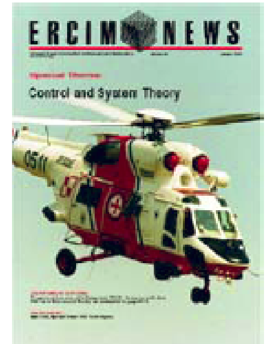
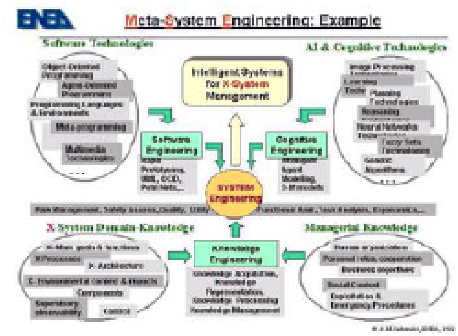
TECNICHE DI CONTROLLO MULTIVARIABILE

Richiami di Teoria dei Sistemi

Department of
Engineering
Ferrara

Sistemi e Modelli

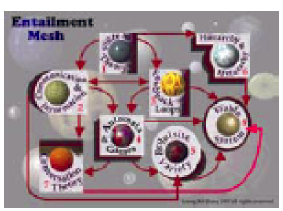


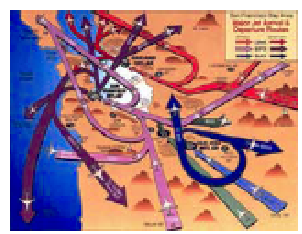


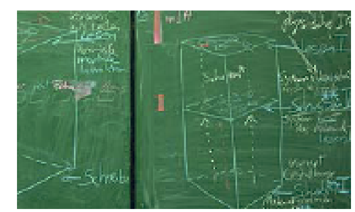
Da diversi anni, i termini:

- "Sistema",
- "Teoria dei Sistemi",
- "Ingegneria dei Sistemi"
- ...

sono divenuti di uso corrente in campi e discipline anche molto diverse: controllo dei processi, elaborazione dati, biologia, economia, ecologia, gestione aziendale, gestione traffico, ...





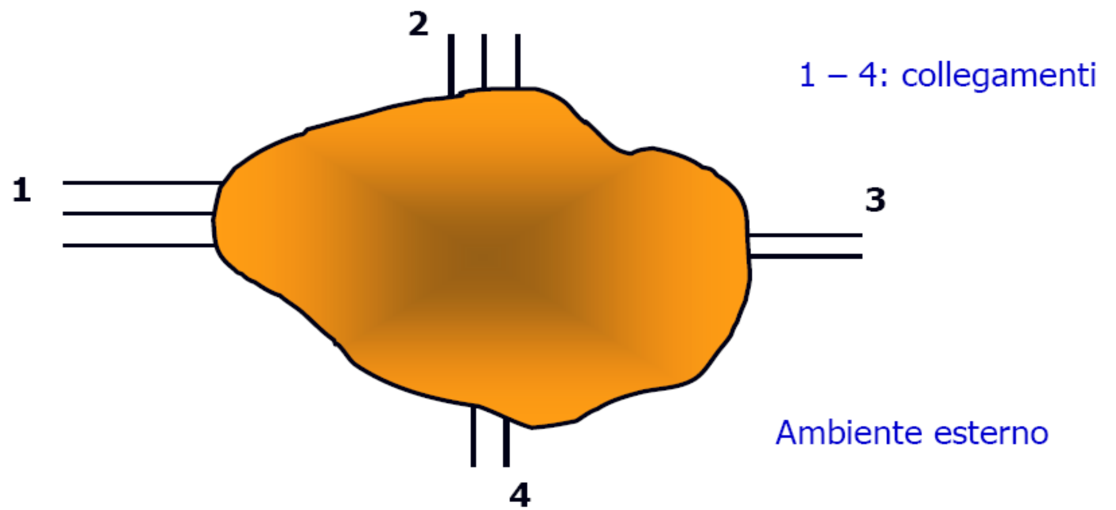


Sistema: "elemento" comune in questa terminologia

→ Necessità di definire e studiare le *proprietà strutturali* dei "sistemi"

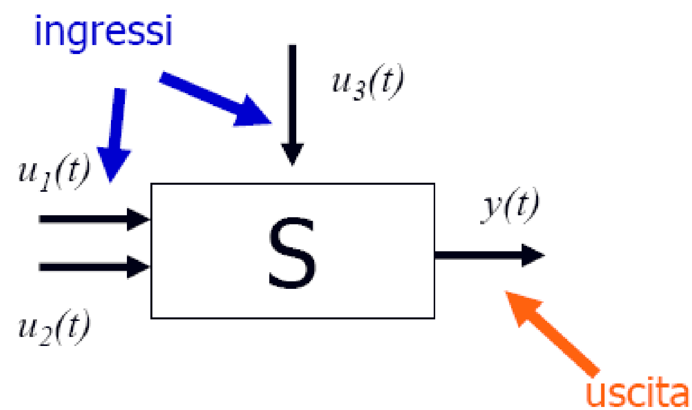
Concetto di Sistema

- **Sistema:** insieme, artificialmente isolato dal contesto, costituito da più parti tra loro interagenti di cui si vuole indagare il comportamento
- **Attributo misurabile**: caratteristica che può essere messa in relazione con un insieme di simboli o numeri (interi, reali, complessi)
- **Modello matematico**: equazioni che descrivono le relazioni tra gli attributi misurabili.



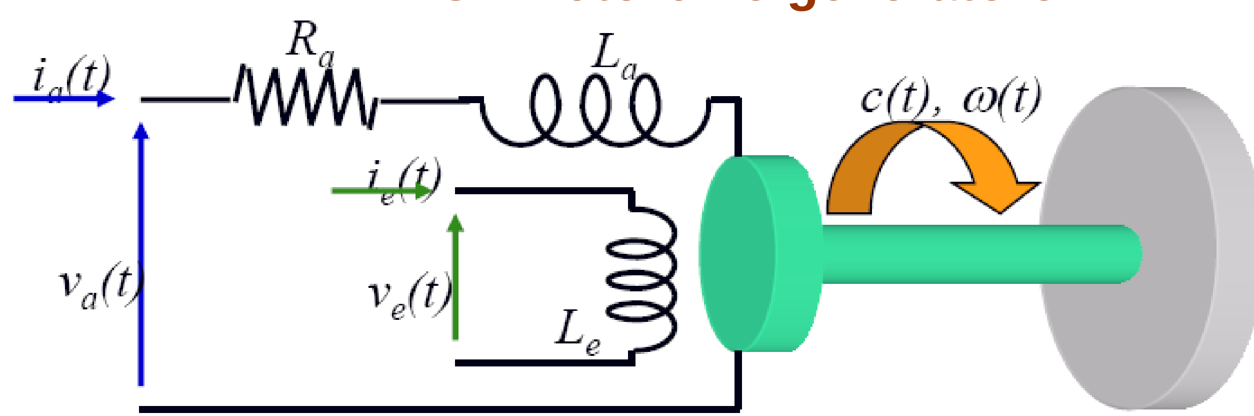
Causa → Effetto

- Un sistema *orientato* è un sistema in cui le variabili sono suddivise in
  - Variabili di ingresso (cause)
  - Variabili di uscita (effetti)



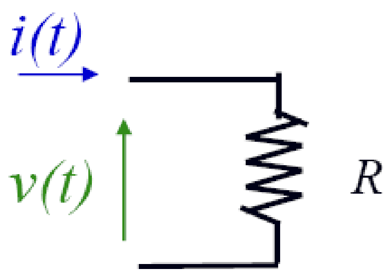
- Non sempre la suddivisione tra ingressi ed uscite (cause ed effetti) è univoca

Es.: Motore.. o generatore?

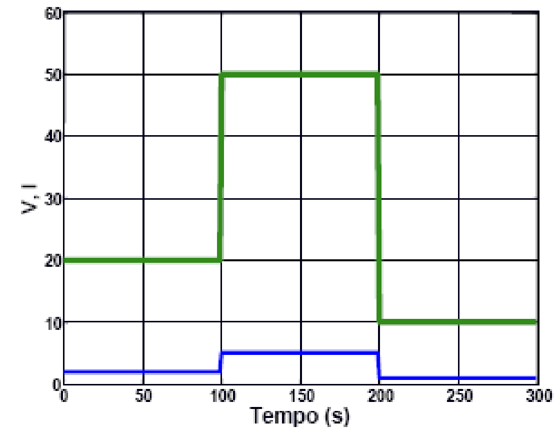


Sistemi e Dinamica

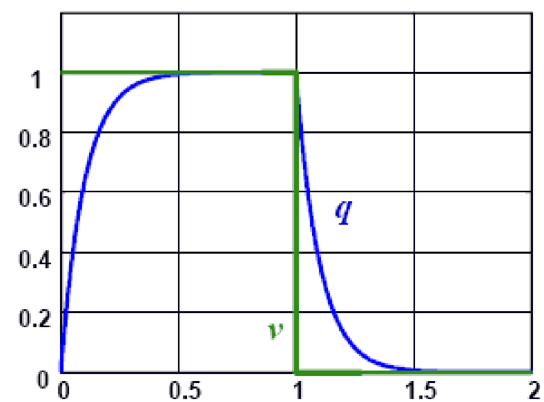
- Sistema statico (algebrico)

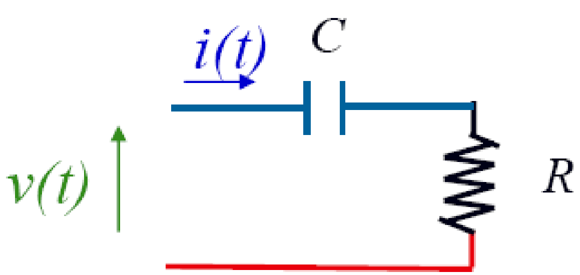


$$v(t) = R\,i(t)$$



- Sistema dinamico



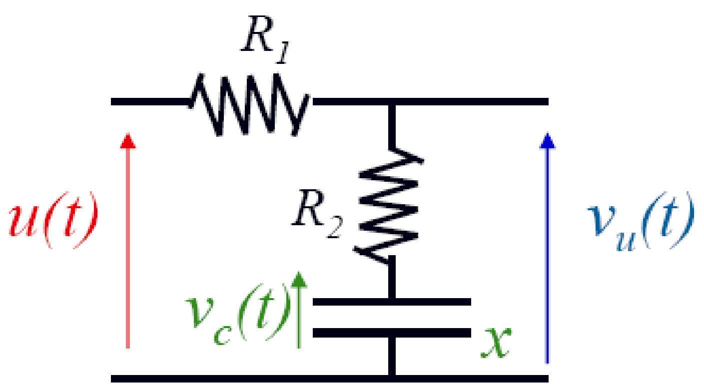


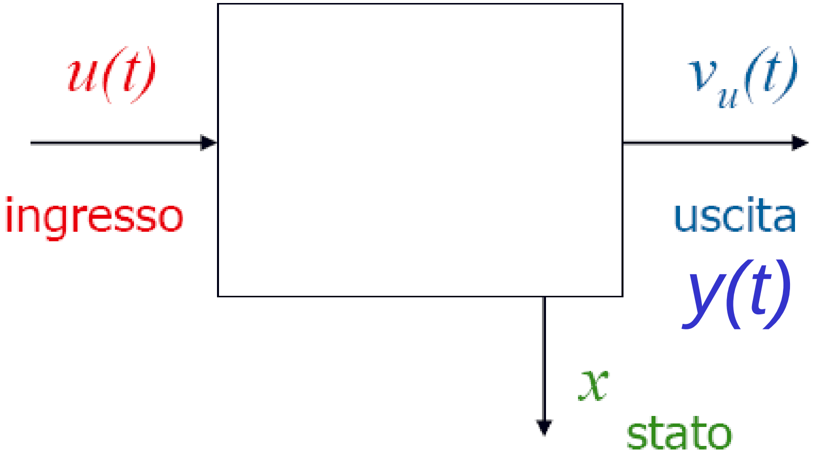
$$v(t) = R\,i(t) + \frac{1}{C}\int i(\tau)d\tau$$

Sistemi e Dinamica

- ***Sistemi dinamici:*** dotati di memoria. I valori dell'uscita, in un dato istante, dipendono ***anche*** dalla evoluzione degli ingressi negli istanti precedenti (storia – memoria).

