TECNICHE DI CONTROLLO MULTIVARIABILE

Sistemi Non Lineari

Indice

- Introduzione
- Metodi di analisi per sistemi nonlineari
- Metodi di progetto per il controllo nonlineare: panoramica
- Linearizzazione tramite feedback (*Feedback Linearization*) ed applicazioni
- Controllo robusto a struttura variabile (*Variable Structure o Sliding Mode Control*) ed applicazioni

Bibliografia

Slotine, Jean-Jacques E., and Weiping Li. *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall, 1991.

Sistemi dinamici lineari e non lineari

- **Sistema dinamico**: oggetto o fenomeno il cui comportamento (manifestato da *uscite* misurabili) evolve nel tempo in funzione degli stimoli esterni (*ingressi*) **presenti e passati** (a causa dello *stato*)

- Descrizione formale: **modello matematico** (eq. differenziali)

- **Modelli lineari**:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

- **Modelli nonlineari**:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{aligned}$$

Il problema della modellazione di sistemi fisici

- Base di partenza: conoscenza delle **leggi fisiche** (più spesso *nonlineari* che *lineari*)

- Possibili motivi che portano ad ottenere modelli lineari:
  - approssimazione di una funzione con i primi termini di una serie di Taylor
  - eliminazione dal modello di fenomeni trascurabili (es. variazione parametri per effetti termici)
  - ipotesi sulle condizioni di lavoro (es. ingressi variabili in intervalli piccoli)

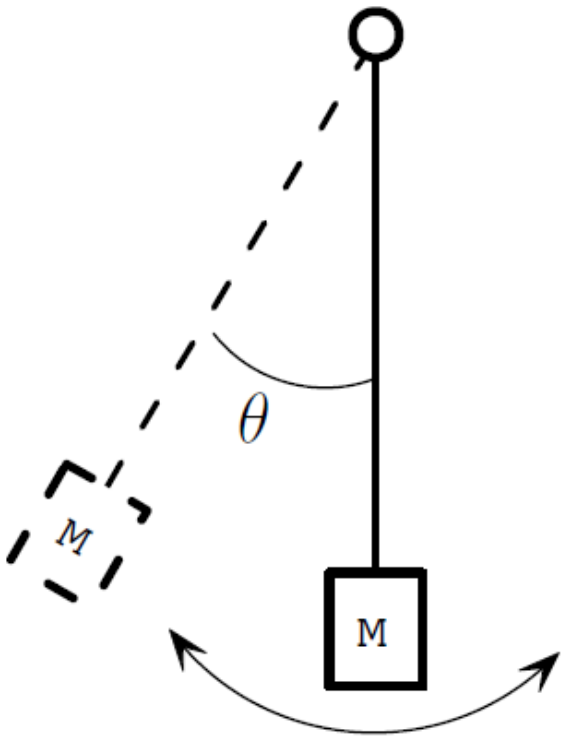
- Anche se il modello lineare è ottenuto con ipotesi semplificative (es. $u \in [u_{min}, u_{max}]$), il sistema reale non sempre può essere vincolato in modo da soddisfarle

Controllo di sistemi dinamici

- **Controllo Lineare** (analisi e progetto basati su modelli lineari):
  - disciplina matura con basi teoriche ben assestate
  - innumerevoli applicazioni industriali (v. PID)
  - prestazioni soddisfacenti per *ampie* **(?)** condizioni di funzionamento

- **Controllo Nonlineare** (analisi e progetto basati su modelli nonlineari):
  - i modelli lineari sono sempre un'approssimazione della *realtà*, valida per *limitate* **(!)** condizioni di funzionamento
  - alcune nonlinearità non sono approssimabili linearmente (es. discontinuità)
  - anche l'adattamento *on-line* di parametri del controllore è formalmente una nonlinearità
  - il progetto richiede maggiore approfondimento delle leggi fisiche che determinano la dinamica del sistema (v. stabilità del pendolo)

Esempio: il pendolo



- **Approccio lineare**: dato $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ (con $\mathbf{x} = [\theta \ \dot{\theta}]^T$), modello valido in un intorno del punto di equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (es. ipotesi $\sin\theta \approx \theta$), verificare che gli autovalori di $\mathbf{A}$ siano a parte reale negativa e/o trovare $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ che li renda tali

- **Approccio nonlineare**: dato $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, modello valido $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, verificare che $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sia un punto a minima energia (ogni traiettoria dello stato tende a dissipare l'energia del sistema, es. per attrito, fino a raggiungere tale minimo) e/o trovare $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ che renda il sistema *dissipativo* ($\Rightarrow$ stabile)

Esempio: il pendolo - Modello

Siano R la lunghezza del pendolo, M la massa appesa, g l'accelerazione di gravità, b il coefficiente di attrito viscoso alla cerniera e τ la coppia esercitata, ad esempio, da un motore elettrico connesso alla cerniera, il modello dinamico del pendolo è rappresentato dall'equazione:

$$MR^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + MgR\sin\theta = \tau$$

nella quale τ rappresenta l'ingresso di controllo. Considerando $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ e $u = \tau$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{R}\sin x_1 - \frac{b}{MR^2}x_2 + \frac{u}{MR^2} \end{aligned}$$

in forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ con $\mathbf{x} = [\theta\ \dot{\theta}]^T$ ed $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = [f_1(\mathbf{x}, u)\ f_2(\mathbf{x}, u)]^T$ nella quale chiaramente

$$f_1(\mathbf{x}, u) = x_2$$

$$f_2(\mathbf{x}, u) = -\frac{g}{R}\sin x_1 - \frac{b}{MR^2}x_2 + \frac{u}{MR^2}.$$

I punti di equilibrio ($\dot{\mathbf{x}} = 0$) sono dati dalle soluzioni della equazione $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, cioè:

$$x_2 = 0,\ \sin x_1 = 0$$

Esempio: il pendolo - Linearizzazione

verificata dai punti di equilibrio $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$ (nell'intervallo $x_1 \in [0, 2\pi[$). Un modello linearizzato del sistema si può ottenere per approssimazione di Taylor delle funzioni f_1 ed f_2 rispetto ai due punti di equilibrio. Intuitivamente, questo corrisponde a considerare $\sin x_1 \approx x_1$ se $x_1 \approx 0$ e $\sin x_1 \approx -x_1$ se $x_1 \approx \pi$, dalle quali si ottengono due differenti modelli di tipo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{R} & -\frac{b}{MR^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{MR^2} \end{bmatrix} u$$

e

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\frac{g}{R} & -\frac{b}{MR^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{MR^2} \end{bmatrix} u$$

Esempio: il pendolo – Analisi stabilità

Si noti che nel primo caso la matrice **A** risulta avere autovalori:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4gM^2R^3}}{2MR^2} \longrightarrow < b$$

Mentre nel secondo caso:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4gM^2R^3}}{2MR^2} \longrightarrow > b$$

Tali autovalori sono sempre a parte reale negativa nel primo caso (punto di equilibrio stabile). Nel secondo caso un autovalore risulta invece sempre a parte reale positiva (punto di equilibrio instabile)

Caratteristiche (buone) dei modelli LTI

La teoria del *Controllo Lineare* si concentra sui sistemi **Lineari Tempo-Invarianti (LTI)** del tipo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, per i quali:

- esiste un **unico punto di equilibrio**, se $\mathbf{A}$ è non singolare, ed esso è stabile *per ogni* $\mathbf{x}(t_0)$, se gli autovalori di $\mathbf{A}$ hanno parte reale negativa
- la risposta del sistema è **determinabile analiticamente**
- noto l'andamento nel tempo di $\mathbf{u}(t)$, la risposta è data, per sovrapposizione degli effetti, da:

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau}_{\text{risposta forzata}}$$

Caratteristiche (cattive) dei modelli non lineari

Nel caso più generale, la dinamica di un sistema è del tipo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$:

- il sistema può avere **molteplici punti di equilibrio**, la cui stabilità può dipendere dalle condizioni iniziali
- anche la risposta libera del sistema può essere stabilmente oscillatoria (**cicli limite** con oscillazioni auto-sostenute)
- le caratteristiche dei punti di equilibrio possono cambiare drasticamente (stabile, instabile, ciclo limite) in relazione a variazioni di parametri (**biforcazioni**)
- piccole differenze nelle condizioni iniziali possono dare luogo a grandissime differenze nella risposta del sistema (**comportamento caotico**)

Approccio non lineare - Motivazioni

- L'esistenza di cicli limite, diversi punti di equilibrio, caoticità, etc. può essere rilevata solamente da modelli nonlineari e **non** da approssimazioni lineari

- Nota la presenza di cicli limite o comportamenti caotici, il controllo può essere progettato al fine di evitarne l'insorgenza (es. robotica e automazione) o di generarli/amplificarli (es. oscillatori elettronici)

- In passato, le applicazioni di controllo nonlineare sono state limitate dalle capacità dei sistemi di elaborazione, ma ora:
  - i microprocessori per il controllo sono sempre più potenti e meno costosi
  - velocità, precisione e robustezza richieste nelle moderne applicazioni robotiche o aeronautiche impongono analisi e progetto con modelli nonlineari

Esempio: oscillatore di Van der Pol

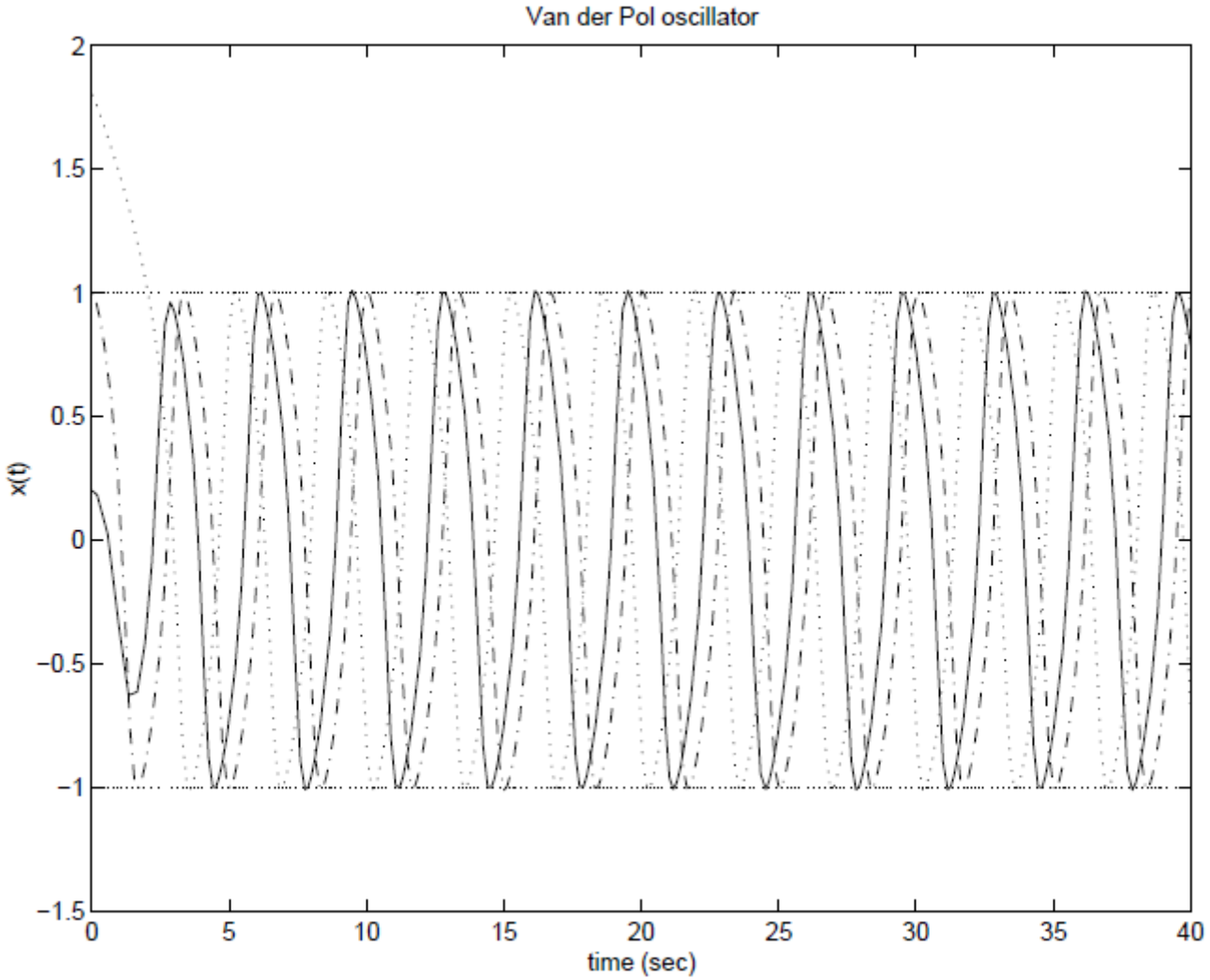
Tipico modello di un sistema caratterizzato da un ciclo limite, studiato da Balthasar Van der Pol negli anni '20:

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0$$

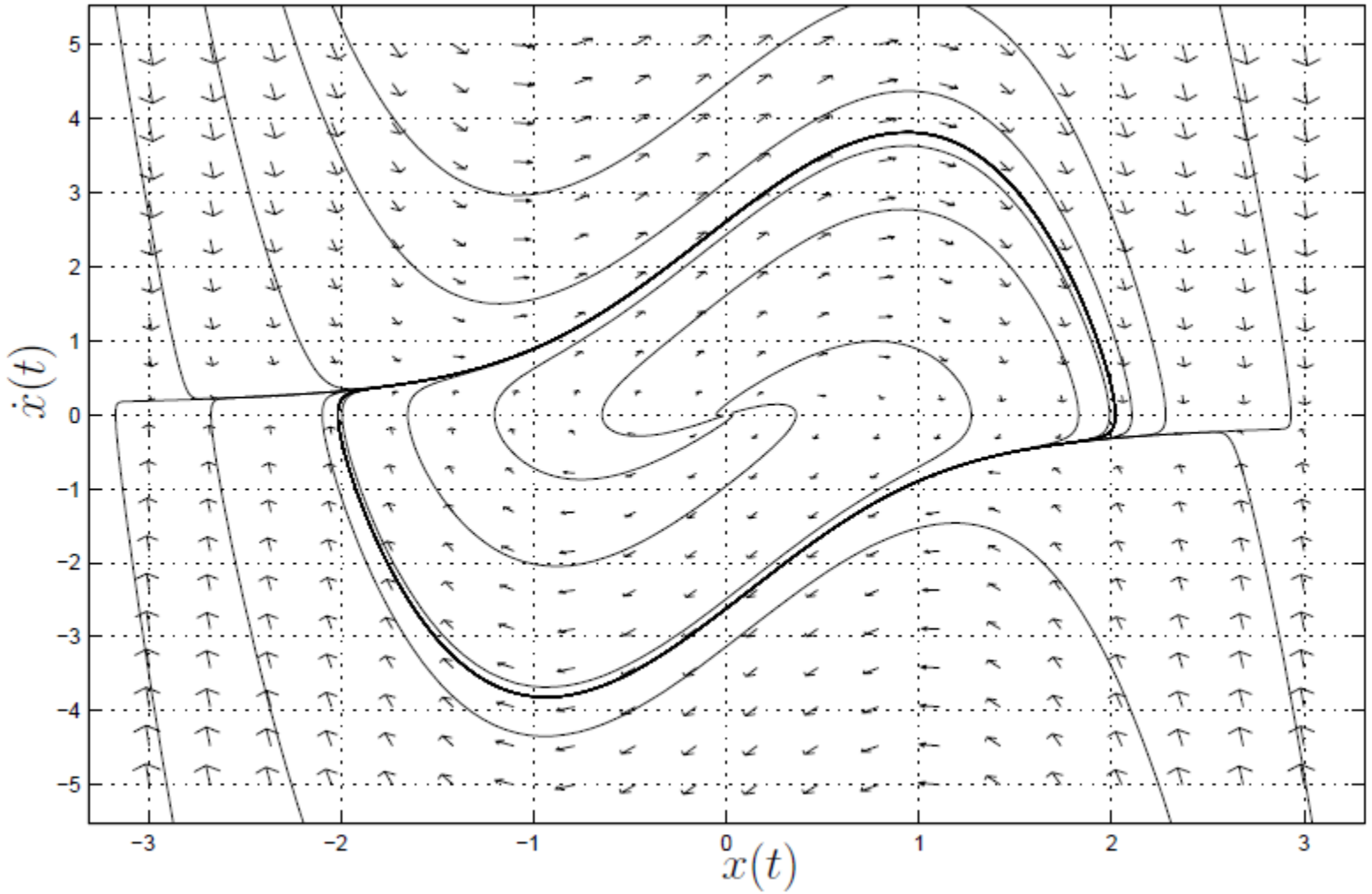
che descrive sia circuiti elettrici RLC con resistenze variabili non-linearmente, che gruppi massa-molla-smorzatore con un coefficiente di smorzamento dipendente dalla posizione (**NOTA:** no input!).

Il comportamento oscillatorio può essere spiegato considerando che se $x^2 > 1$ lo smorzatore ha coefficiente positivo e quindi *dissipa* energia, mentre se $x^2 < 1$ *fornisce* energia. Lo stato del sistema non può quindi nè convergere a 0, nè divergere all'∞.

Esempio: oscillatore di Van der Pol - risposta



Esempio: oscillatore di Van der Pol – Ciclo limite



Analisi di sistemi non lineari - indice

- Metodi *grafici* (es. **piano delle fasi**)
- Metodi matematici (es. teoria di **Lyapunov**)

Analisi nel piano delle fasi

- Si cerca di tracciare le traiettorie dello stato del sistema su un grafico bi(tri)dimensionale, solitamente ottenuta via simulazione
- Ovviamente, possibile solo per sistemi del secondo (terzo) ordine
- Il tempo non compare esplicitamente nel piano delle fasi
- Permette comunque di determinare la presenza di punti di equilibrio/cicli limite e di studiarne le caratteristiche

Sistemi del secondo ordine

- Nella forma più generale:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1,\, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1,\, x_2) \end{aligned}$$

che per ogni condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ha una soluzione $\mathbf{x}(t)$, il cui tracciato nel piano (x_1, x_2) per $t \in [0, \infty)$ rappresenta una *traiettoria* del sistema.

