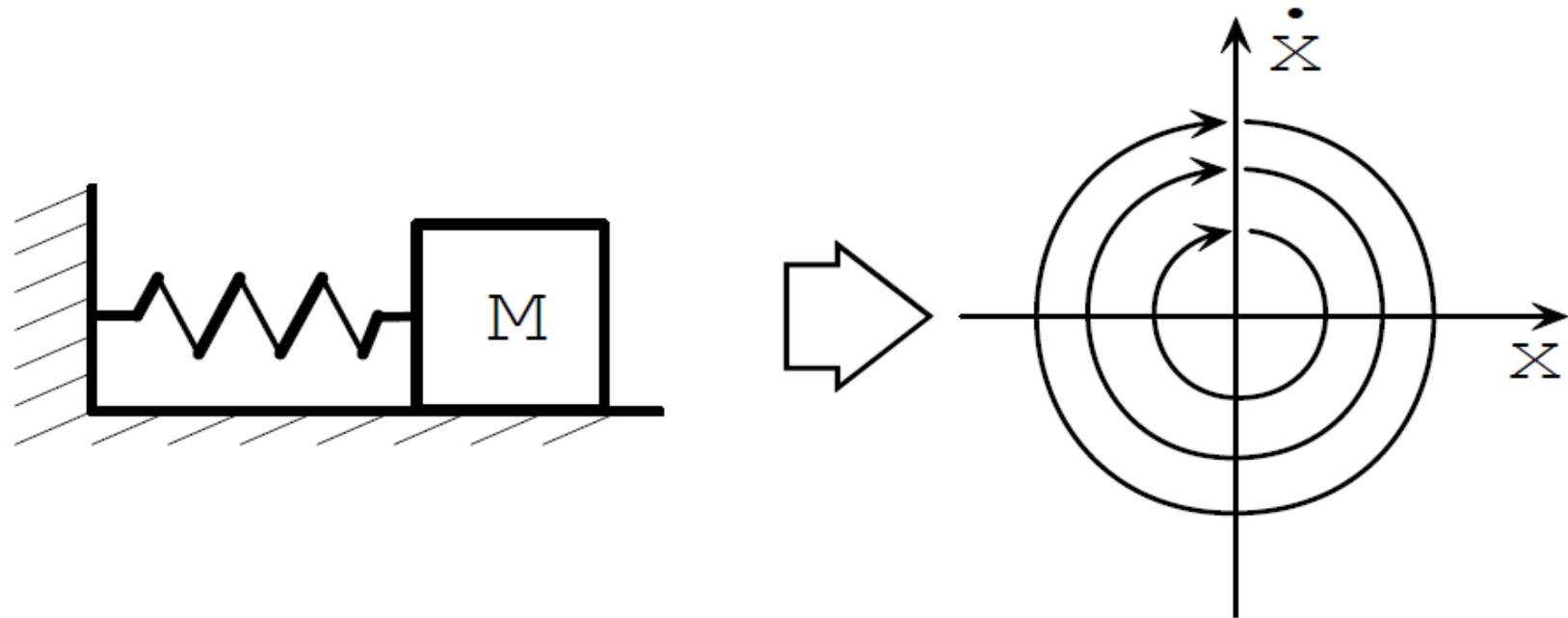
$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

che può essere ricondotta a:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -f(x_1, x_2)\end{aligned}$$

con  $x_1 = x$  e  $x_2 = \dot{x}$ .

# Esempio: massa – molla ideali



$$m \ddot{x} + k x = 0$$

# Punti singolari nella mappa delle fasi



- In generale, l'analisi di un sistema serve per determinare le caratteristiche dei suoi **punti di equilibrio**, cioè i punti nei quali  $\dot{x} = 0$ , condizione che per i sistemi analizzabili con il piano delle fasi (secondo ordine) diventa:

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \quad f_2(x_1, x_2) = 0$$

- I punti che soddisfano tale condizione sono detti anche **punti singolari**, perchè in tali punti la tangente delle traiettorie dello stato è indeterminata

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \frac{0}{0}$$

# Esempio: generico sistema non lineare

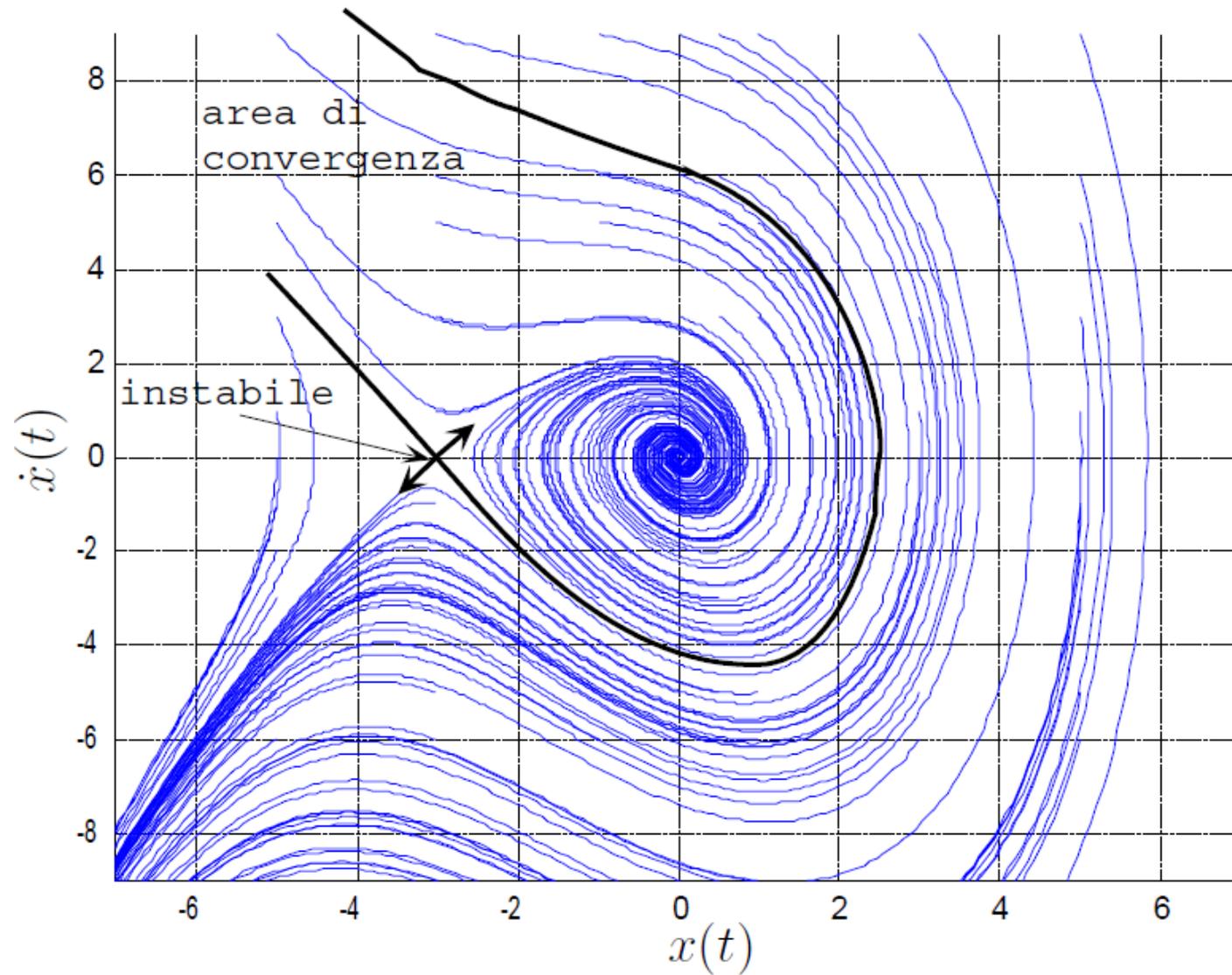
Per il sistema:

$$\ddot{x} + 0.6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$$

esistono due punti singolari:  $(0, 0)$  e  $(0, -3)$

Tuttavia, mentre il primo risulta un punto di convergenza di traiettorie la cui condizione iniziale appartenga ad una determinata area (*area di convergenza*), il secondo si dimostra un punto dal quale le traiettorie possono divergere (v. grafico successivo)

# Esempio: piano delle fasi



# Punti singolari per sistemi lineari

Per un sistema lineare del secondo ordine, la dinamica  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  diventa:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_3x_1 + a_4x_2\end{aligned}$$

che è possibile semplificare ricavando  $x_2$  dalla prima equazione e sostituendola nella seconda:

$$\ddot{x}_1 = (a_1 + a_4)\dot{x}_1 + (a_3a_2 - a_1a_4)x_1$$

o, più in generale:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

le cui soluzioni sono univocamente caratterizzate dalle radici  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  del polinomio caratteristico:

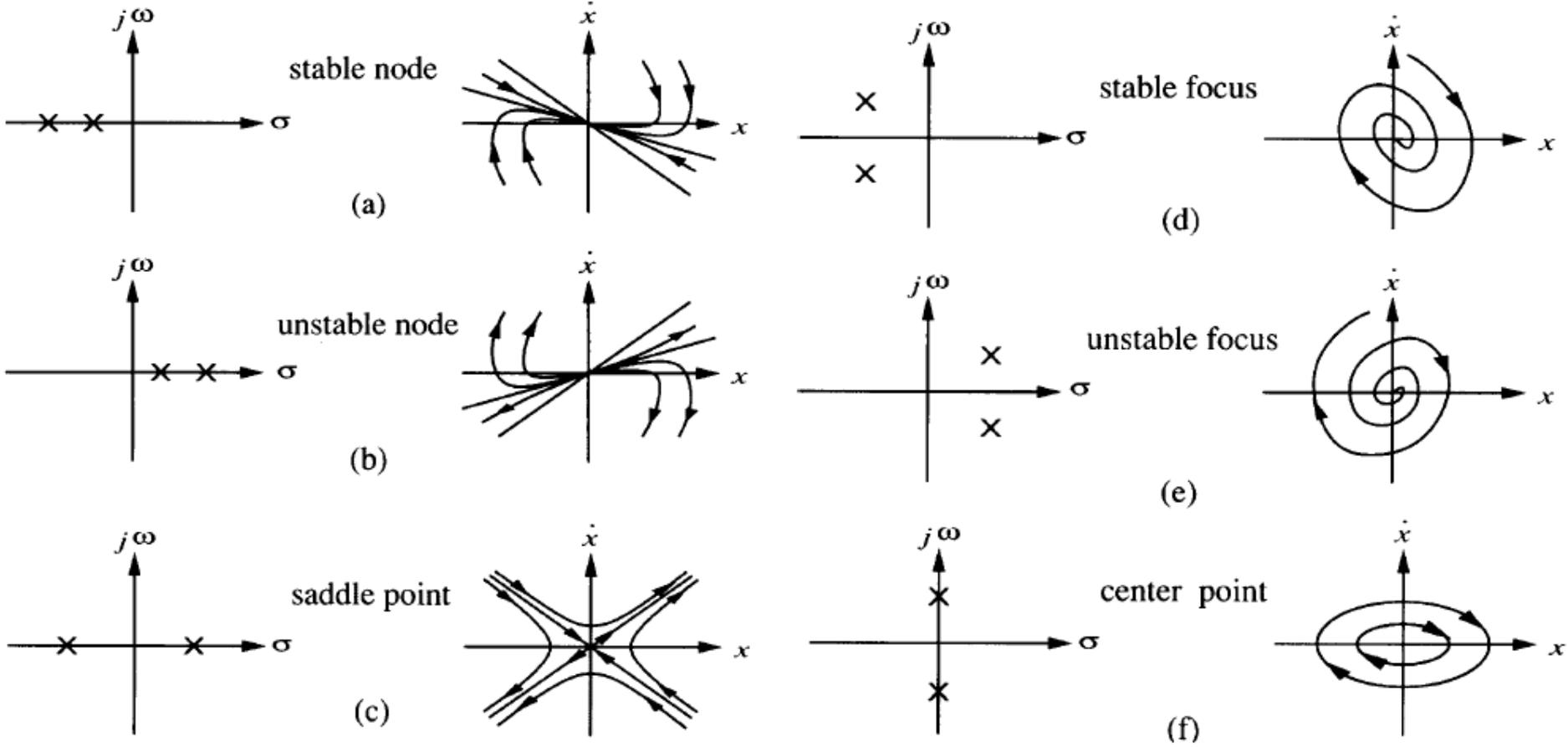
$$s^2 + as + b = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = 0$$

# Tipologie di punti singolari

- **Nodi** stabili (instabili): punti di convergenza (divergenza) delle traiettorie, **senza** modi oscillatori
- **Fuochi** stabili (instabili): punti di convergenza (divergenza) delle traiettorie, **con** modi oscillatori
- **Punti di sella**: punti verso i quali convergono due sole traiettorie, corrispondenti a condizioni iniziali nelle quali i modi instabili sono nulli, mentre tutte le altre divergono
- **Punti di centro** di traiettorie chiuse ellittiche (v. gruppo massa-molla ideale)

# Punti singolari per sistemi lineari

In relazione alla "posizione" di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ :



# Equilibrio e cicli limite nei sistemi non lineari

- Diversamente da un sistema lineare, un sistema nonlineare può avere **molteplici punti di equilibrio** (punti singolari)
- Tuttavia, un punto di equilibrio può essere studiato **localmente** considerando la **linearizzazione** del sistema in un intorno del punto stesso (v. **primo metodo di Lyapunov**), per scoprire se sia un nodo, un fuoco, etc.
- La presenza di **cicli limite**, possibile solamente nei sistemi nonlineari, e la loro **stabilità** o **instabilità** vanno studiate in modo specifico (es. teoremi di Poincare e Bendixson...)

