Apprendimento basato sulle istanze

Apprendimento basato sulle istanze

- Apprendimento: semplice memorizzazione di tutti gli esempi $<x_i, f(x_i)>$
- Classificazione di una nuova istanza x_j: reperimento degli esempi piu' simili e classificazione sulla base di questi

Nearest neighbour

- Nearest neighbour (o 1-nearest neighbour): data una nuova istanza di query x_q, si cerca prima l'esempio piu' vicino x_n e poi si stima $f(x_q)$

$$f'(x_q)=f(x_n)$$

- dove f' è la stima di f

K-nearest neighbour

- k-nearest neighbour: si considerano i k esempi piu' vicini a x_q
  - Se la funzione f e' discreta, allora si restituisce il valore v di f piu' frequente tra i k esempi
  - Ogni esempio x_i assegna un voto al valore v per il quale $f(x_i)=v$

$$f'(x_q) = \arg\max_{v \in V} \sum_{i=1}^{k} \delta(v, f(x_i))$$

  - dove $f: \Re^n \rightarrow V$ e $\delta(a,b)=1$ se a=b altrimenti $\delta(a,b)=0$

K-nearest neighbour

– Se la funzione f e' continua, si restituisce la media tra i valori di f per i k esempi

$$f'(x_q) = \frac{\sum_{i=1}^{k} f(x_i)}{k}$$

K-nearest neighbour

- Vantaggi: non c'e' bisogno di inferire una descrizione globale della funzione f, si generano solo approssimazioni locali, utile se f e' molto complessa
- Svantaggi:
  – alto tempo per la classificazione (devono venire considerati tutti gli esempi)
  – Tutti gli attributi sono considerati per reperire i casi dalla base di conoscenza: se il concetto target dipende solo da pochi attributi, gli esempi effettivamente piu' simili possono essere a grande distanza

K-nearest neighbour

- Assunzione: le istanze sono punti di R^n
- Come distanza si può utilizzare la distanza euclidea:
- $x=<a_1(x),a_2(x),\ldots,a_n(x)>$

$$d(x_i,x_j)=\sqrt{\sum_{r=1}^{n}(a_r(x_i)-a_r(x_j))^2}$$

Altre distanze

- Distanza di Minkowski di ordine p

$$d(x_i,x_j)=\left(\sum_{r=1}^{n}\left|a_r(x_i)-a_r(x_j)\right|^p\right)^{1/p}$$

- p=2 => distanza euclidea
- p=1 => distanza Manhattan

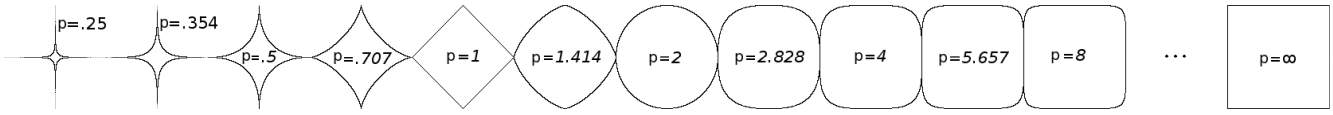
$$d(x_i,x_j)=\sum_{r=1}^{n}\left|a_r(x_i)-a_r(x_j)\right|$$

- p=∞ => distanza di Chebyshev

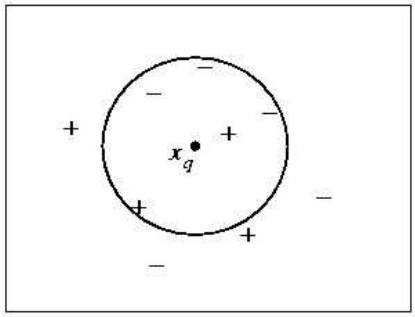
$$d(x_i,x_j)=\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{r=1}^{n}|a_r(x_i)-a_r(x_j)|^p\right)^{1/p}=$$

