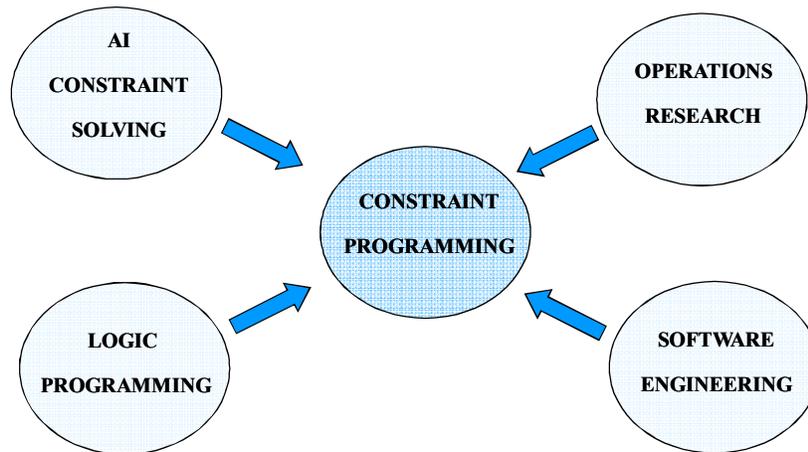


PROGRAMMAZIONE LOGICA A VINCOLI



1

PROGRAMMAZIONE LOGICA A VINCOLI

- Problemi di soddisfacimento di vincoli:
 - concetti generali
- Programmazione Logica
 - vantaggi
 - limiti
- Programmazione Logica a Vincoli
 - dominio e interpretazione
 - controllo
 - modello computazionale

2

PROBLEMI DI SODDISFACIMENTO DI VINCOLI

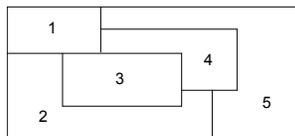
- Un problema di soddisfacimento di vincoli è definito da:
 - un insieme di variabili ($V_1, V_2 \dots V_n$)
 - un dominio discreto per ogni variabile ($D_1, D_2 \dots D_n$)
 - un insieme di vincoli su queste variabili:
 - vincolo: una relazione tra variabili che definisce un sottoinsieme del prodotto cartesiano dei domini $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$

Soluzione di un Problema di Soddisfacimento di vincoli: un assegnamento di valori alle variabili consistente con i vincoli

E. Tsang: "Foundations of Constraint Satisfaction"
Academic Press, 1992.

3

ESEMPIO: Map Coloring



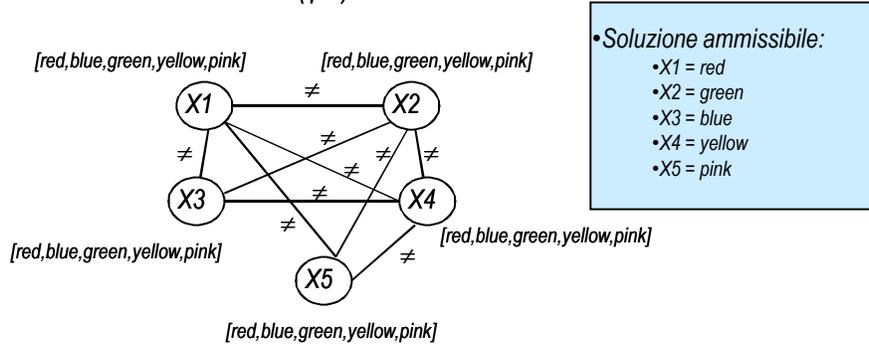
- Trovare un assegnamento di colori alle variabili consistente con i vincoli
 - variabili X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 : zone
 - domini D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 : [red, blue, green, yellow, pink]
 - vincoli : $\text{near}(X_i, X_j) \Rightarrow X_i \neq X_j$

4

CONSTRAINT GRAPHS

Un problema di soddisfacimento di vincoli si può rappresentare con un grafo detto constraint graph:

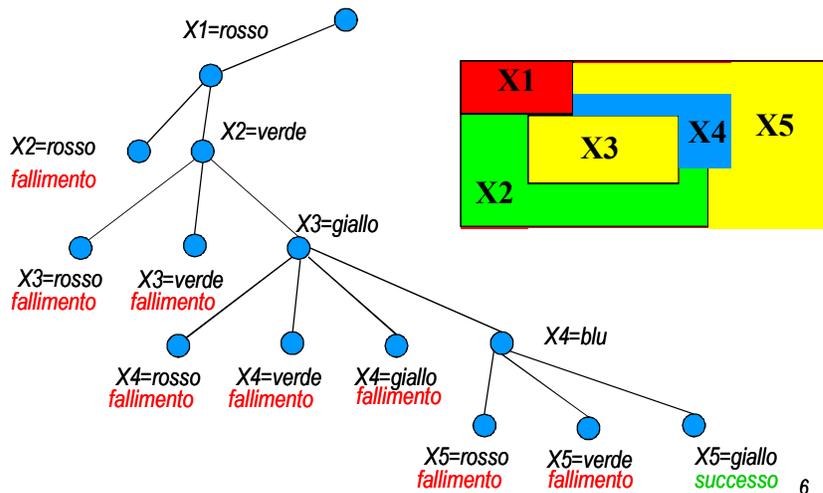
- variabili \longleftrightarrow nodi
- vincoli \longleftrightarrow (iper)-archi



5

ESEMPIO: Map Coloring

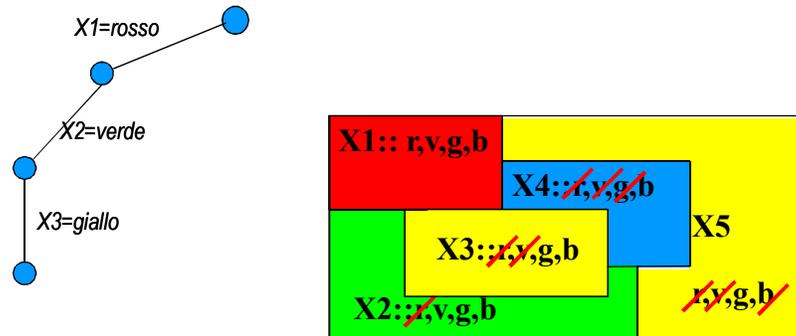
- Algoritmo semplice (ma a volte inefficiente)



6

PROPAGAZIONE DI VINCOLI

- Eliminazione a priori dei valori inconsistenti



7

PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

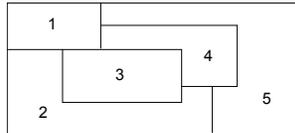
Un problema di ottimizzazione è definito da:

- un insieme di variabili (X_1, X_2, \dots, X_n)
- un dominio discreto per ogni variabile (D_1, D_2, \dots, D_n)
- un insieme di vincoli su queste variabili:
 - vincolo: una relazione tra variabili che definisce un sottoinsieme del prodotto cartesiano dei domini $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$
- una funzione obiettivo $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Soluzione di un problema di ottimizzazione: un assegnamento di valori alle variabili compatibile con i vincoli del problema che ottimizza la funzione obiettivo

8

EXAMPLE: Map Coloring



- Trovare un assegnamento di colori alle zone tale che due zone adiacenti sono colorate con colori diversi, e **MINIMIZZANDO** il numero di colori usati

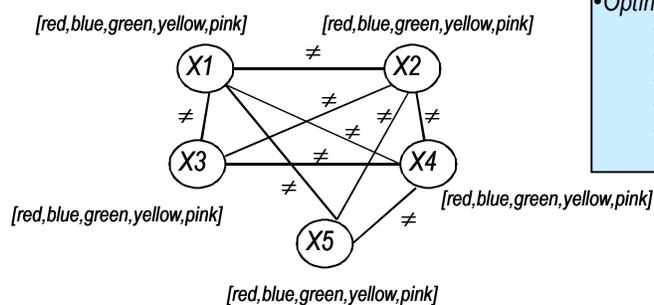
- variabili $V1, V2, V3, V4, V5$: zone
- domini $D1, D2, D3, D4, D5$: $[red, blue, green, yellow, pink]$
- vincoli: $near(X_i, V_j) \Rightarrow X_i \neq X_j$

9

CONSTRAINT GRAPHS

Un problema di ottimizzazione si può rappresentare con un grafo detto constraint graph:

- variabili \longleftrightarrow nodi
- vincoli \longleftrightarrow (iper)-archi



• Optimal Solution:

- $V1 = red$
- $V2 = green$
- $V3 = yellow$
- $V4 = blue$
- $V5 = yellow$

10

“

Prolog è un buon linguaggio per risolvere CSP?