# Analisi con metodi di Lyapunov

- L'unico approccio rigoroso ed esaustivo per l'analisi dei sistemi nonlineari (**di qualsiasi tipo e ordine**) è quello basato sulla teoria sviluppata dal matematico russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, pubblicata per la prima volta nel 1892, ma riconsiderata nel contesto dei controlli automatici solamente a partire dai primi anni '60
- La teoria di Lyapunov si basa su due metodi fondamentali:
  - il **metodo della linearizzazione** (o *primo metodo*), base teorica per la “giustificazione” (locale) del controllo lineare
  - il **metodo diretto** (o *secondo metodo*), grazie al quale considerazioni di tipo “energetico” (potenzialmente più intuitive) possono essere di ausilio nell'analisi di stabilità e nel progetto del controllo

# Analisi con metodi di Lyapunov



Aleksandr Mikhailovich Lyapunov  
(1857-1918)

# Punti di equilibrio e stabilità: definizioni

Nella teoria di Lyapunov, si intende **sistema dinamico** un sistema *libero* e *autonomo*, caratterizzato dall'equazione  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  (se  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  è *libero*, ma *non autonomo*)

**Definizione 1** *Uno stato  $\mathbf{x}^*$  è detto stato di equilibrio (o punto di equilibrio) di un sistema dinamico, se dall'istante  $t$  al quale  $\mathbf{x}(t)$  è uguale a  $\mathbf{x}^*$ ,  $\mathbf{x}(t)$  rimane uguale a  $\mathbf{x}^*$  per ogni istante successivo*

Matematicamente, i punti di equilibrio sono ottenuti dalla soluzione della equazione:

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$$

# Punti di equilibrio e stabilità: osservazioni

I concetti di stabilità descritti nel seguito fanno sempre riferimento allo *specifico* punto di equilibrio  $x = 0$ . Tuttavia, ciò non implica una perdita di generalità, in quanto per ogni punto di equilibrio  $x^* \neq 0$  è possibile ricondurre lo studio di stabilità a quello dell'origine, effettuando il cambiamento di variabile:

$$y = x - x^*$$

e studiando la stabilità di  $y = 0$  per il sistema  $\dot{y} = f(y + x^*)$ , in modo assolutamente equivalente.

In modo analogo, è possibile ricondurre lo studio della stabilità di una traiettoria **nominale** di un sistema dinamico, cioè una soluzione dell'equazione differenziale  $\dot{x} = f(x)$  con condizione iniziale  $x^*(0) = x_0$ , in presenza di condizioni iniziali **perturbate**, allo studio di una **dinamica dell'errore** come segue:

1. Data  $x^*(t)$ : soluzione di  $\dot{x} = f(x)$  con  $x^*(0) = x_0$
2. Si calcola  $x(t)$ : soluzione di  $\dot{x} = f(x)$  con  $x(0) = x_0 + \delta x_0$
3. Infine si analizza la traiettoria  $e(t) = x(t) - x^*(t)$  che ha una dinamica descritta da:  
 $\dot{e} = f(x^* + e, t) - f(x^*, t) = g(e, t)$   
con punto di equilibrio in  $e = 0$ .

# Punti di equilibrio e stabilità: definizioni

**Definizione 2** *Il punto di equilibrio  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  di un sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  è detto stabile se  $\forall R > 0, \exists r > 0, t.c.$*

$$\|\mathbf{x}(0)\| < r \quad \Rightarrow \quad \forall t \geq 0, \|\mathbf{x}(t)\| < R.$$

*Altrimenti, il punto di equilibrio viene detto instabile*

**Definizione 3** *Il punto di equilibrio  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  di un sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  è detto asintoticamente stabile se è stabile ed  $\exists r > 0, t.c.$*

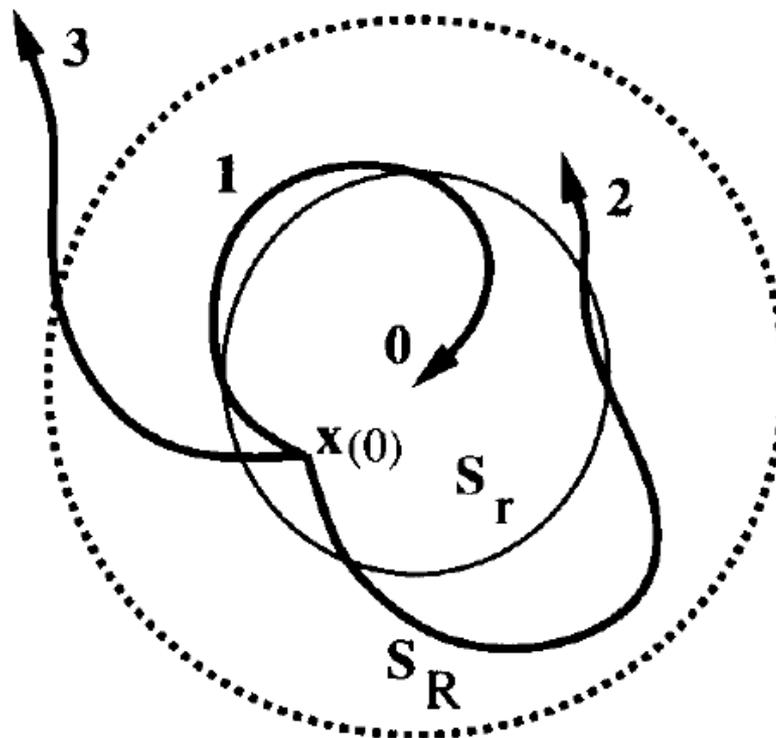
$$\|\mathbf{x}(0)\| < r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \text{ per } t \rightarrow \infty.$$

**Definizione 4** *Il punto di equilibrio  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  di un sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  è detto esponenzialmente stabile se è stabile ed  $\exists r > 0, \exists \alpha > 0, \exists \lambda > 0, t.c.$*

$$\|\mathbf{x}(0)\| < r \quad \Rightarrow \quad \forall t > 0, \|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\lambda t}.$$

# Stabilità: rappresentazione grafica

Rappresentazione “grafica” della stabilità secondo Lyapunov (1 = asintoticamente stabile, 2 = marginalmente stabile, 3 = instabile):



# Punti di equilibrio e stabilità: definizioni

**Definizione 5** *Se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  è un punto di equilibrio asintoticamente (esponenzialmente) stabile, la regione  $\|\mathbf{x}(0)\| < r$  con  $r$  massimo, è detta dominio di attrazione.*

**Definizione 6** *Se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  è un punto di equilibrio asintoticamente (esponenzialmente) stabile  $\forall \mathbf{x}(0) \in \mathbf{R}^n$ , il sistema si dice globalmente asintoticamente (esponenzialmente) stabile.*

**NOTA:** la stabilità *asintotica* di un sistema LTI è sempre anche *esponenziale e globale*.

# Primo metodo di Lyapunov: linearizzazione

Dato un sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , con  $\mathbf{0}$  punto di equilibrio ed  $\mathbf{f}$  differenziabile in modo continuo, è possibile scrivere:

$$\dot{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \mathbf{x} + \mathbf{f}_{h.o.t.}(\mathbf{x})$$

essendo  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  (il pedice *h.o.t.* sta per *higher order terms*). Ponendo:

$$\mathbf{A} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$$

il sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  è detto **approssimazione lineare** nel punto di equilibrio  $\mathbf{0}$  del sistema nonlineare originale.

# Primo metodo di Lyapunov: linearizzazione

Analogamente, se  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  si può scrivere:

$$\dot{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}=0, \mathbf{u}=0)} \mathbf{x} + \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(\mathbf{x}=0, \mathbf{u}=0)} \mathbf{u} + \mathbf{f}_{h.o.t.}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

approssimabile a  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$  con:

$$\mathbf{A} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}=0, \mathbf{u}=0)} \quad \mathbf{B} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(\mathbf{x}=0, \mathbf{u}=0)}$$

# Primo metodo di Lyapunov: ossevizioni



Si noti che l'approssimazione lineare può essere fatta rispetto ad un qualunque altro punto di equilibrio  $\mathbf{x}^*$  diverso dall'origine, con ingresso costante pari a  $\mathbf{u}^*$ :

$$\dot{\mathbf{x}} \approx \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*)} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)$$

purchè sia sempre valida l'ipotesi  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$ , nel qual caso possiamo definire come nuove variabili di stato e di ingresso le **variazioni** rispetto ai valori di equilibrio:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^*$$

cosicchè ponendo:

$$\mathbf{A} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*)} \quad \mathbf{B} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*)}$$

si ottiene il sistema dinamico linearizzato rispetto alle variazioni  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}$ .

Si noti che l'operazione di linearizzazione può essere fatta anche rispetto a un punto **non di equilibrio**, rispetto al quale la linearizzazione sarà del tipo  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  (con  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  costante).

# Primo metodo di Lyapunov: Teorema

## Teorema 1 (Metodo di linearizzazione di Lyapunov)

- *Se il sistema approssimato linearmente con  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  è strettamente stabile (equiv. tutti gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono a parte reale strettamente negativa), allora il punto di equilibrio è asintoticamente stabile per il sistema nonlineare originale*
- *Se il sistema approssimato linearmente con  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  è instabile (equiv. almeno un autovalore di  $\mathbf{A}$  ha parte reale strettamente positiva), allora il punto di equilibrio è instabile per il sistema nonlineare originale*
- *Se il sistema approssimato linearmente con  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  è marginalmente stabile (equiv. tutti gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono a parte reale negativa, ma almeno uno ha parte reale nulla), allora non è possibile concludere nulla sulla stabilità del punto di equilibrio per il sistema nonlineare originale (può essere marginalmente stabile, asintoticamente stabile o instabile)*

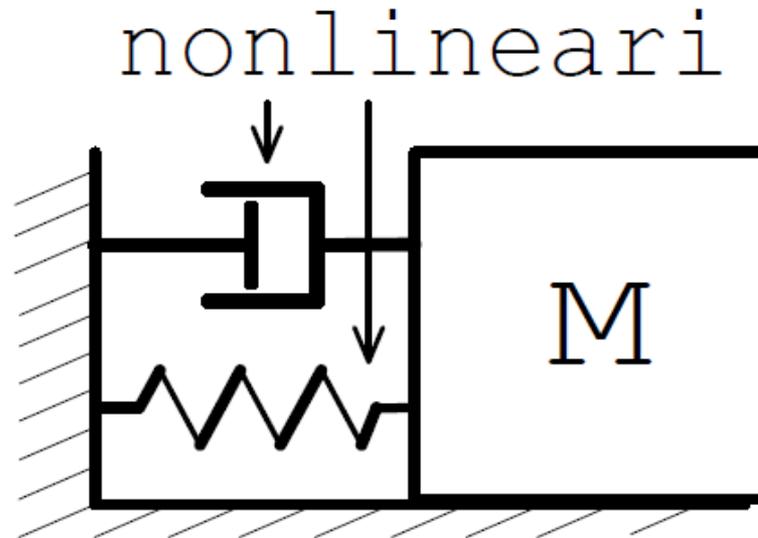
# Secondo metodo di Lyapunov – Metodo Diretto