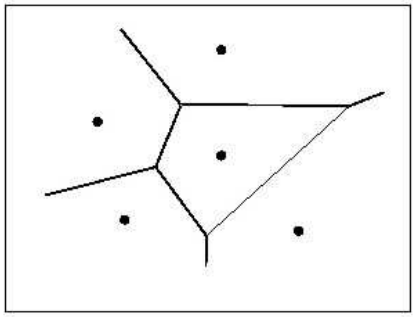
$$=\max_{r=1}^{n}\left|a_r(x_i)-a_r(x_j)\right|$$

Luoghi dei punti a distanza di Minkowski 1



Esempi in R_2





- 1-NN classifica l'esempio come positivo
- 5-NN classifica l'esempio come negativo

- Diagramma di Voronoi (1-NN): il poligono convesso che circonda ciascun punto indica la regione più vicina al punto

(http://www.cs.cornell.edu/Info/People/chew/Delaunay.html)

K-nearest neighbour

- Gli attributi possono avere diverse scale e quindi la loro importanza nella misura della distanza può essere diversa
- Per risolvere questo problema, prima di calcolare la distanza, si cambia la scala di ciascun attributo in modo che i valori dell'attributo varino tra 0 e 1
  - Siano $a_{i\min}$ $a_{i\max}$ rispettivamente i valori minimo e massimo dell'attributo a_i nel training set
  - Il valore dell'attributo $a'_i(x)$ scalato tra 0 e 1 è dato da

$$a'_i(x) = \frac{a_i(x) - a_{i\min}}{a_{i\max} - a_{i\min}}$$

K-nearest neighbour

- Se i punti non appartengono a R^n ma gli attributi (alcuni o tutti) sono nominali allora è necessario definire una distanza tra i valori di tali attributi
  - Ad esempio, qual'è la distanza tra basso, medio e alto?
- Nel caso più semplice si assegna distanza 0 se i valori sono identici, altrimenti distanza 1
  - La distanza tra basso e basso è 0, tra basso e alto è 1
- In altri casi si possono utilizzare distanza definite ad hoc, basate su informazione extra disponibile sull'attributo (scale ordinali)
  - Ad esempio si può assegnare una distanza inferiore alla coppia basso e medio rispetto alla coppia basso e alto

Esempio

No	Outlook	Temp	Humid	Windy	Class
D1	sunny	mild	normal	T	P
D2	sunny	hot	high	T	N
D3	sunny	hot	high	F	N
D4	sunny	mild	high	F	N
D5	sunny	cool	normal	F	P
D6	overcast	mild	high	T	P
D7	overcast	hot	high	F	P
D8	overcast	cool	normal	T	P
D9	overcast	hot	normal	F	P
D10	rain	mild	high	T	N
D11	rain	cool	normal	T	N
D12	rain	mild	normal	F	P
D13	rain	cool	normal	F	P
D14	rain	mild	high	F	P

Esempio

- Caso da classificare:
- <rain,cool,high,T>
- Distanza dagli esempi (senza usare informazione extra sugli attributi):

D1: √3
D2: √2
D3: √3
D4: √3
D5: √3
D6: √2
D7: √3
D8: √2
D9: 2
D10: 1
D11: 1
D12: √3
D13: √2
D14: √2

Esempio

- 1-NN: in questo caso ci sono due esempi che sono a minore distanza (1) dal caso: D10 e D11, entrambi appartengono alla classe N
- Quindi il caso è classificato come N
- Se gli esempi a minore distanza avessero avuto classe diversa, si sarebbe scelta la classe di maggioranza

Estensioni di k-NN

- NN pesato sulla base della distanza: il contributo di ciascuno dei k vicini e' pesato sulla base della distanza dal punto da classificare x_q
- Funzione discreta: si pesa ciascun voto sulla base dell'inverso del quadrato della distanza

$$f'(x_q) = \arg\max_{v \in V} \sum_{i=1}^{k} w_i \delta(v, f(x_i))$$

$$w_i = \frac{1}{d(x_q, x_i)^2}$$

Estensioni di k-NN

- Funzione continua: si pesa ciascun contributo alla media con l'inverso del quadrato della distanza

$$f'(x_q) = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{k} w_i}$$

$$w_i = \frac{1}{d(x_q, x_i)^2}$$

Osservazione

- Aggiungendo un coefficiente basato sulla distanza, si potrebbero considerare tutti gli esempi per la classificazione invece dei k piu' vicini
- In questo caso si parla di un metodo globale invece che locale come il k-NN