”

11

Prolog per CSP

Vantaggi

- *Linguaggio dichiarativo*
- *Variabili logiche*
- *Backtracking*
- *Reversibilità: molti predicati per generare combinazioni*

Svantaggi

- *Integrazione con altro software?*

12

Es reversibilità

```
member (X, [X|_]) .
```

```
member (X, [_|T]) :- member (X, T) .
```

- verifica se un elemento appartiene ad una lista

```
member (1, [4, 1, 2]) .
```

```
yes
```

- Se metto l'elemento variabile, in backtracking gli vengono assegnati i vari elementi della lista

```
member (X, [4, 1, 2]) .
```

```
yes, X=4, more?
```

```
yes, X=1, more?
```

```
yes, X=2 .
```

- Utile per generare assegnamenti!

13

Esempio di CSP

- Variabili: X, Y - Domini: da 1 a 4 - Vincoli: X>Y

```
csp (X, Y) :-
```

```
  member (X, [1, 2, 3, 4]) ,
```

```
  member (Y, [1, 2, 3, 4]) ,
```

```
  X>Y .
```

- Elenca, in backtracking, tutte le soluzioni del CSP
- Molto dichiarativo: dichiaro le variabili, i domini (member) e i vincoli
- Quale algoritmo viene usato?
- Che cosa devo fare se voglio cambiare euristica?
 - selezione del valore
 - selezione della variabile

14

Esempio Reversibilità 2

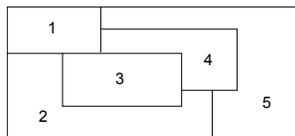
```
permutation([], []).  
permutation([Head|Tail], PermList) :-  
    permutation(Tail, PermTail),  
    delete(Head, PermList, PermTail).  
delete(A, [A|B], B).  
delete(A, [B, C|D], [B|E]) :-  
    delete(A, [C|D], E).
```

Può generare le permutazioni di una lista

```
?- permutation([a,b,c], L).  
Yes, L = [a, b, c]      more? ;  
Yes, L = [b, a, c]      more? ;  
Yes, L = [b, c, a]      more?
```

15

ESEMPIO: Map Coloring



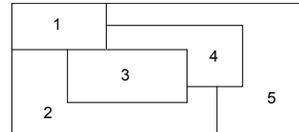
• Trovare un assegnamento di colori alle variabili consistente con i vincoli

- variabili $V1, V2, V3, V4, V5$: zone
- domini $D1, D2, D3, D4, D5$: [red, blue, green, yellow]
- vincoli : $near(V_i, V_j) \Rightarrow V_i \neq V_j$

16

Esempio

```
coloring([X1,X2,X3,X4,X5],Dom):-  
    member(X1,Dom),  
    member(X2,Dom),  
    member(X3,Dom),  
    member(X4,Dom),  
    member(X5,Dom),  
    X2 \= X1, X3 \= X1,  
    X4 \= X1, X5 \= X1,  
    X3 \= X2, X4 \= X2,  
    X5 \= X2, X4 \= X3,  
    X4 \= X5.
```

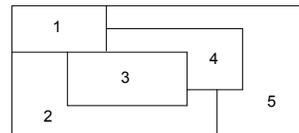


Molto dichiarativo!
Che algoritmo viene usato?

17

Standard backtracking

```
coloring([X1,X2,X3,X4,X5],Dom):-  
    member(X1,Dom),  
    member(X2,Dom),  
    X2 \= X1,  
    member(X3,Dom),  
    X3 \= X1, X3 \= X2,  
    member(X4,Dom),  
    X4 \= X1, X4 \= X2, X4 \= X3,  
    member(X5,Dom),  
    X5 \= X1,  
    X5 \= X2, X4 \= X5.
```



•L'ordine è importante
•un po' meno dichiarativo
•Risolve solo questa istanza

18

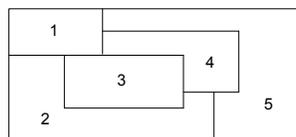
Standard backtracking: generale

```

% colori(+LStati, -Assegnam, +NodiGiaAssegnati,
+ValoriGiaAssegnati, Dom)
% ?- colori([1,2,3,4,5], X, [], [], [r,b,g,y]).
colori([], [], _, _, _).
colori([N1|Ntail], [X|Tail], NPlaced, Placed, Values):-
    member(X,Values),
    compatibile(X,N1,Placed,NPlaced),
    colori(Ntail, Tail, [N1|NPlaced], [X|Placed], Values).

compatibile(_,_, [], []).
compatibile(X,N1,[P|Tail],[NP|NTail]):-
    (near(N1,NP); near(NP,N1)),!,
    X\==P,
    compatibile(X,N1,Tail,NTail).
compatibile(X,N1,[P|Tail],[NP|NTail]):-
    compatibile(X,N1,Tail,NTail).

```



```

near(1,2).
near(1,3).
...

```

19

Altro esempio: N-queens

```

queens(S,N):-
    domains(1,N,D),
    permutation(D,S),
    safe(S).

domains(X,X,[X]):-!.
domains(N,Max,[N|T]):-
    N1 is N+1,
    domains(N1,Max,T).

safe([]).
safe([Queen|Others]):-
    safe(Others),
    noattack(Queen,Others,1).

noattack(_,[],_).
noattack(Y,[Y1|Ylist],Xdist):-
    Y-Y1=\=Xdist,
    Y1-Y=\=Xdist,
    Dist1 is Xdist +1,
    noattack(Y,Ylist,Dist1).

```

Che algoritmo è?

20

N-Queens Standard Backtracking

```

stdback(X,N):-
    domains(1,N,D),
    stdback(X,[],D).

stdback([], Placed, []).
stdback([X|Xs], Placed,
    Values):-
    delete(X,Values,NewValues),
    noattack(X,Placed,1),
    stdback(Xs,[X|Placed],NewV
    alues).

domains(X,X,[X]):-!.
domains(N,Max,[N|T]):-
    N1 is N+1,
    domains(N1,Max,T).

noattack(_,[],_).
noattack(Y,[Y1|Ylist],Xdist)
:-
    Y-Y1=\=Xdist,
    Y1-Y=\=Xdist,
    Dist1 is Xdist +1,
    noattack(Y,Ylist,Dist1).