- I risultati del primo metodo di Lyapunov sono validi solo **localmente**, cioè fintanto che l'approssimazione è ragionevole
- Indipendentemente dal caso di stabilità marginale, la linearizzazione non permette di concludere nulla sulla stabilità in senso **globale**
- Il **secondo metodo di Lyapunov** (*metodo diretto*) si basa invece sulla seguente intuizione fondamentale di natura **fisico**, che permette di analizzare la stabilità sia in senso *locale* che *globale*:

*“Se l'energia complessiva di un sistema è continuamente dissipata, il sistema (lineare o nonlineare che sia) si stabilizzerà prima o poi in una condizione di equilibrio (caratterizzata da energia minima)”*

# Esempio: massa molla smorzatore non lineari



Sistema caratterizzato dal modello:

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0x + k_1x^3 = 0$$

# Esempio: massa molla smorzatore non lineari

L'energia complessiva del sistema è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale (associata alle forze elastiche):

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x (k_0x + k_1x^3)dx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 + \frac{1}{4}k_1x^4$$

dalla quale si evince che:

- nel punto di equilibrio ( $x = 0, \dot{x} = 0$ ) il sistema ha energia nulla
- l'eventuale stabilità asintotica implica la convergenza a 0 dell'energia complessiva
- l'eventuale instabilità è riconducibile ad un incremento dell'energia complessiva

# Esempio: massa molla smorzatore non lineari

Per il sistema in esame, la variazione di energia lungo le traiettorie del sistema si può calcolare differenziando  $V(\mathbf{x})$  e sostituendo nell'espressione ottenuta l'equazione della dinamica:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = m\dot{x}\ddot{x} + (k_0x + k_1x^3)\dot{x} \stackrel{(\ddot{x}=f(x,\dot{x}))}{=} \dot{x}(-b\dot{x}|\dot{x}|) = -b|\dot{x}|^3$$

che è negativa fintanto che  $\dot{x} \neq 0$ . Pertanto l'energia complessiva del sistema è continuamente dissipata a causa dello smorzatore (nonlineare) e la massa si assesterà nell'origine con energia nulla (velocità nulla e forze elastiche nulle), indipendentemente dalla posizione di partenza (stabilità *globale*).

# Funzioni di Lyapunov e stabilità: definizioni

**Definizione 7** Una funzione scalare continua  $V(\mathbf{x})$  è detta localmente definita positiva se  $V(\mathbf{0}) = 0$  ed  $\exists R > 0$  t.c.

$$\|\mathbf{x}\| < R, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad V(\mathbf{x}) > 0$$

Se la precedente condizione vale  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ , allora  $V(\mathbf{x})$  è detta globalmente definita positiva

**Definizioni analoghe:** semi-definita positiva ( $V(\mathbf{x}) \geq 0$ ), definita negativa ( $V(\mathbf{x}) < 0$ ), semi-definita negativa ( $V(\mathbf{x}) \leq 0$ )

Poichè in questo contesto  $\mathbf{x}$  rappresenta lo stato di un sistema dinamico,  $V(\mathbf{x})$  è implicitamente funzione di  $t$ . Supponendo  $V(\mathbf{x})$  differenziabile:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

# Funzioni di Lyapunov e stabilità: definizioni

**Definizione 8** *Se una funzione  $V(\mathbf{x})$  è definita positiva, ha derivate parziali continue e la sua derivata rispetto al tempo lungo ogni traiettoria di un sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  è semi-definita negativa, allora  $V(\mathbf{x})$  è detta una funzione di Lyapunov per  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ .*

## **Teorema 2 (Stabilità locale)**

*Il punto di equilibrio  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  del sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  è stabile se  $\exists V(\mathbf{x})$  con derivate parziali prime continue t.c.*

- $V(\mathbf{x})$  è localmente definita positiva
- $\dot{V}(\mathbf{x})$  è localmente semi-definita negativa

*Se la derivata  $\dot{V}(\mathbf{x})$  è localmente definita negativa, la stabilità di  $\mathbf{0}$  è asintotica.*

# Funzioni di Lyapunov e stabilità: Teorema

## Teorema 3 (Stabilità globale)

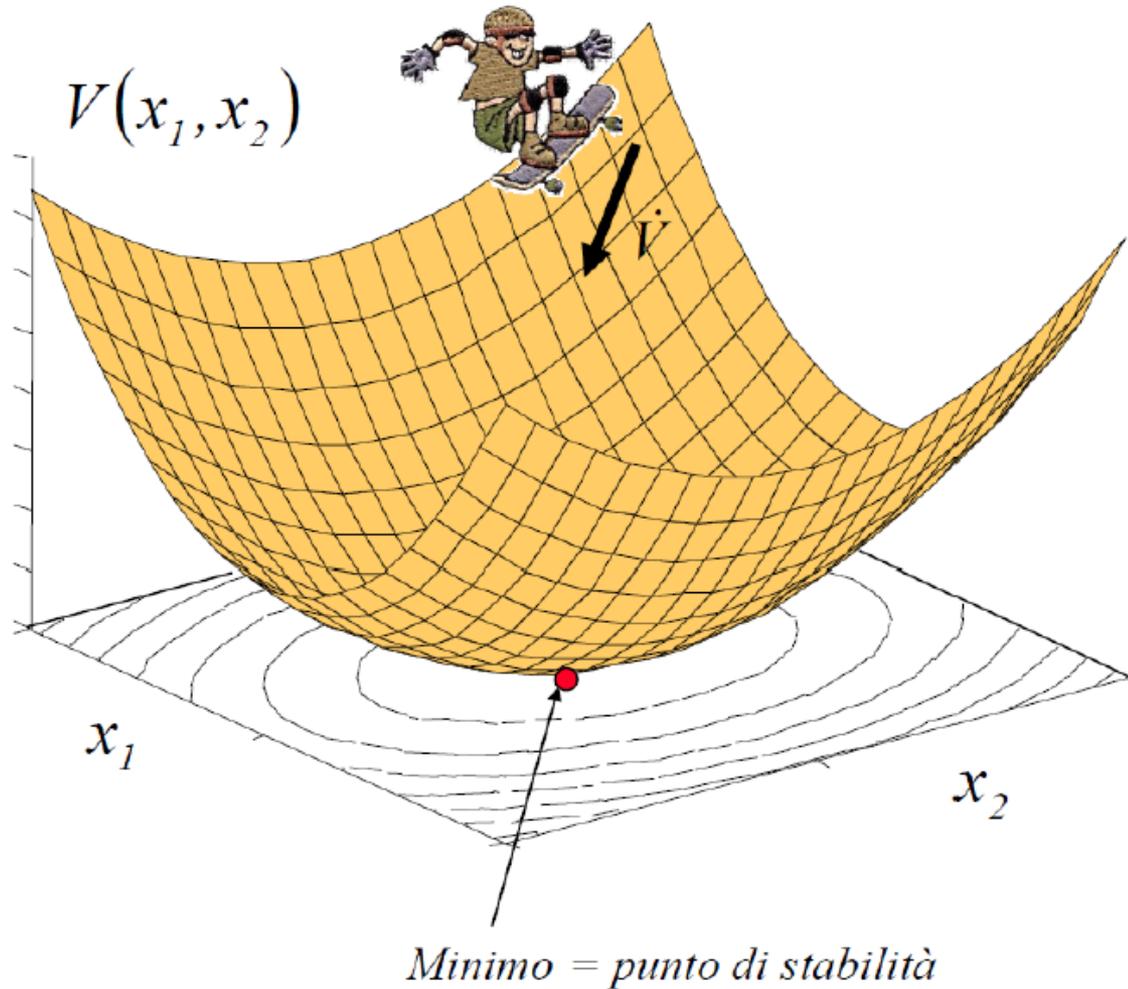
Il punto di equilibrio  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  del sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  è globalmente asintoticamente stabile se  $\exists V(\mathbf{x})$  con derivate parziali prime continue t.c.

- $V(\mathbf{x})$  è globalmente definita positiva
- $\dot{V}(\mathbf{x})$  è globalmente definita negativa
- $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  per  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$

**NOTA 1:** per un sistema possono esistere diverse funzioni di Lyapunov. Se scelta una di queste, essa si rivela con derivata *semi-definita negativa*, potrebbe in realtà esistere un'altra funzione di Lyapunov con derivata *definita negativa* che permette di dimostrare la stabilità asintotica, oltre a quella semplice. Inoltre, il fatto di non riuscire a trovare (ad intuito) una funzione di Lyapunov idonea, non prova che non ne esistano,

# Funzioni di Lyapunov e stabilità

Rappresentazione “umoristica” del Teorema di Lyapunov:

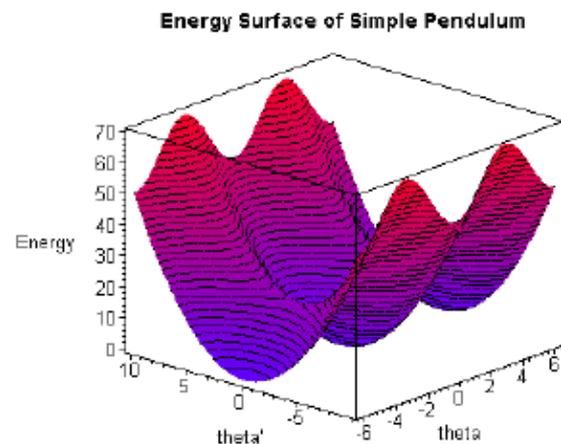


# Funzioni di Lyapunov e stabilità: Osservazioni

La scelta di una funzione di Lyapunov che dimostri la stabilità di un sistema è un procedimento sostanzialmente *trial-and-error*: si definisce una funzione quadratica "candidata", si verifica l'andamento della sua derivata e se non ha le proprietà richieste la si modifica, eccetera. Tuttavia, il fatto che i teoremi sulla stabilità di Lyapunov siano la formalizzazione del concetto intuitivo "dissipazione di energia = stabilità", permette in molti casi di interesse pratico (es. sistemi meccanici, circuiti elettrici, ecc.) di utilizzare come prima "candidata" a funzione di Lyapunov la descrizione energetica del sistema. Ad esempio, nel caso del pendolo analizzato nell'introduzione, la funzione

$$V_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}MR^2x_2^2 + MRg(1 - \cos x_1)$$

dove  $x_1 = \theta$  e  $x_2 = \dot{\theta}$ , è l'energia meccanica totale (cinetica + potenziale) ed è localmente definita positiva per il punto di equilibrio (0,0):



# Funzioni di Lyapunov e stabilità: Osservazioni

Tuttavia, la sua derivata rispetto al tempo è:

$$\dot{V}_1(\mathbf{x}) = MRg\dot{x}_1 \sin x_1 + MR^2 x_2 \dot{x}_2 = MRg\dot{x}_1 \sin x_1 + MR^2 \dot{x}_1 \ddot{x}_1 = -\frac{b}{MR^2} \dot{x}_1^2 = -\frac{b}{MR^2} x_2^2$$

ed è *semi-definita negativa*, il che permette di dimostrare "solo" la stabilità semplice di (0,0). Ponendo per semplicità  $b/MR^2 = 1$  e  $g/R = 1$  e scegliendo come funzione di Lyapunov la seguente

$$V_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_2^2 + 2(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}(x_2 + x_1)^2$$

si può verificare che:

$$\dot{V}_2(\mathbf{x}) = -(x_2^2 + x_1 \sin x_1) \leq 0$$

è in effetti *localmente definita negativa*. Pertanto, con questo secondo tentativo di costruzione di una funzione di Lyapunov, aggiungendo all'energia effettiva un termine che non ha nessun significato fisico ben preciso, ma è un puro artificio matematico, è possibile dimostrare l'asintotica stabilità del punto (0,0).