- *Rete elettrica con elementi che accumulano energia* (capacità e/o induttanze)





Considerazioni “energetiche”

- Lo **stato** è l’informazione sulla “situazione interna” di un sistema, necessaria per predire l’effetto della sua storia passata sul suo comportamento futuro.
- Lo **stato** nei sistemi fisici è determinato dall’**accumulo di energia** (quantità di moto, energia potenziale, carica elettrica, ecc.)
- La scelta delle variabili di stato per la modellazione matematica è comunque **arbitraria e non univoca!**

Considerazioni “energetiche”

- In ogni dominio fisico ci sono sempre **UNO o DUE** elementi che caratterizzano l’accumulo di energia
  - **Elettrico**: capacità (C) e induttanza (L)
  - **Meccanico traslante**: massa (M) e reciproco della rigidità (1/K)
  - **Meccanico rotante**: momento di inerzia (J) e reciproco della rigidità torsionale (1/K)
  - **Fluidico**: capacità fluidica (Cf) e induttanza fluidica (Lf)
  - **Termico**: capacità termica (Ct)

Considerazioni “energetiche”

Dominio	Accumulo ‘capacitivo’	Accumulo ‘induttivo’
Elettrico	$E = \frac{1}{2} C V^2$	$E = \frac{1}{2} L I^2$
Meccanico (traslazione)	$E = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{K}}\right)\mathrm{F}^2$	$E = \frac{1}{2} M \mathrm{v}^2$
Meccanico (rotazione)	$E = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{K}}\right)\tau^2$	$E = \frac{1}{2} J \omega^2$
Idraulico	$E = \frac{1}{2} C_f p^2$	$E = \frac{1}{2} L_f q^2$
Termico	$E = C_t T$	

Effort

Variabili intensive (o ‘ai morsetti’)

Flow

Variabili estensive (o ‘passanti’)

Modelli matematici analitici: equazioni differenziali

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\
\ldots \\
\dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
y_1(t) = g_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\
\ldots \\
y_p(t) = g_p(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t)
\end{cases}
$$

Modelli matematici analitici: equazioni differenziali

I vettori

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \qquad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_p(t) \end{pmatrix}$$

sono, rispettivamente, i vettori di

- ***Stato***: x(t) $\in$ **X**, **X**=R^n
- ***Ingresso***: u(t) $\in$ **U**, **U**=R^m
- ***Uscita***: y(t) $\in$ **Y**, **Y**=R^p

all' istante t $\in$ **T**=R

Modelli matematici analitici: equazioni differenziali

Compattando la notazione, scriveremo le equazioni che rappresentano un sistema regolare come:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \end{cases}$$

dove ***x**(t)*, ***u**(t)* e ***y**(t)* sono vettori e ***f*** e ***g*** sono vettori di funzioni.

f è detta <u>*funzione di velocità di transizione dello stato*</u>
g è detta <u>*funzione di uscita*</u>

Il sistema descritto è di ***dimensione n con m ingressi e p uscite.***

Tipologie di sistemi

Si possono distinguere, in base al numero di ingressi e di uscite, i seguenti tipi di sistema:

- **MIMO** (Multiple Input Multiple Output): sistema con m (>1) ingressi e p (>1) uscite
- **MISO** (Multiple Input Single Output): sistema con m (>1) ingressi e un'uscita sola (p=1)
- **SIMO** (Single Input Multiple Output): sistema con un solo ingresso (m=1) e p (>1) uscite
- **SISO** (Single Input Single Output): sistema con un solo ingresso (m=1) e una sola uscita (p=1)

Classificazione dei modelli

- **Lineare**

Stazionario

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t)\\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t)\end{aligned}$$

→ **o Lineare Tempo-Invariante (LTI)**

Non Stazionario

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t)\\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

Con $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ continue a tratti

- **Non lineare**

Stazionario

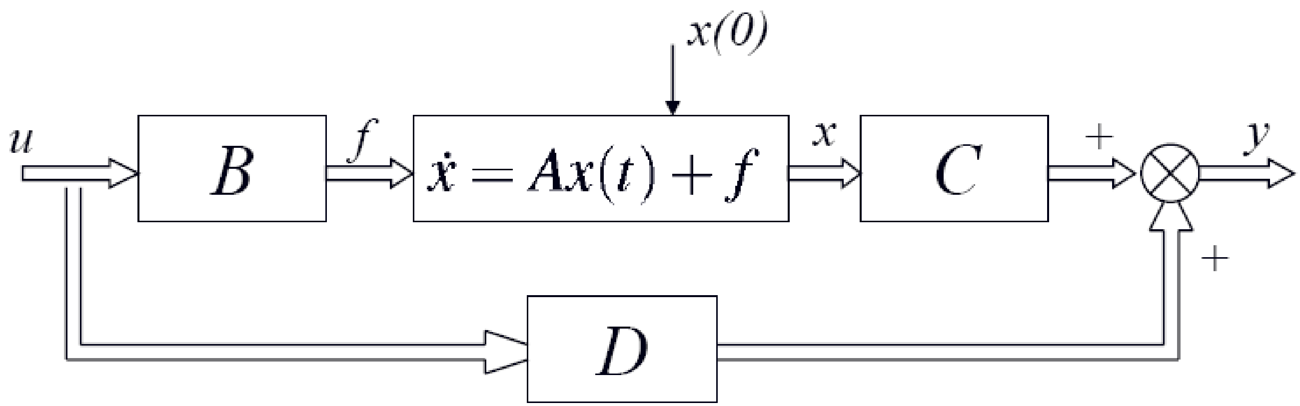
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t))\\ y(t) &= g(x(t), u(t))\end{aligned}$$

Non Stazionario

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t)\\ y(t) &= g(x(t), u(t), t)\end{aligned}$$

La classe di modelli più... “apprezzata”!

- Un sistema lineare stazionario (caso particolare) è rappresentato:
  - nel caso MIMO da 4 matrici (A, B, C, D)
  - nel caso SISO da (A, b, c, d).



u : ingresso; y : uscita; f : azione forzante; x : stato

A : matrice del sistema
B : matrice di distribuzione degli ingressi
C : matrice di distribuzione delle uscite
D : matrice del legame algebrico ingresso/uscita

La classe di modelli più... "apprezzata"!

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice Quadrata

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pn} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{p1} & \dots & d_{pm} \end{pmatrix}$$

NB: se il sistema è puramente dinamico D = 0

Rappresentazioni equivalenti

Introducendo il concetto di stato, abbiamo detto che **NON** esiste un modo unico di scegliere le variabili di stato per rappresentare un sistema dinamico.

Per un sistema LTI, una volta scelta una base per **X=R^n**, **U=R^m** e **Y=R^p** e scelte le variabili di stato, esso è rappresentato da:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Consideriamo una matrice T (n x n) costante e non singolare e mediante un *cambio di variabili* definiamo un nuovo vettore di stato x come:

$$z = Tx \iff x = T^{-1}z$$

Rappresentazioni equivalenti

Sostituendo nelle equazioni di partenza si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \bar{A}z(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) = \bar{C}z(t) + \bar{D}u(t) \end{cases}$$

$$\bar{A} = TAT^{-1} \quad \bar{B} = TB$$
$$\bar{C} = CT^{-1} \quad \bar{D} = D$$

Il sistema LTI rappresentato da queste equazioni è *equivalente* al sistema LTI di partenza, nel senso che per un ingresso u(t) e due stati iniziali legati dalla condizione

$$z_0 = Tx_0$$

Le funzioni dello stato x(t) e z(t) sono legate dalla relazione

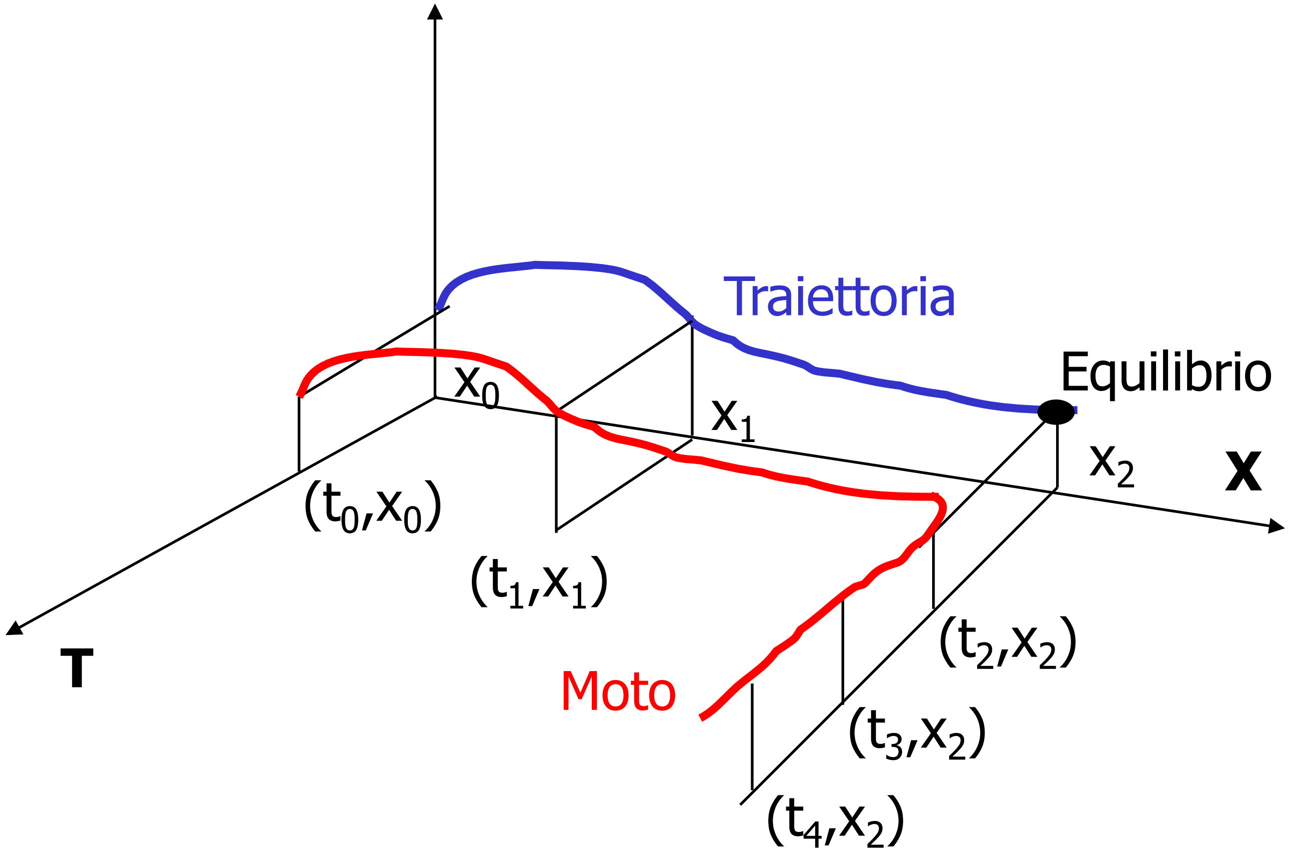
$$z(t) = Tx(t) \quad \forall t \geq 0$$

e le uscite sono identiche.