```

21

N-Queens Forward Checking

```

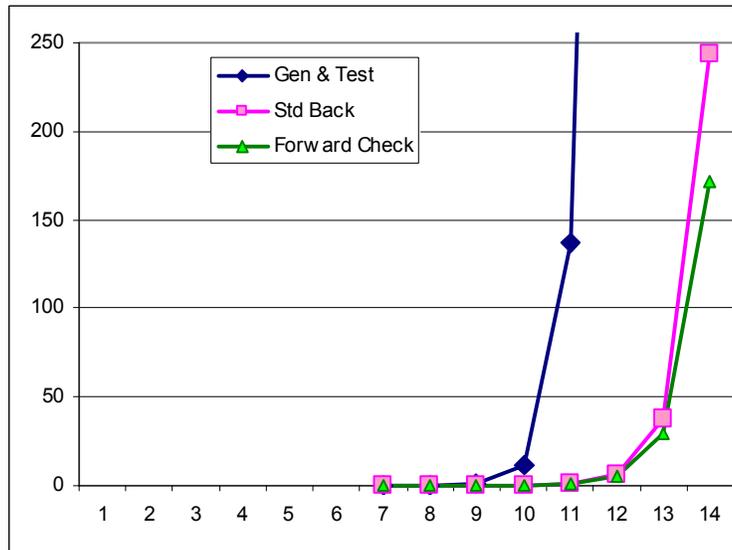
fwdcheck(Var, N):-
    domains(1,N,D),
    length(Var,N),
    assegna_dom(VarDom,D,Var),
    queens_aux(VarDom).
queens_aux([]).
queens_aux([[X1,D]|Rest]):-
    member(X1,D), % istanzia X1
    forward(X1,Rest,Newrest),
    %propagazione
    queens_aux(Newrest).
forward(X,Rest,Newrest):-
    forward(X,Rest,1,Newrest).
forward(X,[],Nb,[]).
forward(X,[[Var,Dom]|Rest],Nb,[[Var,[
F|T]]|Newrest]):-
    remove_value(X,Dom,Nb,[F|T]),
    Nb1 is Nb +1,
    forward(X,Rest,Nb1,Newrest).

remove_value(X,[],Nb,[]).
remove_value(X,[Val|Rest],Nb,[Val|New
rest]):-
    compatible(X,Val,Nb), !,
    remove_value(X,Rest,Nb,Newrest).
remove_value(X,[Val|Rest],Nb,Newrest)
:-
    remove_value(X,Rest,Nb,Newrest).
domains(X,X,[X]):-!.
domains(N,Max,[N|T]):-
    N1 is N+1,
    domains(N1,Max,T).
compatible(Value1,Value2,Nb):-
    Value1 =\= Value2 +Nb,
    Value1 =\= Value2 - Nb,
    Value1 =\= Value2.
% Crea una lista
[[Var1,Dom],[Var2,Dom],...]
assegna_dom([],_,[]).
assegna_dom([[V,D]|LVarDom],D,[V|LVar
]):-
    assegna_dom(LVarDom,D,LVar).

```

22

N-Queens: Efficienza



*secondi
necessari
per trovare
tutte le
soluzioni*

23

Limite n. 1

*Prolog spinge a scrivere programmi basati su
Standard Backtracking*

*meno efficienti di algoritmi che applicano il
pruning a priori*

24

Rappresentazione dei numeri

- Risolvere questa equazione:

$$X + \overset{1}{\cancel{2}} = Y + \cancel{1}$$

- Soluzione:

$$X + 1 = Y$$

- Possiamo ottenere questo risultato in Prolog?

25

Aritmetica di Peano

sum (X, 0, X) .

sum (X, s (Y) , s (Z)) :-

sum (X, Y, Z) .

?- sum (X, s (s (0)) , Z) , sum (Y, s (0) , Z) .

yes, Y=s (X) .

26

Possiamo scrivere così?

$$?- X+2 = Y+1.$$

27

E così?

$$?- Z \text{ is } X+2, Z \text{ is } Y+1.$$

28

Ordine dei goal significativo

- $X \text{ is } Y+1, Y=3 \rightarrow \text{errore}$
- $Y=3, X \text{ is } Y+1 \rightarrow X=4$

Lo stesso vale per le relazioni ($>$, $<$, \neq , \geq , ...):

- $X > 3, X = 5 \rightarrow \text{errore}$
- $X = 5, X > 3 \rightarrow \text{yes}$

29

Limite n. 2

Prolog non interpreta i numeri

30

Soluzione parziale: freeze, when

freeze (X, atomo (X))

- Indica a Prolog che l'atomo deve essere selezionato (dalla risoluzione SLD) solo quando **X** non è variabile.

freeze (Y, X is Y+1) , Y=3.

Y/3 |

freeze (3, X is 3+1) .

X/4 |

[]

31

Map Coloring usando when

**diverso (A,B) :-
when ((nonvar (A) , nonvar (B)) , A\=B) .**

coloring ([X1,X2,X3,X4,X5] , Dom) :-

diverso (X2,X1) , diverso (X3,X1) ,

diverso (X4,X1) , diverso (X5,X1) ,

diverso (X3,X2) , diverso (X4,X2) ,

diverso (X5,X2) , diverso (X4,X3) ,

diverso (X4,X5) ,

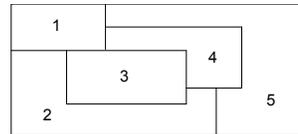
member (X1, Dom) ,

member (X2, Dom) ,

member (X3, Dom) ,

member (X4, Dom) ,

member (X5, Dom) .



**Molto
dichiarativo!
Che algoritmo
viene usato?**

32

Ancora su freeze / when

- E se Y non diventa ground?
`?- freeze(Y, X is Y+1).` *risposta condizionale!*
Delayed goals: X is Y + 1 
- Yes**
- Non semplifica le equazioni, ma è già qualcosa
- A carico del programmatore
- **Cosa ci serve ?**
 - Che il risolutore “addormenti” i goal che non è in grado di valutare per selezionarli non appena sono disponibili nuove informazioni

33

Altro esempio di CSP

- Variabili: X, Y - Domini: da 1 a 4 - Vincoli: X>Y

`csp(X, Y) :-`

```
when( (nonvar(X), nonvar(Y)), X>Y ),  
member(X, [1, 2, 3, 4]),  
member(Y, [1, 2, 3, 4]).
```

- Prima fa gli assegnamenti, poi verifica i vincoli
- Sarebbe più efficiente se, quando invoco X>Y, questo *eliminasse già a priori* gli elementi inconsistenti dai domini: *pruning*

34

Come fare?

- Se vogliamo che Prolog faccia anche le semplificazioni, il pruning, bisogna che sappia il **tipo** della variabile:
 - alcune variabili non sono solo variabili logiche (a cui può essere assegnato un termine), ma numeriche
 - Devo dire qual è il dominio della variabile
 - A questo punto il sistema associa ad ogni variabile il suo dominio e lavora su di esso

35

Programmazione Logica a Vincoli

Constraint Logic Programming (CLP)

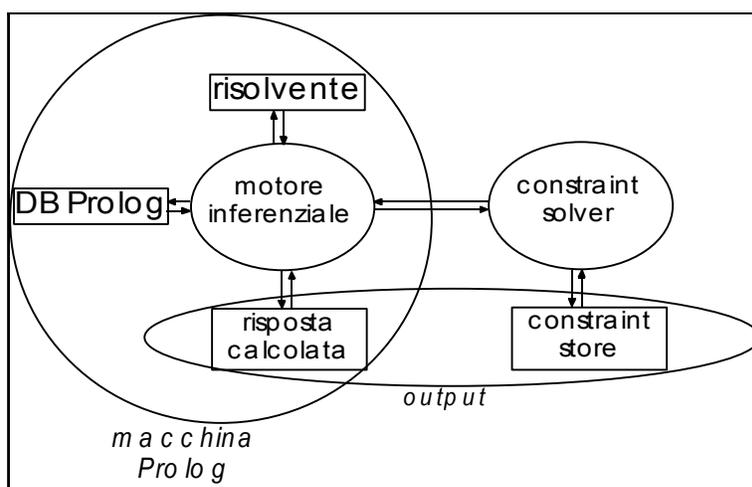
36

Constraint Logic Programming

- Nuovo paradigma di programmazione, estensione della Programmazione Logica [Jaffar e Lassez, 1998]
- è uno schema per produrre nuovi linguaggi
- durante la risoluzione SLD, alcuni atomi speciali, detti *vincoli* (constraints), non vengono risolti, ma vengono accumulati in un'area di memoria esterna (*constraint store*) ed elaborati da un *risolutore esterno* (constraint solver).
- Ci possono essere diversi risolutori, basati su tecnologie diverse. Ciascuno di questi dà luogo ad un linguaggio della classe CLP:
 - CLP(FD): sui domini finiti basato su consistency
 - CLP(R): sui reali basato sul simplesso
 - CLP(Bool): sui booleani basato su BDD
 - ...