# Progetto del controllo non lineare



- Importante distinzione:
  - **problemi di regolazione (o stabilizzazione)** di un punto di equilibrio
  - **problemi di inseguimento (o tracking)** di una traiettoria desiderata
- Questa distinzione, solitamente fatta anche nel controllo lineare, assume nel contesto dei sistemi nonlineari una connotazione molto più significativa
- Nel secondo caso gli effetti delle nonlinearità possono diventare determinanti soprattutto per **traiettorie con rapide variazioni**

# Regolazione e inseguimento

- **Regolazione:** dato  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  e  $\mathbf{x}_d$  costante, trovare una legge di controllo  $\mathbf{u}$  tale che  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_d$  per  $t \rightarrow \infty$
- **Inseguimento:** dato  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ , con uscita misurabile  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ , ed una traiettoria  $\mathbf{y}_d(t)$  desiderata, trovare una legge di controllo  $\mathbf{u}$  tale che l'errore di inseguimento (*tracking error*)  $\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t)$  tenda a zero, mentre  $\mathbf{x}$  rimane limitato

**NOTA 1:** se con opportune condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0)$  si riesce ad avere  $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{y}_d(t) \quad \forall t \geq 0$  allora si parla di **inseguimento perfetto** (*inseguimento asintotico* se la condizione di inseguimento perfetto è raggiunta in modo asintotico)

**NOTA 2:** L'inseguimento perfetto può essere ottenuto solamente se  $\mathbf{y}_d(t)$  è nota a priori, comprese le sue derivate fino all'ordine pari a quello della dinamica del sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ .

# Esempio: stabilizzazione del pendolo

Si consideri un pendolo senza attrito, attuato alla base dalla coppia  $\tau$ :

$$MR^2\ddot{\theta} + MgR \sin \theta = \tau$$

Una legge di controllo che risolve il problema di regolazione in  $\theta = 0$  potrebbe essere:

$$\tau = \underbrace{-K_p \theta - K_d \dot{\theta}}_{\text{PD}} \underbrace{+ MgR \sin \theta}_{\text{compens. gravita'}}$$

grazie alla quale la dinamica diventa:

$$MR^2\ddot{\theta} + K_d \dot{\theta} + K_p \theta = 0$$

che risulta stabile  $\forall K_p, K_d > 0$  (è identica a quella di un gruppo massa-molla-smorzatore lineare).

# Esempio: stabilizzazione del pendolo - Osservazioni



- Il controllo è composto da un termine di feedback *lineare* e da un termine *nonlineare* il cui ruolo è quello di effettuare la cancellazione della nonlinearietà del sistema (f. solo di  $\theta$ , non di  $\dot{\theta}$ , ma è trascurato l'attrito)
- Il feedback *lineare* include termini proporzionali a  $\theta$  e a  $\dot{\theta}$ , che equivalgono ad **inserire una molla e uno smorzatore virtuale**, scelta giustificata dall'analisi di stabilità secondo Lyapunov già vista
- La cancellazione delle nonlinearietà, almeno di quelle dominanti (es. gravità), permette di determinare in modo più semplice la **stabilità** del sistema con il controllo, ma assume un ruolo determinante nei problemi di inseguimento (*tracking*)

# Esempio: Tracking / linearizzazione del pendolo

**Modello con attrito nonlineare:**  $MR^2\ddot{\theta} + b(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + MgR\sin\theta = \tau$

“Trasformiamo” questa dinamica nonlineare in una lineare, con una legge di controllo che dipenda anche da un ulteriore ingresso “fittizio”  $v$ :

$$\tau = MR^2v + b(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + MgR\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = v$$

Ora,  $\theta$  può essere forzata sulla traiettoria desiderata  $\theta_d(t)$  dall' “ingresso”  $v$  con un controllore PD + *feedforward* ( $\theta_d(t)$ ):

$$v = \ddot{\theta}_d - K_p(\theta - \theta_d) - K_d(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d)$$

ponendo  $e = \theta - \theta_d$ ,  $K_p = \lambda^2$  e  $K_d = 2\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), si ottiene che l'errore:

$$\ddot{e} + 2\lambda\dot{e} + \lambda^2e = 0 \quad \Rightarrow \quad e \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow \infty$$

# Esempio: Tracking del pendolo - Osservazioni

- **Modello approssimativo = linearizzazione approssimativa**
  - **incertezze parametriche** (es.  $M$  ed  $R$  non noti con precisione)
  - **incertezze non parametriche** (es. elasticità del braccio non trascurabile)
- Tipico metodo per rendere il sistema **robusto** rispetto alle incertezze, così come ai disturbi, è quello di aumentare il guadagno della parte di feedback (PD)
- Spingendo al limite questa tecnica, si introducono azioni di controllo che **commutano** tra valori positivi e negativi ( $\pm M$ ) a seconda dell'errore di inseguimento **e delle sue derivate** (v. Sliding Mode)
- Un tale termine “switching” equivale ad un'azione di feedback con guadagno  $\infty$ , ma **valore assoluto limitato**

# Esempio: controllo di robot manipolatori



# Esempio: controllo di robot manipolatori

- Modello dinamico ( $\mathbf{q}$  posizione giunti,  $\boldsymbol{\tau}$  coppia attuatori):

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{F}_a$$

nel quale le matrici  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  (inerzie) e  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  (legata alle forze di Coriolis e centripete), la gravità ( $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ ) e delle forze di interazione con l'ambiente ( $\mathbf{F}_a$ ) introducono notevoli nonlinearità

- **Controllo decentralizzato:** ogni giunto viene controllato in modo indipendente, l'effetto delle nonlinearità è considerato un *disturbo* (approccio “storico”, ma semplicistico)
- **Controllo centralizzato:** si considera il modello dinamico completo per l'analisi di stabilità e il progetto di leggi di controllo opportune (compensazione gravità, coppia precalcolata, dinamica inversa, etc.)

# Esempio: controllo di robot manipolatori

Dato il modello dinamico di un manipolatore:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + D\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

si può pensare di trasformare tale dinamica nonlineare tramite una legge di controllo unicamente basata sulla cancellazione dei termini nonlineari:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\mathbf{y} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + D\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

nella quale  $\mathbf{y}$  rappresenta il “nuovo” ingresso per il sistema trasformato. Ipotizzando la perfetta cancellazione di tutti i termini, rimane l'equazione dinamica:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = M(\mathbf{q})\mathbf{y}$$

Moltiplicando tutti i termini per  $M^{-1}(\mathbf{q})$ , il sistema retroazionato con la legge di controllo descritta si riduce ad un doppio integratore:

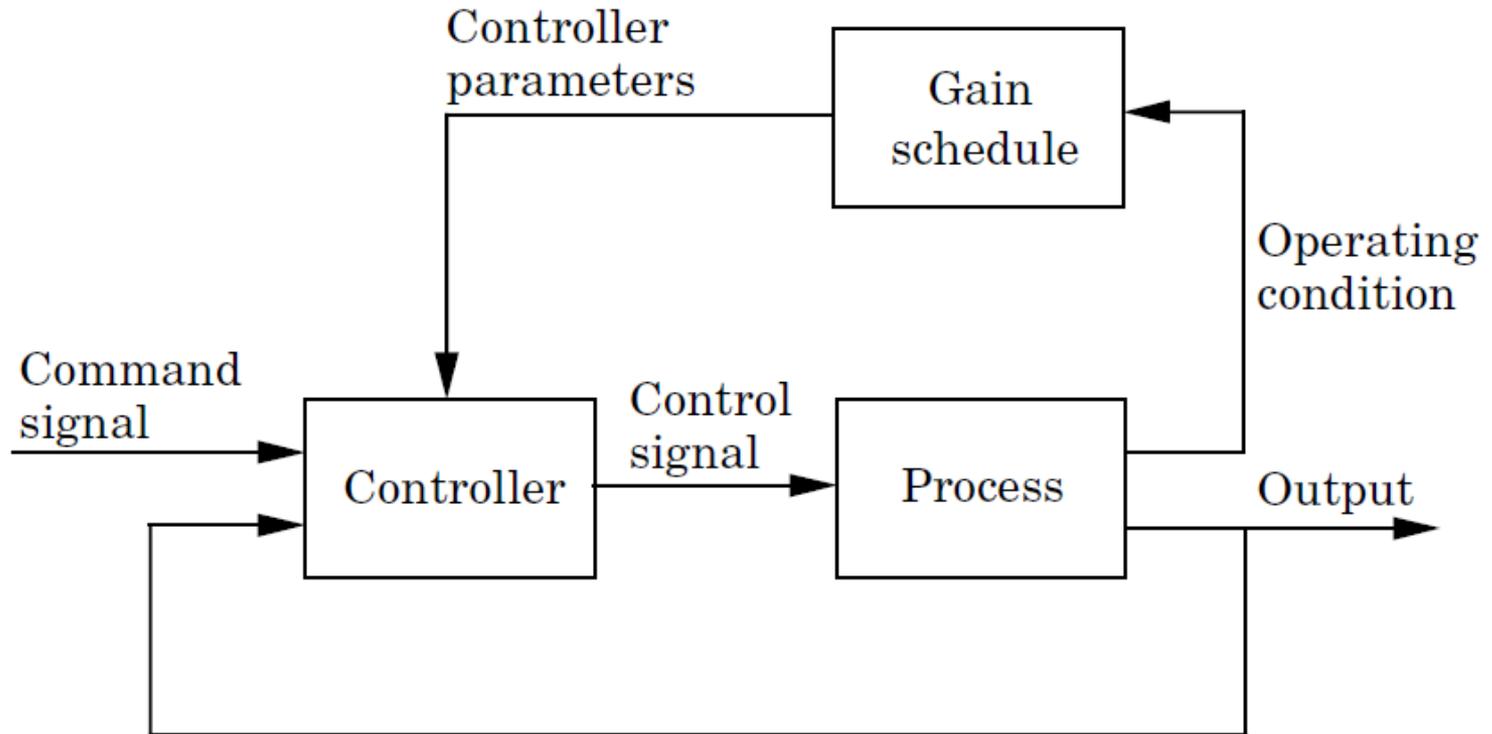
$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y}$$

**NOTA BENE:** l'operazione di moltiplicazione per  $M^{-1}(\mathbf{q})$  è sempre possibile poichè  $M(\mathbf{q})$  è **sempre invertibile** (proprietà notevole del modello dinamico dei robot manipolatori)!

# Tecniche analitiche per il controllo non lineare

- **Gain scheduling:** approssimazione lineare del sistema in diversi *punti operativi* e progetto di *diversi* controllori lineari per ciascun punto
- **Feedback linearization:** *formalizzazione* del concetto intuitivo “*cancellare le nonlinearità con il controllo*” (tipico in robotica)
- **Sliding mode control:** *formalizzazione* di stabilità ed invarianza della condizione di inseguimento perfetto nei confronti di incertezze e disturbi

# Gain scheduling in generale



# Gain scheduling: metodo di progetto

1. Determinare una *famiglia* di punti di equilibrio per il sistema, se possibile espressa come funzione continua di un parametro  $\sigma$ , altrimenti come insieme discreto di punti  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$
2. Calcolare l'approssimazione lineare del sistema rispetto alla *famiglia* di punti di equilibrio:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_\sigma(t) &= \mathbf{A}(\sigma) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\sigma) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_\sigma(t) &= \mathbf{C}(\sigma) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\sigma) \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad \text{oppure} \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_r(t) &= \mathbf{C}_r \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_r \mathbf{u}(t) \end{aligned}, \quad r = 1, \dots, k$$

3. Progettare un controllore lineare con parametri  $f(\sigma)$ , oppure  $k$  controllori lineari con parametri fissati, con riferimento al sistema approssimato
4. Se si sono ottenuti  $k$  controllori diversi, trovare un metodo per selezionarli in base alle **condizioni operative** (es. interpolazione)

# Feedback Linearization

- La tecnica di **cancellazione delle nonlinearità** di un sistema attraverso il controllo, al fine di ottenere una dinamica lineare rispetto ad un ingresso fittizio, è utilizzata con un approccio *intuitivo* in robotica
  - Tali tecniche intuitive sono formalizzate dalla teoria recente dei controlli automatici, con l'obiettivo di estenderne l'applicabilità a problemi diversi (regolazione, inseguimento, disaccoppiamento dei disturbi, osservazione) e a sistemi con caratteristiche dinamiche più generiche
1. Linearizzazione per sistemi in forma canonica
  2. Linearizzazione ingresso-stato
  3. Linearizzazione ingresso-uscita

# Linearizzazione per sistemi in forma canonica



Un sistema (SISO) è detto in **forma canonica di controllabilità** (o *forma “companion”*) se:

$$\dot{x}^{(n)} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u$$

$u \in R$ , sistema single input

oppure, con rappresentazione nello spazio degli stati:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \end{bmatrix}$$

# Linearizzazione per sistemi in forma canonica - Note

Per un sistema in forma companion la legge di controllo nonlineare:

$$u = \frac{1}{b(\mathbf{x})}[v - f(\mathbf{x})]$$

trasforma la dinamica in una serie di  $n$  integratori:

$$x^{(n)} = v$$

per la quale è sempre possibile imporre una dinamica esponenzialmente stabile, sia per problemi di regolazione che per problemi di inseguimento di una traiettoria  $x_d(t)$ , con una legge di controllo del tipo (scelti opportuni  $K_i$ ):

$$v = x_d^{(n)} - K_0 e - K_1 \dot{e} - \dots - K_{n-1} e^{(n-1)}$$

**NOTA:** devono essere disponibili tutte le derivate necessarie di  $x_d(t)$

# Linearizzazione per sistemi MIMO

L'estensione ad un sistema MIMO (come un robot manipolatore) richiede ovviamente che la dinamica sia espressa in modo vettoriale:

$$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

linearizzabile tramite la legge di controllo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{b}^{-1}(\mathbf{x})[\mathbf{v} - \mathbf{f}(\mathbf{x})]$$

Tuttavia, in questo caso la linearizzazione è possibile solamente se la matrice  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  è invertibile  $\forall \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Nelle applicazioni di robotica, come si è visto, ciò è garantito dalle proprietà strutturali meccaniche (matrice di inerzia) dei manipolatori.