Analisi dei sistemi

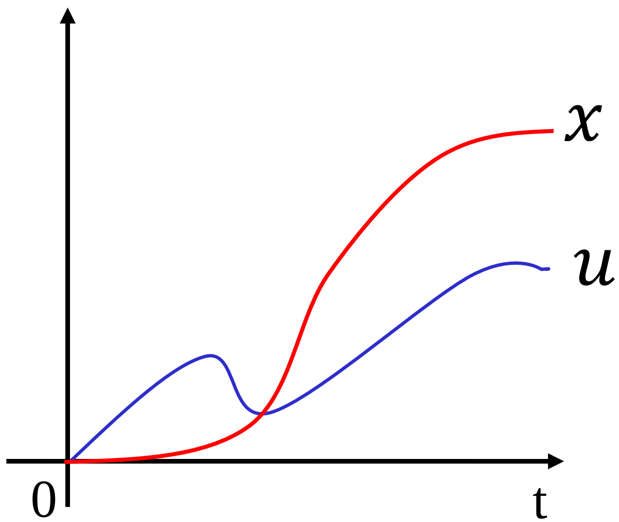
- **Analisi del moto e della risposta**: soluzione delle equazioni differenziali per determinare il moto di x o la risposta di y, dato u.
- **Analisi della stabilità**: verifica di come le variazioni limitate sul valore iniziale di x e sulla funzione di u influenzino il moto di x o la risposta di y.
- **Analisi della controllabilità**: verifica delle possibilità di influire su x e y, agendo opportunamente su u
- **Analisi dell'osservabilità**: verifica delle possibilità di determinare x, note le funzioni di y e u

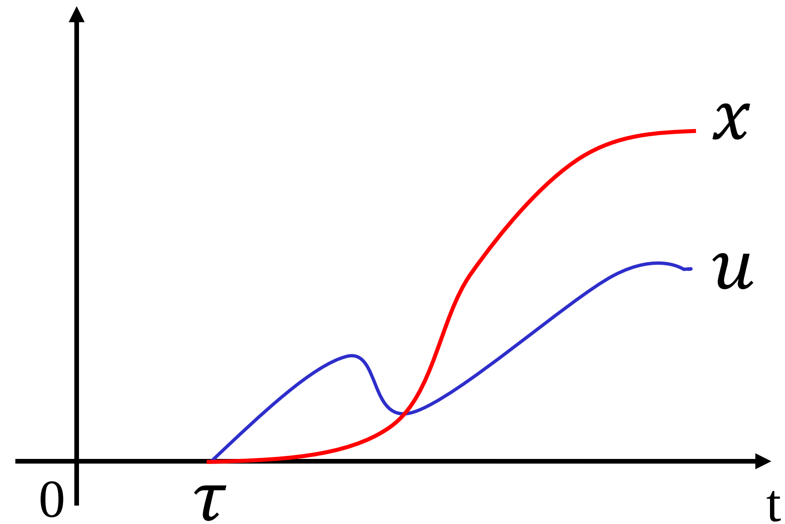
Movimento (o moto), traiettoria ed equilibrio



Stazionarietà e linearità: proprietà

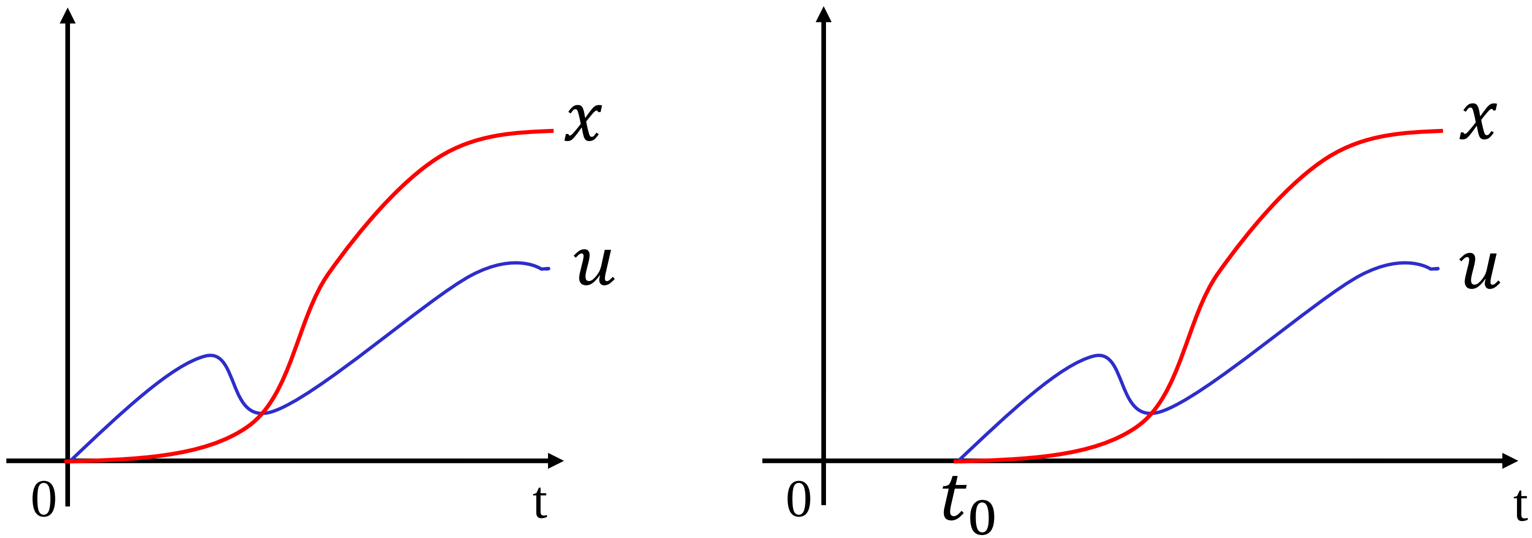
- Nei **sistemi stazionari**, vale la proprietà di traslazione nel tempo di cause ed effetti
- Cioè, applicando allo stesso sistema lo stesso ingresso, ma in due istanti temporali differenti, il sistema risponderà allo stesso modo:





Stazionarietà e linearità: proprietà

- Nei **sistemi stazionari**:
  - L'istante iniziale si può sempre assumere $\mathbf{t_0 = 0}$
  - La risposta e il moto dipendono dalla differenza $\mathbf{t - t_0}$ e non da $\mathbf{t}$ e $\mathbf{t_0}$ separatamente



Stazionarietà e linearità: proprietà

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(\,.\,))$$

- Nei **sistemi lineari** vale il principio di **sovrapposizione degli effetti**, che deriva dalla proprietà di linearità delle funzioni di velocità dello stato *f*(..) e di uscita *g*(..):

$$x(t) = \phi(t, t_0, \alpha x_{0_1} + \beta x_{0_2}, \alpha u_1(\cdot) + \beta u_2(\cdot))$$
$$= \alpha \phi(t, t_0, x_{0_1}, u_1(\cdot)) + \beta \phi(t, t_0, x_{0_2}, u_2(\cdot))$$

- Posto $\alpha = \beta = 1; \quad x_{0_1} = x_0;\ x_{0_2} = 0; \quad u_1(\cdot) = 0;\ u_2(\cdot) = u(\cdot)$

$$x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \underbrace{\phi(t, t_0, x_0, 0)}_{\text{moto libero}} + \underbrace{\phi(t, t_0, 0, u(\cdot))}_{\text{moto forzato}}$$

Stazionarietà e linearità: proprietà

- Analogamente, per la funzione di risposta di un **sistema lineare**:

$$y(t) = \gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \underbrace{\gamma(t, t_0, x_0, 0)}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\gamma(t, t_0, 0, u(\cdot))}_{\text{risposta forzata}}$$

- Quindi per un sistema lineare il moto e la relativa risposta si possono scomporre in due contributi:
  – uno dipendente **SOLO** <u>dalle condizioni iniziali </u>(moto libero e risposta libera)
  – uno dipendente **SOLO** <u>dall'ingresso</u> (moto forzato e risposta forzata)

Perchè “apprezzare” i sistemi lineari stazionari (LTI)

- Per i sistemi lineari stazionari o Lineari Tempo-Invarianti (LTI) le analisi citate si effettuano con “semplici” risultati di algebra lineare
- Dato:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0$$

La soluzione dell’equazione è data dalla *formula di Lagrange* :

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

Moto libero + moto forzato

Vale il principio della *sovrapposizione degli effetti*

Esponenziale di matrice

- La formula di Lagrange si basa sull'**esponenziale di matrice**, calcolabile come estensione della funzione esponenziale scalare (tramite espansione in serie):

$$e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(at)^i}{i!} = 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2} + \cdots + a^n \frac{t^n}{n!} + \ \ldots$$

Analogamente, è possibile definire l'esponenziale di una matrice come:

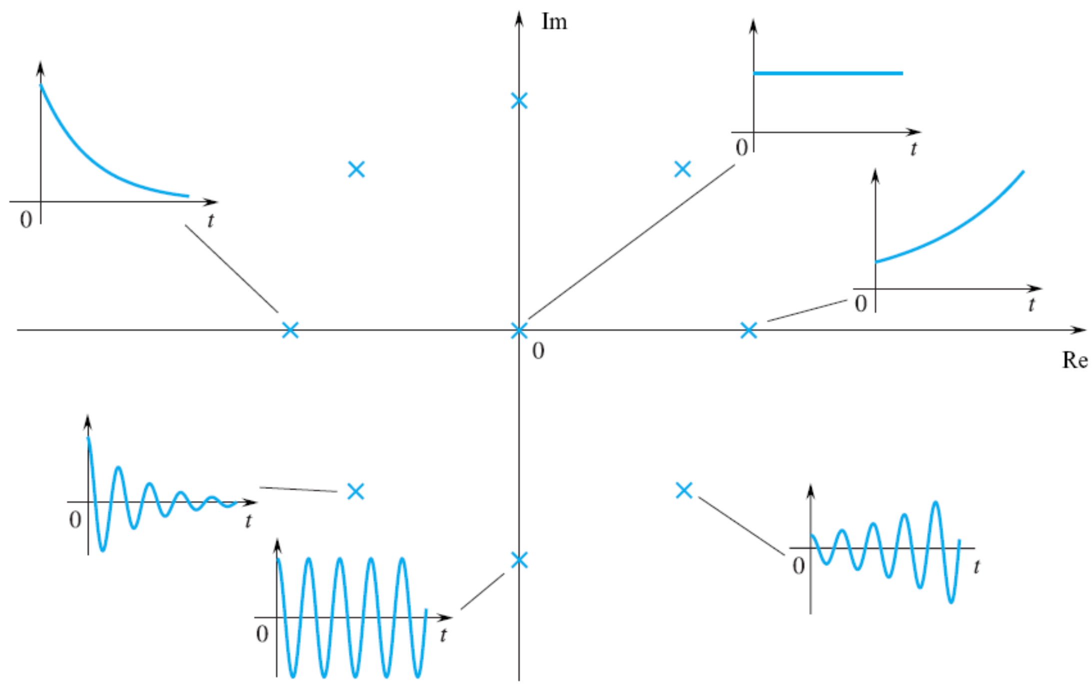
$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2} + \cdots + A^n \frac{t^n}{n!} + \ \ldots$$

Esponenziale di matrice e *modi*

- I moti liberi e forzati sono combinazioni lineari di funzioni esponenziali di base, dette **modi**, il cui andamento dipende dagli **autovalori di A e dalla loro molteplicità:**

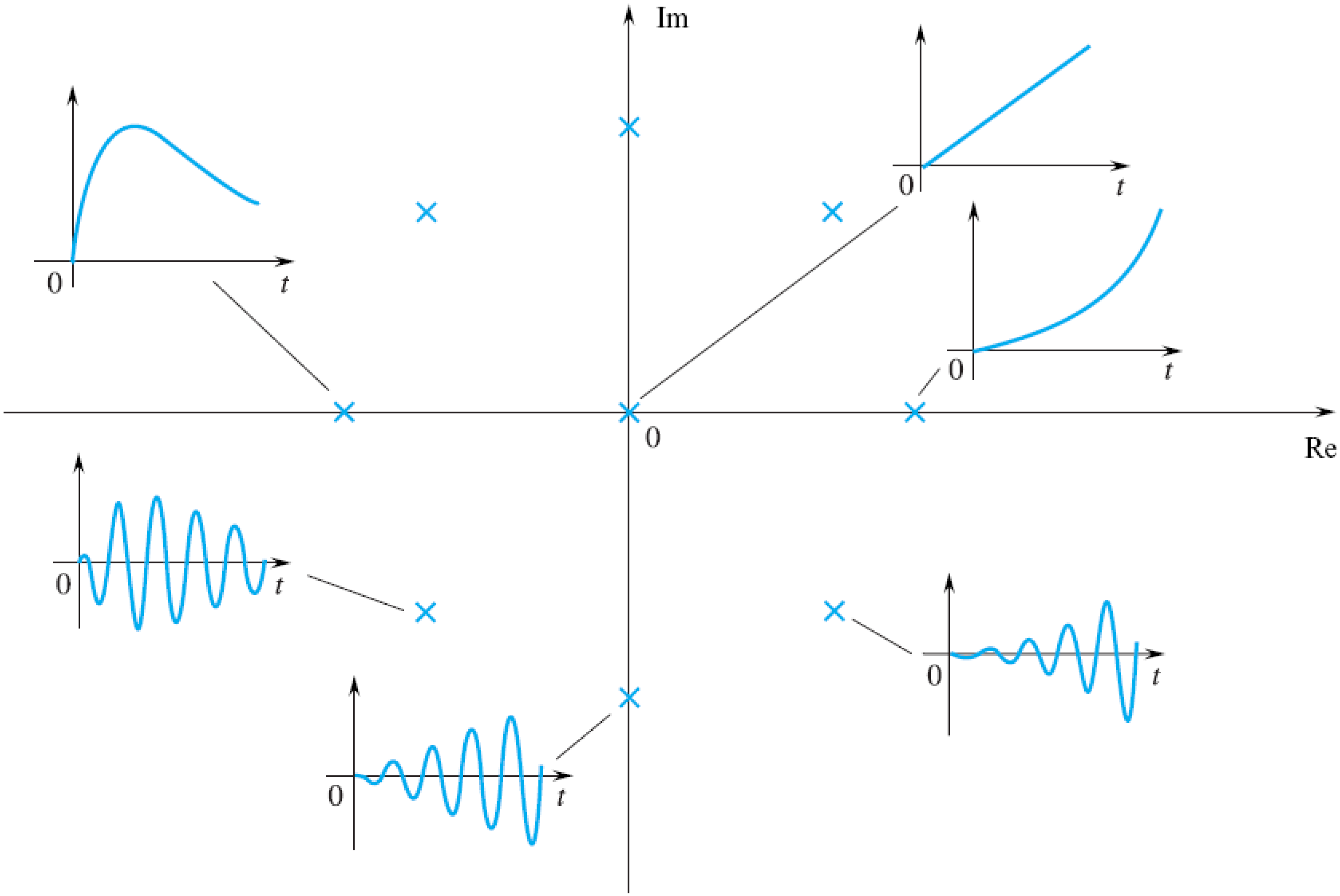
$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{l_1-1}e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_h t}, \dots t^{l_h-1}e^{\lambda_h t}, \dots$$