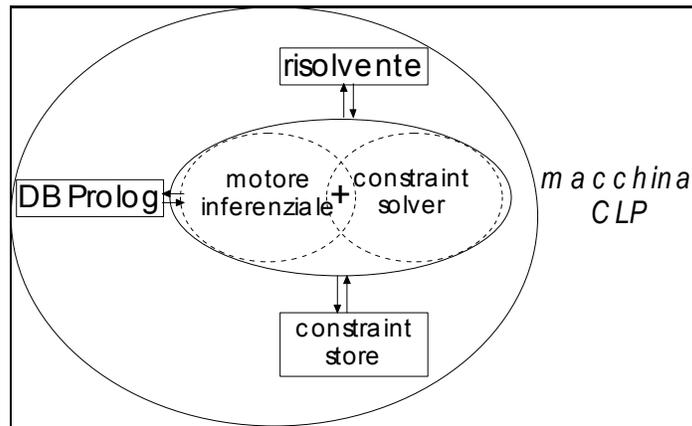
37

ESTENDERE LA MACCHINA LOGICA



38

MACCHINA CLP



39

CLP: sintassi

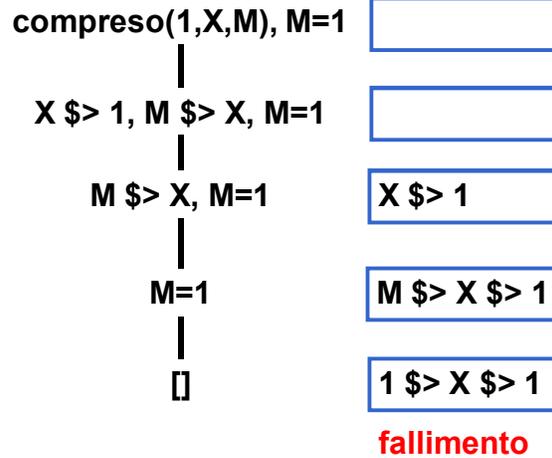
- *In CLP ci sono alcuni predicati, con una sintassi particolare, che non vengono risolti con la risoluzione SLD*
- *Ad esempio, supponiamo che il nostro linguaggio CLP abbia il vincolo $\$>$, che ha il significato di “maggiore”*

**compreso (Inf, X, Sup) :- X $\$>$ Inf,
Sup $\$>$ X.**

40

CLP: semantica operativa

`compreso(Inf,X,Sup) :- X $> Inf, Sup $> X.`



41

Come fa il constraint solver?

- *Da cosa si accorge il constraint solver che c'è un fallimento?*
- *Dipende dal tipo di solver*
 - *CLP(FD): ho un fallimento quando una variabile ha il dominio vuoto*
 - *CLP(R): ho fallimento quando l'algoritmo del sempliceo rileva che non ci sono soluzioni*

42

MACCHINA CLP: PASSI FONDAMENTALI

- **Risoluzione *r***
 - selezione di un atomo dal risolvente
 - unificazione: aggiunta di vincoli al constraint store
- **Constraining *c***
 - selezione di un vincolo dal risolvente
 - aggiunta del vincolo al constraint store
- **Infer (propagazione) *i***
 - trasformazione del constraint store
- **Consistenza *s***
 - verifica della soddisfacibilità del constraint store

“metodi” che il risolvente deve esportare per poter essere usato in una macchina CLP

43

CLP(FD)

- **CLP(FD): Constraint Logic Programming su domini finiti**
 - particolarmente adatta a modellare e risolvere problemi a vincoli
- **Modello del problema**
 - Le **VARIABILI** rappresentano le entità del problema
 - Definite su **DOMINI FINITI** di oggetti arbitrari (normalmente interi)
 - Legate da **VINCOLI** (relazioni tra variabili)
 - matematici
 - simbolici
 - Nei problemi di ottimizzazione si ha una **FUNZIONE OBIETTIVO**
- **Risoluzione**
 - Algoritmi di propagazione (incompleti) incapsulati nei vincoli
 - Strategie di ricerca

44

CLP(FD): Sintassi

- *Esistono diversi linguaggi CLP(FD).*
 - *CHIP*
 - *SICStus*
 - *ECLiPSe*
 - *B-Prolog*
 - *...*
- *La sintassi è simile, ma non identica*
- *Ciascuno ha caratteristiche distintive*

45

CLP(FD): Sintassi

In generale però si hanno

- *Un metodo per definire il dominio delle variabili*
 - *ECLiPSe: x :: [1..10,13..15] .*
 - *SICStus: x in (1..10) \ / (13..15) .*
- *Una sintassi che contraddistingue i vincoli dagli altri predicati (ECLiPSe e SICStus usano il '#'):*
 - *#>, #>=, #=<, #=, #\=, ... sono vincoli*

46

CLP(FD): Semantica Operazionale

- Quando il letterale selezionato dalla risoluzione SLD è un **vincolo**, questo viene inserito nel **constraint store**
- A questo punto, si ha una fase di **inferenza**: in CLP(FD) questa fase è data da una **propagazione**, tipicamente **Arc-Consistency**
- Fase di **Consistenza**: se uno dei domini risulta vuoto, si ha fallimento
- Alla fine viene fornito il **constraint store** come risposta, insieme al **binding**

47

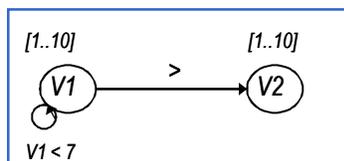
PROPRIETA' DI CONSISTENZA

• NODE CONSISTENCY

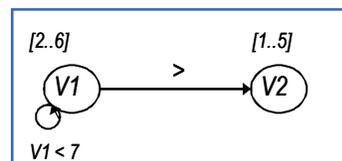
– una rete è *node consistent* se in ogni dominio di ogni nodo ogni valore è consistente con i vincoli unari che coinvolgono la variabile

• ARC CONSISTENCY

– una rete è *arc consistent* se per ogni arco (vincolo binario) che connette le variabili V_i e V_j per ogni valore nel dominio di V_i esiste un valore nel dominio di V_j consistente con il vincolo



Non Node consistent
Non Arc consistent



Node consistent
Arc consistent

48

Esempio:

`p(X,Y) :-`

`X :: 1..5, Y :: 1..5,`

`X #> Y, member(1, [X,Y]).`

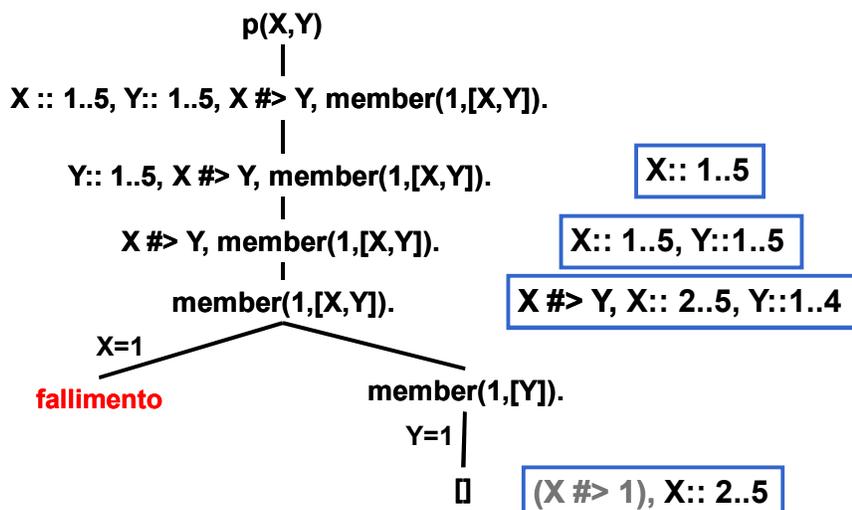
49

Esempio:

`p(X,Y) :- X::1..5, Y::1..5, X#>Y,`
`member(1, [X,Y]).`

`member(X, [X|_]).`

`member(X, [_|T]) :- member(X,T).`



50

Esempio:

- Che cosa sarebbe successo se avessi scritto $X > Y$ invece di $X \#> Y$?

p(X, Y) :-

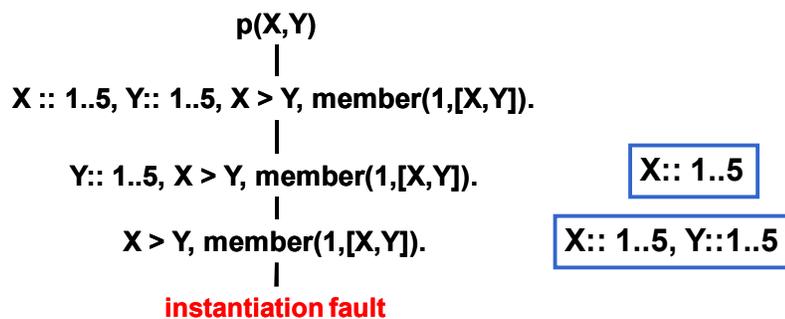
X :: 1..5, Y :: 1..5,

X > Y, member(1, [X, Y]).