- Una famiglia di traiettorie generate a partire da diverse condizioni iniziali costitutisce una *mappa delle fasi*.

Tipica dinamica del secondo ordine

- Una classe tipica di sistemi del secondo ordine (massa-molla-smorzatore, circuiti RLC) è quella descrivibile da un'equazione differenziale del tipo:

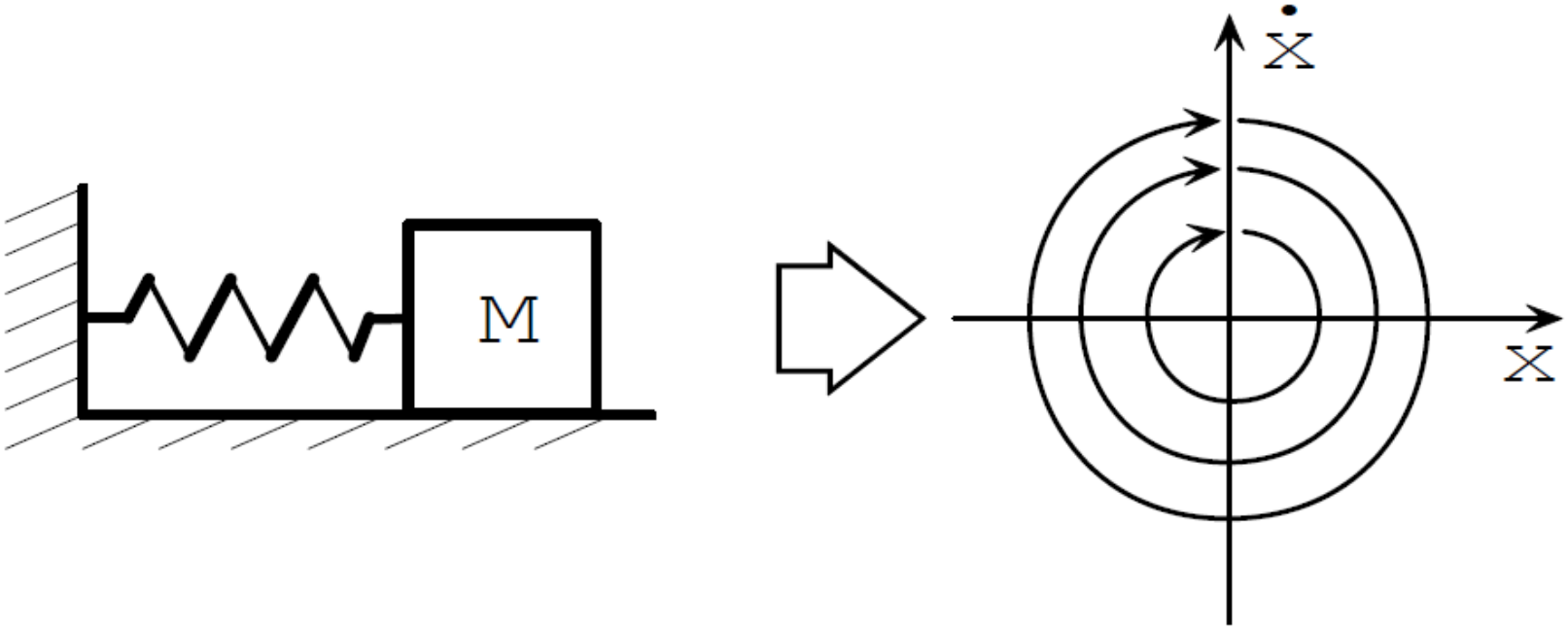
$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

che può essere ricondotta a:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -f(x_1,\ x_2) \end{aligned}$$

con $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$.

Esempio: massa – molla ideali



$$m\,\ddot{x} + k\,x = 0$$

Punti singolari nella mappa delle fasi

- In generale, l'analisi di un sistema serve per determinare le caratteristiche dei suoi **punti di equilibrio**, cioè i punti nei quali $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, condizione che per i sistemi analizzabili con il piano delle fasi (secondo ordine) diventa:

$$f_1(x_1,\ x_2) = 0 \quad f_2(x_1,\ x_2) = 0$$

- I punti che soddisfano tale condizione sono detti anche **punti singolari**, perchè in tali punti la tangente delle traiettorie dello stato è indeterminata

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_2(x_1,\ x_2)}{f_1(x_1,\ x_2)} = \frac{0}{0}$$

Esempio: generico sistema non lineare

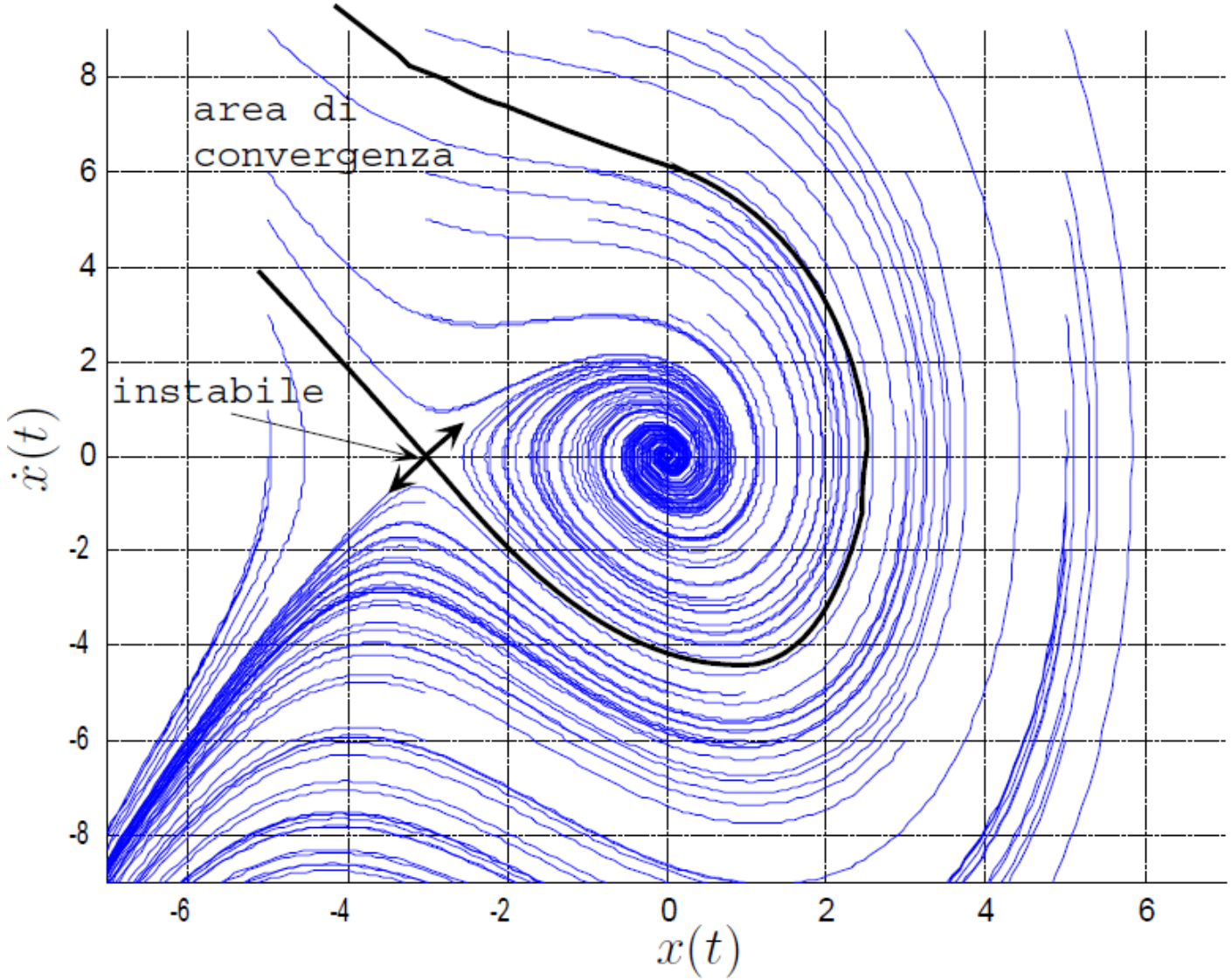
Per il sistema:

$$\ddot{x} + 0.6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$$

esistono due punti singolari: (0, 0) e (0, -3)

Tuttavia, mentre il primo risulta un punto di convergenza di traiettorie la cui condizione iniziale appartenga ad una determinata area (*area di convergenza*), il secondo si dimostra un punto dal quale le traiettorie possono divergere (v. grafico successivo)

Esempio: piano delle fasi



Tipologie di punti singolari

- **Nodi** stabili (instabili): punti di convergenza (divergenza) delle traiettorie, **senza** modi oscillatori
- **Fuochi** stabili (instabili): punti di convergenza (divergenza) delle traiettorie, **con** modi oscillatori
- **Punti di sella**: punti verso i quali convergono due sole traiettorie, corrispondenti a condizioni iniziali nelle quali i modi instabili sono nulli, mentre tutte le altre divergono
- **Punti di centro** di traiettorie chiuse ellittiche (v. gruppo massa-molla ideale)

Punti singolari per sistemi lineari

Per un sistema lineare del secondo ordine, la dinamica $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ diventa:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_3 x_1 + a_4 x_2 \end{aligned}$$

che è possibile semplificare ricavando x_2 dalla prima equazione e sostitendola nella seconda:

$$\ddot{x}_1 = (a_1 + a_4)\dot{x}_1 + (a_3 a_2 - a_1 a_4) x_1$$

o, più in generale:

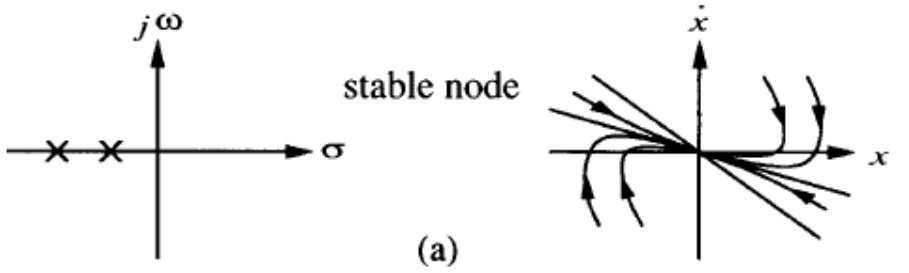
$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

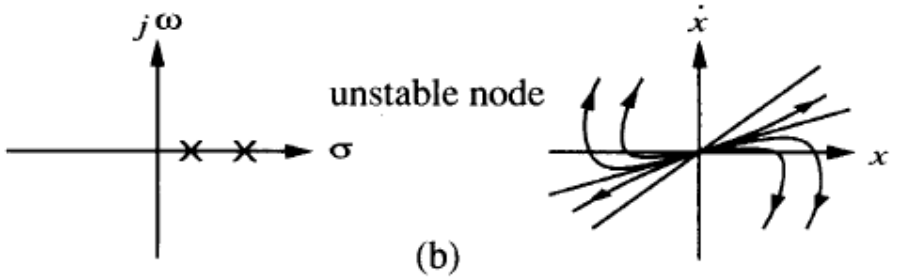
le cui soluzioni sono univocamente caratterizzate dalle radici λ_1 e λ_2 del polinomio caratteristico:

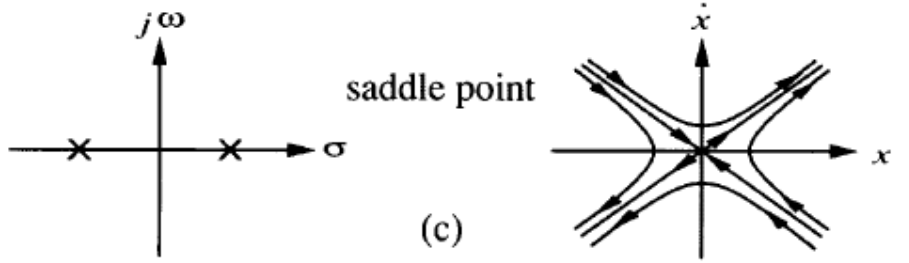
$$s^2 + as + b = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = 0$$

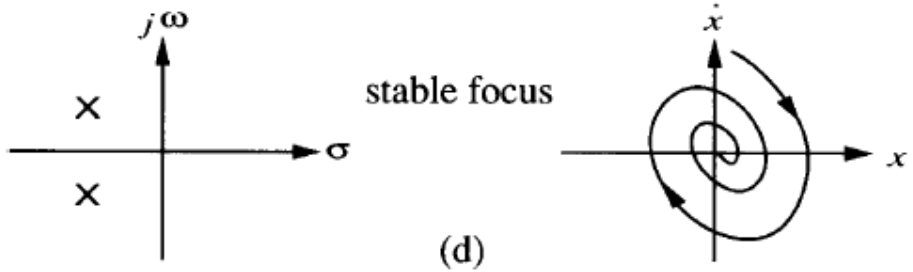
Punti singolari per sistemi lineari

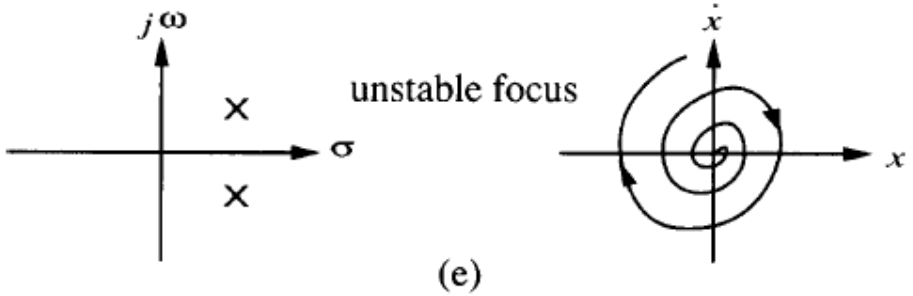
In relazione alla "posizione" di λ_1 e λ_2:

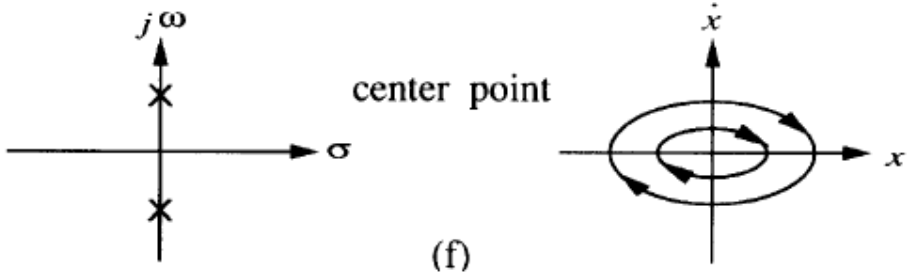












Equilibrio e cicli limite nei sistemi non lineari

- Diversamente da un sistema lineare, un sistema nonlineare può avere **molteplici punti di equilibrio** (punti singolari)

- Tuttavia, un punto di equilibrio può essere studiato **localmente** considerando la **linearizzazione** del sistema in un intorno del punto stesso (v. **primo metodo di Lyapunov**), per scoprire se sia un nodo, un fuoco, etc.

- La presenza di **cicli limite**, possibile solamente nei sistemi nonlineari, e la loro **stabilità** o **instabilità** vanno studiate in modo specifico (es. teoremi di Poincare e Bendixson...)

Analisi con metodi di Lyapunov

- L'unico approccio rigoroso ed esaustivo per l'analisi dei sistemi nonlineari (**di qualsiasi tipo e ordine**) è quello basato sulla teoria sviluppata dal matematico russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, pubblicata per la prima volta nel 1892, ma riconsiderata nel contesto dei controlli automatici solamente a partire dai primi anni '60

- La teoria di Lyapunov si basa su due metodi fondamentali:
  - il **metodo della linearizzazione** (o *primo metodo*), base teorica per la "giustificazione" (locale) del controllo lineare
  - il **metodo diretto** (o *secondo metodo*), grazie al quale considerazioni di tipo "energetico" (potenzialmente più intuitive) possono essere di ausilio nell'analisi di stabilità e nel progetto del controllo

Analisi con metodi di Lyapunov

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

(1857-1918)

Punti di equilibrio e stabilità: definizioni

Nella teoria di Lyapunov, si intende **sistema dinamico** un sistema *libero* e *autonomo*, caratterizzato dall'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ (se $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ è *libero*, ma *non autonomo*)

Definizione 1 *Uno stato* $\mathbf{x}^\star$ *è detto* stato di equilibrio *(o* punto di equilibrio*) di un sistema dinamico, se dall'istante* t *al quale* $\mathbf{x}(t)$ *è uguale a* $\mathbf{x}^\star$, $\mathbf{x}(t)$ *rimane uguale a* $\mathbf{x}^\star$ *per ogni istante successivo*

Matematicamente, i punti di equilibrio sono ottenuti dalla soluzione della equazione:

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)$$

Punti di equilibrio e stabilità: osservazioni

I concetti di stabilità descritti nel seguito fanno sempre riferimento allo *specifico* punto di equilibrio $\mathrm{x} = 0$. Tuttavia, ciò non implica una perdita di generalità, in quanto per ogni punto di equilibrio $\mathrm{x}^\star \neq 0$ è possibile ricondurre lo studio di stabilità a quello dell'origine, effettuando il cambiamento di variabile:

$$\mathrm{y} = \mathrm{x} - \mathrm{x}^\star$$

e studiando la stabilità di $\mathrm{y} = 0$ per il sistema $\dot{\mathrm{y}} = \mathrm{f}(\mathrm{y} + \mathrm{x}^\star)$, in modo assolutamente equivalente.