- Es. con autovalori **singoli**



Esponenziale di matrice e *modi*

- Es. con autovalori **doppi** (compare il contributo $te^{\lambda t}$)



Sistemi a tempo discreto

- **SISTEMA DISCRETO**: i segnali misurabili sono associati ad una successione di numeri interi detti **PASSI**, <u>generalmente</u> (ma <u>non necessariamente</u>) rappresentativi di istanti di tempo multipli di un intervallo fissato, detto <u>periodo di campionamento</u>:

$u(t_k)$ (o semplicemente $u(k)$): **VETTORE DI INGRESSO**

$y(t_k)$ (o semplicemente $y(k)$): **VETTORE DI USCITA**

Sistemi a tempo discreto

- Per sistemi a tempo discreto si usano equazioni alle differenze finite:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases}$$

x(k), u(k) e *y(k)* sono vettori e *f(.)* e *g(.)* sono vettori di funzioni nonlineari.

f() è detta **funzione dello stato futuro**

g() è detta **funzione di uscita**

- Sistemi **puramente algebrici** (senza stato, si elimina *x*(*t*) o *x*(*k*)):

$$y(t) = g(\cancel{x(t)}, u(t), t) \quad \text{o} \quad y(k) = g(\cancel{x(k)}, u(k), k)$$

- Sistemi **puramente dinamici** (si toglie *u* nella funzione di uscita):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), \cancel{u(t)}, t) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), \cancel{u(k)}, k) \end{cases}$$

Sistemi a tempo discreto

- In generale, comunque si arrivi al modello LTI MIMO

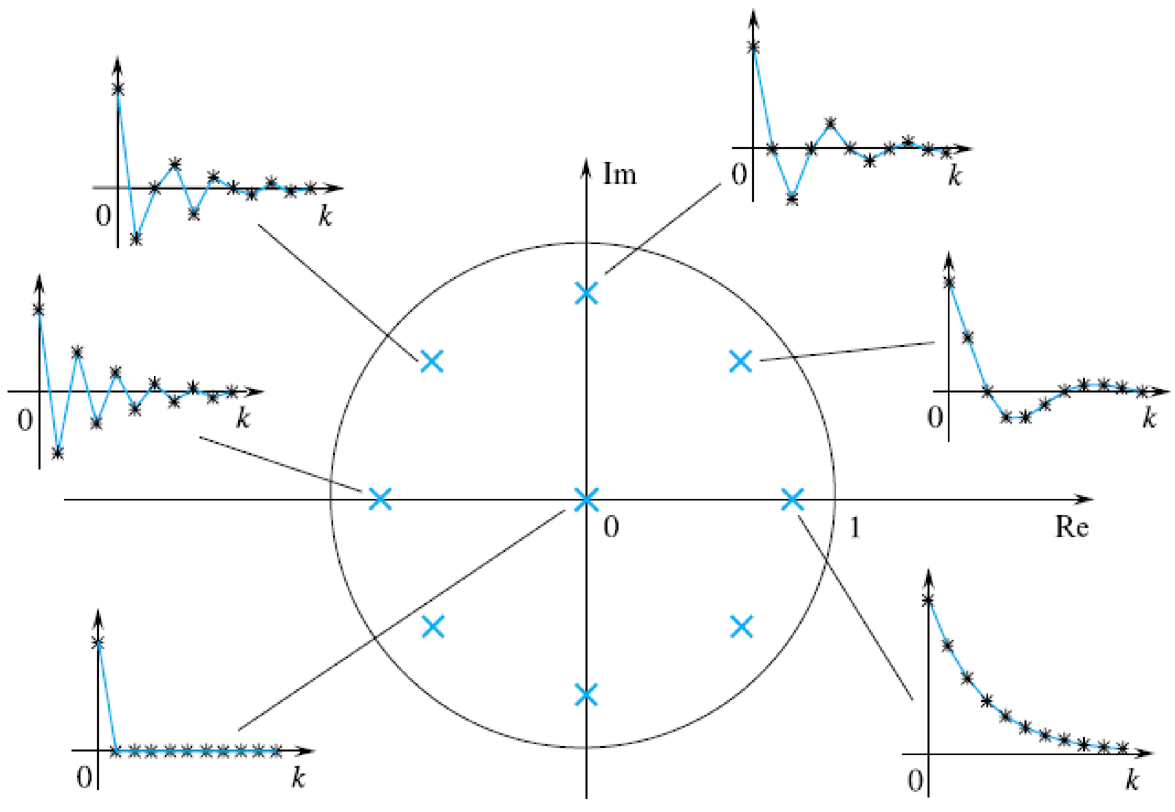
$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

il moto si può calcolare direttamente e in modo ancora più intuitivo:

$$x(k) = A_d^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A_d^{k-1-i} B_d u(i)$$

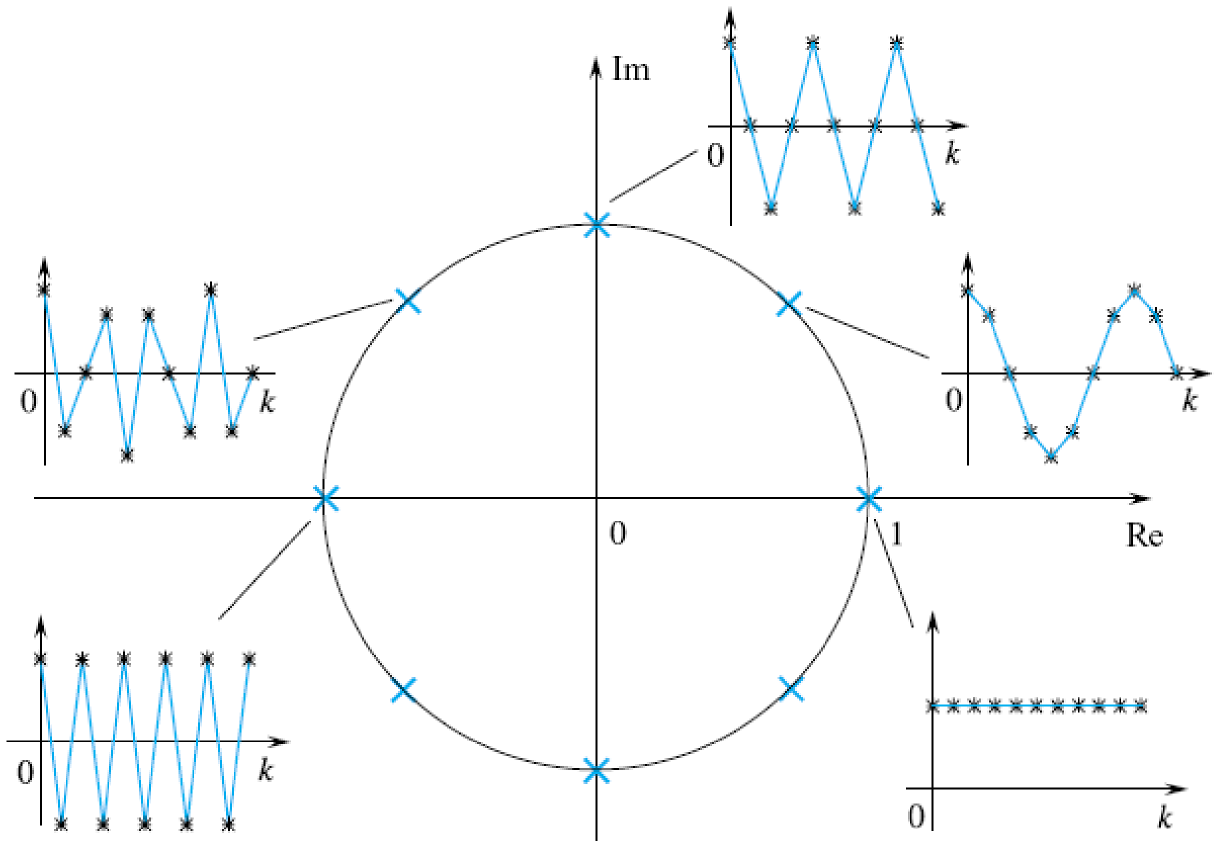
Sistemi a tempo discreto e modi

- Sempre in funzione degli **autovalori di A**, ma... è diversa la relazione con la collocazione sul piano complesso, rispetto al tempo continuo
- Es. con autovalori **singoli ($|\lambda_i| < 1$)**