51

Esempio:

```
p(X,Y):- X::1..5, Y::1..5, X>Y,  
        member(1, [X,Y]).  
member(X, [X|_]).  
member(X, [_|T]) :- member(X,T).
```



- Il predicato $>$ è sempre il solito predicato di Prolog!!
- Quindi vuole avere entrambi gli argomenti istanziati
- Può essere usato solo come test, non è un vincolo!

52

VINCOLI

In generale, in CLP(FD) si hanno queste tipologie di vincoli:

- **Vincoli matematici:** =, >, <, ≠, ≥, ≤
 - Propagazione: arc-consistency
- **Vincoli Simbolici** [*Beldiceanu, Contejean, Math.Comp.Mod. 94*]
 - Incapsulano un metodo di propagazione globale ed efficiente
 - Formulazioni più concise
 - `alldifferent([X1, ..., Xm])`
tutte le variabili devono avere valori differenti
 - `element(N, [X1, ..., Xm], Value)`
l'ennesimo elemento della lista deve avere valore uguale a Value
 - `cumulative([S1, ..., Sm], [D1, ..., Dn], [R1, ..., Rn], L)`
usato per vincoli di capacita'
 - vincoli disgiuntivi

53

PROPAGAZIONE DI VINCOLI

- **Vincoli matematici:**
 - **Esempio 1**
 - `X::[1..10], Y::[5..15], X#>Y`
Arc-consistency: per ogni valore v della variabile X, se non esiste un valore per Y compatibile con v, allora v viene cancellato dal dominio di X e viceversa
`X::[6..10], Y::[5..9]` dopo la propagazione
 - **Esempio 2**
 - `X::[1..10], Y::[5..15], X#=Y`
 - `X::[5..10], Y::[5..10]` dopo la propagazione
 - **Esempio 3**
 - `X::[1..10], Y::[5..15], X#\=Y`
 - Nessuna propagazione

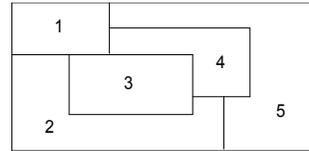
54

ESEMPIO DI MODELLO DI UN PROBLEMA

- Map Colouring

- ```
map_colouring([V1,V2,V3,V4,V5]):-
 V1::[red,green,yellow,blue],
 V2::[red,green,yellow,blue],
 V3::[red,green,yellow,blue],
 V4::[red,green,yellow,blue],
 V5::[red,green,yellow,blue],
 V1#\=V2, V1#\=V3, V1#\=V4, V1#\=V5, V2#\=V3,
 V2#\=V4, V2#\=V5, V3#\=V4, V4#\=V5,

```



} variabili & domini

} vincoli

Alternativamente...

```
alldifferent([V1,V2,V3,V4]),
alldifferent([V1,V2,V4,V5]).
```

55

## Risolutori (in)completi

- *Problema: l'Arc-Consistency da sola non è in grado di trovare una soluzione*
- *Il risolutore CLP(FD) è un solver **incompleto**:*
  - *Se dice 'no' non esiste soluzione*
  - *Se dice 'sì' potrebbe esistere o potrebbe non esistere*
  - *Fornisce comunque nella risposta calcolata i vincoli che devono essere soddisfatti*
- *Se vogliamo trovare una soluzione, dovremo fare una ricerca nello spazio degli stati*

56

## CP: PROBLEM SOLVING

---

- **Nozione di consistenza:**
  - L'insieme dei vincoli e' consistente ?
  - Esiste una soluzione ?
- **Propagazione di vincoli: meccanismo di inferenza**
  - Rimuovere dai domini valori inconsistenti
  - Inferire nuovi vincoli
- **Ricerca: strategie di branching**
  - Selezione di una variabile
  - Selezione del valore

57

## CP: CONSISTENZA

---

- Un insieme di vincoli è **CONSISTENTE** (SODDISFACIBILE) se ammette almeno una soluzione
- Risolutori **COMPLETI** sono in grado di decidere se un insieme di vincoli è soddisfacibile (Es. risolutori sui reali)
- Risolutori **INCOMPLETI** sono in grado di individuare alcune forme di inconsistenza, ma non di decidere se un insieme di vincoli è soddisfacibile. (Es. Risolutori su domini finiti)
  - l'inconsistenza è identificata quando il dominio di una variabile diventa vuoto.

58

## CP(FD): CONSISTENZA

---

- *Inconsistenza: dominio di una variabile vuoto*
  - *non esistono valori che possono essere assegnati alla variabile*
- *Se ho una variabile con dominio vuoto sicuramente l'insieme di vincoli è INSODDISFACIBILE*
- *Se l'insieme di vincoli è INSODDISFACIBILE non è detto che una variabile abbia dominio vuoto.*
- *Se riuscissimo a trovare TUTTI i valori inconsistenti e a rimuoverli dal dominio delle variabili, avremmo un risolutore completo. Il problema di trovare tutti i valori inconsistenti ha la stessa complessità del problema originale.*

59

## CP(FD): PROPAGAZIONE

---

- La propagazione di vincoli è quella forma di inferenza che permette di identificare e rimuovere dai domini i valori inconsistenti
- Riduzione dello spazio di ricerca in cui ogni nodo corrisponde all'istanziamento di una variabile del problema a un valore contenuto nel suo dominio.
- Per ridurre completamente il problema (eliminando tutti i valori inconsistenti) la propagazione avrebbe complessità esponenziale.
- Allora è necessario trovare un compromesso tra costo computazionale della propagazione e riduzione dello spazio di ricerca.

60

## *ECLiPSe*

---

- *ECLiPSe* è un linguaggio CLP che incorpora varie librerie, che forniscono dei risolutori specifici
  - *fd* sui domini finiti
  - *fd\_set* sugli insiemi
  - *eplex* reali, vincoli lineari
  - ...
- Inoltre, è possibile definire nuovi risolutori e vincoli
  - *propia*
  - *CHR*
  - ...