Osservazioni

- k-NN e' robusto agli errori perche' si prende la media di k esempi
- Bias induttivo: assunzione che la classificazione di una istanza x_q sia simile a quella dei suoi k vicini

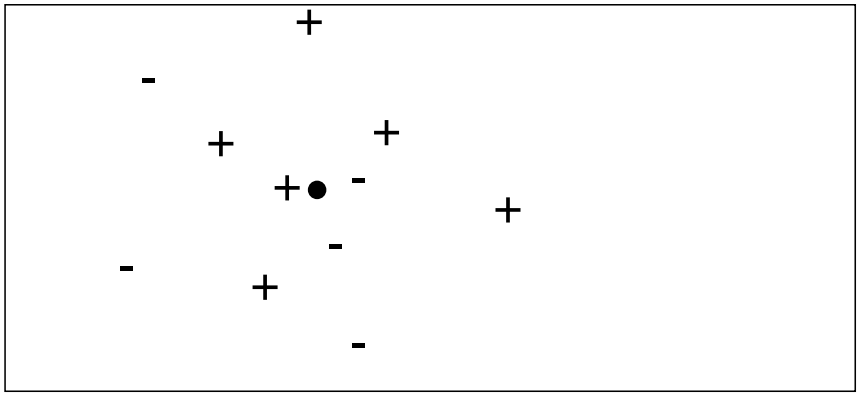
Curse of dimensionality

- k-NN considera tutti gli attributi degli esempi, in contrasto con gli algoritmi per l'apprendimento di regole e alberi di decisione che selezionano solo gli attributi piu' rilevanti
  - Esempio: 20 attributi di cui solo 2 rilevanti per la classificazione delle istanze
- Soluzioni:
  - Allunga ciascun asse di un peso w_j,
  - $w_1,\ldots w_n$ sono scelti mediante cross-validation: un sottoinsieme degli esempi e' scelto come insieme di training, i pesi sono scelti in modo da minimizzare l'errore nel classificare i rimanenti esempi
  - Questo processo va ripetuto piu' volte in modo da affinare i pesi w_j

Curse of dimensionality

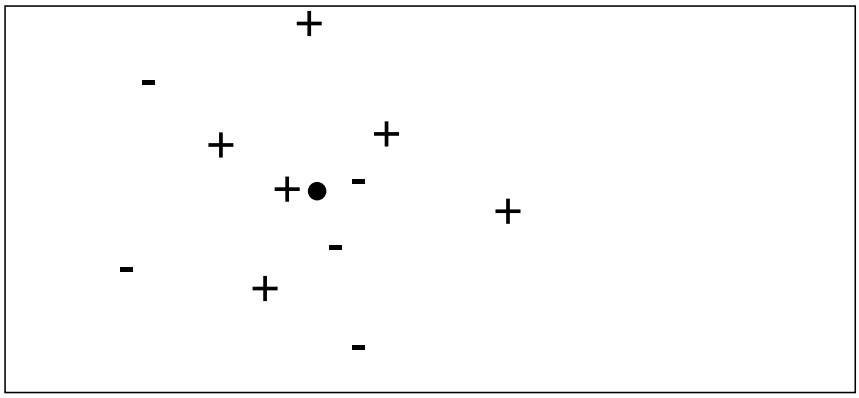
- Un approccio alternativo consiste nel porre alcuni pesi a 0, sempre utilizzando la cross validation

Esercizio



1. Si indichi la classificazione del punto • con 1-NN, 3-NN e 5-NN

Risposta



1. 1-NN=+, 3-NN=-, 5-NN=+