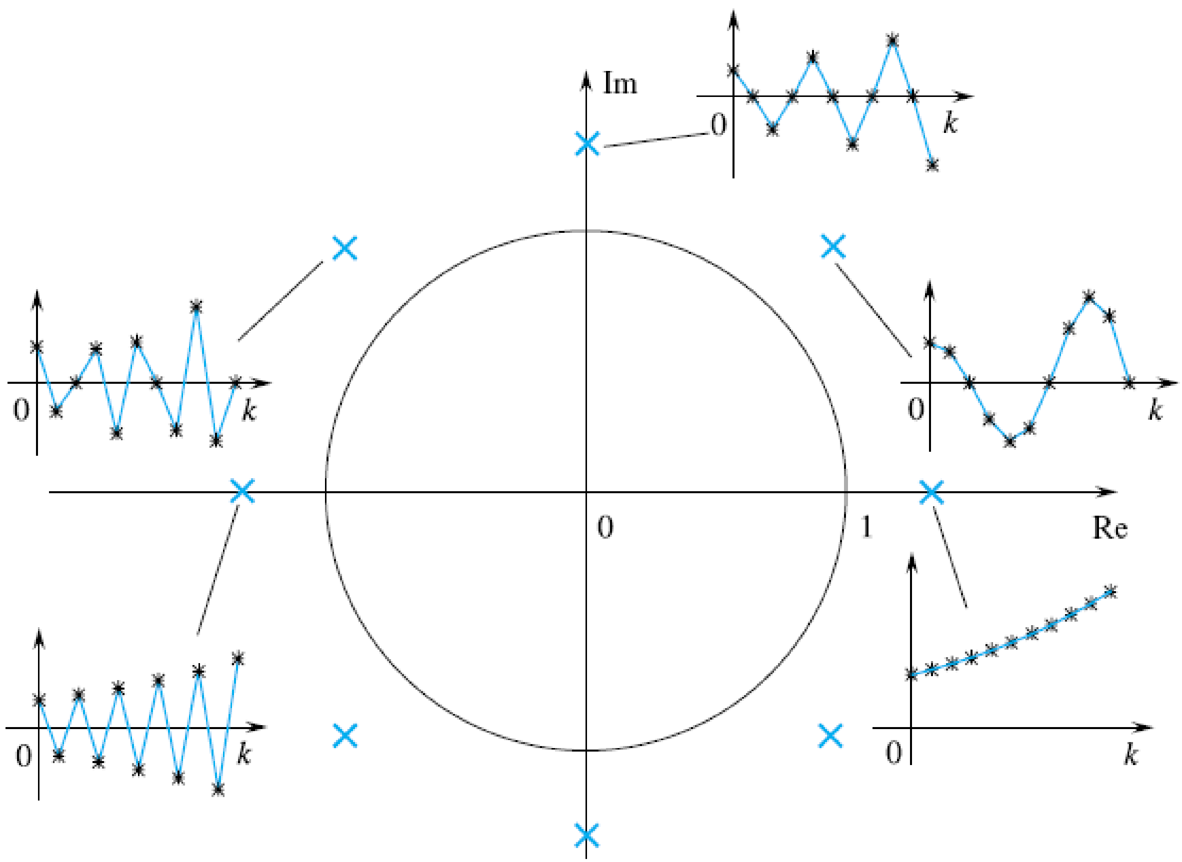
Sistemi a tempo discreto e modi

- Es. con autovalori **singoli ($|\lambda_i|$ = 1)**



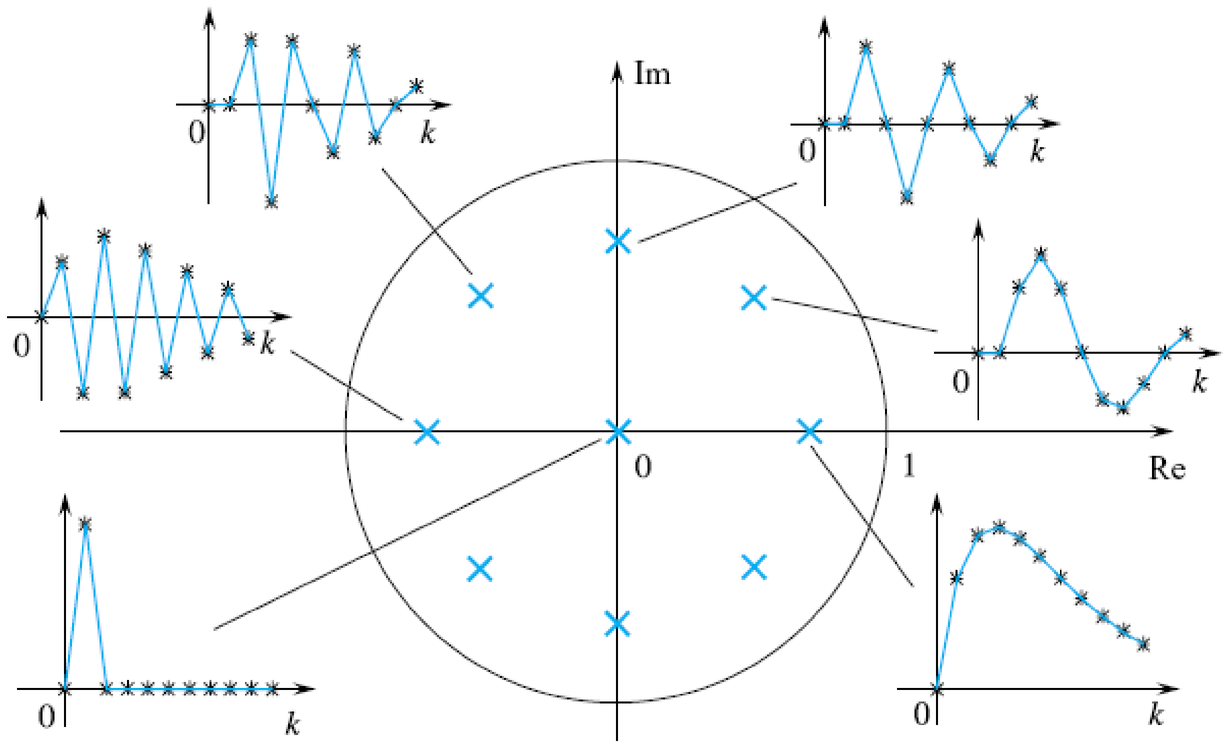
Sistemi a tempo discreto e modi

- Es. con autovalori **singoli ($|\lambda_i| > 1$)**



Sistemi a tempo discreto e modi

- Es. con autovalori **doppi ($|\lambda_i|$ < 1)**



Stabilità

- In generale, si analizza la **stabilità dei punti di equilibrio e/o dei moti** di un sistema dinamico
- Con il termine **stabilità** si intende la capacità di un sistema di reagire con variazioni limitate del moto *x(.)* a perturbazioni limitate dello stato iniziale $x(t_0)$ (oppure dell'ingresso *u(.)*)
- $x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$: moto di riferimento
- $x_1(t) = \phi(t, t_0, x(t_0) + \delta x_1(t_0), u(\cdot))$: moto perturbato, con perturbazione *sullo stato iniziale* $\delta x_1(t_0)$
- $x_2(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot) + \delta u(\cdot))$: moto perturbato, con perturbazione *sull'ingresso* $\delta u(\cdot)$

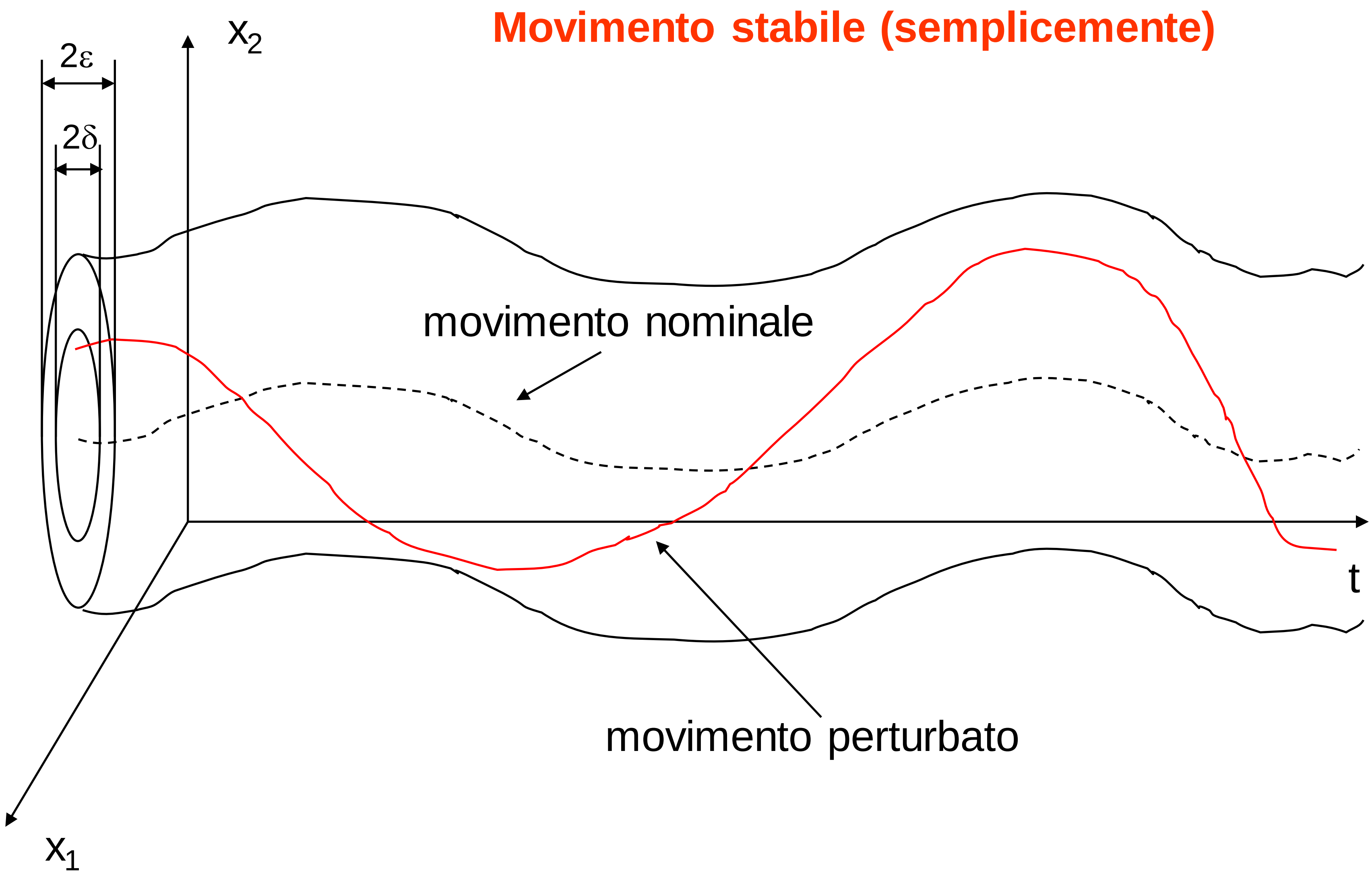
Stabilità: definizioni

- Dato $\delta x_1(t) = x_1(t) - x(t)$ si dice che **il moto di riferimento è (semplicemente) stabile** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che quando $\|\delta x_1(t_0)\| < \delta$ risulta $\|\delta x_1(t)\| < \varepsilon; \quad \forall t \geq t_0$

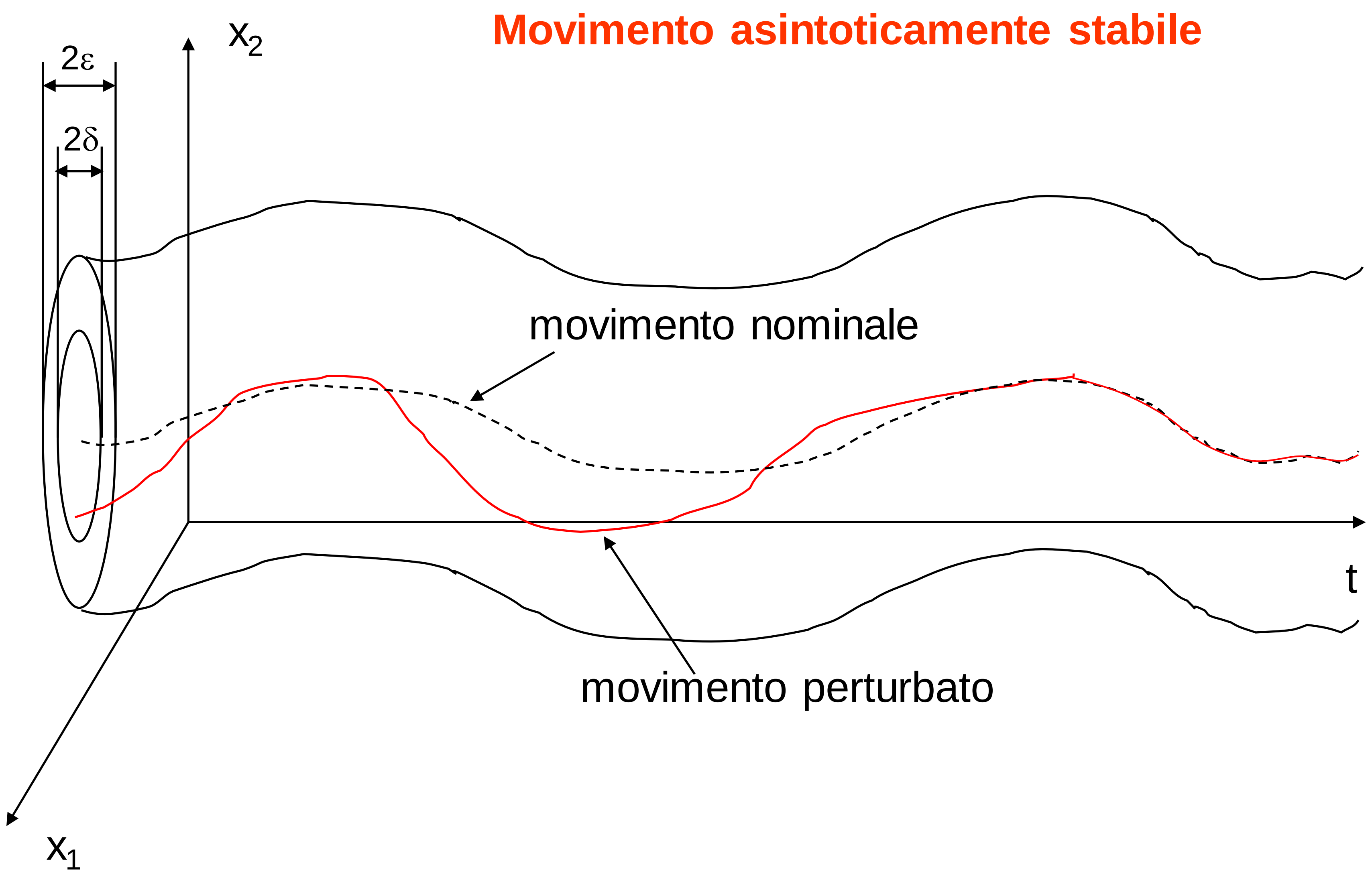
- Si dice che **il moto di riferimento è asintoticamente stabile** se, oltre ad essere semplicemente stabile, soddisfa la relazione