61

## *ECLiPSe: CLP(FD)*

---

- La libreria FD viene caricata col comando  
**use\_module(library(fd))**  
oppure, per semplicità  
**lib(fd).**
- A questo punto abbiamo a disposizione:
  - **::** operatore per definire il dominio di una variabile, es  
**A::[0,3,7,10], B::[0..15].**  
o di una lista di variabili: **[A,B,C] :: [1..10,13].**
  - Vincoli predefiniti:  
**#<, #>, #=, #\=, #<=, #>=**

62

## Esempio

### Carico la libreria

```
[eclipse 1]: lib(fd).
fd_domain.eco loaded traceable 0 bytes in 0.05 seconds
...
fd.eco loaded traceable 0 bytes in 0.22 seconds
```

Yes (0.22s cpu)

```
[eclipse 2]: A::[0,3,7,10], B::[0..15], A#> B.
```

```
A = A{[3, 7, 10]}
B = B{[0..9]}
```

} Domini arc-consistenti

Delayed goals:

```
A{[3, 7, 10]} - B{[0..9]}#>=1
```

Yes (0.00s cpu)

} Vincoli da soddisfare

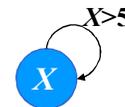
63

## VINCOLI UNARI E BINARI

### Interpretazione dei vincoli come grafo

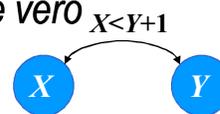
- **Node Consistency:** Un vincolo  $c(X)$  è *node consistente* se

$\forall d \in \text{dom}(X), c(d)$  è vero (soddisfatto)



- **Arc Consistency (AC):** Un vincolo  $c(X, Y)$  è *arc consistente* se

$\forall d \in \text{dom}(X) \exists g \in \text{dom}(Y)$  t.c.  $c(d, g)$  è vero (soddisfatto) e viceversa



64

## Algoritmi per ottenere AC

---

- Vari algoritmi sono stati proposti per rendere una rete AC: (AC1) AC2, AC3, ... AC7, AC2000, AC2001, ...
- Ogni algoritmo usa una lista in cui si ricorda “che cosa deve ancora valutare”
- AC3 è uno dei più usati, perché è semplice ed utilizza una lista di vincoli

65

## AC3 (Mackworth)

---

*La* (List of active constraints) = lista di tutti i vincoli;

*Ls* (List of sleeping constraints) =  $\emptyset$ ;

while *La*  $\neq \emptyset$  do

    prendi un vincolo  $c(X,Y) \in La$  e togliilo da *La*

    se ci sono elementi inconsistenti in *dom*(*X*)

        allora eliminali (se *dom*(*X*) =  $\emptyset$ , fallisci)

        metti in *La* tutti i vincoli in *Ls* che coinvolgono *X*

    (stesso ragionamento per *Y*)

    se  $c(X,Y)$  non è completamente risolto

        allora mettilo in *Ls*

66

## Vincolo Completamente Risolto

---

- Un vincolo è *completamente risolto* (o *entailed dai domini*) se per ogni possibile assegnamento esso è vero
- Es

$$X:: 0..5, Y::10..20, X\#<Y$$

- Sicuramente se tutte le variabili che coinvolge sono istanziate, il vincolo è risolto (oppure è falso)

*Domanda:* è la stessa cosa dell'Arc-Consistency?

*Domanda:* e se solo una delle 2 variabili è istanziata, posso dire che è risolto?

67

## Complessità

---

- A volte l'Arc-Consistency è troppo costosa
- Quando risveglio un vincolo  $c(X,Y)$ , per ogni valore in  $\text{dom}(X)$  cerco un valore consistente in  $\text{dom}(Y)$   
intuitivamente, circa  $d^2$  confronti  
*ogni volta che risveglio* (se  $d$  è la cardinalità dei domini)!
- Mi accorgo di un fallimento quando un dominio è vuoto.
- Potrei fermarmi quando ho trovato *un* valore consistente
- Ragionare per *intervalli*, invece di verificare tutti gli elementi del dominio

68

## Bound Consistency

---

- Un vincolo  $c(X, Y)$  è *bound consistente* se  
 $\forall d \in \{\min(X), \max(X)\} \exists g \in \text{dom}(Y)$  t.c.  $c(d, g)$  è vero (soddisfatto) e viceversa
- ✓ Comodo per vincoli come  $<$ ,  $>$ , ...
- ✓ Non ho bisogno di tenere una lista di elementi del dominio, ma bastano gli estremi
- ✓ Risveglio un vincolo  $c(X, Y)$  solo se elimino gli estremi del dom di  $X$  o  $Y$
- ✗ Faccio meno pruning

69

## BIBLIOGRAFIA

---

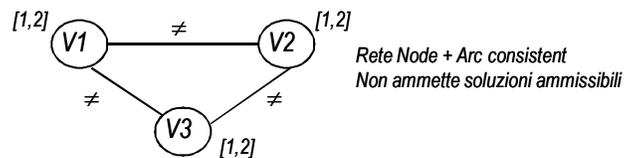
- NODE CONSISTENCY: banale
- ARC CONSISTENCY
  - Algoritmi proposti
    - AC1 - AC2 - AC3 [Mackworth AIJ (8), 77] [Montanari Inf.Sci (7), 74], AC4 [Mohr, Henderson AIJ(28), 86], AC5 [Van Hentenryck, Deville and Teng AIJ(58), 92], AC6 [Bessiere AIJ(65), 94], AC7 [Bessiere, Freuder, Regin AIJ(107), 99]
    - Varianti: DAC [Detcher, Pearl IJCAI85], LAC [Schiex, Regin, Gaspin, Verfaillie AAAI96] MAC [Bessiere, Freuder, Regin, IJCAI95]
    - Bound Consistency [Van Hentenryck, Saraswat, Deville TR Brown, CS-93-02, 93]
    - Complessita': [Mackworth, Freuder AIJ(25), 85], [Mohr, Henderson AIJ(28), 86], [Detcher, Pearl AIJ (34), 88] [Han, Lee AIJ(36), 88], [Cooper AIJ (41), 89]
- PATH CONSISTENCY
  - PC1 - PC2 [Mackworth AIJ (8), 77]
  - PC3 [Mohr, Henderson AIJ(28), 86]
  - PC4 [Han, Lee AIJ(36), 88]

70

## INCOMPLETENESS of CONSISTENCY ALGORITHMS

---

- NODE, ARC CONSISTENCY in generale non sono completi
  - sono complete per particolari problemi che hanno strutture particolari  
[Freuder JACM (29), 82], [Freuder JACM (32), 85]
- Algoritmo completo: N-CONSISTENCY per problemi di N variabili.  
Complessità esponenziale  
[Freuder CACM (21), 78], [Cooper AIJ (41), 89]
- Esempio:



71

## RICERCA

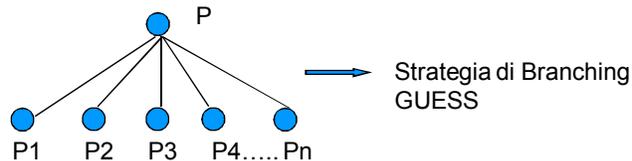
---

- La propagazione non è in generale completa. Dopo la propagazione:
  - Trovo una soluzione → stop
  - Fallimento → backtracking
  - I domini contengono alcuni valori → SEARCH
- Ricerca: idea
  - Divide il problema in sotto-problemi (BRANCHING) e risolve ciascuno di essi indipendentemente
  - I sottoproblemi devono essere una partizione del problema originale
- Scopo: mantenere lo spazio di ricerca il più piccolo possibile
  - per convenzione, i rami di sinistra vengono esplorati per primi.

72

## RICERCA

---



- Strategie di Branching definiscono il modo di partizionare il problema  $P$  in sottoproblemi più facili  $P1, P2, \dots, Pn$ .
- Per ogni sotto problema si applica di nuovo la propagazione. Possono essere rimossi nuovi rami grazie alle nuove informazioni derivate dal branching

73

## RICERCA

---

- In Programmazione logica a vincoli la tecnica più popolare di branching è detta *labeling*
- LABELING:
  - Seleziona una VARIABILE
  - Seleziona un VALORE nel suo dominio
  - Assegna il VALORE alla VARIABILE
- L'ordine in cui le variabili e i valori vengono scelti (la search strategy) non influenza la completezza dell'algoritmo ma ne influenza pesantemente l'efficienza.
- Attività di ricerca volta a trovare buone strategie.