In modo analogo, è possibile ricondurre lo studio della stabilità di una traiettoria **nominale** di un sistema dinamico, cioè una soluzione dell'equazione differenziale $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ con condizione iniziale $\mathrm{x}^\star(0) = \mathrm{x}_0$, in presenza di condizioni iniziali **perturbate**, allo studio di una **dinamica dell'errore** come segue:

1. Data $\mathrm{x}^\star(t)$: soluzione di $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ con $\mathrm{x}^\star(0) = \mathrm{x}_0$
2. Si calcola $\mathrm{x}(t)$: soluzione di $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ con $\mathrm{x}(0) = \mathrm{x}_0 + \delta\mathrm{x}_0$
3. Infine si analizza la traiettoria $\mathrm{e}(t) = \mathrm{x}(t) - \mathrm{x}^\star(t)$ che ha una dinamica descritta da:
   $\dot{\mathrm{e}} = \mathrm{f}(\mathrm{x}^\star + \mathrm{e}, t) - \mathrm{f}(\mathrm{x}^\star, t) = \mathrm{g}(\mathrm{e}, t)$
   con punto di equilibrio in $\mathrm{e} = 0$.

Punti di equilibrio e stabilità: definizioni

Definizione 2 *Il punto di equilibrio* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *di un sistema* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *è detto* stabile *se* $\forall R > 0,\ \exists r > 0,\ t.c.$

$$\|\mathbf{x}(0)\| < r \quad \Rightarrow \quad \forall t \geq 0,\ \|\mathbf{x}(t)\| < R.$$

Altrimenti, il punto di equilibrio viene detto instabile

Definizione 3 *Il punto di equilibrio* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *di un sistema* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *è detto* asintoticamente stabile *se è stabile ed* $\exists r > 0,\ t.c.$

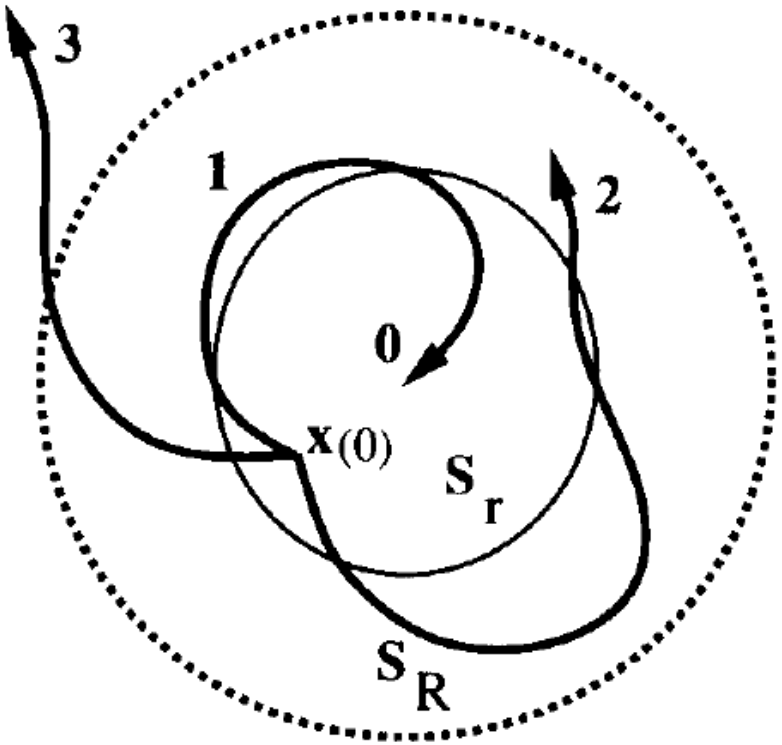
$$\|\mathbf{x}(0)\| < r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t) \to \mathbf{0} \ per\ t \to \infty.$$

Definizione 4 *Il punto di equilibrio* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *di un sistema* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *è detto* esponenzialmente stabile *se è stabile ed* $\exists r > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \exists \lambda > 0,\ t.c.$

$$\|\mathbf{x}(0)\| < r \quad \Rightarrow \quad \forall t > 0,\ \|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\lambda t}.$$

Stabilità: rappresentazione grafica

Rappresentazione "grafica" della stabilità secondo Lyapunov(1 = asintoticamente stabile, 2 = marginalmente stabile, 3 = instabile):



Punti di equilibrio e stabilità: definizioni

Definizione 5 *Se* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *è un punto di equilibrio asintoticamente (esponenzialmente) stabile, la regione* $\|\mathbf{x}(0)\| < r$ *con* r *massimo, è detta* dominio di attrazione.

Definizione 6 *Se* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *è un punto di equilibrio asintoticamente (esponenzialmente) stabile* $\forall \mathbf{x}(0) \in \mathbf{R}^n$, *il sistema si dice* globalmente *asintoticamente (esponenzialmente) stabile.*

NOTA: la stabilità *asintotica* di un sistema LTI è sempre anche *esponenziale e globale.*

Primo metodo di Lyapunov: linearizzazione

Dato un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{0}$ punto di equilibrio ed $\mathbf{f}$ differenziabile in modo continuo, è possibile scrivere:

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \mathbf{x} + \mathbf{f}_{h.o.t.}(\mathbf{x})$$

essendo $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (il pedice $h.o.t.$ sta per *higher order terms*). Ponendo:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$$

il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ è detto **approssimazione lineare** nel punto di equilibrio $\mathbf{0}$ del sistema nonlineare originale.

Primo metodo di Lyapunov: linearizzazione

Analogamente, se $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ si può scrivere:

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{(\mathbf{x}=0,\mathbf{u}=0)} \mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right)_{(\mathbf{x}=0,\mathbf{u}=0)} \mathbf{u} + \mathbf{f}_{h.o.t.}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

approssimabile a $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ con:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{(\mathbf{x}=0,\mathbf{u}=0)} \qquad \mathbf{B} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right)_{(\mathbf{x}=0,\mathbf{u}=0)}$$

Primo metodo di Lyapunov: ossevazioni

Si noti che l'approssimazione lineare può essere fatta rispetto ad un qualunque altro punto di equilibrio $\mathrm{x}^\star$ diverso dall'origine, con ingresso costante pari a $\mathrm{u}^\star$:

$$\dot{\mathrm{x}} \approx \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\right)_{(\mathrm{x}=\mathrm{x}^\star,\mathrm{u}=\mathrm{u}^\star)} (\mathrm{x}-\mathrm{x}^\star) + \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{u}}\right)_{(\mathrm{x}=\mathrm{x}^\star,\mathrm{u}=\mathrm{u}^\star)} (\mathrm{u}-\mathrm{u}^\star)$$

purchè sia sempre valida l'ipotesi $\mathrm{f}(\mathrm{x}^\star, \mathrm{u}^\star) = 0$, nel qual caso possiamo definire come nuove variabili di stato e di ingresso le **variazioni** rispetto ai valori di equilibrio:

$$\tilde{\mathrm{x}} = \mathrm{x} - \mathrm{x}^\star$$

$$\tilde{\mathrm{u}} = \mathrm{u} - \mathrm{u}^\star$$

cosicchè ponendo:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\right)_{(\mathrm{x}=\mathrm{x}^\star,\mathrm{u}=\mathrm{u}^\star)} \qquad \mathrm{B} = \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{u}}\right)_{(\mathrm{x}=\mathrm{x}^\star,\mathrm{u}=\mathrm{u}^\star)}$$

si ottiene il sistema dinamico linearizzato rispetto alle variazioni $\dot{\tilde{\mathrm{x}}} = \mathrm{A}\tilde{\mathrm{x}} + \mathrm{B}\tilde{\mathrm{u}}$.

Si noti che l'operazione di linearizzazione può essere fatta anche rispetto a un punto **non di equilibrio**, rispetto al quale la linearizzazione sarà del tipo $\dot{\tilde{\mathrm{x}}} = \mathrm{A}\tilde{\mathrm{x}} + \mathrm{B}\tilde{\mathrm{u}} + \mathrm{f}(\mathrm{x}^\star, \mathrm{u}^\star)$ (con $\mathrm{f}(\mathrm{x}^\star, \mathrm{u}^\star)$ costante).

Primo metodo di Lyapunov: Teorema

Teorema 1 (Metodo di linearizzazione di Lyapunov)

- *Se il sistema approssimato linearmente con* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *è strettamente stabile (*equiv. *tutti gli autovalori di* $\mathbf{A}$ *sono a parte reale strettamente negativa), allora il punto di equilibrio è asintoticamente stabile per il sistema nonlineare originale*

- *Se il sistema approssimato linearmente con* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *è instabile (*equiv. *almeno un autovalore di* $\mathbf{A}$ *ha parte reale strettamente positiva), allora il punto di equilibrio è instabile per il sistema nonlineare originale*

- *Se il sistema approssimato linearmente con* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *è marginalmente stabile (*equiv. *tutti gli autovalori di* $\mathbf{A}$ *sono a parte reale negativa, ma almeno uno ha parte reale nulla), allora non è possibile concludere nulla sulla stabilità del punto di equilibrio per il sistema nonlineare originale (può essere marginalmente stabile, asintoticamente stabile o instabile)*

Secondo metodo di Lyapunov – Metodo Diretto

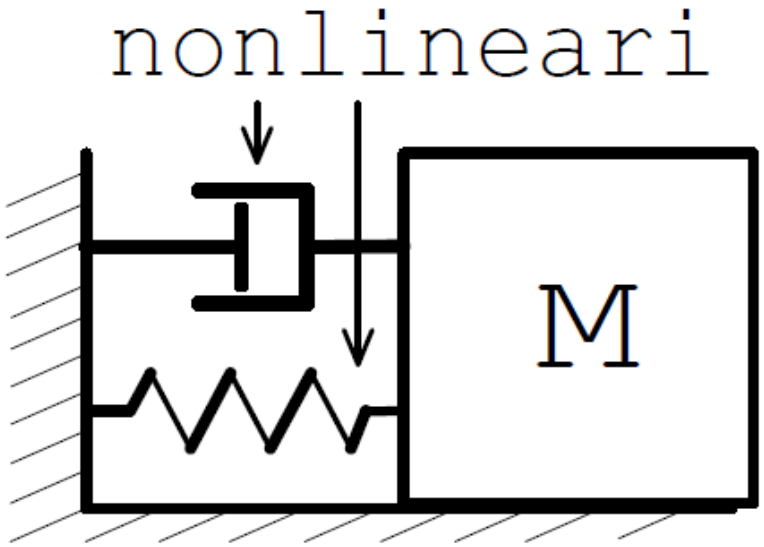
- I risultati del primo metodo di Lyapunov sono validi solo **localmente**, cioè fintanto che l'approssimazione è ragionevole

- Indipendentemente dal caso di stabilità marginale, la linearizzazione non permette di concludere nulla sulla stabilità in senso **globale**

- Il **secondo metodo di Lyapunov** (*metodo diretto*) si basa invece sulla seguente intuizione fondamentale di natura **fisico**, che permette di analizzare la stabilità sia in senso *locale* che *globale*:

  "Se l'energia complessiva di un sistema è continuamente dissipata, il sistema (lineare o nonlineare che sia) si stabilizzerà prima o poi in una condizione di equilibrio (caratterizzata da energia minima)"

Esempio: massa molla smorzatore non lineari



Sistema caratterizzato dal modello:

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0 x + k_1 x^3 = 0$$

Esempio: massa molla smorzatore non lineari

L'energia complessiva del sistema è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale (associata alle forze elastiche):

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x (k_0 x + k_1 x^3)dx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0 x^2 + \frac{1}{4}k_1 x^4$$

dalla quale si evince che:

- nel punto di equilibrio $(x = 0, \dot{x} = 0)$ il sistema ha energia nulla
- l'eventuale stabilità asintotica implica la convergenza a 0 dell'energia complessiva
- l'eventuale instabilità è riconducibile ad un incremento dell'energia complessiva

Esempio: massa molla smorzatore non lineari

Per il sistema in esame, la variazione di energia lungo le traiettorie del sistema si può calcolare differenziando $V(\mathbf{x})$ e sostituendo nell'espressione ottenuta l'equazione della dinamica:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = m\dot{x}\ddot{x} + (k_0 x + k_1 x^3)\dot{x} \overset{(\ddot{x}=f(x,\dot{x}))}{=} \dot{x}(-b\dot{x}|\dot{x}|) = -b|\dot{x}|^3$$

che è negativa fintanto che $\dot{x} \neq 0$. Pertanto l'energia complessiva del sistema è continuamente dissipata a causa dello smorzatore (nonlineare) e la massa si assesterà nell'origine con energia nulla (velocità nulla e forze elastiche nulle), indipendentemente dalla posizione di partenza (stabilità *globale*).

Funzioni di Lyapunov e stabilità: definizioni

Definizione 7 *Una funzione scalare continua* $V(\mathbf{x})$ *è detta* localmente definita positiva *se* $V(\mathbf{0}) = 0$ *ed* $\exists\, R > 0$ *t.c.*

$$\|\mathbf{x}\| < R,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad V(\mathbf{x}) > 0$$

Se la precedente condizione vale $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, *allora* $V(\mathbf{x})$ *è detta* globalmente definita positiva

Definizioni analoghe: semi-definita positiva ($V(\mathbf{x}) \geq 0$), definita negativa ($V(\mathbf{x}) < 0$), semi-definita negativa ($V(\mathbf{x}) \leq 0$)

Poichè in questo contesto $\mathbf{x}$ rappresenta lo stato di un sistema dinamico, $V(\mathbf{x})$ è implicitamente funzione di t. Supponendo $V(\mathbf{x})$ differenziabile:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Funzioni di Lyapunov e stabilità: definizioni

Definizione 8 *Se una funzione $V(\mathbf{x})$ è definita positiva, ha derivate parziali continue e la sua derivata rispetto al tempo lungo ogni traiettoria di un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ è semi-definita negativa, allora $V(\mathbf{x})$ è detta una* funzione di Lyapunov *per $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.*

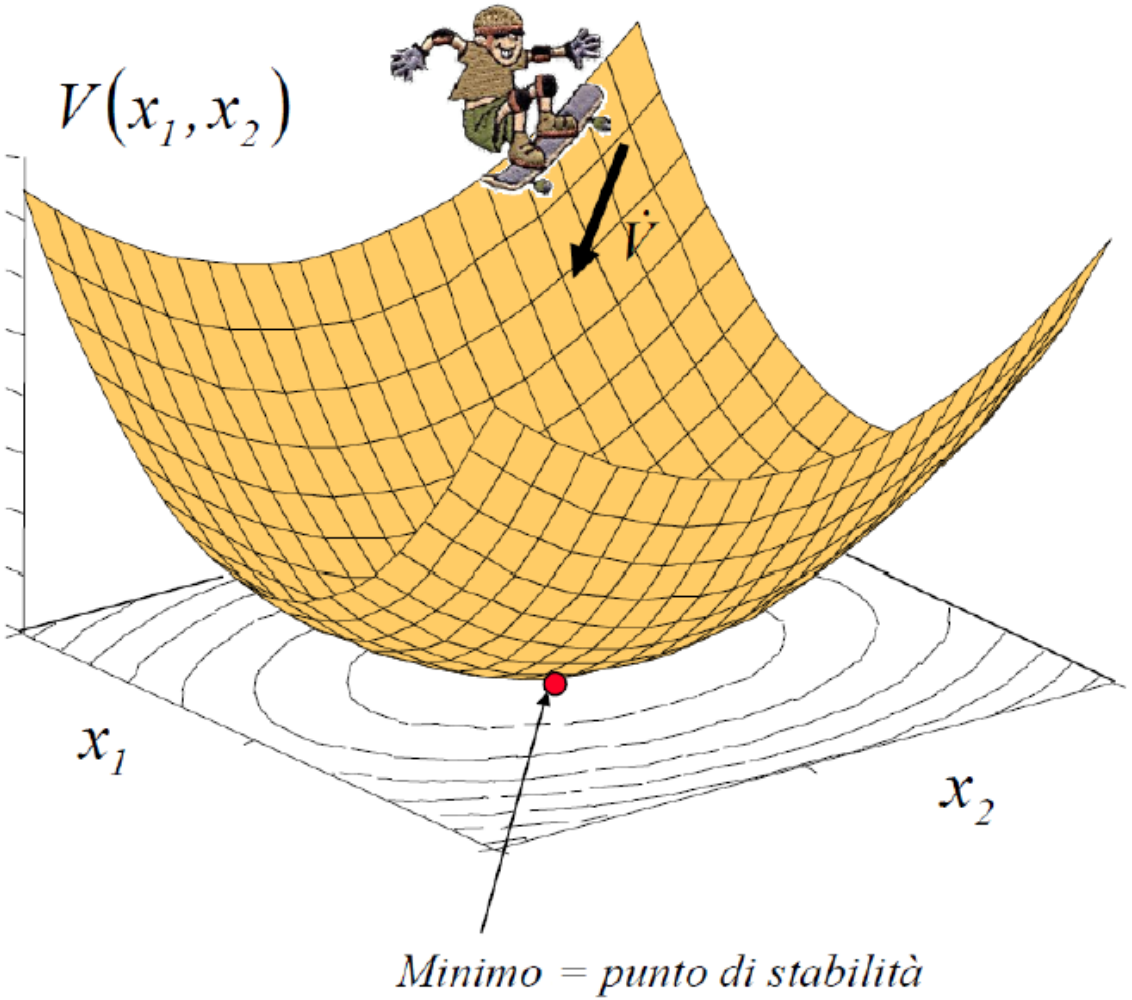
Teorema 2 (Stabilità locale)
Il punto di equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ è stabile se $\exists V(\mathbf{x})$ con derivate parziali prime continue t.c.

- *$V(\mathbf{x})$ è localmente definita positiva*
- *$\dot{V}(\mathbf{x})$ è localmente semi-definita negativa*

Se la derivata $\dot{V}(\mathbf{x})$ è localmente definita negativa, la stabilità di $\mathbf{0}$ è asintotica.