$$\lim_{t \to \infty} \|\delta x_1(t)\| = 0$$

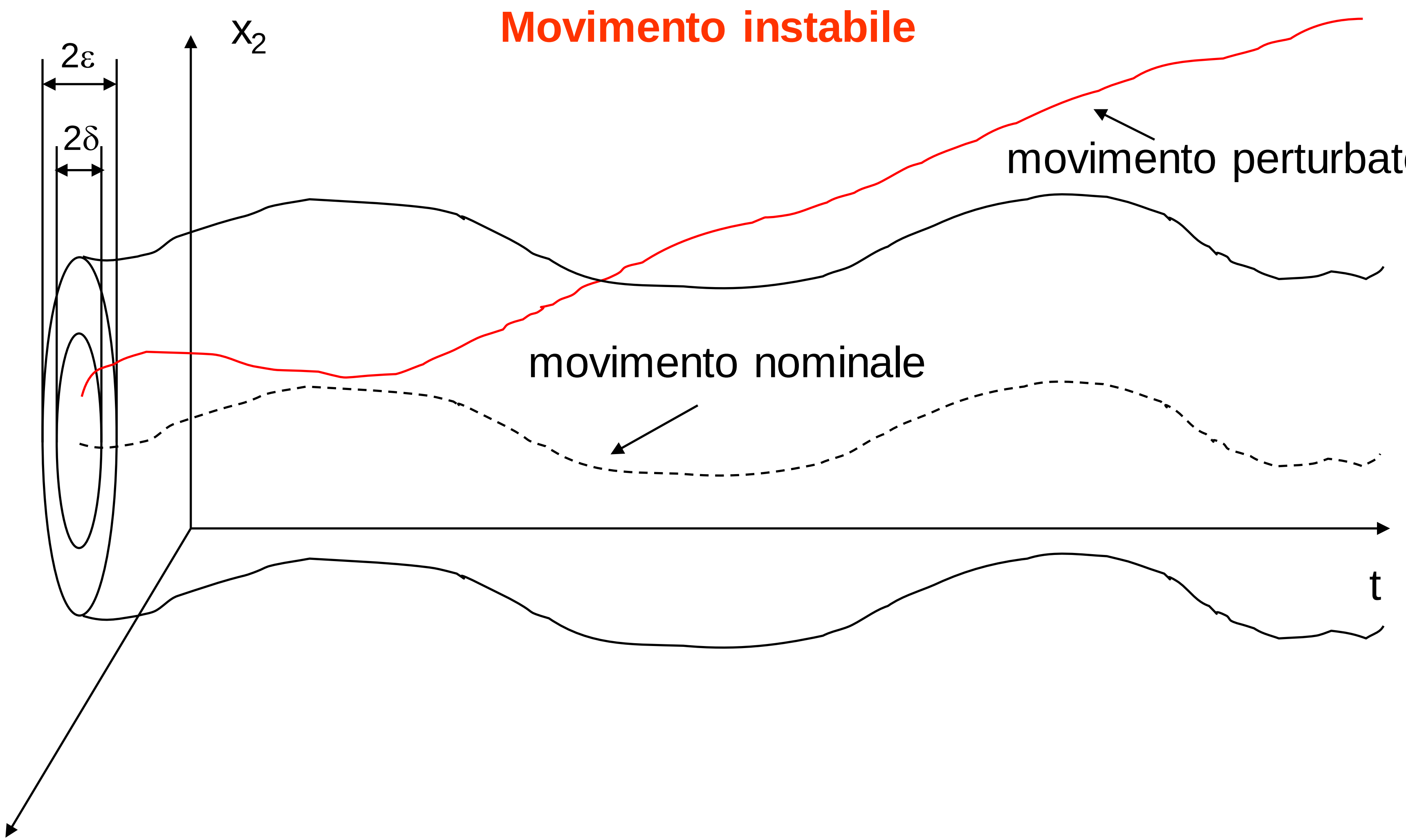
Stabilità: interpretazione geometrica



Stabilità: interpretazione geometrica - 1



Stabilità: interpretazione geometrica - 2



Stabilità e sistemi lineari stazionari (LTI)

- Per i sistemi LTI si può parlare di **stabilità del sistema** e non dei singoli punti di equilibrio o del moto
- Se A è invertibile, il punto di equilibrio è unico

$$A\bar{x} + B\bar{u} = 0 \;\Rightarrow\; \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

- L'unico contributo di interesse per la stabilità è il moto libero, le cui caratteristiche dipendono solo dagli autovalori di A (i quali inoltre **NON** dipendono dalla rappresentazione, qualunque $\bar{A}$=T A T^{-1} ha gli stessi autovalori di A!)

Stabilità e sistemi lineari stazionari (LTI)

- **[TEOREMA]** Un sistema LTI tempo-continuo è asintoticamente stabile se e solo se tutti i suoi autovalori (autovalori di A) hanno parte reale negativa

- **[TEOREMA]** Un sistema LTI tempo-discreto è asintoticamente stabile se e solo se tutti i suoi autovalori (autovalori di A) hanno modulo minore di 1

Raggiungibilità e Controllabilità

- **Obiettivo** dell'analisi: comprendere le possibilità di influire sul moto del sistema agendo sull'azione di controllo (funzione di ingresso)

- Tali proprietà del sistema sono **strutturali,** cioè **NON** dipendono dalla rappresentazione (dalla scelta delle variabili di stato)

- Inoltre, **NON** sono modificabili tramite il controllo

Raggiungibilità (da $x(t_0)=x_0$ a ?)

- Con l'analisi di questa proprietà si caratterizza l'insieme degli stati che possono essere (appunto) **raggiunti** a partire da uno stato x_0 e in intervallo di tempo $[t_0,t_1]$ (con $t_0<t_1$), tramite una opportuna scelta della funzione di ingresso ammissibile u(.)
- Lo stato x_1 è raggiungibile da x_0 nell'intervallo $[t_0, t_1]$ se esiste $u(.)$ tale che $x_1 = \phi(t_1, t_0, x_0, u(.))$
- **L'insieme degli stati raggiungibili** all'istante t_1 a partire dall'evento (t_0,x_0) è indicato con:

$$\mathcal{R}^+(t_0,t_1,x_0)$$

Controllabilità (da ?? a $x(t_1)=x_1$)

- Con l'analisi di questa proprietà si caratterizza invece l'insieme degli stati di un sistema dinamico che possono essere **controllati** (forzati) ad un determinato stato finale x_1 e in un intervallo di tempo [t0,t1] (con t0<t1), tramite una opportuna scelta della funzione di ingresso ammissibile u(.)
- Lo stato x_0 è **controllabile a** x_1 nell'intervallo $[t_0, t_1]$ se esiste $u(.)$ tale che $x_1 = \phi\big(t_1, t_0, x_0, u(.)\big)$
- **L'insieme degli stati controllabili** all'evento (t_1,x_1) a partire dall'istante t_0 è indicato con

$$\mathcal{R}^{-}(t_0,t_1,x_1)$$

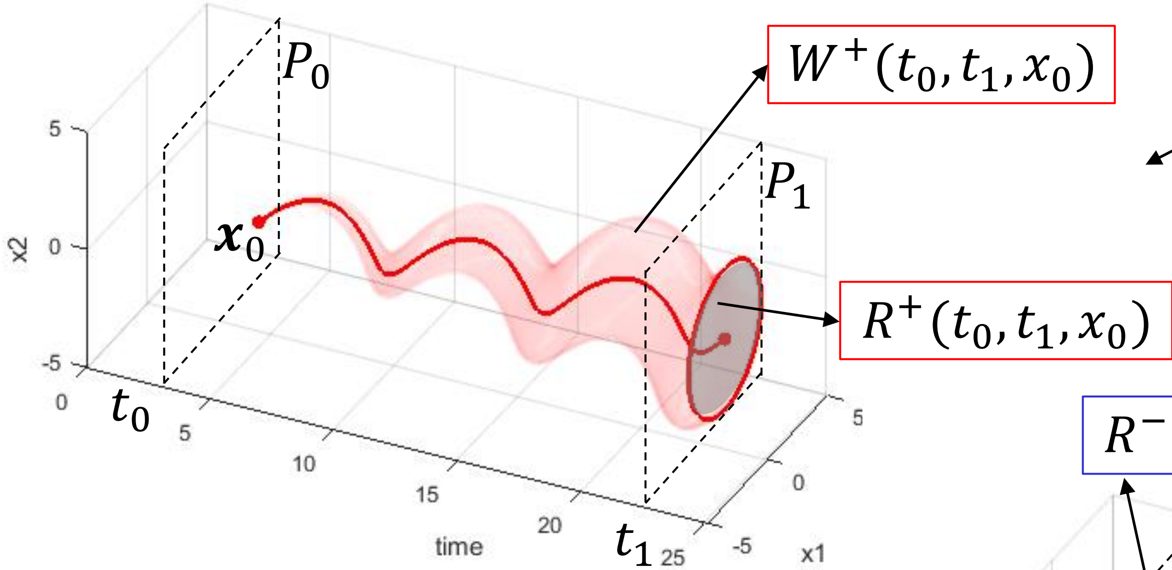
Raggiungibilità e controllabilità

Per estensione:

L'insieme degli stati raggiungibili in un istante t qualunque dell'intervallo $[t_0,t_1]$ a partire dall'evento (t_0,x_0) è indicato con $\mathcal{W}^{+}(t_0,t_1,x_0)$

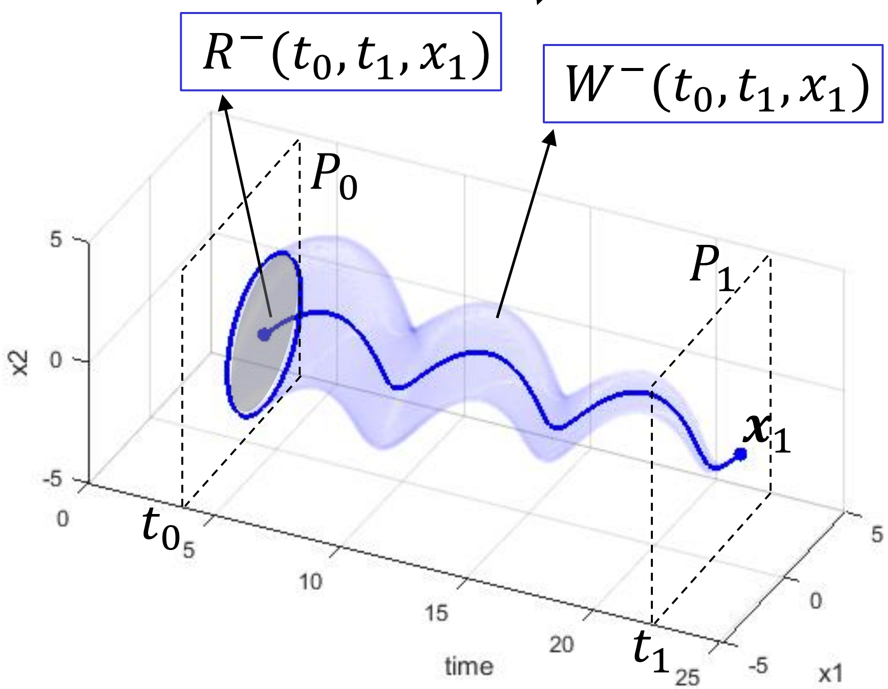
L'insieme degli stati controllabili all'evento (t_1,x_1) a partire da un istante t qualunque dell'intervallo $[t_0,t_1]$ è indicato con $\mathcal{W}^{-}(t_0,t_1,x_1)$