# Linearizzazione ingresso - stato

Si cerca una funzione di controllo nonlineare  $u = u(\mathbf{x}, v)$  per l'ingresso scalare del **generico** sistema:

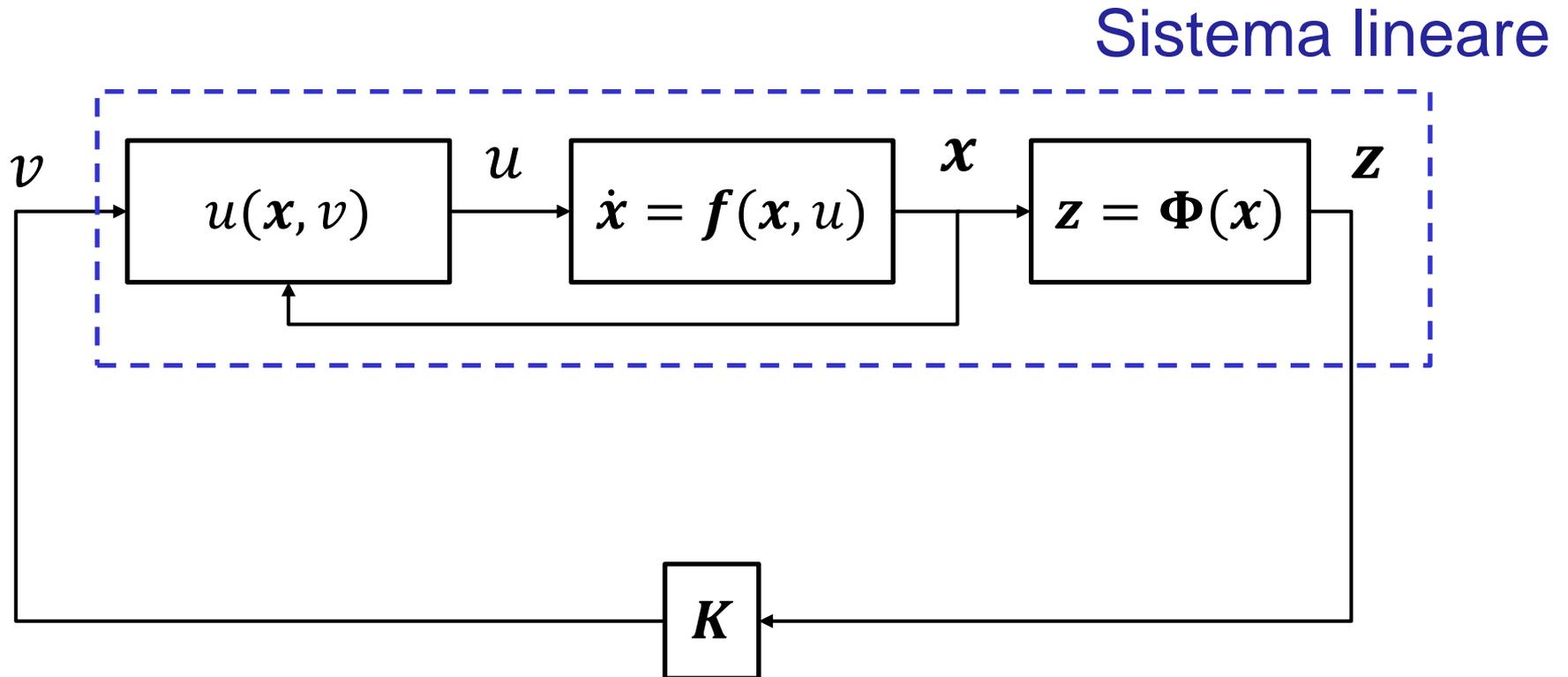
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

t.c. la dinamica nonlineare sia trasformata, attraverso un opportuno cambiamento di variabili  $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ , nella dinamica lineare:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}v$$

sulla quale è possibile progettare un controllore con le tecniche classiche del controllo lineare

# Linearizzazione ingresso – stato, schematico



# Linearizzazione ingresso – stato, esempio

Si consideri ad esempio il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + \sin x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \cos x_1 + u \cos 2x_1\end{aligned}$$

nel quale la nonlinearità nella prima equazione non può essere cancellata direttamente attraverso il controllo  $u$ . Tuttavia, considerando la seguente trasformazione dello stato:

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 + \sin x_1\end{aligned}$$

si ottiene la dinamica:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2z_2 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 + u \cos 2z_1\end{aligned}$$

la quale è ora invece linearizzabile tramite il controllo:

$$u = \frac{1}{\cos 2z_1} (v - \cos z_1 \sin z_1 + 2z_1 \cos z_1)$$

# Linearizzazione ingresso – stato, esempio

che permette di ottenere il sistema lineare:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= v\end{aligned}$$

Tale sistema risulta essere controllabile ( $\text{rank}([b|Ab]) = 2$ ), pertanto è possibile assegnarne arbitrariamente gli autovalori con una retroazione del tipo  $v = -k_1z_1 - k_2z_2$ .

# Linearizzazione ingresso – uscita

In modo analogo, per un sistema generico con una certa uscita di interesse:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}$$

si desidera ottenere una dinamica lineare dell'uscita rispetto ad un certo ingresso di controllo fittizio  $v$ , **mantenendo limitato lo stato**  $\mathbf{x}$ .

Per risolvere il problema di linearizzazione, occorre prima di tutto “scoprire” la relazione dinamica tra uscita e ingresso (derivando rispetto al tempo la  $y = h(\mathbf{x})$ ):

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

**NOTA:** potrebbero essere necessarie più derivate successive della  $y = h(\mathbf{x})$

# Linearizzazione ingresso – uscita, esempio

Ad esempio, si consideri il sistema del terzo ordine:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^5 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

In questo caso, derivando l'uscita si ottiene:

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3$$

nella quale **non compare** l'ingresso  $u$ . Occorre quindi derivare l'uscita una seconda volta:

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 \cos x_2 + \dot{x}_2 x_3 + (x_2 + 1)\dot{x}_3 = (x_2 + 1)u + f_1(\mathbf{x})$$

nella quale  $f_1(\mathbf{x})$  contiene tutti gli altri termini non legati all'ingresso. Chiaramente, questa dinamica può essere trasformata in quella di un doppio integratore  $\ddot{y} = v$  con il controllo:

$$u = \frac{1}{x_2 + 1}[v - f_1(\mathbf{x})]$$

# Linearizzazione ingresso – uscita, osservazioni

In generale, il numero di volte che occorre derivare l'uscita di un sistema per "scoprire" la relazione ingresso-uscita viene detto **grado relativo del sistema**. Nel caso in esame, il sistema ha grado relativo pari a 2. Il concetto di grado relativo si traduce per un sistema lineare, la cui relazione ingresso-uscita è data dalla funzione di trasferimento, se SISO, o matrice di trasferimento, se MIMO, nella differenza tra il numero di poli ed il numero di zeri della f.d.t. (m.d.t.).

La linearizzazione ingresso-uscita ottenuta per il caso in esame va ulteriormente analizzata per verificare se lo stato  $x$  rimane effettivamente limitato durante l'inseguimento di una traiettoria. Ciò non è in effetti garantito dalla soluzione del problema di inseguimento asintotico, in quanto la dinamica ingresso-uscita linearizzata è di ordine 2, mentre lo stato del sistema completo è di ordine 3. Risolvendo come visto in precedenza il problema di inseguimento, cioè ponendo:

$$v = \ddot{y}_d - K_p e - K_d \dot{e}$$

si può pensare di semplificare lo studio della limitatezza dello stato ponendo come "nuove" variabili di stato  $y, \dot{y}$  e  $x_3$ . La limitatezza delle prime due è infatti garantita dall'inseguimento asintotico, mentre per la terza occorre determinarne la dinamica e studiarla in relazione all'andamento di  $v$  o, equivalentemente,  $y_d$  (es. ipotesi di limitatezza delle derivate, ecc.).

Per un generico sistema di ordine  $n$  di grado relativo  $r$ , le  $n - r$  variabili di stato la cui dinamica non può essere imposta dall'inseguimento asintotico costituiscono la **dinamica interna**. Una dinamica interna instabile rende inutile la soluzione del problema di inseguimento, in quanto si traduce in pratica in saturazioni e danneggiamenti degli attuatori e/o dei componenti fisici del sistema.

# Formalizzazione del problema di linearizzazione



- Nel caso di interesse pratico più comune, la linearizzazione ingresso-uscita, la procedura richiede di:
  1. *derivare l'uscita fino a rivelare la relazione con l'ingresso*
  2. *trovare una trasformazione dello stato e una legge di controllo nonlineare che renda la relazione ingresso-uscita lineare*
  3. *studiare la stabilità della dinamica interna*
- La formalizzazione di questo problema e della sua soluzione consiste nel determinare le caratteristiche che il sistema deve avere perchè il problema abbia soluzione ed una procedura sistematica per progettare la trasformazione dello stato ed il controllo

# Strumenti matematici: geometria differenziale

**Definizione 11** *Il vettore colonna i cui componenti sono funzioni scalari smooth ( $f_i \in C^\infty$ ) di  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ :*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_{n-1}(\mathbf{x}) \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

*si definisce **campo vettoriale**  $\in C^\infty$  (smooth vector field)*

dove  $C^\infty$  è lo spazio delle funzioni continue con derivate parziali di ogni ordine continue.

Un campo vettoriale *smooth* definisce ovviamente una mappa  $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , per la quale i componenti delle matrici Jacobiane sono continue per ogni ordine di derivazione.

# Strumenti matematici: geometria differenziale

**Definizione 12** Dato un campo vettoriale *smooth*  $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  ed una funzione *smooth*  $h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , si definisce **derivata di Lie** di  $h$  rispetto ad  $\mathbf{f}$  la funzione scalare:

$$L_{\mathbf{f}} h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}$$

In sostanza, la derivata di Lie rappresenta la derivata “direzionale” di  $h$  lungo la direzione in  $\mathbf{R}^n$  del vettore  $\mathbf{f}$ .

Ricorsivamente, si può definire la derivata di Lie di ogni ordine come segue:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{f}}^0 h &= h \\ L_{\mathbf{f}}^i h &= L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}^{i-1} h) = \frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{i-1} h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Analogamente, se  $\mathbf{g}$  è un altro campo vettoriale *smooth*, vale la:

$$L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h = \frac{\partial L_{\mathbf{f}} h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}$$

# Geometria differenziale - Note

Si noti che dato un sistema dinamico il cui modello matematico sia:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}$$

le derivate rispetto al tempo dell'uscita (scalare) corrispondono a:

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = L_{\mathbf{f}} h$$

$$\ddot{y} = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}} h)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}} h)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = L_{\mathbf{f}}^2 h$$

...

Inoltre, se  $V$  è una funzione di Lyapunov (*smooth*) per il sistema, la sua derivata rispetto al tempo  $\dot{V}$  corrisponde a  $L_{\mathbf{f}} V$ .