Funzioni di Lyapunov e stabilità

Rappresentazione "umoristica" del Teorema di Lyapunov:



Funzioni di Lyapunov e stabilità: Teorema

Teorema 3 (Stabilità globale)
Il punto di equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *del sistema* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *è globalmente asintoticamente stabile se* $\exists V(\mathbf{x})$ *con derivate parziali prime continue t.c.*

- $V(\mathbf{x})$ *è globalmente definita positiva*
- $\dot{V}(\mathbf{x})$ *è globalmente definita negativa*
- $V(\mathbf{x}) \to \infty$ *per* $\|\mathbf{x}\| \to \infty$

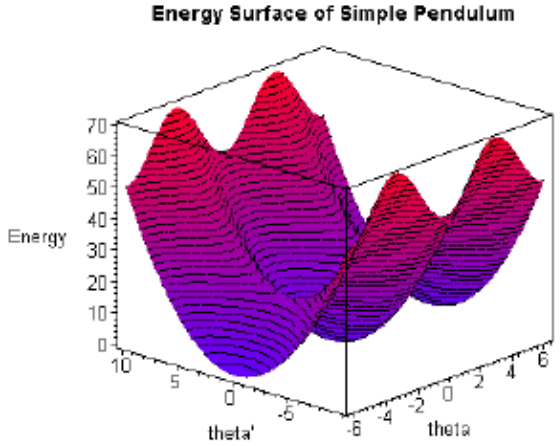
NOTA 1: per un sistema possono esistere diverse funzioni di Lyapunov. Se scelta una di queste, essa si rivela con derivata *semi-definita negativa*, potrebbe in realtà esistere un'altra funzione di Lyapunov con derivata *definita negativa* che permette di dimostrare la stabilità asintotica, oltre a quella semplice. Inoltre, il fatto di non riuscire a trovare (ad intuito) una funzione di Lyapunov idonea, non prova che non ne esistano,

Funzioni di Lyapunov e stabilità: Osservazioni

La scelta di una funzione di Lyapunov che dimostri la stabilità di un sistema è un procedimento sostanzialmente *trial-and-error*: si definisce una funzione quadratica "candidata", si verifica l'andamento della sua derivata e se non ha le proprietà richieste la si modifica, eccetera. Tuttavia, il fatto che i teoremi sulla stabilità di Lyapunov siano la formalizzazione del concetto intuitivo "dissipazione di energia = stabilità", permette in molti casi di interesse pratico (es. sistemi meccanici, circuiti elettrici, ecc.) di utilizzare come prima "candidata" a funzione di Lyapunov la descrizione energetica del sistema. Ad esempio, nel caso del pendolo analizzato nell'introduzione, la funzione

$$V_1(\mathrm{x}) = \frac{1}{2} M R^2 x_2^2 + M R g (1 - \cos x_1)$$

dove $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$, è l'energia meccanica totale (cinetica + potenziale) ed è localmente definita positiva per il punto di equilibrio (0,0):



Funzioni di Lyapunov e stabilità: Osservazioni

Tuttavia, la sua derivata rispetto al tempo è:

$$\dot{V}_1(\mathrm{x}) = MRg\dot{x}_1 \sin x_1 + MR^2 x_2 \dot{x}_2 = MRg\dot{x}_1 \sin x_1 + MR^2 \dot{x}_1 \ddot{x}_1 = -\frac{b}{MR^2}\dot{x}_1^2 = -\frac{b}{MR^2}x_2^2$$

ed è *semi-definita negativa*, il che permette di dimostrare "solo" la stabilità semplice di (0,0). Ponendo per semplicità $b/MR^2 = 1$ e $g/R = 1$ e scegliendo come funzione di Lyapunov la seguente

$$V_2(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}x_2^2 + 2(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}(x_2 + x_1)^2$$

si può verificare che:

$$\dot{V}_1(\mathrm{x}) = -(x_2^2 + x_1 \sin x_1) \leq 0$$

è in effetti *localmente definita negativa*. Pertanto, con questo secondo tentativo di costruzione di una funzione di Lyapunov, aggiungendo all'energia effettiva un termine che non ha nessun significato fisico ben preciso, ma è un puro artificio matematico, è possibile dimostrare l'asintotica stabilità del punto (0,0).

Potrebbe quindi sembrare che il procedimento di Lyapunov per la dimostrazione della stabilità di un punto di equilibrio, soprattutto quella asintotica, sia lungo e difficoltoso (trovare la "giusta" f. di Lyapunov). In realtà, alcune proprietà di convergenza delle traiettorie di un sistema, compresa quindi la stabilità asintotica di un punto, possono essere dimostrate grazie ai **teoremi sugli insiemi invarianti**, dovuti a La Salle, enunciati nel seguito.

Funzioni di Lyapunov e stabilità: definizioni

Definizione 9 *Un insieme* $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{R}^n$ *è un* insieme invariante *di un sistema dinamico se ogni traiettoria che parte da una condizione iniziale* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ *rimane in* $\mathbf{M}$ *per ogni istante futuro*

Teorema 4 (Invariante locale)
Dato un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, *con* $\mathbf{f}$ *continua, e una funzione* $V(\mathbf{x})$ *con derivate parziali prime continue, se:*

- $\exists\, l > 0$ *t.c. la regione* $\mathbf{\Omega}_l$ *definita da* $V(\mathbf{x}) < l$ *è limitata*
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{\Omega}_l$
- $\mathbf{E} \in \mathbf{\Omega}_l$ *t.c.* $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ *e* $\mathbf{M}$ *è il maggiore insieme invariante contenuto in* $\mathbf{E}$

allora ogni traiettoria $\mathbf{x}(t)$ *con condizione iniziale* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{\Omega}_l$ *tende a* $\mathbf{M}$ *per* $t \to \infty$

Funzioni di Lyapunov e stabilità: Teorema

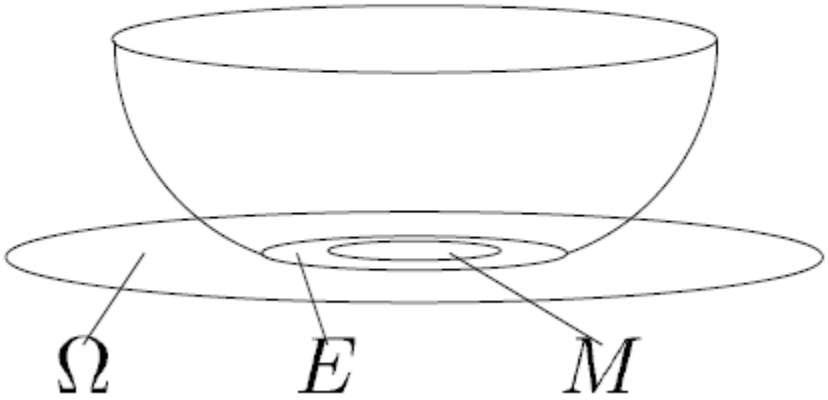
Teorema 5 (Invariante globale)
Dato un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, *con* $\mathbf{f}$ *continua, e una funzione* $V(\mathbf{x})$ *con derivate parziali prime continue, se:*

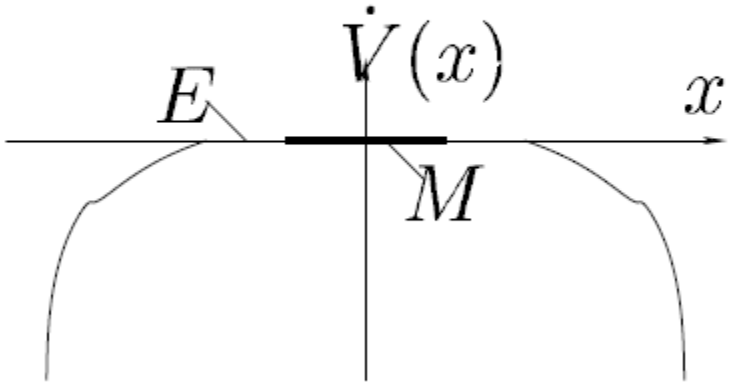
- $V(\mathbf{x}) \to \infty$ *per* $\|\mathbf{x}\| \to \infty$
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$
- $\mathbf{E} \in \mathbf{R}^n$ *t.c.* $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ *e* $\mathbf{M}$ *è il maggiore insieme invariante contenuto in* $\mathbf{E}$

allora ogni traiettoria $\mathbf{x}(t)$ *con condizione iniziale* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ *tende in modo globalmente asintotico a* $\mathbf{M}$ *per* $t \to \infty$

Funzioni di Lyapunov e stabilità: Teorema

Rappresentazione "concettuale" del principio di invarianza di La Salle:





Funzioni di Lyapunov e stabilità: Osservazioni

Grazie ai teoremi esposti precedentemente, che definiscono il cosiddetto **Principio di invarianza di La Salle**, è possibile dimostrare la stabilità asintotica dell'origine per il pendolo visto in precedenza, anche solo considerandone l'energia meccanica totale come funzione di Lyapunov. Infatti, considerando

$$V(\mathrm{x}) = \frac{1}{2} M R^2 x_2^2 + MRg(1 - \cos x_1)$$

risulta

$$\dot{V}(\mathrm{x}) = -\frac{b}{MR^2} x_2^2 \leq 0$$

che è ovviamente limitata in qualsiasi intorno di (0,0) e nulla, se $b \neq 0$, lungo tutto l'asse x_1, perciò $\mathbf{E} = \{(x_1, x_2) \ : \ x_2 = 0\}$. Tuttavia, il maggiore insieme invariante $\mathbf{M}$ contenuto in $\mathbf{E}$ è rappresentato dal solo punto (0,0), al quale quindi convergono tutte le traiettorie con condizione iniziale in un intorno del punto stesso. Infatti, la condizione $x_2 = \dot{\theta} = 0$ con $x_1 = \theta \neq 0$ non può essere invariante, perchè se fosse $\dot{\theta} = 0 \, \forall t$ dovrebbe anche essere $\ddot{\theta} = 0 \, \forall t$, condizione che però implica (dall'equazione dinamica) anche $\sin \theta = 0$, cioè (**localmente**) $\theta = 0$.

Pertanto, il punto nel quale il pendolo è fermo con $\theta = 0$ è un punto asintoticamente stabile per qualsiasi valore diverso da 0 del coefficiente di attrito viscoso alla cerniera, come è ovvio anche da una osservazione intuitiva basata sui soli principi fisici.

Funzioni di Lyapunov e stabilità: il caso lineare

Definizione 10 *Una matrice quadrata* $\mathbf{M}$ *di dimensione* $n \times n$ *si dice* definita positiva *se*

$$\mathbf{x} \neq 0 \in \mathbf{R}^n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} > 0$$

NOTA: analoghe definizioni per definita negativa e semi-definita negativa/positiva

Teorema 6

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema LTI $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *sia strettamente stabile è che* $\forall \mathbf{Q}$ *simmetrica definita positiva, la matrice* $\mathbf{P}$*, unica soluzione della* equazione di Lyapunov*:*

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

sia simmetrica e definita positiva.

Dimostrazione: basata sulla funzione di Lyapunov $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$, la cui derivata è: $\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \ \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$.

Estensione a sistemi tempo varianti

- I teoremi di Lyapunov sulla stabilità *locale*, *asintotica*, *globale*, (ed *uniforme*) sono estendibili tramite funzioni di Lyapunov tempo-varianti e relative definizioni.

- Tale estensione è molto importante anche per i sistemi *Lineari Tempo-Varianti*, *LTV*, in quanto per essi i teoremi classici sullo studio degli autovalori **non sono applicabili**

- Ad esempio, si potrebbe supporre che un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ sia stabile se gli autovalori di $\mathbf{A}(t)$ rimangono a parte reale negativa $\forall\, t \geq 0$ ... **ma sfortunatamente non è così!**

- Per sistemi LTV bisogna applicare teoremi specifici, oppure risolvere l'equazione di Lyapunov $\mathbf{A}(t)^T\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A}(t) = -\mathbf{Q}$ trovando una $\mathbf{P}$ **costante**, quindi valida $\forall\, t \geq 0$

Progetto del controllo non lineare

- Importante distinzione:
  - **problemi di *regolazione* (o *stabilizzazione*)** di un punto di equilibrio
  - **problemi di *inseguimento* (o *tracking*)** di una traiettoria desiderata

- Questa distinzione, solitamente fatta anche nel controllo lineare, assume nel contesto dei sistemi nonlineari una connotazione molto più significativa

- Nel secondo caso gli effetti delle nonlinearità possono diventare determinanti soprattutto per **traiettorie con rapide variazioni**

Regolazione e inseguimento

- **Regolazione**: dato $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ e $\mathbf{x}_d$ costante, trovare una legge di controllo $\mathbf{u}$ tale che $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}_d$ per $t \to \infty$

- **Inseguimento:** dato $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$, con uscita misurabile $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$, ed una traiettoria $\mathbf{y}_d(t)$ desiderata, trovare una legge di controllo $\mathbf{u}$ tale che l'errore di inseguimento (*tracking error*) $\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t)$ tenda a zero, mentre $\mathbf{x}$ rimane limatato

NOTA 1: se con opportune condizioni iniziali $\mathbf{x}(0)$ si riesce ad avere $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{y}_d(t) \quad \forall\, t \geq 0$ allora si parla di **inseguimento perfetto** (*inseguimento asintotico* se la condizione di inseguimento perfetto è raggiunta in modo asintotico)

NOTA 2: L'inseguimento perfetto può essere ottenuto solamente se $\mathbf{y}_d(t)$ è nota a priori, comprese le sue derivate fino all'ordine pari a quello della dinamica del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$.

Esempio: stabilizzazione del pendolo

Si consideri un pendolo senza attrito, attuato alla base dalla coppia τ:

$$MR^2\ddot{\theta} + MgR\sin\theta = \tau$$

Una legge di controllo che risolve il problema di regolazione in $\theta = 0$ potrebbe essere:

$$\tau = \underbrace{-K_p\theta - K_d\dot{\theta}}_{\text{PD}} \underbrace{+MgR\sin\theta}_{\text{compens. gravita'}}$$

grazie alla quale la dinamica diventa:

$$MR^2\ddot{\theta} + K_d\dot{\theta} + K_p\theta = 0$$

che risulta stabile $\forall\ K_p,\ K_d > 0$ (è identica a quella di un gruppo massa-molla-smorzatore lineare).

Esempio: stabilizzazione del pendolo - Osservazioni

- Il controllo è composto da un termine di feedback *lineare* e da un termine *nonlineare* il cui ruolo è quello di effettuare la cancellazione della nonlinearità del sistema (f. solo di θ, non di $\dot{\theta}$, ma è trascurato l'attrito)

- Il feedback *lineare* include termini proporzionali a θ e a $\dot{\theta}$, che equivalgono ad **inserire una molla e uno smorzatore virtuale**, scelta giustificata dall'analisi di stabilità secondo Lyapunov già vista

- La cancellazione delle nonlinearità, almeno di quelle dominanti (es. gravità), permette di determinare in modo più semplice la **stabilità** del sistema con il controllo, ma assume un ruolo determinante nei problemi di inseguimento (*tracking*)

Esempio: Tracking / linearizzazione del pendolo

Modello con attrito nonlineare: $MR^2\ddot{\theta} + b(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + MgRsin\theta = \tau$

"Trasformiamo" questa dinamica nonlineare in una lineare, con una legge di controllo che dipenda anche da un ulteriore ingresso "fittizio" v:

$$\tau = MR^2 v + b(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + MgRsin\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = v$$

Ora, θ può essere forzata sulla traiettoria desiderata $\theta_d(t)$ dall' "ingresso" v con un controllore PD + *feedforward* $(\theta_d(t))$:

$$v = \ddot{\theta}_d - K_p(\theta - \theta_d) - K_d(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d)$$

ponendo $e = \theta - \theta_d$, $K_p = \lambda^2$ e $K_d = 2\lambda$ $(\lambda > 0)$, si ottiene che l'errore:

$$\ddot{e} + 2\lambda\dot{e} + \lambda^2 e = 0 \quad \Rightarrow \quad e \to 0 \text{ per } t \to \infty$$

Esempio: Tracking del pendolo - Osservazioni

- **Modello approssimativo = linearizzazione approssimativa**
  - **incertezze parametriche** (es. M ed R non noti con precisione)
  - **incertezze non parametriche** (es. elasticità del braccio non trascurabile)

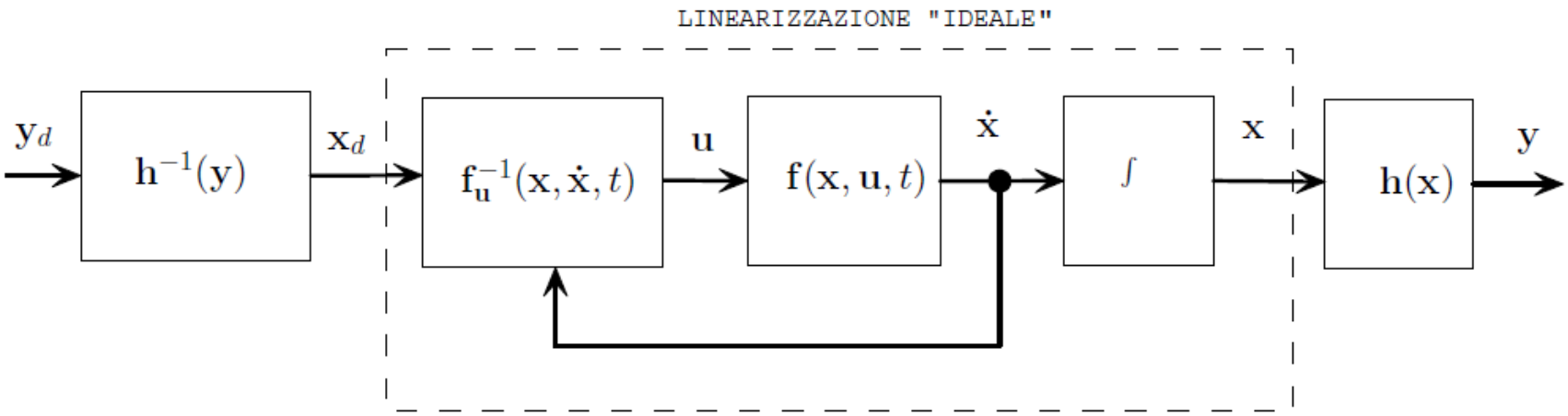
- Tipico metodo per rendere il sistema **robusto** rispetto alle incertezze, così come ai disturbi, è quello di aumentare il guadagno della parte di feedback (PD)