Interpretazione geometrica



Raggiungibilità da x_0

Controllabilità a x_1



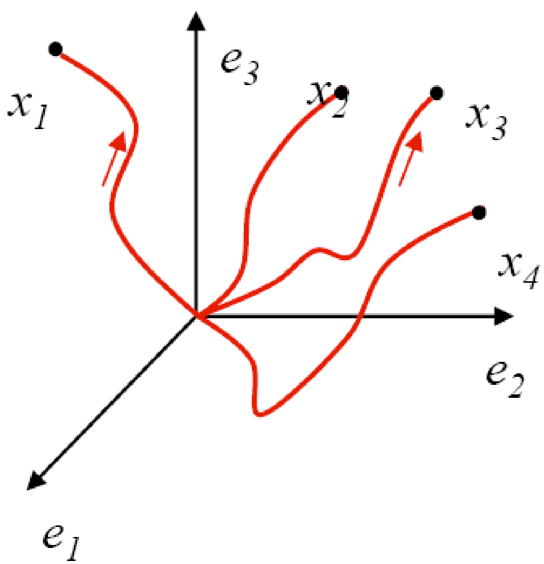
NOTA: per i sistemi LTI, tali proprietà non dipendono da t_0 e t_1 ma solo da $t=t_1-t_0$ e si può considerare x = 0 come unico punto di interesse

Raggiungibilità e Controllabilità complete

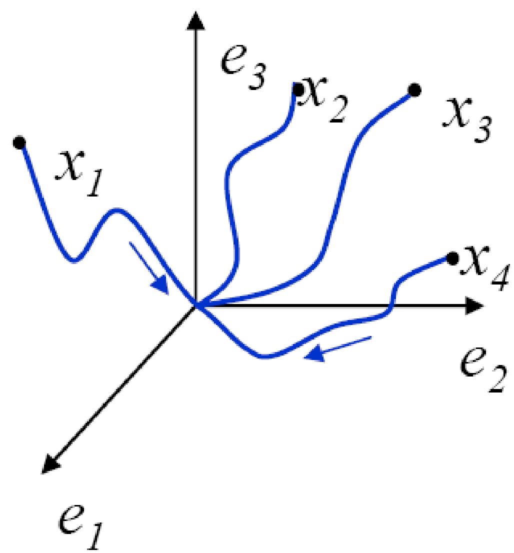
- Il sistema MIMO LTI t.continuo [t.discreto]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \left[x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \right]$$

È completamente raggiungibile se qualunque stato può essere raggiunto da x=0 in un tempo finito



È completamente controllabile se x=0 può essere raggiunto da qualunque stato in t finito



Raggiungibilità e risposta forzata

- La possibilità di considerare x=0 come unico punto di interesse nei sistemi LTI lega la raggiungibilità unicamente alla risposta forzata:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

TEMPO CONTINUO

$$x(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)$$

TEMPO DISCRETO

Raggiungibilità dei sistemi LTI tempo discreto

- Insieme di stati raggiungibili in *k* passi per:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad x(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
x(1) &= Bu(0) \\
x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1) \\
x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \\
&\dots \\
x(k) &= \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}Bu(i) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{k-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- Perciò: $\mathcal{R}_k^+(0) = im\left\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{k-1}B \end{bmatrix}\right\}$

= **sottospazio stati raggiungibili** in *k* passi

Sottospazio raggiungibile

- L'insieme (*sottospazio*) degli stati raggiungibili in *n* passi è anche l'insieme degli stati raggiungibili **dal sistema**
- Infatti, oltre gli *n* passi non è utile proseguire per via del teorema di Cayley-Hamilton, dal quale risulta che:

$$A^n = -a_1 A^{n-1} - a_2 A^{n-2} - \cdots - a_n I$$

e si definisce il **sottospazio raggiungibile**

$$\mathcal{R}^+(0) = im\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{n-1}B \end{bmatrix}\}$$

Teorema di Cayley-Hamilton

- Data la matrice A nxn e il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A) \\ &= \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n \end{aligned}$$

la matrice A è tale che

$$p(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

e pertanto:

$$A^n = -a_1 A^{n-1} - \cdots - a_n$$

Matrice di raggiungibilità

- Poiché il sottospazio raggiungibile è:

$$\mathcal{R}^+(0) = im\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \ldots A^{n-1}B \end{bmatrix}\}$$

si definisce **matrice di raggiungibilità:**

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \ldots A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

- Il sistema è **completamente raggiungibile** $(\mathcal{R}^+(0) = \mathbb{R}^n)$ se e solo se:

$$rank(P) = n$$

Raggiungibilità come proprietà strutturale

- Come detto, sistemi equivalenti, per i quali cioè:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= T^{-1}AT \\ \bar{B} &= T^{-1}B\end{aligned}$$

hanno le stesse proprietà di raggiungibilità:

$$\begin{aligned}&\bar{R}^{+}(0) = im\{[\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{n-1}\bar{B}]\} \\ &= im\{T^{-1}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]\} \\ &= T^{-1}R^{+}(0)\end{aligned}$$

per cui tali sottospazi hanno la stessa dimensione

Controllabilità dei sistemi LTI tempo discreto

- Si consideri ancora $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ con l'obiettivo di controllare (a 0) un certo x(0)$\neq$0, in k passi:

$$0 = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i) \quad \Rightarrow \quad -A^k x(0) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)$$

➔ x(0)$\neq$0 è controllabile in k passi se $-A^k x(0)$ è raggiungibile in k passi

$$A^k x(0) \in im\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \ldots A^{k-1}B \end{bmatrix}\} = \mathcal{R}_k^+(0)$$

Raggiungibilità dei sistemi LTI continui

- Analogamente, per determinare gli stati **raggiungibili** di $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \int_0^t e^{A\tau} Bu(t-\tau) d\tau$$

- Dal teorema di Cayley-Hamilton si può esprimere:

$$e^{A\tau} = I\gamma_0(\tau) + A\gamma_1(\tau) + \cdots + A^{n-1}\gamma_{n-1}(\tau)$$

con $\gamma_i(\tau)$ opportune funzioni scalari

- Si ottiene quindi:

$$x(t) = B\int_0^t \gamma_0(\tau)u(t-\tau)d\tau + AB\int_0^t \gamma_1(\tau)u(t-\tau)d\tau + \cdots +$$
$$+ A^{n-1}B\int_0^t \gamma_{n-1}(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Controllabilità dei sistemi LTI continui

- Per $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ uno stato x(0) $\neq$ 0 è **controllabile** (a 0) al tempo *t* se esiste una funzione di ingresso ammissibile u(.) tale che:

$$0 = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

ovvero $-x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$, e si possono quindi applicare considerazioni analoghe a quelle viste in precedenza

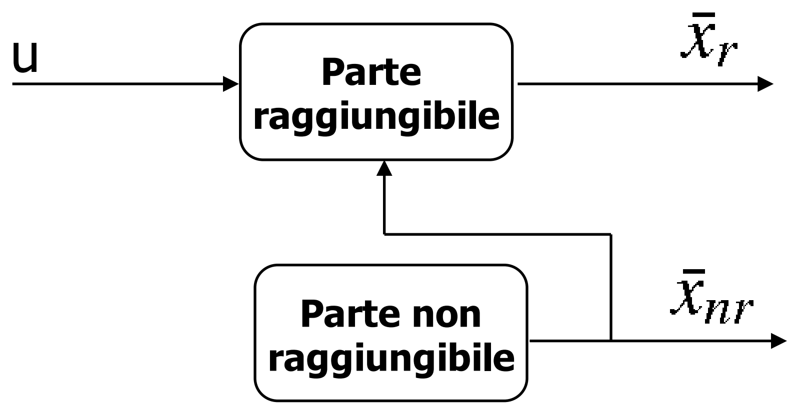
- <u>Anche per i sistemi LTI continui</u>, controllabilità e raggiungibilità sono caratterizzate dal rango di:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Forma canonica di raggiungibilità: scomposizione

- Se il sistema non è completamente raggiungibile, è sempre possibile (e comodo per alcune analisi) trasformare il sistema come segue:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_r \\ \dot{\bar{x}}_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_r \\ \bar{x}_{nr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$



Considerazioni “applicative”

- Le proprietà analizzate permettono di progettare leggi di controllo in **catena aperta**, ma a **minima energia** (es. per sistemi t.discreto, basate sulla (pseudo)inversa della matrice P^{+})
- Nel progetto di controllo in **catena chiusa** (es. retroazione dello stato), occorre considerare che il controllore non è in grado di agire sulla parte non raggiungibile del sistema (qualora sia presente).
- Se la parte non raggiungibile è stabile, allora il sistema è (almeno..) **stabilizzabile**

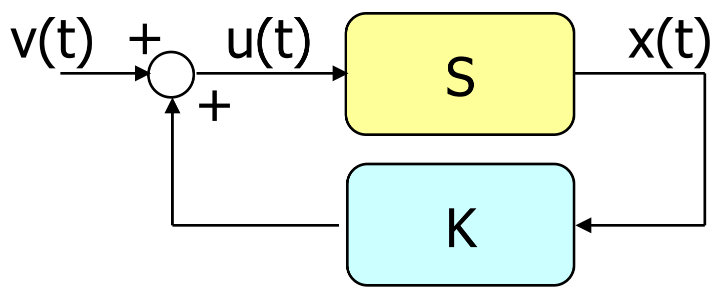
Controllo in retroazione e stabilizzabilità

- Infatti, dato un sistema LTI completamente raggiungibile

$$S = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

e ipotizzando che *x* sia completamente **misurabile,** la legge di controllo con retroazione dello stato

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$



con dim(K) = m x n, permette di modificare arbitrariamente gli autovalori del sistema

Controllo in retroazione e stabilizzabilità

- Il sistema in catena chiusa diventa infatti

$$S_K = \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Bv(t) \\ \\ y(t) = (C + DK)x(t) + Dv(t) \end{cases}$$

  i cui autovalori sono ovviamente quelli di A+BK

- ATTENZIONE: se il sistema NON è completamente raggiungibile, è possibile modificare SOLO gli autovalori della parte raggiungibile
- Se gli autovalori della parte NON raggiungibile sono a parte reale negativa, il sistema (come detto) viene definito **stabilizzabile**

Osservabilità e ricostruibilità

- Sono proprietà di un sistema che descrivono la possibilità di determinare lo stato iniziale $x(t_0)$ o finale $x(t_1)$ dalla conoscenza del comportamento ingresso-uscita $u[t_0,t_1]$, $y[t_0,t_1]$
- Anche tali proprietà sono **strutturali**, cioè **NON** dipendono dalla rappresentazione (scelta dello stato), <u>ma</u> possono essere influenzate dal controllo
- **Analisi** di osservabilità / ricostruibilità:
  - Applicazione: progetto di algoritmi di stima e ricostruzione dello stato

Osservabilità e ricostruibilità - 1

Formalmente, si possono dare le **[Definizioni]:**

- Un sistema si dice **completamente osservabile** in $[t_0,t_1]$ se la conoscenza del comportamento ingresso-uscita $u[t_0,t_1]$, $y[t_0,t_1]$ consente di determinare <u>univocamente</u> lo stato iniziale $x(t_0)$ per ogni $u[t_0,t_1]$
- Un sistema si dice **completamente ricostruibile** in $[t_0,t_1]$ se la conoscenza del comportamento ingresso-uscita $u[t_0,t_1]$, $y[t_0,t_1]$ consente di determinare <u>univocamente</u> lo stato finale $x(t_1)$ per ogni $u[t_0,t_1]$

Osservabilità e risposta libera

- Nei sistemi LTI, per l'analisi di osservabilità e ricostruibilità è possibile:
  - considerare solo la prima proprietà, poiché essa implica la seconda (noto $x(t_0)$ è possibile calcolare $x(t_1)$)
  - analizzare solo la risposta libera, poiché per la <u>sovrapposizione degli effetti</u> è l'unica parte della risposta che dipende dallo stato iniziale:

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x_0}_{\text{Risposta libera}} + \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{Risposta forzata}}$$

Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI

- Per risolvere il problema di osservabilità, si può considerare il sistema libero:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

- L'obiettivo è determinare in modo univoco lo stato conoscendo l'uscita, operazione immediata (per ogni t) se C è invertibile:

$$x(t) = C^{-1}y(t)$$

- Se C non è invertibile, si può tentare di ricavare una relazione invertibile derivando l'uscita:

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t)$$

Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI - 1

- L'operazione di derivata sull'uscita si può ripetere fino all'ordine n-1, sempre con l'obiettivo di ricavare una relazione invertibile uscita-stato:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(t)$$