# Geometria differenziale - Diffeomorfismi

**Definizione 13** *Un campo vettoriale smooth  $\Phi = \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  definito in una regione  $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$  è chiamato **diffeomorfismo** se la sua inversa  $\Phi^{-1}$  esiste ed è smooth*

**NOTA 1:** un diffeomorfismo permette di effettuare una trasformazione “coerente” delle variabili di stato di un sistema nonlineare. Il fatto che sia invertibile garantisce sempre l’esistenza di una mappa fra stati equivalenti, mentre il fatto che sia *smooth* preserva tale proprietà anche per i campi vettoriali che caratterizzano l’equazione dinamica del sistema.

**NOTA 2:** ponendo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u$  e trasformando lo stato con il diffeomorfismo  $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ , si ottiene che:

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u)$$

per cui gli elementi di  $\dot{\mathbf{z}}$  hanno la forma  $L_{\mathbf{f}}\Phi_i + L_{\mathbf{b}}\Phi_i u$

# FL ingresso – uscita per sistemi in forma affine

Per un sistema nonlineare SISO la soluzione del problema di linearizzazione ingresso-uscita impone innanzitutto di determinare il **grado relativo** del sistema e, soprattutto, **se questo sia definito**.

**Definizione 14** *Il sistema SISO del tipo (forma affine):*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}$$

con  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{b}$  smooth, ha grado relativo  $r$  in una regione  $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$  se  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$

$$\begin{aligned}L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{f}}^i h &= 0 & 0 \leq i < r - 1 \\ L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{f}}^{r-1} h &\neq 0\end{aligned}$$

# Linearizzazione ingresso – uscita, $r = 1$

**NOTA:** il sistema potrebbe **non avere grado relativo** definito, cioè potrebbe essere  $L_b L_f^{r-1} h \neq 0$  nell'intorno di un punto  $\mathbf{x}_0$ , punto nel quale tale funzione si annulla

Si supponga che il sistema nella forma precedente abbia grado relativo 1 in una certa regione  $\Omega$ . Questo significa che derivando rispetto al tempo l'uscita:

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f} + \mathbf{b} u) = L_f h + L_b h u$$

Poichè per definizione  $L_b h \neq 0$  in  $\Omega$ , in questa regione è possibile, imponendo la legge di controllo:

$$u = \frac{1}{L_b h} (v - L_f h)$$

ottenere la relazione ingresso-uscita lineare  $\dot{y} = v$ .

# Linearizzazione ingresso – uscita, $r > 1$

Se il sistema dovesse avere grado relativo  $r > 1$  in  $\Omega$ , sarebbe necessario derivare  $r$  l'uscita per ottenere la relazione con l'ingresso. Questo significa che:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= L_f h + L_b h u \\ \ddot{y} &= L_f^2 h + L_b L_f h u \\ &\dots \\ y^{(r)} &= L_f^r h + L_b L_f^{r-1} h u\end{aligned}$$

Definendo una legge di controllo:

$$u = \frac{1}{L_b L_f^{r-1} h} (v - L_f^r h)$$

si ottiene  $y^{(r)} = v$

# Analisi della stabilità della dinamica interna

Supponendo ora di definire un **diffeomorfismo** avente la seguente struttura:

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = [h \quad L_f h \quad L_f^2 h \quad \dots \quad L_f^{r-1} h \quad \Phi_{r+1}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \Phi_n(\mathbf{x})]$$

si ottiene il sistema trasformato:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= L_f h &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= L_f^2 h &= z_3 \\ &\dots & \\ \dot{z}_{r-1} &= L_f^{r-1} h &= z_r \\ \dot{z}_r &= L_f^r h + L_b L_f^{r-1} h u \end{aligned}$$

con uscita  $y = z_1$ , linearizzabile con la legge di controllo descritta in precedenza.

# Analisi della stabilità della dinamica interna

**NOTA:** Per le rimanenti  $n - r$  variabili di stato, si può dimostrare che se  $r$  è **strettamente minore di**  $n$  è sempre possibile trovare una forma per i rimanenti elementi del diffeomorfismo non assegnati esplicitamente in precedenza:

$$\Phi_{r+1}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \Phi_n(\mathbf{x})$$

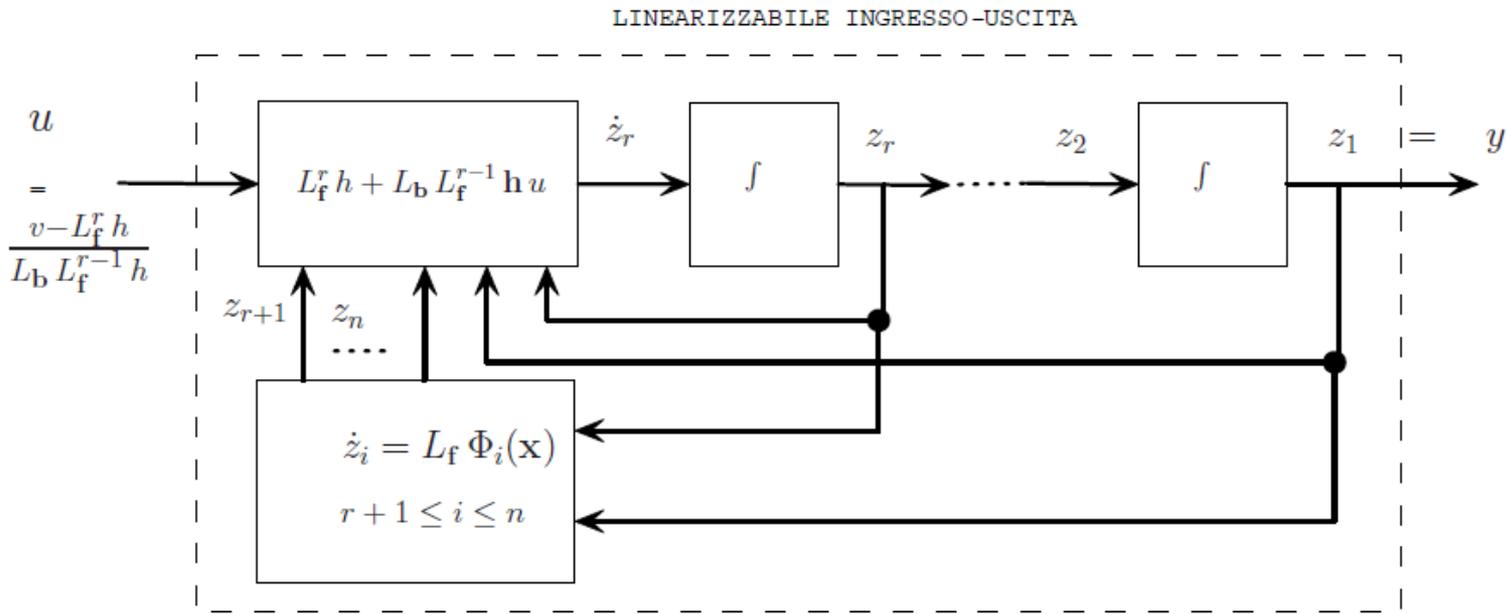
in modo tale che sia  $L_b \Phi_i(\mathbf{x}) = 0$  per ogni  $r + 1 \leq i \leq n$ . In base a questa proprietà:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{r+1} &= L_f \Phi_{r+1} + L_b \Phi_{r+1} \psi \\ &\dots \\ \dot{z}_n &= L_f \Phi_n + L_b \Phi_n \psi \end{aligned}$$

Le  $n - r$  nuove variabili di stato ottenute con questa trasformazione costituiscono quindi la **dinamica interna** del sistema linearizzato, dalla cui stabilità dipende l'effettiva utilità pratica della linearizzazione.

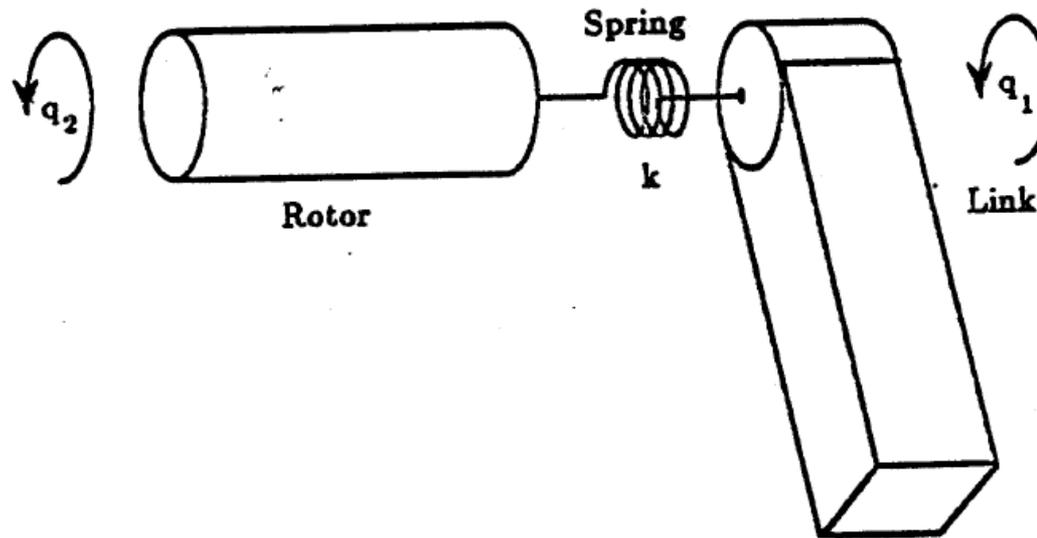
# Schema complessivo

Per concludere, è possibile ottenere la *linearizzazione ingresso-uscita* in  $\Omega$  del sistema tramite  $u = (v - L_f^r h) / L_b L_f^{r-1} h$ , ottenendo che  $y^{(r)} = v$  e, nel contempo, una *linearizzazione parziale ingresso-stato*:



- Se  $r = n$ , cioè il grado relativo è pari all'ordine del sistema, la linearizzazione ingresso-stato è **completa!**

# Esempio: Robot con giunto flessibile



$$I\ddot{q}_1 + MgL \sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0$$

$$J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = \tau (= u)$$

con  $M$  massa del link,  $L$  distanza del baricentro dall'asse di giunto,  $I$  inerzia del link rispetto all'asse di giunto e  $J$  inerzia del rotore del motore

# Esempio: Robot con giunto flessibile

Le equazioni dinamiche sono riconducibili alla forma affine  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} + \mathbf{b}u$  se poniamo  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [q_1 \ \dot{q}_1 \ q_2 \ \dot{q}_2]^T$  e:

$$\mathbf{f} = \left[ x_2 \quad -\frac{MgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \quad x_4 \quad \frac{k}{J}(x_1 - x_3) \right]^T$$

$$\mathbf{b} = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{J} \right]^T$$

Ipotizzando di considerare come uscita  $y = x_1 = q_1$ , cioè la posizione angolare del link, otteniamo che:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_1 &= x_2 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 &= -\frac{MgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ y^{(3)} & &= -\frac{MgL}{I} x_2 \cos x_1 - \frac{k}{I} \left( x_2 - \underbrace{x_4}_{\text{N.B.}} \right) \\ y^{(4)} &= \dots + \frac{k}{I} \dot{x}_4 &= a(\mathbf{x}) + \frac{k}{IJ} u \end{aligned}$$

# Esempio: Robot con giunto flessibile

Il sistema ha quindi grado relativo **ben definito** ( $k/(I J) \neq 0$  sempre!), pari a 4, cioè all'ordine del sistema, che è quindi **linearizzabile completamente** attraverso la legge di controllo:

$$u = \frac{I J}{k} [v - a(\mathbf{x})]$$

nella quale (ahinoi):

$$a(\mathbf{x}) = \frac{MgL}{I} \sin x_1 \left( x_2^2 + \frac{MgL}{I} \cos x_1 + \frac{k}{I} \right) + \frac{k}{I} (x_1 - x_3) \left( \frac{k}{I} + \frac{k}{J} + \frac{MgL}{I} \cos x_1 \right)$$

# Estensione ai sistemi MIMO

Per un sistema del tipo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

nel quale  $\mathbf{B}$  è una matrice  $n \times m$  le cui colonne sono campi vettoriali *smooth*, il grado relativo, se definito, non è uno scalare, ma un vettore  $(r_1, r_2, \dots, r_m)$ , per il quale la sommatoria  $r = r_1 + r_2 + \dots + r_m$  è detto *grado relativo totale*.