74

## Labeling in ECLiPSe

---

### **indomain (X)**

- assegna alla variabile  $X$  un valore nel dominio; in *backtracking* ne seleziona un altro
- utile per definire predicati di labeling

**labeling ([ ])** .

**labeling ([H|T]) :-**

**indomain (H) ,**

**labeling (T)** .

75

## ESEMPIO COMPLETO

---

```
map_colouring([V1,V2,V3,V4,V5]):-
 V1::[red,green,yellow,blue],
 V2::[red,green,yellow,blue],
 V3::[red,green,yellow,blue],
 V4::[red,green,yellow,blue],
 V5::[red,green,yellow,blue],
 V1#\=V2, V1#\=V3, V1#\=V4, V1#\=V5, V2#\=V3,
 V2#\=V4, V2#\=V5, V3#\=V4, V4#\=V5,
 labeling([V1,V2,V3,V4,V5]).
```

} Variabili & domini

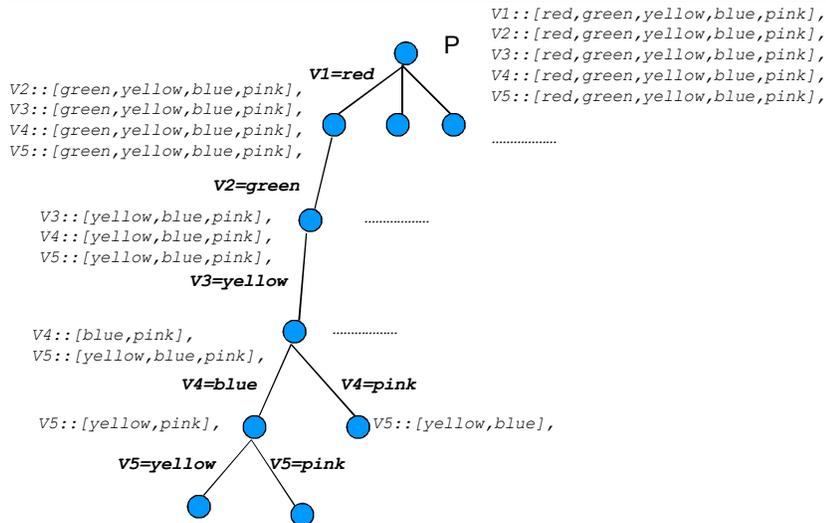
} vincoli

} ricerca

- Separazione fra
  - Modello del problema
  - strategia per risolverlo

76

## SPAZIO DI RICERCA



77

## STRATEGIE DI RICERCA: CRITERI GENERALI

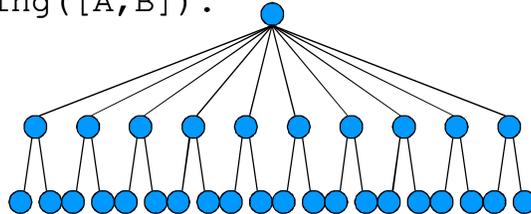
- Scelta della Variabile: prima istanzio le variabili più difficili
  - **FIRST FAIL**: seleziono prima la variabile con dominio più piccolo
  - **MOST CONSTRAINED**: seleziono prima la variabile coinvolta nel maggior numero di vincoli
  - **APPROCCI IBRIDI**: combinazioni dei due
- Scelta del valore: valori più promettenti prima
  - **LEAST CONSTRAINING PRINCIPLE**.
- Sono poi state definite numerose strategie dipendenti dal problema.

78

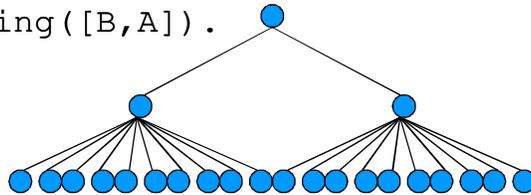
## First Fail

---

- `A::[1..10], B::[1..2], (vincoli ...), labeling([A,B]).`



... `labeling([B,A]).`



79

## First Fail in ECLiPSe

---

### **deleteff(X,List,Resto)**

- *Data una lista, fornisce la variabile col dominio più piccolo (ed il resto della lista)*

```
labelingff([]).
```

```
labelingff(List):-
```

```
 deleteff(X,List,Resto),
```

```
 indomain(X),
```

```
 labelingff(Resto).
```

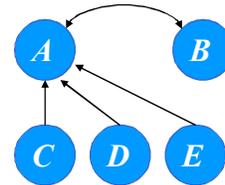
80

## Most Constrained

---

### **deleteffc (X, List, Resto)**

- *Data una lista, fornisce la variabile col dominio più piccolo (ed il resto della lista)*
- *A parità di dominio, sceglie quella soggetta a più vincoli*



81

## COME SCEGLIERE UNA STRATEGIA

---

- Non esistono regole definite per scegliere la migliore strategia di ricerca. Dipende dal problema che dobbiamo risolvere e tipicamente la scelta viene effettuata dopo prove computazionali con diverse strategie
- CRITERIO: una strategia è più efficiente se rimuove prima rami dello spazio delle soluzioni.
- PARAMETRI da considerare
  - tempo computazione
  - numero di fallimenti.

82

## Esercizi

---

- Si scriva un predicato CLP(FD) che impone che una lista di variabili FD, date in ingresso, sia ordinata in senso decrescente stretto.
- Esempio:  
?- [A,B,C]::0..10, ordina([A,B,C]).  
yes, A::2..10  
B::1..9  
C::0..8
- Si scriva un predicato CLP(FD) che impone che i valori di una lista di variabili FD siano tutti diversi fra loro

83

## VINCOLI N-ari

---

- Per vincoli N-ari, non c'è più l'interpretazione come grafo. Es:  $X+Y=Z$  ?
- **Generalized Arc Consistency (GAC)** (o **Hyper Arc-Consistency**):  
Un vincolo  $c(X_1, X_2, \dots, X_n)$  è arc consistente in senso generalizzato se
  - presa una variabile  $X_i$  ( $i=1..n$ )
  - per ogni assegnamento delle rimanenti  $n-1$  variabili  
 $X_1 \rightarrow v_1, \dots, X_{i-1} \rightarrow v_{i-1}, X_{i+1} \rightarrow v_{i+1}, \dots, X_n \rightarrow v_n$   
 $\exists g \in \text{dom}(X_i)$  t.c.  $c(v_1, \dots, v_{i-1}, g, v_{i+1}, v_n)$  è vero (soddisfatto).

*Domanda:* Sapete definire Generalized Bound Consistency?

84

## Vincoli N-ari: espressioni

---

- Si possono definire vincoli come

**somma (A, B, C)**

vero se  $A+B=C$ , con propagazione GAC.

- Questi vincoli sono già definiti, con zucchero sintattico. Possiamo usare direttamente:

**A+B #= C**

**A#< B\*C+D,**

...

85

## PROPAGAZIONE DI VINCOLI

---

- Finora abbiamo visto propagazioni generali
- **Vincoli Simbolici:**
  - In generale, la propagazione ha costo esponenziale nel numero di variabili
  - Per vincoli specifici, si può avere propagazione polinomiale
  - Ogni vincolo ha associato un algoritmo di **PROPAGAZIONE** o di **FILTERING**
    - Algoritmo di filtering implementa tecniche complesse di propagazione che derivano da studi effettuati nell'Intelligenza Artificiale e Ricerca Operativa
  - La propagazione termina quando la rete raggiunge uno stato di **quiescenza** non si possono più cancellare valori
  - Propagazione incrementale

86

## PROPAGAZIONE DI VINCOLI

- **Vincoli Simbolici: esempio 1**

- `alldifferent([X1, ... Xn])`

vero se tutte le variabili assumono valori diversi

Equivalente da un punto di vista dichiarativo all'insieme di vincoli binari

`alldifferent([X1, ... Xn]) ↔ X1 ≠ X2, X1 ≠ X3, ..., Xn-1 ≠ Xn`

Operazionalmente permette una propagazione più forte.