- Ovviamente, per il teorema di Cayley-Hamilton **NON** è utile proseguire oltre l'ordine n-1

Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI - 2

- In modo analogo, per sistemi discreti si può esprimere la possibilità di osservazione dello stato iniziale analizzando le uscite dei primi n-1 passi:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0)$$

- Ovviamente, per il teorema di Cayley-Hamilton **NON** è utile proseguire oltre il passo n-1

Matrice di osservabilità

- **[Def.]** Si definisce **matrice di osservabilità** di un sistema LTI la matrice di dimensione [n x (n m)]

$$Q = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

o equivalentemente:

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}$$

- Il sistema è **completamente osservabile e completamente ricostruibile** se e solo se:

$$rango(Q^T) = n$$

Osservabilità come proprietà strutturale

- Come detto, rappresentazioni equivalenti, per le quali cioè sia $x = Tz \iff z = T^{-1}x$:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= T^{-1}AT \\ \hat{C} &= CT\end{aligned}$$

hanno le stesse proprietà di osservabilità:

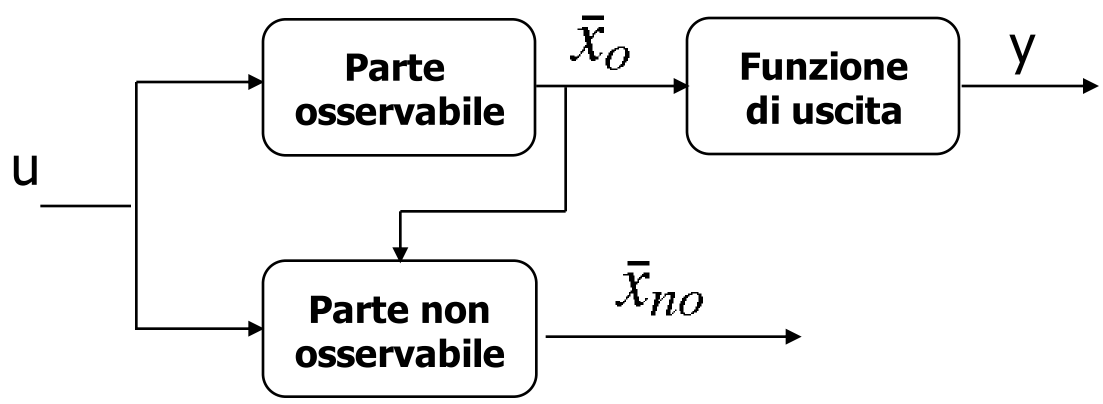
$$\begin{aligned}\hat{Q} &= \left[\hat{C} \quad \hat{C}\hat{A} \quad \hat{C}\hat{A}^2 \ldots \hat{C}\hat{A}^{n-1}\right]^T \\ &= \left[C \quad CA \quad CA^2 \ldots CA^{n-1}\right]^T T \\ &= QT\end{aligned}$$

in quanto la trasformazione non influisce sul rango della matrice di osservabilità

Forma canonica di osservabilità: scomposizione

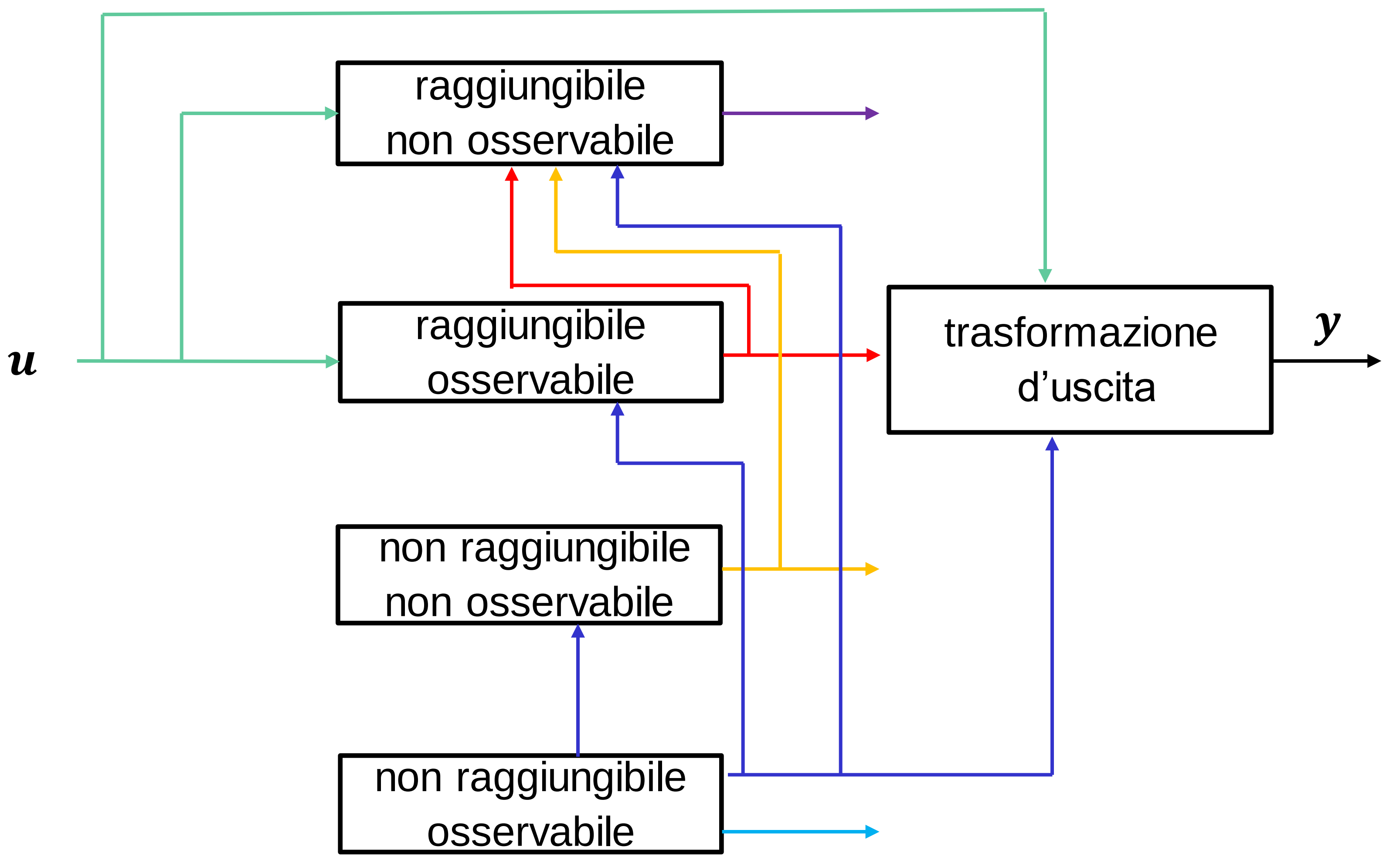
- Se il sistema non è completamente osservabile, è sempre possibile (e comodo per alcune analisi) trasformare il sistema come segue:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \dot{\bar{x}}_{no} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{no} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} \bar{C}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{no} \end{pmatrix} \end{cases}$$



Scomposizione canonica

- Unendo le due trasformazioni viste



Dualità

- I risultati ottenuti dalle analisi di raggiungibilità e osservabilità mostrano notevoli analogie.
- Per formalizzare tali analogie, si usa ricorrere alla definizione di **dualità** (qui nel caso LTI t. continuo)
- Dato:

$$S = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

si definisce **sistema duale**:

$$S_D = \begin{cases} \dot{z}(t) = A^T z(t) + C^T v(t) \\ w(t) = B^T z(t) + D^T v(t) \end{cases}$$

Dualità - 1

- Il numero di ingressi (uscite) di S corrisponde al numero di uscite (ingressi) di S_D
- Le matrici di raggiungibiltà e osservabilità di S_D (P_D e Q_D) sono legate a quelle di S (P e Q) come segue:

$$P_D = \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}^T = Q^T$$

$$Q_D = \begin{pmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{pmatrix}^T = P^T$$

Dualità - 2

- Risulta pertanto:

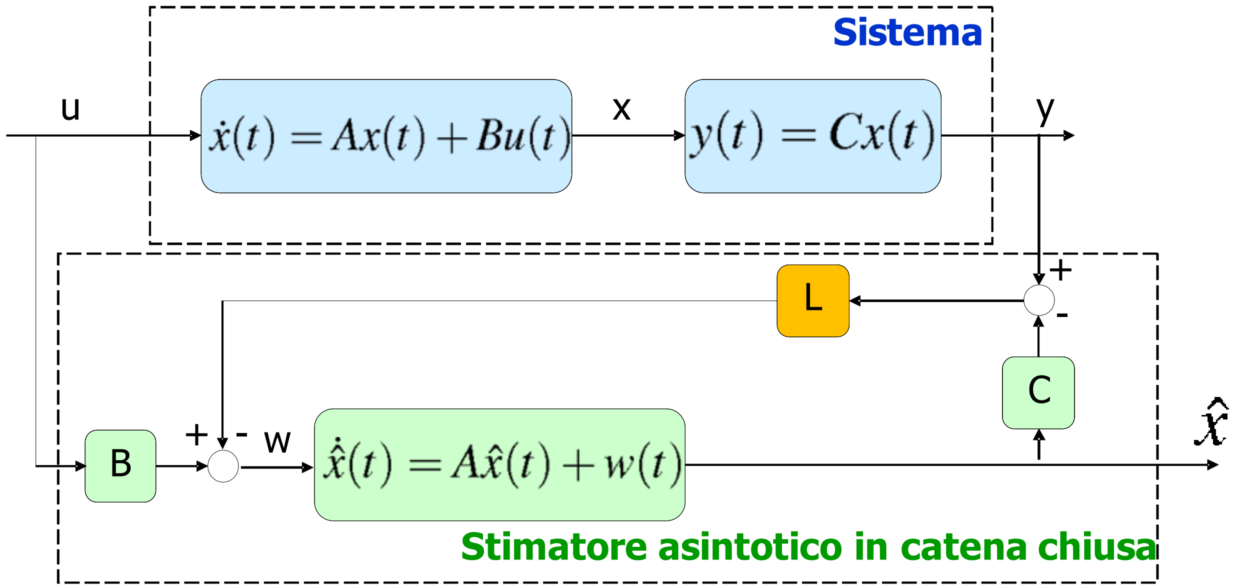
S stabile $\Leftrightarrow$ S_D stabile

S ragg.-contr. $\Leftrightarrow$ S_D oss.-ric.

S oss.-ric. $\Leftrightarrow$ S_D ragg.-contr.

Considerazioni "applicative"

- Il progetto di stimatori asintotici dello stato in catena chiusa:



può, grazie alla proprietà di dualità, essere effettuato sfruttando i metodi di allocazione degli autovalori per il progetto di controllori con retroazione dello stato.

Dinamica dell'osservatore asintotico

- Infatti, le equazioni dell'osservatore dello stato in catena chiusa sono:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) = (A + LC)\hat{x}(t) - Ly(t) + Bu(t)$$

- Definendo $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ la dinamica dell'errore è

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) =$$

$$= Ax(t) - A\hat{x}(t) + LCx(t) - LC\hat{x}(t) = (A + LC)(x(t) - \hat{x}(t)) = (A + LC)e(t)$$

i cui autovalori sono quelli di A+LC. Se la coppia (A,C) è osservabile, per dualità la coppia (A^T,C^T) è raggiungibile e gli autovalori dell'osservatore possono essere assegnati in modo arbitrario.

Progetto osservatore e rilevabilità

- Analogamente al caso del progetto di controllo, gli autovalori dell'osservatore possono essere assegnati arbitrariamente SOLO se il sistema è completamente osservabile
- Se non lo è, è ancora possibile costruire un osservatore asintotico purchè gli autovalori della parte non osservabile siano a parte reale negativa
- Il sistema in tal caso viene detto **rilevabile**

Controllo con retroazione dello stato stimato

- In generale, le variabili di stato non sono TUTTE misurabili direttamente, ma se il sistema è osservabile si può sfruttare il progetto di un osservatore ANCHE realizzare il controllo con retroazione completa dello stato (stimato)
- La dinamica del sistema complessivo diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ u(t) = K\hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) \end{cases}$$

o in forma compatta:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + BK\hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = (A + LC + BK)\hat{x}(t) - LCx(t) \end{cases}$$