Il problema di linearizzazione si risolve nel caso MIMO in modo analogo a quanto visto per il caso SISO, con la ovvia differenza che per ogni componente dell'uscita  $y_i$  saranno necessarie  $r_i$  derivazioni successive rispetto al tempo (fino a ottenere la relazione con  $\mathbf{u}$ ) e la determinazione delle opportune trasformazioni di stato.

# Estensione ai sistemi MIMO

Procedendo con le derivazioni, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ \dots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_f^{r_2} h_2(\mathbf{x}) \\ \dots \\ L_f^{r_m} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \mathbf{E}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

con  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  matrice  $m \times m$  definita in termini delle  $L_{b_j} L_f^{r_i-1} h_i$  ( $i$  indice dell'uscita,  $j$  indice dell'ingresso) e chiamata **matrice di disaccoppiamento**

Se il sistema ha grado relativo definito in un certo  $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ , la matrice  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  è invertibile in  $\Omega$ , quindi il sistema è linearizzabile.

**NOTA:** questa proprietà è sempre verificata, come visto in precedenza, per una ampia classe di sistemi meccanici che include tutti i robot manipolatori seriali!

# Controllo in Sliding Mode

- La teoria del controllo in **Sliding Mode** ha come obiettivo la **robustezza** del controllore nei confronti di disturbi e/o incertezze di modellazione del sistema controllato
- Si cerca di raggiungere l'obiettivo forzando il sistema in retroazione a raggiungere un regime di **Sliding Mode**, tipico dei **systemi a struttura variabile** (*Variable Structure Systems, VSS*)
- Teoricamente, una volta raggiunto lo Sliding Mode, il sistema rimarrà **sempre** in tali condizioni (anche con disturbi o errori di modellazione entro limiti ipotizzati)  $\Rightarrow$  il regime di Sliding Mode è caratterizzato da un **insieme invariante** per la dinamica del sistema
- Tali condizioni ideali sono mantenute introducendo nell'azione di controllo una componente in **commutazione a frequenza infinita!**

# Sistemi a struttura variabile (VSS)

In generale, un sistema con:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t),$$

$$\mathbf{u} = [u_1(\mathbf{x}, t) \quad u_2(\mathbf{x}, t) \quad \dots \quad u_m(\mathbf{x}, t)]^T$$

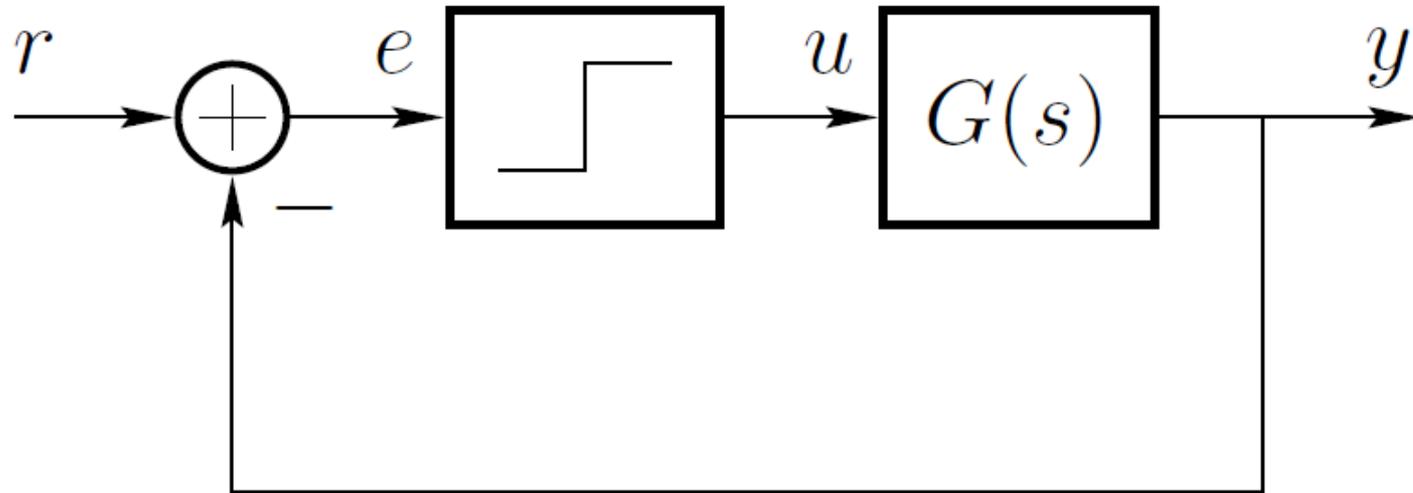
$$u_i = \begin{cases} u_i^+(\mathbf{x}, t) & \text{se } s_i(\mathbf{x}) > 0 \\ u_i^-(\mathbf{x}, t) & \text{se } s_i(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = [s_1(\mathbf{x}) \quad s_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad s_m(\mathbf{x})]^T$$

è un VSS la cui struttura varia in modo discontinuo in corrispondenza di  $m$  superfici ( $s_i(\mathbf{x}) = 0$ ) nello spazio degli stati.

# Semplice VSS (Controllo on/off)

Comune nei controlli di temperatura, di livello, ecc.

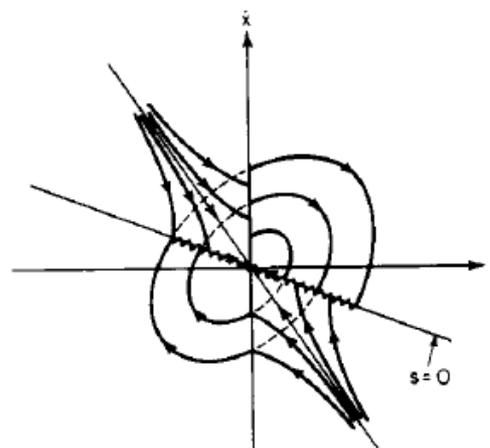
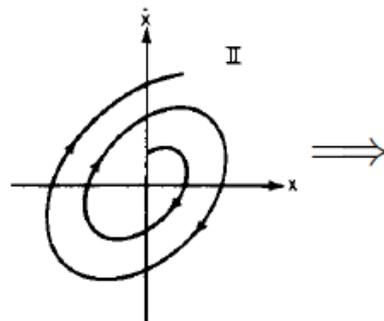
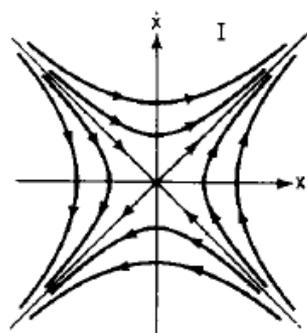


# Sistema VSS, esempio nel piano delle fasi

Altro esempio di VSS interessante (rappr. grafica nel piano delle fasi):

$$\begin{aligned}\ddot{x} + a\dot{x} + bx &= u \\ u &= -K|x|\text{sign}(s) \\ s &= cx + \dot{x}\end{aligned}$$

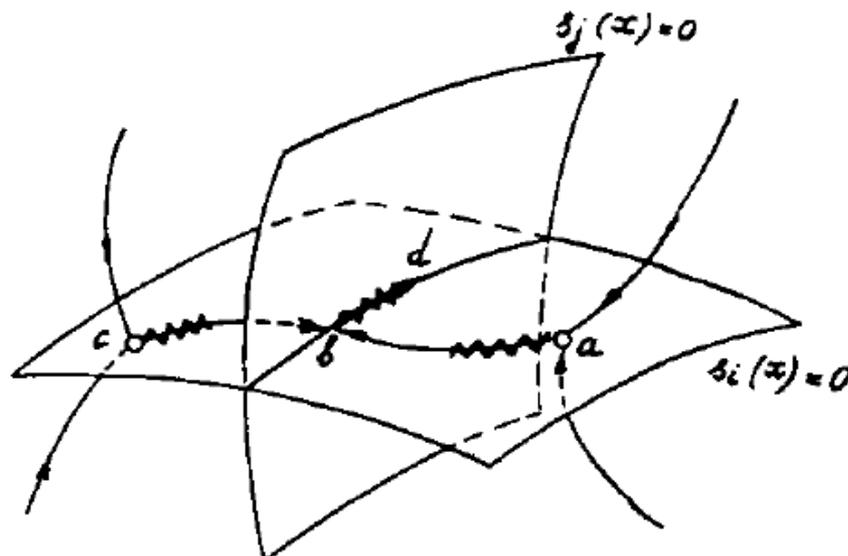
Le traiettorie nel piano delle fasi si ottengono componendo quelle di due sistemi lineari (con  $u = Kx$  e con  $u = -Kx$ ), commutando fra uno e l'altro in corrispondenza della retta  $s = 0$  ( $\text{sign}(s) = \pm 1$  se  $s \lessgtr 0$ ) e dell'asse  $x$ :



# Sistema VSS, esempio nel piano delle fasi

Quando le traiettorie raggiungono la retta  $s = 0$ , la dinamica è unicamente governata dall'equazione  $cx + \dot{x} = 0$ : lo stato del sistema tende all'origine, **scivolando** sulla “**superficie**”  $s = 0$  (*sliding surface*). Se  $K$  è sufficientemente grande, la condizione di Sliding Mode è insensibile ai disturbi  $\Rightarrow s = 0$  è un **insieme invariante**

In generale:



# Controllo Sliding Mode, osservazioni

- Il controllo in Sliding Mode (con VSS) è una estensione del tradizionale controllo **on/off** (relè) o **bang-bang**
- In Sliding Mode, la componente discontinua del controllo ha una uscita di valore finito, in relazione ad un ingresso  $s$  (quasi) nullo  $\Rightarrow$  **guadagno elevato** (teoricamente  $\infty$ )
- In Sliding Mode, le traiettorie sono caratterizzate da una dinamica di *ordine inferiore* a quella del sistema completo  $\Rightarrow$  **semplificazione del problema di inseguimento**

# Progetto di controllo in Sliding Mode - 1

Si consideri il sistema SISO in forma canonica di controllabilità (*companion*):

$$\dot{x}^{(n)} = f(\mathbf{x}, t) + b(\mathbf{x}, t)u + d(t)$$

con  $f(\mathbf{x}, t)$  e  $b(\mathbf{x}, t)$  non note con precisione e  $d(t)$  un disturbo limitato.

**NOTA:** la dinamica è tipica di applicazioni industriali di **motion control**, con  $x$  posizione di un cinematismo,  $u$  coppia di un motore e  $\mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ \dots \ x^{(n-1)}]^T$  vettore di stato.

Si desidera risolvere il problema di inseguimento della traiettoria  $\mathbf{x}_d(t) = [x_d \ \dot{x}_d \ \dots \ x_d^{(n-1)}]^T$  in modo **robusto** rispetto al disturbo  $d$  ed all'incertezza sul modello di  $f$  e  $b$ .