- Spingendo al limite questa tecnica, si introducono azioni di controllo che **commutano** tra valori positivi e negativi ($\pm$ M) a seconda dell'errore di inseguimento **e delle sue derivate** (v. Sliding Mode)

- Un tale termine "switching" equivale ad un'azione di feedback con guadagno ∞, ma **valore assoluto limitato**

Linearizzazione analitica – caso ideale

Date $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ e $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$, trovare $\mathbf{u} = \mathbf{f}_{\mathbf{u}}^{-1}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ e $\mathbf{x} = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y})$:

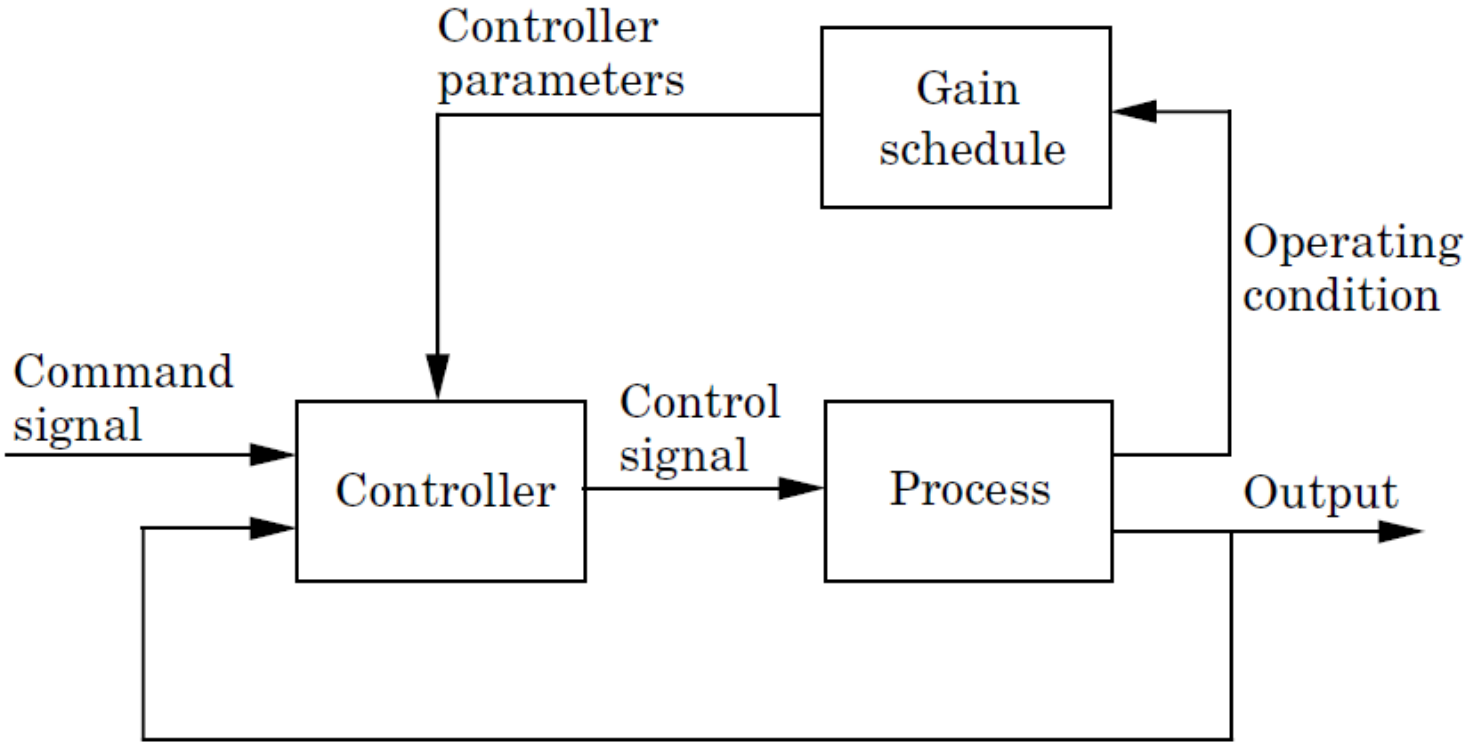


così $\underline{\mathbf{y} = \mathbf{y}_d}$!!

Tecniche analitiche per il controllo non lineare

- **Gain scheduling**: approssimazione lineare del sistema in diversi *punti operativi* e progetto di *diversi* controllori lineari per ciascun punto
- **Feedback linearization**: *formalizzazione* del concetto intuitivo *"cancellare le nonlinearità con il controllo"* (tipico in robotica)
- **Sliding mode control**: *formalizzazione* di stabilità ed invarianza della condizione di inseguimento perfetto nei confronti di incertezze e disturbi

Gain scheduling in generale



Gain scheduling: metodo di progetto

1. Determinare una *famiglia* di punti di equilibrio per il sistema, se possibile espressa come funzione continua di un parametro σ, altrimenti come insieme discreto di punti $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$

2. Calcolare l'approssimazione lineare del sistema rispetto alla *famiglia* di punti di equilibrio:

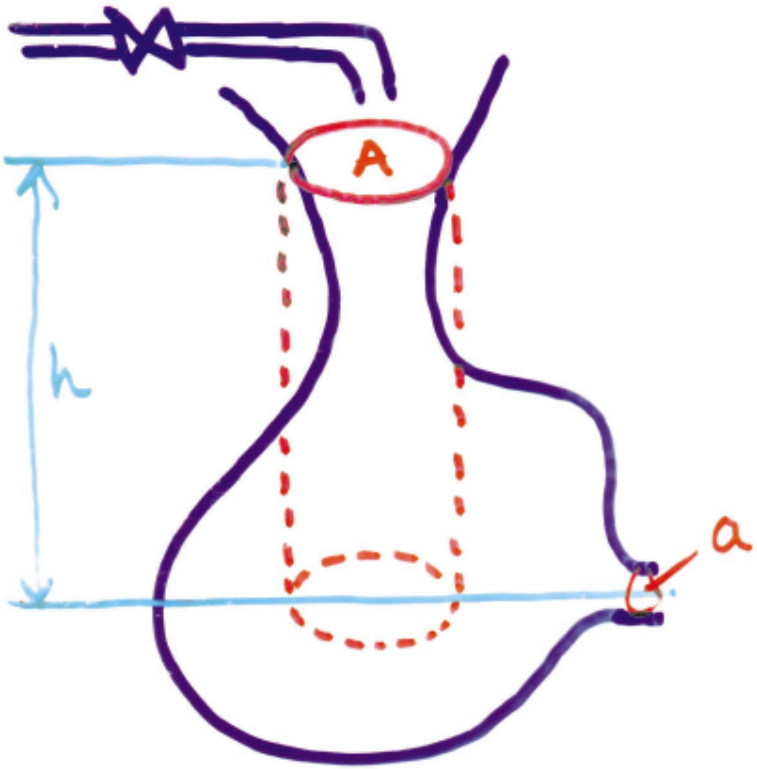
$$\begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}_\sigma(t) &=& \mathbf{A}(\sigma)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\sigma)\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_\sigma(t) &=& \mathbf{C}(\sigma)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\sigma)\,\mathbf{u}(t) \end{array} \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}_r(t) &=& \mathbf{A}_r\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_r\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_r(t) &=& \mathbf{C}_r\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_r\,\mathbf{u}(t) \end{array}, \; r = 1, \ldots, k$$

3. Progettare un controllore lineare con parametri $f(\sigma)$, oppure k controllori lineari con parametri fissati, con riferimento al sistema approssimato

4. Se si sono ottenuti k controllori diversi, trovare un metodo per selezionarli in base alle **condizioni operative** (es. interpolazione)

Gain scheduling: esempio

Serbatoio con area sezione (A) variabile:



$$V = \int_0^h A(\tau)d\tau$$

$$\dot{V} = A(h)\,\dot{h} = q_i - a\sqrt{2\,g\,h}$$

$$\dot{h} = \frac{q_i - a\sqrt{2\,g\,h}}{A(h)} = f(h, q_i)$$

con h = variabile d'uscita misurata, q_i variabile d'ingresso (volume liquido in entrata), a sezione (costante) del tubo di uscita liquido e $A(h)$ sezione del tank

Gain scheduling: esempio

Linearizzando il modello nonlineare rispetto ad un punto operativo fissato da h^0 e $q_i^0 = a\sqrt{2\,g\,h^0}$, nel quale si considera $A(h^0)$ costante e $h = h^0 + \delta h$, si può ricavare un'equazione differenziale del primo ordine rispetto alla nuova variabile di stato δh e al nuovo ingresso δq_i:

$$\delta\dot{h} = \frac{\delta q_i}{A(h^0)} - \frac{a\sqrt{2\,g\,h^0}}{2\,A(h^0)\,h^0}\,\delta h$$

dalla quale si può ricavare la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\beta}{s+\alpha}$$

con:

$$\beta = \frac{1}{A(h^0)} \qquad \alpha = \frac{a\sqrt{2\,g\,h^0}}{2\,A(h^0)\,h^0} = \frac{q_i^0}{2\,A(h^0)\,h^0}$$

Gain scheduling: esempio

Per tale funzione di trasferimento del *plant*, è possibile progettare un controllore PI, considerando $e = (h^0 - h) = -\delta h$:

$$\delta q_i = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int e \, d\tau \right)$$

Ad esempio, imponendo che il sistema chiuso in retroazione abbia una f.d.t del secondo ordine con pulsazione naturale ω e smorzamento ζ, si possono calcolare:

$$K = \frac{2\zeta\omega - \alpha}{\beta} \qquad T_i = \frac{2\zeta\omega - \alpha}{\omega^2}$$

calcolabili in linea in base al punto di lavoro (*gain scheduling*):

$$K(h^0) = 2\zeta\omega A(h^0) - \frac{a\sqrt{2\,g\,h^0}}{2\,h^0} \qquad T_i(h^0) = \frac{2\zeta}{\omega} - \frac{a\sqrt{2\,g\,h^0}}{2\,A(h^0)\,h^0\,\omega^2}$$

Esempio: controllo di robot manipolatori

Esempio: controllo di robot manipolatori

- Modello dinamico ($\mathbf{q}$ posizione giunti, τ coppia attuatori):

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \tau + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{F}_a$$

  nel quale le matrici $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ (inerzie) e $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ (legata alle forze di Coriolis e centripete), la gravità ($\mathbf{g}(\mathbf{q})$) e delle forze di interazione con l'ambiente ($\mathbf{F}_a$) introducono notevoli nonlinearità

- **Controllo decentralizzato**: ogni giunto viene controllato in modo indipendente, l'effetto delle nonlinearità è considerato un *disturbo* (approccio "storico", ma semplicistico)

- **Controllo centralizzato**: si considera il modello dinamico completo per l'analisi di stabilità e il progetto di leggi di controllo opportune (compensazione gravità, coppia precalcolata, dinamica inversa, etc.)

Esempio: controllo di robot manipolatori

Dato il modello dinamico di un manipolatore:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \tau$$

si può pensare di trasformare tale dinamica nonlineare tramite una legge di controllo unicamente basata sulla cancellazione dei termini nonlineari:

$$\tau = \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

nella quale $\mathbf{y}$ rappresenta il "nuovo" ingresso per il sistema trasformato. Ipotizzando la perfetta cancellazione di tutti i termini, rimane l'equazione dinamica:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{y}$$

Moltiplicando tutti i termini per $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})$, il sistema retroazionato con la legge di di controllo descritta si riduce ad un doppio integratore:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y}$$

NOTA BENE: l'operazione di moltiplicazione per $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})$ è sempre possibile poichè $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ è **sempre invertibile** (proprietà notevole del modello dinamico dei robot manipolatori)!

Feedback Linearization

- La tecnica di **cancellazione delle nonlinearità** di un sistema attraverso il controllo, al fine di ottenere una dinamica lineare rispetto ad un ingresso fittizio, è utilizzata con un approccio *intuitivo* in robotica

- Tali tecniche intuitive sono formalizzate dalla teoria recente dei controlli automatici, con l'obiettivo di estenderne l'applicabilità a problemi diversi (regolazione, inseguimento, disaccoppiamento dei disturbi, osservazione) e a sistemi con caratteristiche dinamiche più generiche

1. Linearizzazione per sistemi in forma canonica
2. Linearizzazione ingresso-stato
3. Linearizzazione ingresso-uscita

Linearizzazione per sistemi in forma canonica

Un sistema (SISO) è detto in **forma canonica di controllabilità** (o *forma "companion"*) se:

$$x^{(n)} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u$$

$u \in R$, sistema single input

oppure, con rappresentazione nello spazio degli stati:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \end{bmatrix}$$

Linearizzazione per sistemi in forma canonica - Note

Per un sistema in forma companion la legge di controllo nonlineare:

$$u = \frac{1}{b(\mathbf{x})}[v - f(\mathbf{x})]$$

trasforma la dinamica in una serie di n integratori:

$$x^{(n)} = v$$

per la quale è sempre possible imporre una dinamica esponenzialmente stabile, sia per problemi di regolazione che per problemi di inseguimento di una traiettoria $x_d(t)$, con una legge di controllo del tipo (scelti opportuni K_i:

$$v = x_d^{(n)} - K_0 e - K_1 \dot{e} - \cdots - K_{n-1} e^{(n-1)}$$

NOTA: devono essere disponibili tutte le derivate necessarie di $x_d(t)$

Linearizzazione per sistemi MIMO

L'estensione ad un sistema MIMO (come un robot manipolatore) richiede ovviamente che la dinamica sia espressa in modo vettoriale:

$$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

linearizzabile tramite la legge di controllo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{b}^{-1}(\mathbf{x})[\mathbf{v} - \mathbf{f}(\mathbf{x})]$$

Tuttavia, in questo caso la linearizzazione è possibile solamente se la matrice $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ è invertibile $\forall\, \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^n$. Nelle applicazioni di robotica, come si è visto, ciò è garantito dalle proprietà strutturali meccaniche (matrice di inerzia) dei manipolatori.

Linearizzazione ingresso - stato

Si cerca una funzione di controllo nonlineare $u = u(\mathbf{x}, v)$ per l'ingresso scalare del **generico** sistema:

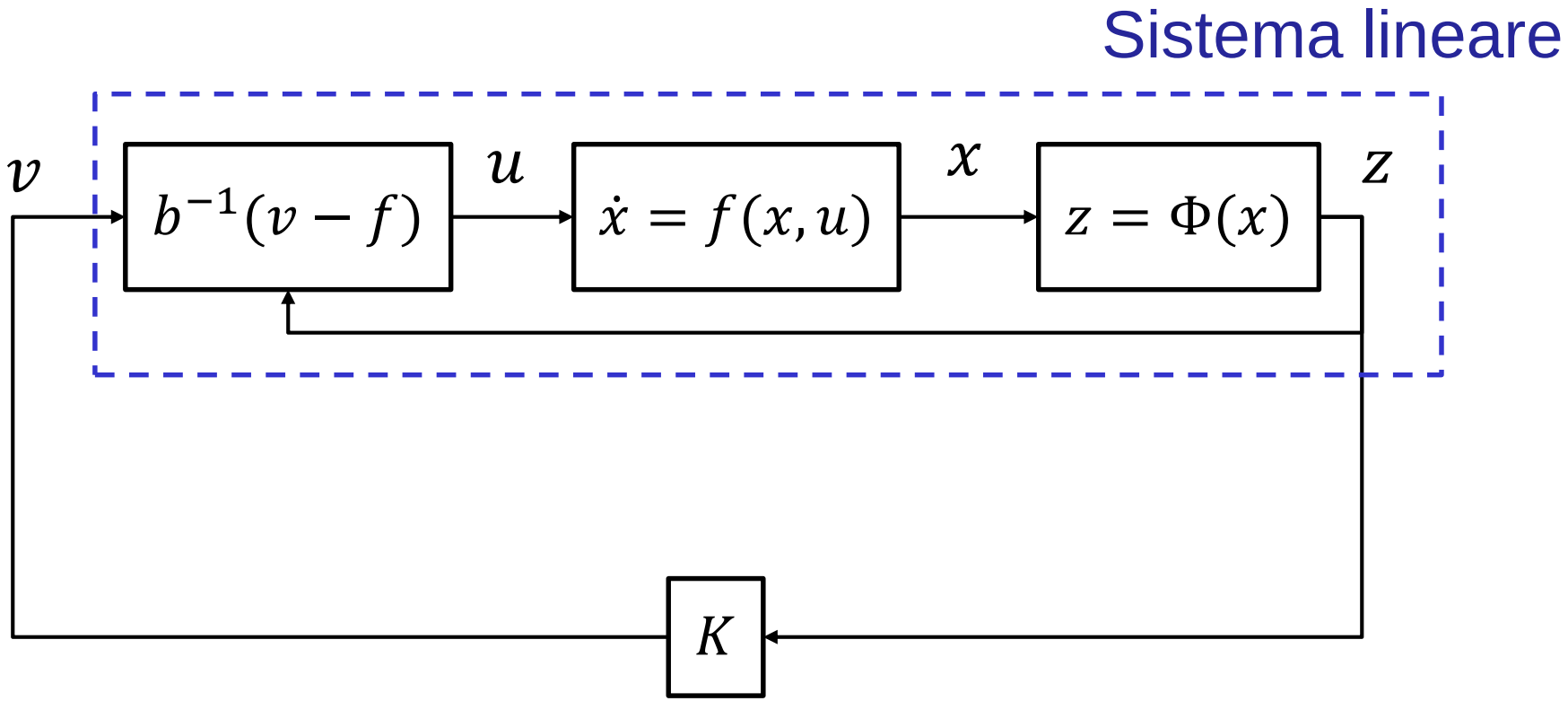
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

t.c. la dinamica nonlineare sia trasformata, attraverso un opportuno cambiamento di variabili $\mathbf{z} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$, nella dinamica lineare:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}v$$

sulla quale è possible progettare un controllore con le tecniche classiche del controllo lineare

Linearizzazione ingresso – stato, schematico



Linearizzazione ingresso – stato, esempio

Si consideri ad esempio il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + \sin x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \cos x_1 + u \cos 2x_1 \end{aligned}$$

nel quale la nonlinearità nella prima equazione non può essere cancellata direttamente attraverso il controllo u. Tuttavia, considerando la seguente trasformazione dello stato:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 + \sin x_1 \end{aligned}$$

si ottiene la dinamica:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2z_2 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 + u \cos 2z_1 \end{aligned}$$

la quale è ora invece linearizzabile tramite il controllo:

$$u = \frac{1}{\cos 2z_1}(v - \cos z_1 \sin z_1 + 2z_1 \cos z_1)$$

Linearizzazione ingresso – stato, esempio

che permette di ottenere il sistema lineare:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= v \end{aligned}$$

Tale sistema risulta essere controllabile $(rank([b|Ab]) = 2)$, pertanto è possibile assegnarne arbitrariamente gli autovalori con una retroazione del tipo $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2$.