Ponendo  $e = x - x_d$  (errore di posizione) ed  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = [e \ \dot{e} \ \dots \ e^{(n-1)}]^T$  vettore "errore di inseguimento", il problema di tracking si può ricondurre a quello di stabilizzazione di una superficie di sliding

# Progetto di controllo in Sliding Mode - 2

Si definisce la superficie tempo-variante  $S(t) \in \mathbf{R}^n$  attraverso la seguente equazione scalare:

$$s(\mathbf{e}, t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e = 0$$

con  $\lambda > 0$ . Ad esempio, se  $n = 2$  (caso tipico):

$$s = \dot{e} + \lambda e$$

mentre se  $n = 3$ :

$$s = \ddot{e} + 2\lambda\dot{e} + \lambda^2 e$$

Il problema n-dimensionale di inseguimento di  $\mathbf{x}_d(t)$  diventa quindi il problema monodimensionale di **rendere invariante**  $S(t)$ , definita da  $s(\mathbf{e}, t) = 0$

# Superficie di sliding, proprietà e osservazioni

- La funzione scalare  $s(e, t)$  esprime una misura dell'errore di inseguimento, per cui mantenendo limitata questa si mantiene limitato l'errore sulla "uscita" ( $x$ ) e su tutte le sue derivate:

$$|s| \leq \phi \quad \Rightarrow \quad |e^{(i)}| \leq 2^i \frac{\phi}{\lambda^{n-1-i}}$$

- La distanza di uno stato  $x$  dalla superficie  $S$  è misurata da  $s^2$
- L'obiettivo del controllo è rendere  $S$  invariante ed attrattiva, cioè t.c. che  $s^2$  sia decrescente lungo tutte le traiettorie del sistema
- Una volta su  $S$ , le traiettorie del sistema sono definite dalla stessa equazione  $s = 0$ , per cui l'errore di inseguimento tende esponenzialmente a 0 con costante di tempo  $(n - 1)/\lambda$

# Superficie di sliding, proprietà e osservazioni

Si desidera progettare la legge di controllo in modo che sia verificata la seguente:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|$$

In questo modo, con condizioni iniziali  $\mathbf{x}(t_0) \neq \mathbf{x}_d(t_0)$ , la superficie  $S$  è raggiunta in un tempo finito inferiore a  $|s(t_0)|/\eta$

Per garantire la robustezza nei confronti di disturbi e incertezze, l'azione di controllo deve essere ad *alto guadagno*, cioè discontinua rispetto a  $S$  (proporzionale a  $\text{sign}(s)$ )

Il coefficiente moltiplicativo del termine discontinuo deve essere t.c. la disuguaglianza precedente sia verificata con disturbi e incertezze **limitate superiormente** (entro limiti fissati per ipotesi)

# Ipotesi di robustezza

Si consideri ad esempio, la dinamica del secondo ordine ( $n = 2$ ):

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + u$$

con  $f$  non nota con precisione, ma stimata da una funzione  $\hat{f}$ . L'errore di stima è per ipotesi limitato da una funzione nota  $F(x, \dot{x}, t)$ :

$$|\hat{f} - f| \leq F$$

Data la traiettoria di riferimento  $x_d(t)$ , si definisce la superficie di sliding:

$$s = \dot{e} + \lambda e = 0$$

che deve essere resa invariante risolvendo rispetto a  $u$  l'equazione  $\dot{s} = 0$ :

$$\dot{s} = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} = f + u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} = 0$$

# Ipotesi di robustezza

Poichè  $f$  non è nota in modo preciso, la migliore approssimazione disponibile del controllo "ideale" è:

$$\hat{u} = \ddot{x}_d - \hat{f} - \lambda \dot{e}$$

Inoltre, per imporre che il sistema sia in Sliding Mode su  $s = 0$ , occorre aggiungere a  $\hat{u}$  un termine discontinuo:

$$u = \hat{u} - k \operatorname{sign}(s)$$

con  $k = k(x, \dot{x}, t)$  tale da garantire l'attrattività di  $s = 0$ :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = \dot{s} \cdot s = [f - \hat{f} - k \operatorname{sign}(s)] \cdot s = (f - \hat{f})s - k|s| \leq -\eta|s|$$

perciò  $k \geq F + \eta$

# Ipotesi di robustezza, osservazioni

Si noti che per la dinamica dell'errore, la funzione:

$$V = \frac{1}{2} s^2$$

rappresenta anche una funzione di Lyapunov grazie quale è possibile dimostrare la stabilità di  $s = 0$  e, soprattutto, la robustezza di tale stabilità. Infatti, la derivata di  $V$  rispetto al tempo:

$$\dot{V} = \dot{s} \cdot s$$

deve essere definita negativa  $\forall s \neq 0$ . Questo significa che quando  $s > 0$  deve essere  $\dot{s} < 0$  e viceversa. Pertanto, poichè la  $\dot{s}$  dipende in modo diretto dalla legge di controllo  $u$ , è necessario che questa sia discontinua rispetto a  $s = 0$ , cioè proporzionale a  $sign(s)$ . Per la robustezza, il coefficiente di proporzionalità va progettato, come si è visto, in relazione all'ipotesi peggiore sull'errore di modellazione della dinamica del sistema.

# Estensioni delle condizioni di robustezza



Se la dinamica del sistema è affetta da un disturbo  $d(t)$ , limitato per ipotesi da:

$$\ddot{x}(t) = f(x, \dot{x}, t) + u(t) + d(t)$$
$$|d(t)| \leq D$$

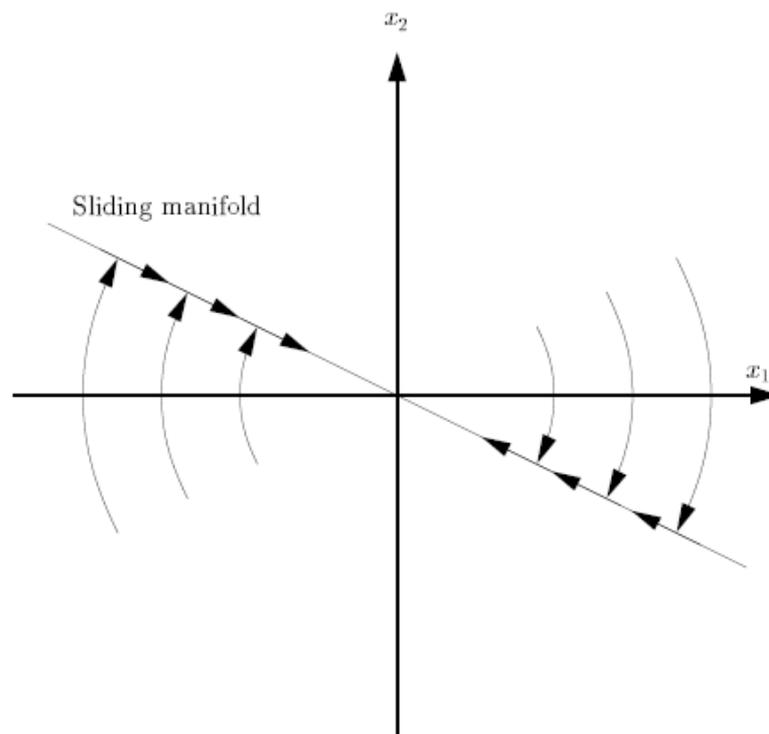
con  $D$  costante, per avere Sliding Mode robusto rispetto a  $d$  è sufficiente scegliere:

$$k \geq F + D + \eta$$

con  $F$  determinato come visto in precedenza.

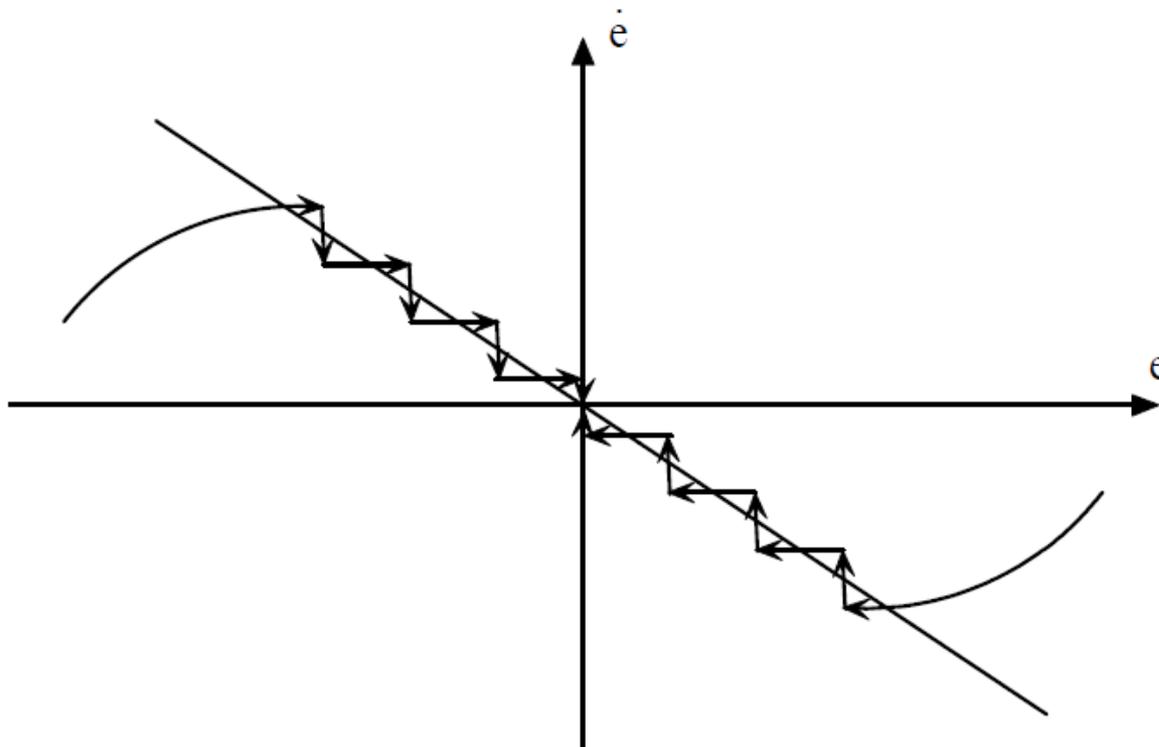
# Il problema di chattering

Con il controllo in Sliding Mode, le traiettorie del sistema sono sempre caratterizzate da un tratto di *raggiungimento* della superficie  $S$  e da un tratto di *scivolamento* verso  $e = \mathbf{0}$  ( $x_1 = e$  e  $x_2 = \dot{e}$  in figura):



# Il problema di chattering

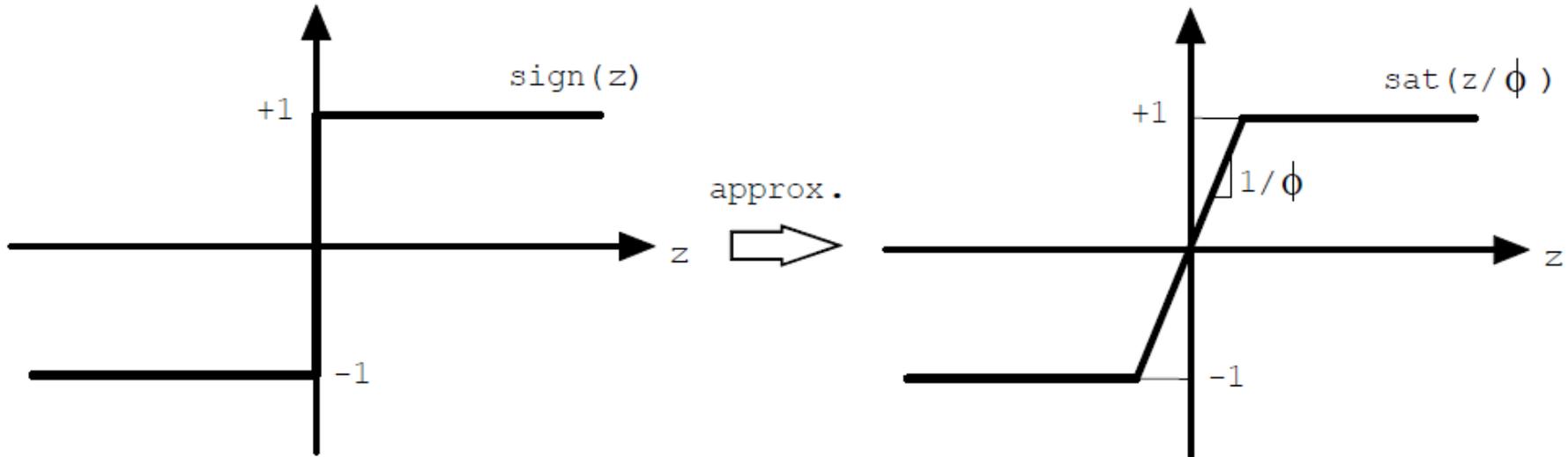
La condizione di scivolamento è mantenuta a patto di poter commutare istantaneamente il controllo attraversando  $S$ . Se, come accade forzatamente nella pratica, la commutazione non è istantanea, insorge un fenomeno di **chattering**:



# Il problema di chattering, cause e soluzioni

- **Cause:**
  - Ritardo implicito nella realizzazione digitale (risolvibile con progetto direttamente nel dominio tempo discreto)
  - Dinamiche “parassite” non trascurabili nell’attuatore o nei trasduttori
- Chiaramente, il chattering è da evitare nelle realizzazioni pratiche (es. eccessiva sollecitazione strutture meccaniche) ⇒ **Soluzioni:**
  1. **introduzione di un Boundary Layer:** approssimazione del guadagno infinito in prossimità di  $S$  con guadagno finito ( $sat(s/\phi)$  al posto di  $sign(s)$ )

# Boundary layer, smoothing del controllo



In questo modo, la condizione  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|$  garantisce “solo”  $|s| \leq \phi$

# Boundary layer, smoothing del controllo