Linearizzazione ingresso – uscita

In modo analogo, per un sistema generico con una certa uscita di interesse:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \\ y &= h(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

si desidera ottenere una dinamica lineare dell'uscita rispetto ad un certo ingresso di controllo fittizio v, **mantenendo limitato lo stato** $\mathbf{x}$.

Per risolvere il problema di linearizzazione, occorre prima di tutto "scoprire" la relazione dinamica tra uscita e ingresso (derivando rispetto al tempo la $y = h(\mathbf{x})$):

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

NOTA: potrebbero essere necessarie più derivate successive della $y = h(\mathbf{x})$

Linearizzazione ingresso – uscita, esempio

Ad esempio, si consideri il sistema del terzo ordine:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^5 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

In questo caso, derivando l'uscita si ottiene:

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3$$

nella quale **non compare** l'ingresso u. Occorre quindi derivare l'uscita una seconda volta:

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 \cos x_2 + \dot{x}_2 x_3 + (x_2 + 1)\dot{x}_3 = (x_2 + 1)u + f_1(\mathbf{x})$$

nella quale $f_1(\mathbf{x})$ contiene tutti gli altri termini non legati all'ingresso. Chiaramente, questa dinamica può essere trasformata in quella di un doppio integratore $\ddot{y} = v$ con il controllo:

$$u = \frac{1}{x_2 + 1}[v - f_1(\mathbf{x})]$$

Linearizzazione ingresso – uscita, osservazioni

In generale, il numero di volte che occorre derivare l'uscita di un sistema per "scoprire" la relazione ingresso-uscita viene detto **grado relativo del sistema**. Nel caso in esame, il sistema ha grado relativo pari a 2. Il concetto di grado relativo si traduce per un sistema lineare, la cui relazione ingresso-uscita è data dalla funzione di trasferimento, se SISO, o matrice di trasferimento, se MIMO, nella differenza tra il numero di poli ed il numero di zeri della f.d.t. (m.d.t.).

La linearizzazione ingresso-uscita ottenuta per il caso in esame va ulteriormente analizzata per verificare se lo stato $\mathbf{x}$ rimane effettivamente limitato durante l'inseguimento di una traiettoria. Ciò non è in effetti garantito dalla soluzione del problema di inseguimento asintotico, in quanto la dinamica ingresso-uscita linearizzata è di ordine **2**, mentre lo stato del sistema completo è di ordine **3**. Risolvendo come visto in precedenza il problema di inseguimento, cioè ponendo:

$$v = \ddot{y}_d - K_p e - K_d \dot{e}$$

si può pensare di semplificare lo studio della limitatezza dello stato ponendo come "nuove" variabili di stato y, $\dot{y}$ e x_3. La limitatezza delle prime due è infatti garantita dall'inseguimento asintotico, mentre per la terza occorre determinarne la dinamica e studiarla in relazione all'andamento di v o, equivalentemente, y_d (es. ipotesi di limitatezza delle derivate, ecc.).

Per un generico sistema di ordine n di grado relativo r, le $n - r$ variabili di stato la cui dinamica non può essere imposta dall'inseguimento asintotico costituiscono la **dinamica interna**. Una dinamica interna instabile rende inutile la soluzione del problema di inseguimento, in quanto si traduce in pratica in saturazioni e danneggiamenti degli attuatori e/o dei componenti fisici del sistema.

Formalizzazione del problema di linearizzazione

- Nel caso di interesse pratico più comune, la linearizzazione ingresso-uscita, la procedura richiede di:

  1. *derivare l'uscita fino a rivelare la relazione con l'ingresso*
  2. *trovare una trasformazione dello stato e una legge di controllo nonlineare che renda la relazione ingresso-uscita lineare*
  3. *studiare la stabilità della dinamica interna*

- La formalizzazione di questo problema e della sua soluzione consiste nel determinare le caratteristiche che il sistema deve avere perchè il problema abbia soluzione ed una procedura sistematica per progettare la trasformazione dello stato ed il controllo

Strumenti matematici: geometria differenziale

Definizione 11 *Il vettore colonna i cui componenti sono funzioni scalari smooth* ($f_i \in C^\infty$) *di* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$*:*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \cdots \\ f_{n-1}(\mathbf{x}) \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

si definisce **campo vettoriale** $\in C^\infty$ *(smooth vector field)*

dove C^∞ è lo spazio delle funzioni continue con derivate parziali di ogni ordine continue.

Un campo vettoriale *smooth* definisce ovviamente una mappa $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, per la quale i componenti delle matrici Jacobiane sono continue per ogni ordine di derivazione.

Strumenti matematici: geometria differenziale

Definizione 12 *Dato un campo vettoriale smooth* $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *ed una funzione smooth* $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, *si definisce* ***derivata di Lie*** *di* h *rispetto ad* $\mathbf{f}$ *la funzione scalare:*

$$L_{\mathbf{f}}\, h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}\, \mathbf{f}$$

In sostanza, la derivata di Lie rappresenta la derivata "direzionale" di h lungo la direzione in $\mathbf{R}^n$ del vettore $\mathbf{f}$.

Ricorsivamente, si può definire la derivata di Lie di ogni ordine come segue:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{f}}^0\, h &= h \\ L_{\mathbf{f}}^i\, h &= L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}^{i-1}\, h)\, h = \frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{i-1}\, h}{\partial \mathbf{x}}\, \mathbf{f} \qquad i = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Analogamente, se $\mathbf{g}$ è un altro campo vettoriale *smooth*, vale la:

$$L_{\mathbf{g}}\, L_{\mathbf{f}}\, h = \frac{\partial L_{\mathbf{f}}\, h}{\partial \mathbf{x}}\, \mathbf{g}$$

Geometria differenziale - Note

Si noti che dato un sistema dinamico il cui modello matematico sia:

$$\begin{aligned} \dot{\mathrm{x}} &= \mathrm{f}(\mathrm{x}) \\ y &= h(\mathrm{x}) \end{aligned}$$

le derivate rispetto al tempo dell'uscita (scalare) corrispondono a:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial h}{\partial \mathrm{x}} \dot{\mathrm{x}} = \frac{\partial h}{\partial \mathrm{x}} \mathrm{f} = L_{\mathrm{f}} h \\ \ddot{y} &= \frac{\partial (L_{\mathrm{f}} h)}{\partial \mathrm{x}} \dot{\mathrm{x}} = \frac{\partial (L_{\mathrm{f}} h)}{\partial \mathrm{x}} \mathrm{f} = L_{\mathrm{f}}^2 h \\ &\dots \end{aligned}$$

Inoltre, se V è una funzione di Lyapunov (*smooth*) per il sistema, la sua derivata rispetto al tempo $\dot{V}$ corrisponde a $L_{\mathrm{f}} V$.

Geometria differenziale - Diffeomorfismi

Definizione 13 *Un campo vettoriale smooth* $\mathbf{\Phi} = \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *definito in una regione* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ *è chiamato* ***diffeomorfismo*** *se la sua inversa* $\mathbf{\Phi}^{-1}$ *esiste ed è smooth*

NOTA 1: un diffeomorfismo permette di effettuare una trasformazione "coerente" delle variabili di stato di un sistema nonlineare. Il fatto che sia invertibile garantisce sempre l'esistenza di una mappa fra stati equivalenti, mentre il fatto che sia *smooth* preserva tale proprietà anche per i campi vettoriali che caratterizzano l'equazione dinamica del sistema.

NOTA 2: ponendo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u$ e trasformando lo stato con il diffeomorfismo $\mathbf{z} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$, si ottiene che:

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u)$$

per cui gli elementi di $\dot{\mathbf{z}}$ hanno la forma $L_{\mathbf{f}}\Phi_i + L_{\mathbf{b}}\Phi_i\, u$

Linearizzazione ingresso – uscita, grado relativo

Per un sistema nonlineare SISO la soluzione del problema di linearizzazione ingresso-uscita impone innanzitutto di determinare il **grado relativo** del sistema e, soprattutto, **se questo sia definito**.

Definizione 14 *Il sistema SISO del tipo (forma* affine*):*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

con $\mathbf{f}$ *e* $\mathbf{b}$ *smooth,* ***ha grado relativo*** r *in una regione* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ *se* $\forall\, \mathbf{x} \in \Omega$

$$\begin{aligned} &L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{f}}^{i} h = 0 \qquad 0 \leq i < r-1 \\ &L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{f}}^{r-1} h \neq 0 \end{aligned}$$

Linearizzazione ingresso – uscita, r = 1

NOTA: il sistema potrebbe **non avere grado relativo** definito, cioè potrebbe essere $L_{\mathbf{b}}\, L_{\mathbf{f}}^{r-1}\, h \neq 0$ nell'intorno di un punto $\mathbf{x}_0$, punto nel quale tale funzione si annulla

Si supponga che il sistema nella forma precedente abbia grado relativo 1 in una certa regione Ω. Questo significa che derivando rispetto al tempo l'uscita:

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f} + \mathbf{b}\, u) = L_{\mathbf{f}}\, h + L_{\mathbf{b}}\, h\, u$$

Poichè per definizione $L_{\mathbf{b}}\, h \neq 0$ in Ω, in questa regione è possibile, imponendo la legge di controllo:

$$u = \frac{1}{L_{\mathbf{b}}}(v - L_{\mathbf{f}}\, h)$$

ottenere la relazione ingresso-uscita lineare $\dot{y} = v$.

Linearizzazione ingresso – uscita, r > 1

Se il sistema dovesse avere grado relativo $r > 1$ in Ω, sarebbe necessario derivare r l'uscita per ottenere la relazione con l'ingresso. Questo significa che:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= L_{\mathrm{f}}\, h + \not{L}_{\mathrm{b}} h \not{u} \\ \ddot{y} &= L_{\mathrm{f}}^2\, h + \not{L}_{\mathrm{b}} \not{L}_{\mathrm{f}} h \not{u} \\ &\dots \\ y^{(r)} &= L_{\mathrm{f}}^r\, h + L_{\mathrm{b}}\, L_{\mathrm{f}}^{r-1}\, h\, u \end{aligned}$$

Definendo una legge di controllo:

$$u = \frac{1}{L_{\mathrm{b}}\, L_{\mathrm{f}}^{r-1}\, h}(v - L_{\mathrm{f}}^r\, h)$$

si ottiene $\underline{y^{(r)} = v}$

Linearizzazione ingresso – uscita, note

Supponendo ora di definire un **diffeomorfismo** avente la seguente struttura:

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = [h \quad L_{\mathrm{f}} h \quad L_{\mathrm{f}}^2 h \quad \dots \quad L_{\mathrm{f}}^{r-1} h \quad \Phi_{r+1}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \Phi_n(\mathbf{x})]$$

si ottiene il sistema trasformato:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= L_{\mathrm{f}} h &&= z_2 \\
\dot{z}_2 &= L_{\mathrm{f}}^2 h &&= z_3 \\
&\dots \\
\dot{z}_{r-1} &= L_{\mathrm{f}}^{r-1} h &&= z_r \\
\dot{z}_r &= L_{\mathrm{f}}^r h + L_{\mathrm{b}} L_{\mathrm{f}}^{r-1} h \, u
\end{aligned}$$

con uscita $y = z_1$, linearizzabile con la legge di controllo descritta in precedenza.

Linearizzazione ingresso – uscita, note

NOTA: Per le rimanenti $n - r$ variabili di stato, si può dimostrare che **se r è strettamente minore di n** è sempre possibile trovare una forma per i rimanenti elementi del diffeomorfismo non assegnati esplicitamente in precedenza:

$$\Phi_{r+1}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \Phi_n(\mathbf{x})$$

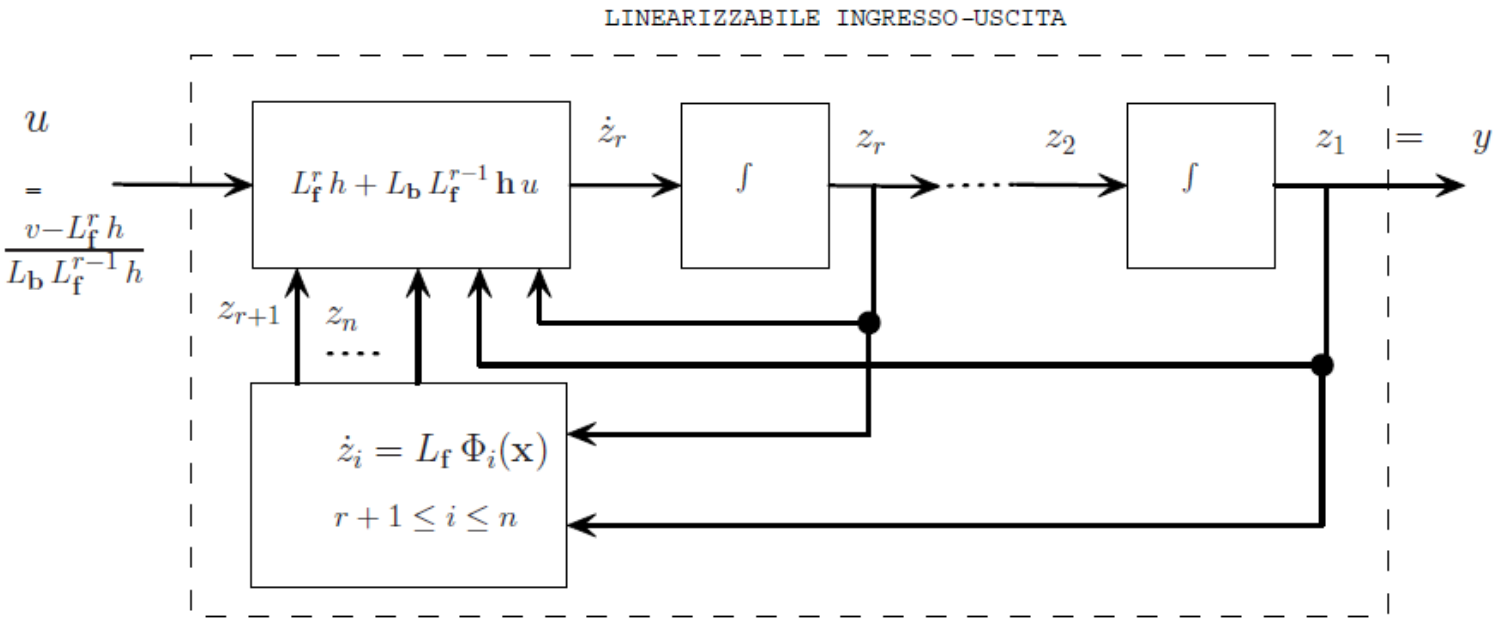
in modo tale che sia $L_{\mathrm{b}}\,\Phi_i(\mathbf{x}) = 0$ per ogni $r+1 \leq i \leq n$. In base a questa proprietà:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{r+1} &= L_{\mathrm{f}}\,\Phi_{r+1} + \not{L}_{\mathrm{b}}\not{\Phi}_{r+1}\not{y} \\ &\dots \\ \dot{z}_n &= L_{\mathrm{f}}\,\Phi_n + \not{L}_{\mathrm{b}}\not{\Phi}_n\not{y} \end{aligned}$$

Le $n - r$ nuove variabili di stato ottenute con questa trasformazioni costituiscono quindi la **dinamica interna** del sistema linearizzato, dalla cui stabilità dipende l'effettiva utilità pratica della linearizzazione.

Linearizzazione ingresso – uscita, note

Per concludere, è possibile ottenere la *linearizzazione ingresso-uscita* in Ω del sistema tramite $u = (v - L_{\mathbf{f}}^{r} h)/L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{f}}^{r-1} h$, ottenendo che $y^{(r)} = v$ e, nel contempo, una *linearizzazione parziale ingresso-stato*:



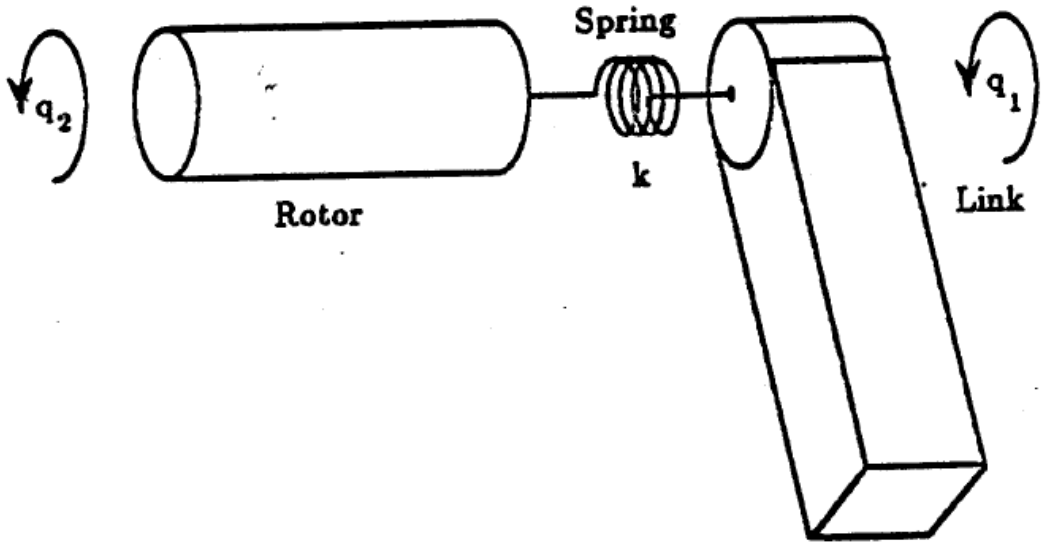
Feedback Linearization – Note Conclusive

- Se $r = n$, cioè il grado relativo è pari all'ordine del sistema, la linearizzazione ingresso-stato è **completa**!

- Se l'obiettivo è proprio la linearizzazione ingresso-stato completa, ma non è possibile ottenerla tramite l'uscita "naturale" (i.e. misurabile) del sistema, la formalizzazione matematica del problema prevede di definire una uscita "fittizia", rispetto alla quale il sistema abbia grado relativo $r = n$.

- Ovviamente, l'effettiva possibilità di definire tale uscita fittizia dipende dal fatto che il modello nonlineare abbia determinate proprietà matematiche, basate sulla teoria della geometria differenziale e dell'algebra di Lie (qui non considerate).

Esempio: Robot con giunto flessibile



$$I\ddot{q}_1 + MgL\sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0$$
$$J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = \tau(= u)$$

con M massa del link, L distanza del baricentro dall'asse di giunto, I inerzia del link rispetto all'asse di giunto e J inerzia del rotore del motore

Esempio: Robot con giunto flessibile

Le equazioni dinamiche sono riconducibili alla forma affine $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} + \mathbf{b}u$ se poniamo $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T = [q_1 \quad \dot{q}_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_2]^T$ e:

$$\mathbf{f} = [x_2 \quad -\frac{MgL}{I}\sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \quad x_4 \quad \frac{k}{J}(x_1 - x_3)]^T$$

$$\mathbf{b} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{J}]^T$$

Ipotizzando di considerare come uscita $y = x_1 = q_1$, cioè la posizione angolare del link, otteniamo che:

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \dot{x}_1 &&= x_2 \\
\ddot{y} &= \dot{x}_2 &&= -\frac{MgL}{I}\sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\
y^{(3)} & &&= -\frac{MgL}{I}x_2\cos x_1 - \frac{k}{I}(x_2 - \underbrace{x_4}_{\text{N.B.}}) \\
y^{(4)} &= \cdots + \frac{k}{I}\dot{x}_4 &&= a(\mathbf{x}) + \frac{k}{IJ}u
\end{aligned}$$

Esempio: Robot con giunto flessibile

Il sistema ha quindi grado relativo **ben definito** ($k/(I\,J) \neq 0$ sempre!), pari a 4, cioè all'ordine del sistema, che è quindi **linearizzabile completamente** attraverso la legge di controllo:

$$u = \frac{I\,J}{k}[v - a(\mathbf{x})]$$

nella quale (ahinoi):

$$a(\mathbf{x}) = \frac{MgL}{I}\sin x_1(x_2^2 + \frac{MgL}{I}\cos x_1 + \frac{k}{I}) + \frac{k}{I}(x_1 - x_3)(\frac{k}{I} + \frac{k}{J} + \frac{MgL}{I}\cos x_1)$$

Estensione ai sistemi MIMO

Per un sistema del tipo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

nel quale $\mathbf{B}$ è una matrice $n \times m$ le cui colonne sono campi vettoriali *smooth*, il grado relativo, se definito, non è uno scalare, ma un vettore $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$, per il quale la sommatoria $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ è detto *grado relativo totale*.

Il problema di linearizzazione si risolve nel caso MIMO in modo analogo a quanto visto per il caso SISO, con la ovvia differenza che per ogni componente dell'uscita y_i saranno necessarie r_i derivazioni successive rispetto al tempo (fino a ottenere la relazione con $\mathbf{u}$) e la determinazione delle opportune trasformazioni di stato.

Estensione ai sistemi MIMO

Procedendo con le derivazioni, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ \dots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}}^{r_2} h_2(\mathbf{x}) \\ \dots \\ L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \mathbf{E}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

con $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ matrice $m \times m$ definita in termini delle $L_{\mathbf{b}_j} L_{\mathbf{f}}^{r_i - 1} h_i$ (i indice dell'uscita, j indice dell'ingresso) e chiamata **matrice di disaccoppiamento**

Se il sistema ha grado relativo definito in un certo $\mathbf{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^n$, la matrice $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ è invertibile in $\mathbf{\Omega}$, quindi il sistema è linearizzabile.

NOTA: questa proprietà è sempre verificata, come visto in precedenza, per una ampia classe di sistemi meccanici che include tutti i robot manipolatori seriali!

Controllo in Sliding Mode

- La teoria del controllo in **Sliding Mode** ha come obiettivo la **robustezza** del controllore nei confronti di disturbi e/o incertezze di modellazione del sistema controllato

- Si cerca di raggiungere l'obiettivo forzando il sistema in retroazione a raggiungere un regime di **Sliding Mode**, tipico dei **sistemi a struttura variabile** (*Variable Structure Systems, VSS*)

- Teoricamente, una volta raggiunto lo Sliding Mode, il sistema rimarrà **sempre** in tali condizioni (anche con disturbi o errori di modellazione entro limiti ipotizzati) $\Rightarrow$ il regime di Sliding Mode è caratterizzato da un **insieme invariante** per la dinamica del sistema

- Tali condizioni ideali sono mantenute introducendo nell'azione di controllo una componente in **commutazione a frequenza infinita!**

Sistemi a struttura variabile (VSS)

In generale, un sistema con:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{u},\, t),$$

$$\mathbf{u} = [u_1(\mathbf{x}, t) \quad u_2(\mathbf{x}, t) \;\ldots\; u_m(\mathbf{x}, t)]^T$$

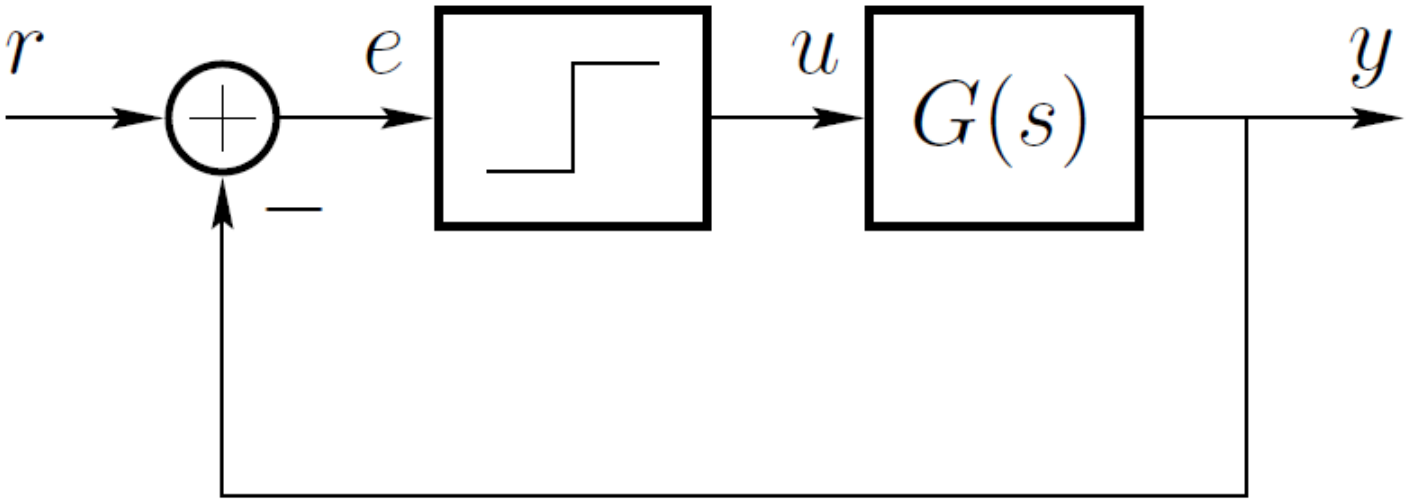
$$u_i = \begin{cases} u_i^+(\mathbf{x}, t) & \text{se} \quad s_i(\mathbf{x}) > 0 \\ u_i^-(\mathbf{x}, t) & \text{se} \quad s_i(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = [s_1(\mathbf{x}) \quad s_2(\mathbf{x}) \;\ldots\; s_m(\mathbf{x})]^T$$

è un VSS la cui struttura varia in modo discontinuo in corrispondenza di m superfici $(s_i(\mathbf{x}) = 0)$ nello spazio degli stati.

Semplice VSS (Controllo on/off)

Comune nei controlli di temperatura, di livello, ecc.

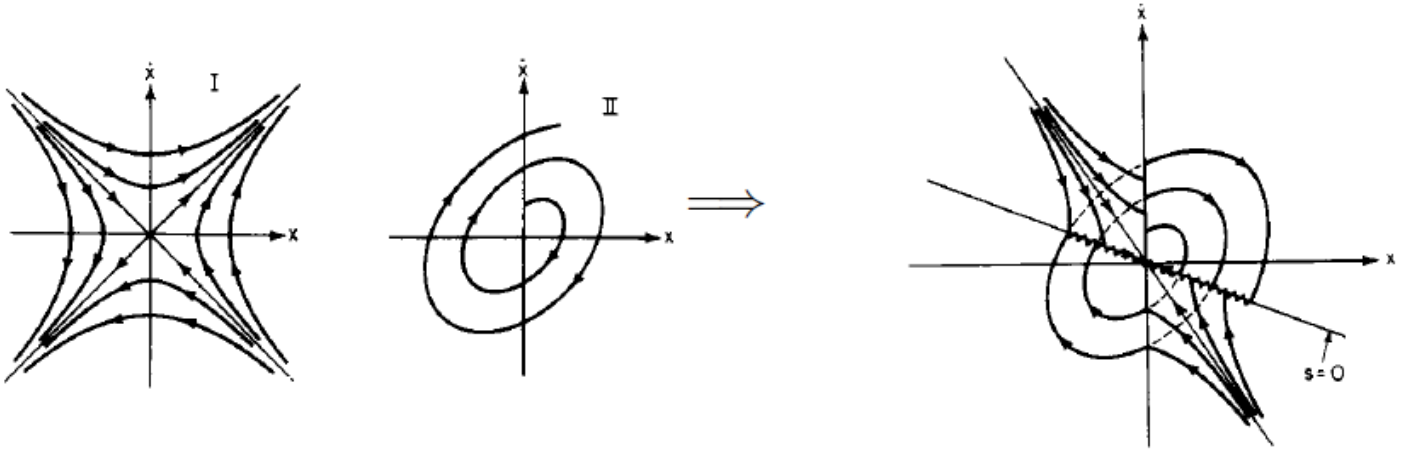


Sistema VSS, esempio nel piano delle fasi

Altro esempio di VSS interessante (rappr. grafica nel piano delle fasi):

$$\begin{aligned} \ddot{x} + a\dot{x} + bx &= u \\ u &= -K|x|sign(s) \\ s &= cx + \dot{x} \end{aligned}$$

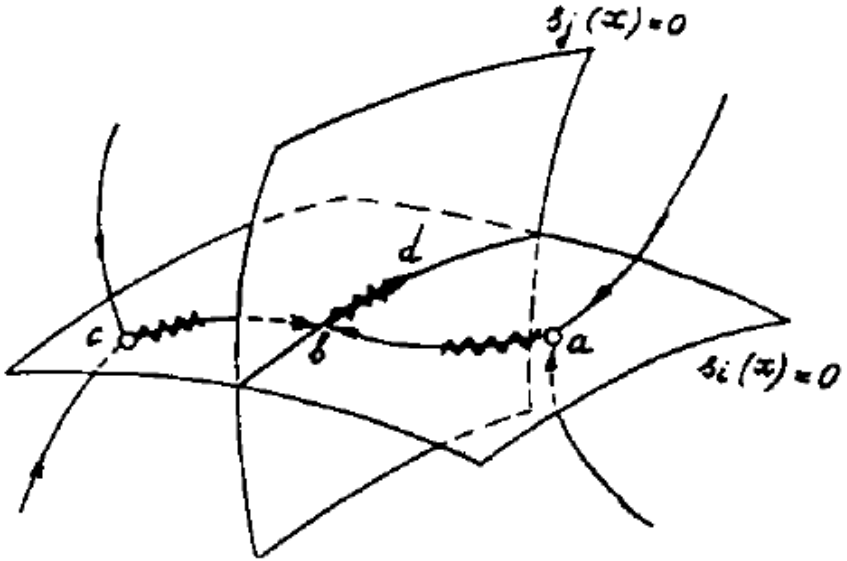
Le traiettorie nel piano delle fasi si ottengono componendo quelle di due sistemi lineari (con $u = Kx$ e con $u = -Kx$), commutando fra uno e l'altro in corrispondenza della retta $s = 0$ ($sign(s) = \pm 1$ se $s \lessgtr 0$) e dell'asse x:



Sistema VSS, esempio nel piano delle fasi

Quando le traiettorie raggiungono la retta $s = 0$, la dinamica è unicamente governata dall'equazione $cx + \dot{x} = 0$: lo stato del sistema tende all'origine, **scivolando** sulla **"superficie"** $s = 0$ (*sliding surface*). Se K è sufficientemente grande, la condizione di Sliding Mode è insensibile ai disturbi $\Rightarrow$ $s = 0$ è un **insieme invariante**

In generale:



Controllo Sliding Mode, osservazioni

- Il controllo in Sliding Mode (con VSS) è una estensione del tradizionale controllo **on/off** (relè) o **bang-bang**

- In Sliding Mode, la componente discontinua del controllo ha una uscita di valore finito, in relazione ad un ingresso s (quasi) nullo $\Rightarrow$ **guadagno elevato** (teoricamente ∞)

- In Sliding Mode, le traiettorie sono caratterizzate da una dinamica di *ordine inferiore* a quella del sistema completo $\Rightarrow$ **semplificazione del problema di inseguimento**

Progetto di controllo in Sliding Mode - 1

Si consideri il sistema SISO in forma canonica di controllabilità (*companion*):

$$x^{(n)} = f(\mathbf{x}, t) + b(\mathbf{x}, t)u + d(t)$$

con $f(\mathbf{x}, t)$ e $b(\mathbf{x}, t)$ non note con precisione e $d(t)$ un disturbo limitato.

NOTA: la dinamica è tipica di applicazioni industriali di **motion control**, con x posizione di un cinematismo, u coppia di un motore e $\mathbf{x} = [x\ \dot{x}\ \ldots x^{(n-1)}]^T$ vettore di stato.

Si desidera risolvere il problema di inseguimento della traiettoria $\mathbf{x}_d(t) = [x_d\ \dot{x}_d\ \ldots x_d^{(n-1)}]^T$ in modo **robusto** rispetto al disturbo d ed all'incertezza sul modello di f e b.

Ponendo $e = x - x_d$ (errore di posizione) ed $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = [e\ \dot{e}\ \ldots e^{(n-1)}]^T$ vettore "errore di inseguimento", il problema di tracking si può ricondurre a quello di stabilizzazione di una superficie di sliding

Progetto di controllo in Sliding Mode - 2

Si definisce la superficie tempo-variante $S(t) \in \mathbf{R}^n$ attraverso la seguente equazione scalare:

$$s(\mathbf{e}, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} e = 0$$

con $\lambda > 0$. Ad esempio, se $n = 2$ (caso tipico):

$$s = \dot{e} + \lambda e$$

mentre se $n = 3$:

$$s = \ddot{e} + 2\lambda\dot{e} + \lambda^2 e$$

Il problema n-dimensionale di inseguimento di $\mathbf{x}_d(t)$ diventa quindi il problema monodimensionale di **rendere invariante** $S(t)$, definita da $s(\mathbf{e}, t) = 0$

Superficie di sliding, proprietà e osservazioni

- La funzione scalare $s(\mathbf{e}, t)$ esprime una misura dell'errore di inseguimento, per cui mantenendo limitata questa si mantiene limitato l'errore sulla "uscita" (x) e su tutte le sue derivate:

$$|s| \leq \phi \quad \Rightarrow \quad |e^{(i)}| \leq 2^i \frac{\phi}{\lambda^{n-1-i}}$$

- La distanza di uno stato $\mathbf{x}$ dalla superficie S è misurata da s^2

- L'obiettivo del controllo è rendere S invariante ed attrattiva, cioè t.c. che s^2 sia descrescente lungo tutte le traiettorie del sistema

- Una volta su S, le traiettorie del sistema sono definite dalla stessa equazione $s = 0$, per cui l'errore di inseguimento tende esponenzialmente a $\mathbf{0}$ con costante di tempo $(n-1)/\lambda$

Superficie di sliding, proprietà e osservazioni

Si desidera progettare la legge di controllo in modo che sia verificata la seguente:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 \leq -\eta|s|$$

In questo modo, con condizioni iniziali $\mathbf{x}(t_0) \neq \mathbf{x}_d(t_0)$, la superficie S è raggiunta in un tempo finito inferiore a $|s(t_0)|/\eta$

Per garantire la robustezza nei confronti di disturbi e incertezze, l'azione di controllo deve essere ad *alto guadagno*, cioè discontinua rispetto a S (proporzionale a $sign(s)$)

Il coefficiente moltiplicativo del termine discontinuo deve essere t.c. la disuguaglianza precedente sia verificata con disturbi e incertezze **limitate superiormente** (entro limiti fissati per ipotesi)

Ipotesi di robustezza

Si consideri ad esempio, la dinamica del secondo ordine ($n = 2$):

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + u$$

con f non nota con precisione, ma stimata da una funzione $\widehat{f}$. L'errore di stima è per ipotesi limitato da una funzione nota $F(x, \dot{x}, t)$:

$$|\widehat{f} - f| \leq F$$

Data la traiettoria di riferimento $x_d(t)$, si definisce la superficie di sliding:

$$s = \dot{e} + \lambda e = 0$$

che deve essere resa invariante risolvendo rispetto a u l'equazione $\dot{s} = 0$:

$$\dot{s} = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} = f + u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} = 0$$

Ipotesi di robustezza

Poichè f non è nota in modo preciso, la migliore approssimazione disponibile del controllo "ideale" è:

$$\widehat{u} = \ddot{x}_d - \widehat{f} - \lambda \dot{e}$$

Inoltre, per imporre che il sistema sia in Sliding Mode su $s = 0$, occorre aggiungere a $\widehat{u}$ un termine discontinuo:

$$u = \widehat{u} - k\, sign(s)$$

con $k = k(x, \dot{x}, t)$ tale da garantire l'attrattività di $s = 0$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 = \dot{s} \cdot s = [f - \widehat{f} - k\, sign(s)] \cdot s = (f - \widehat{f})s - k|s| \leq -\eta|s|$$

perciò $k \geq F + \eta$

Ipotesi di robustezza, osservazioni

Si noti che per la dinamica dell'errore, la funzione:

$$V = \frac{1}{2} s^2$$

rappresenta anche una funzione di Lyapunov grazie quale è possibile dimostrare la stabilità di $s = 0$ e, soprattutto, la robustezza di tale stabilità. Infatti, la derivata di V rispetto al tempo:

$$\dot{V} = \dot{s} \cdot s$$

deve essere definita negativa $\forall s \neq 0$. Questo significa che quando $s > 0$ deve essere $\dot{s} < 0$ e viceversa. Pertanto, poichè la $\dot{s}$ dipende in modo diretto dalla legge di controllo u, è necessario che questa sia discontinua rispetto a $s = 0$, cioè proporzionale a $sign(s)$. Per la robustezza, il coefficiente di proporzionalità va progettato, come si è visto, in relazione all'ipotesi peggiore sull'errore di modellazione della dinamica del sistema.

Estensioni delle condizioni di robustezza

Se la dinamica del sistema è affetta da un disturbo $d(t)$, limitato per ipotesi da:

$$|d(t)| \leq D$$

con D costante, per avere Sliding Mode robusto rispetto a d è sufficiente scegliere:

$$k \geq F + D + \eta$$

con F determinato come visto in precedenza.

Estensioni delle condizioni di robustezza

Se il controllo entra nella dinamica moltiplicato per una funzione incerta $b(\mathbf{x}, t)$ è necessario ipotizzarne i limiti:

$$0 < b_{min} \leq b \leq b_{max}$$

La migliore stima di b è la *media geometrica* $\widehat{b} = \sqrt{b_{min}\, b_{max}}$, per cui la legge di controllo diventa:

$$u = \widehat{b}^{-1}[\widehat{u} - k\, sign(s)]$$

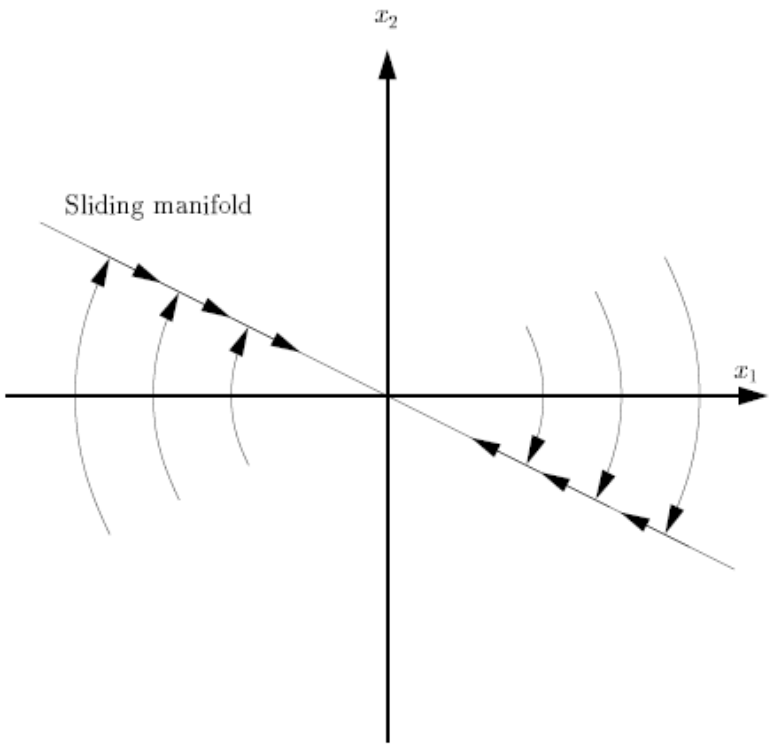
con:

$$k \geq \beta(F + \eta) + (\beta - 1)|\widehat{u}|$$

e $\beta = \sqrt{\frac{b_{max}}{b_{min}}}$ chiamato *margine di guadagno* $(\beta^{-1} \leq \widehat{b}/b \leq \beta)$

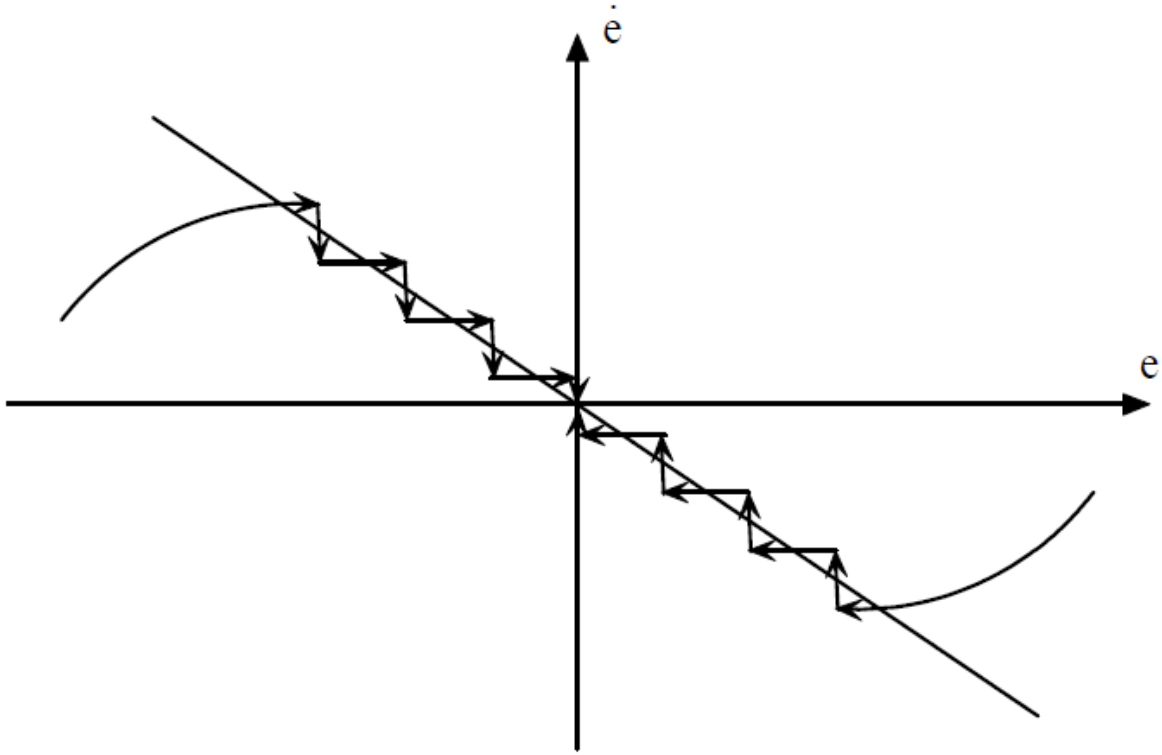
Il problema di chattering

Con il controllo in Sliding Mode, le traiettorie del sistema sono sempre caratterizzate da un tratto di *raggiungimento* della superficie S e da un tratto di *scivolamento* verso $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ ($x_1 = e$ e $x_2 = \dot{e}$ in figura):



Il problema di chattering

La condizione di scivolamento è mantenuta a patto di poter commutare istantantaneamente il controllo attraversando S. Se, come accade forzatamente nella pratica, la commutazione non è istantanea, insorge un fenomeno di **chattering**:



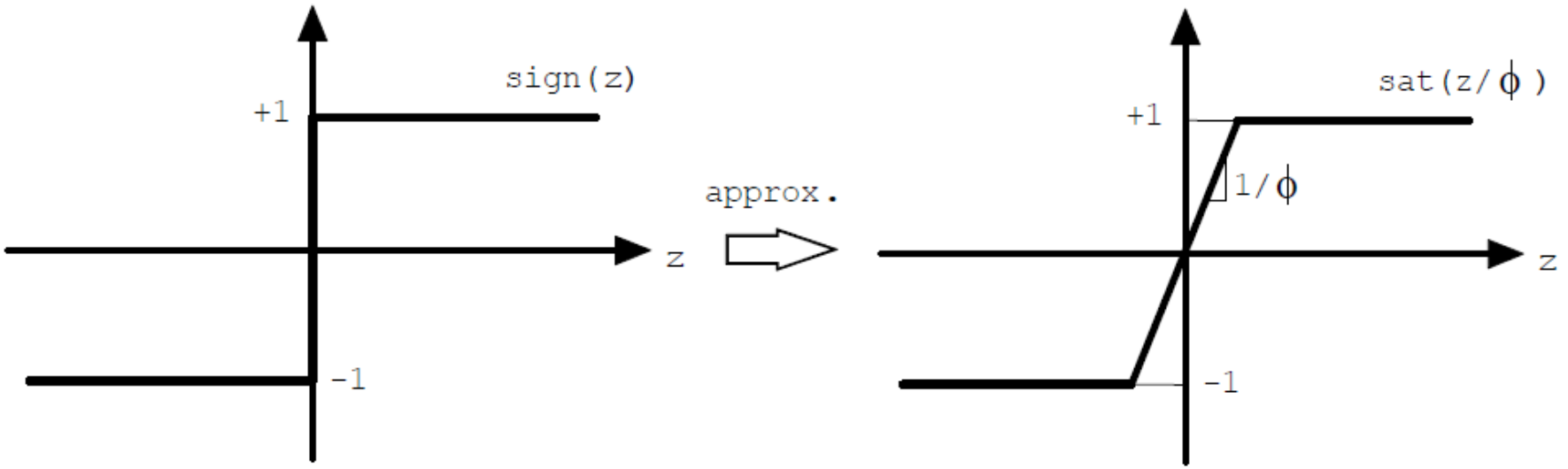
Il problema di chattering, cause e soluzioni

- **Cause**:
  - Ritardo implicito nella realizzazione digitale (risolvibile con progetto direttamente nel dominio tempo discreto)
  - Dinamiche "parassite" non trascurabili nell'attuatore o nei trasduttori

- Chiaramente, il chattering è da evitare nelle realizzazioni pratiche (es. eccessiva sollecitazione strutture meccaniche) $\Rightarrow$ **Soluzioni**:

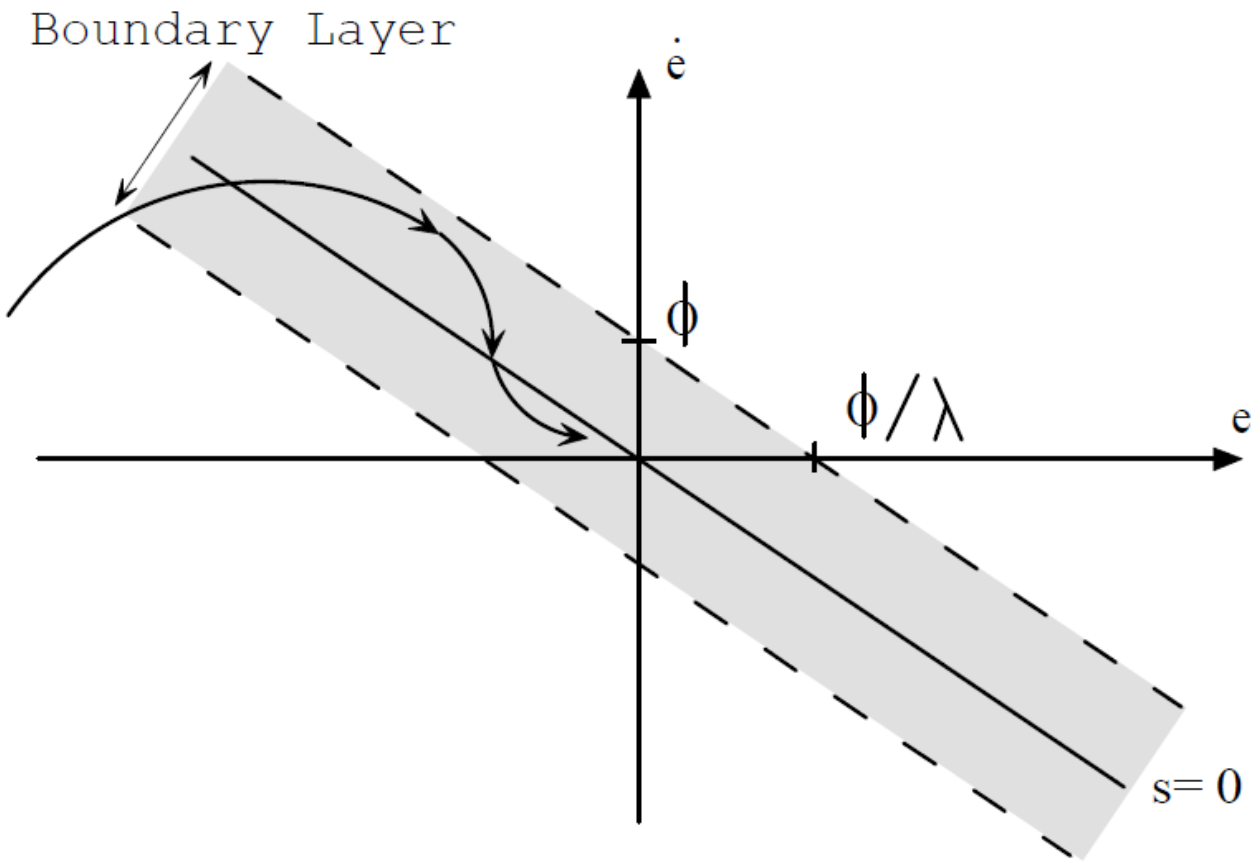
  1. **introduzione di un Boundary Layer**: approssimazione del guadagno infinito in prossimità di S con guadagno finito ($sat(s/\phi)$ al posto di $sign(s)$)

Buondary layer, smoothing del controllo



In questo modo, la condizione $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 \leq -\eta|s|$ garantisce "solo" $|s| \leq \phi$

Buondary layer, smoothing del controllo



Buondary layer, osservazioni

- Considerando $s = \dot{e} + \lambda e$, l'introduzione del Boundary Layer equivale a trasformare la componente switching del controllo in un termine di feedback lineare PD ad elevato guadagno ($K_d = 1/\phi$ e $K_p = \lambda/\phi$) con saturazione.

- Il feedback può essere di tipo PID se si considera come variabile di interesse $\int_0^t e(\tau)\, d\tau$ anzichè e (**controllo integrale**). In tal caso (ponendo $n = 3$ nella determinazione dell'espressione di S):

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^2 \left(\int_0^t e(\tau)\, d\tau\right) = \dot{e} + 2\lambda e + \lambda^2 \int_0^t e(\tau)\, d\tau$$

- **Parametri di progetto**: η = *"margine di robustezza"*, λ = *"banda passante"* della dinamica su S, ϕ = *"compromesso"* tra sliding ideale ed eliminazione del chattering

Esempio: stabilizzazione robusta del pendolo

Si consideri il modello del pendolo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{R}\sin x_1 - \frac{B}{MR^2}x_2 + \frac{u}{MR^2} \end{aligned}$$

con $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ e $u = \tau$ coppia attuata alla base. Il modello è in forma canonica di controllabilità $\ddot{x}_1 = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})\, u$, ponendo:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= -\frac{g}{R}\sin x_1 - \frac{B}{MR^2}x_2 \\ b(\mathbf{x}) &= \frac{1}{MR^2} \end{aligned}$$

Se supponiamo che i parametri siano noti con scarsa precisione:

$$R_{min} \leq R \leq R_{max} \quad M_{min} \leq M \leq M_{max} \quad B_{min} \leq B \leq B_{max}$$

Esempio: stabilizzazione robusta del pendolo

e che siano ipotizzati i valori nominali $\widehat{R}$, $\widehat{M}$ e $\widehat{B}$, si avrà:

$$\widehat{f} = -\frac{g}{\widehat{R}} \sin x_1 - \frac{\widehat{B}}{\widehat{M}\widehat{R}^2} x_2$$

e

$$\widehat{b} = \sqrt{\frac{1}{M_{max} R_{max}^2} \frac{1}{M_{min} R_{min}^2}}$$

Supponendo per semplicità che almeno la lunghezza del pendolo sia misurabile precisamente, si può ottenere il limite sull'errore di stima di f come:

$$|\widehat{f} - f| \leq \left(\frac{B_{max}}{M_{min} R^2} - \frac{\widehat{B}}{\widehat{M} R^2} \right) |x_2| = k_1 |x_2| = F$$

Esempio: stabilizzazione robusta del pendolo

Inoltre, anche per la componente del controllo $\widehat{u}$ si può inoltre ipotizzare un funzione limite, considerando che:

$$\widehat{u} = \ddot{x}_d - \widehat{f} - \lambda \dot{e}$$

in questo caso diventa:

$$\widehat{u} = \frac{g}{\widehat{R}} \sin x_1 + \frac{\widehat{B}}{\widehat{M}\widehat{R}^2} x_2 - \lambda x_2$$

per cui:

$$|\widehat{u}| \leq \frac{g}{\widehat{R}} + \left(\frac{\widehat{B}}{\widehat{M}\widehat{R}^2} + \lambda \right) |x_2| = k_2 + k_3 |x_2|$$

Esempio: stabilizzazione robusta del pendolo

Concludendo, si può progettare la legge di controllo:

$$u = \widehat{b}^{-1}[\widehat{u} - k\, sign(s)]$$

con $s = x_1 + \lambda x_2$ e:

$$k \geq \beta(F + \eta) + (\beta - 1)|\widehat{u}|$$

$$\beta = \sqrt{\frac{M_{max} R_{max}^2}{M_{min} R_{min}^2}}$$

che in questo caso diventa:

$$k \geq \beta(k_1|x_2| + \eta) + (\beta - 1)(k_2 + k_3|x_2|) = k_1' + k_2'|x_2|$$