`X1 :: [1, 2, 3], X2 :: [1, 2, 3], X3 :: [1, 2, 3], X4 :: [1, 2, 3, 4]`

- *Arc consistency:*
- *non rimuove alcun valore !!*
- *Algoritmo di filtering [Regin AAAI94]: rimuove da x4 i valori 1,2,3*

87

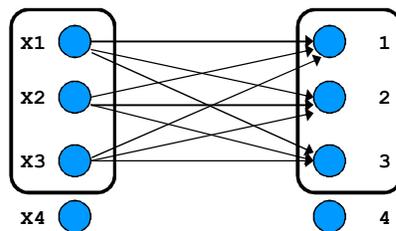
## PROPAGAZIONE DI VINCOLI

- **Vincoli Simbolici: esempio 1**

`lib(fd_global).`

`X1 :: [1, 2, 3], X2 :: [1, 2, 3], X3 :: [1, 2, 3], X4 :: [1, 2, 3, 4],`

`alldifferent([X1, X2, X3, X4]).`



Insieme di variabili di cardinalità 3  
che hanno medesimo dominio di  
cardinalità 3

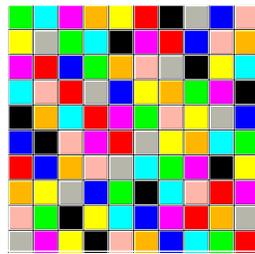
↓  
`X4 :: [1, 2, 3, 4]`

88

## ALL-DIFFERENT

---

- **Vincoli Simbolici:** L'**alldifferent** si usa in tantissime applicazioni
- **Esempio: Partial Latin Square**



*Colorare ogni riga e colonna  
con 10 colori in modo che su ogni  
riga e colonna ci siano tutti colori  
diversi*

*FACILE SE LA GRIGLIA E' VUOTA ma*

*non se PARZIALMENTE PIENA*

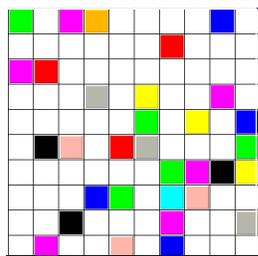
*35%-45% PERCENTUALE CRITICA*

89

## ALL-DIFFERENT NEL PARTIAL LATIN SQUARE

---

- Problema la cui struttura si trova in molte applicazioni (scheduling e timetabling, routing in fibre ottiche, ecc...)
- **Modello del problema:** alcune variabili già assegnate, altre hanno come dominio tutti i colori



per ogni riga  $i=1..n$   
**alldifferent** ( $[X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}]$ )  
per ogni colonna  $j=1..n$   
**alldifferent** ( $[X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{nj}]$ )

**SI VEDA**

**<http://www.cs.cornell.edu/gomes>**

**32% preassignment**

90

## Nota sintattica

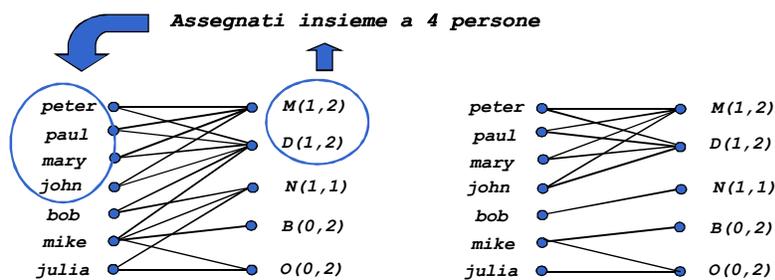
- In ECLIPSe il vincolo `alldifferent` è definito in due librerie, con implementazione diversa
  - `fd:alldifferent` impone  $n(n-1)/2$  vincoli  $\# \setminus =$
  - `fd_global:alldifferent` è il vincolo globale (in ECLIPSe fa *bound consistency*)
- Per distinguere due predicati con lo stesso nome definiti in librerie diverse (se ho caricato entrambe le librerie), uso la notazione

**libreria:nome\_predicato**

91

## GLOBAL CARDINALITY CONSTRAINT

- `gcc (Var , Val , LB , UB)` [Regin AAA196] `var` sono variabili, `val` valori `LB` e `UB` sono il minimo e massimo numero di occorrenze per ogni valore in `val` assegnato a `var`
- Esempio:

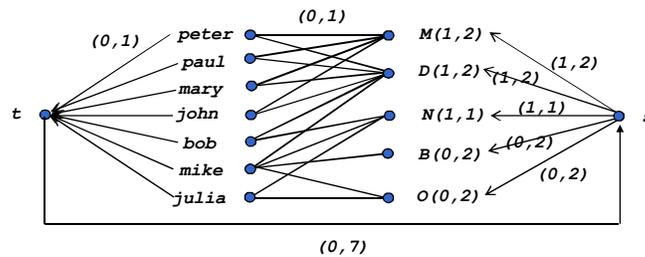


92

## GLOBAL CARDINALITY CONSTRAINT

- La nozione di consistenza si basa su un algoritmo di *network maximum flow* sulla value network  $N(C)$

- gcc su  $k$  variabili e' consistente
- c'e' un max flow da  $s$  a  $t$  di valore  $k$



93

## PROPAGAZIONE DI VINCOLI

- Vincoli Simbolici: esempio**
  - $\text{element}(N, [X_1, \dots, X_m], \text{Value})$   
l'ennesimo elemento della lista è uguale a Value
- propagazione da **N** a **Value** :
  - $N=i \rightarrow X_i = \text{Value}$
- propagazione da **Value** a **N** e  $X_i$  :
  - $\text{Value} = x \rightarrow$ 
    - $N=1$  and  $X_1=x$  or
    - $N=2$  and  $X_2=x$  or....
    - $N=m$  and  $X_m=x$

94

## PROPAGAZIONE DI VINCOLI

---

- **Vincoli Simbolici: vincoli disgiuntivi**
  - Supponiamo di avere due lezioni che devono essere tenute dallo stesso docente. Abbiamo gli istanti di inizio delle lezioni:  $L1Start$  e  $L2Start$  e la loro durata  $Duration1$  e  $Duration2$ .
  - Le due lezioni non possono sovrapporsi:  
$$L1Start + Duration1 \leq L2Start$$

OR

$$L2Start + Duration2 \leq L1Start$$
  - Due problemi **INDIPENDENTI** uno per ogni parte della disgiunzione.

95

## PROPAGAZIONE DI VINCOLI

---

- **Vincoli Simbolici: vincoli disgiuntivi**
  - Due problemi **INDIPENDENTI**, uno per ogni parte della disgiunzione: una scelta non ha effetto sull'altra  $\Rightarrow$  Trashing
  - Numero esponenziale di problemi:
    - $N$  disgiunzioni  $\Rightarrow 2^N$  Problemi
    - Fonte primaria di complessità in problemi reali
  - Soluzioni proposte:
    - *disgiunzione costruttiva*
    - *operatore di cardinalità*
    - *meta-constraint*

96

## DISGIUNZIONE COSTRUTTIVA

---

- *P. Van Hentenryck, V. Saraswat, Y. Deville, Design, Implementation and Evaluation of the Constraint Language cc(FD), Tech. Rep. Brown University, CS-93-02, 1993.*
- Sfrutta la disgiunzione per ridurre lo spazio di ricerca
- Idea: aggiungere al constraint store vincoli che sono implicati da tutte le parti della disgiunzione
- Esempio:  $x :: [5..10]$ ,  $y :: [7..11]$ ,  $z :: [1..20]$ ,  $(z=x \text{ OR } z=y)$ 
  - $z=x$  ridurrebbe il dominio di  $z$  a  $[5..10]$
  - $z=y$  ridurrebbe il dominio di  $z$  a  $[7..11]$
  - risultato della disgiunzione costruttiva:  $z :: [5..11]$
- In ECLiPSe non c'è, ma può essere implementato semplicemente (V. Propia)

97

## OPERATORE DI CARDINALITA'

---

- **Symbolic Constraint:** operatore di cardinalità
  - $\#(1, [c_1, \dots, c_n], u)$   $\Leftrightarrow$  il numero  $k$  di vincoli  $c_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) soddisfatti non è minore di  $1$  e non maggiore di  $u$
  - Con l'operatore di cardinalità modello i vincoli disgiuntivi nel modo seguente
    - $\#(1, [L1Start+Duration1 \leq L2Start, L2Start+Duration2 \leq L1Start], 1)$

98

## META-CONSTRAINTS

---

- **Vincoli Simbolici:** meta-constraints o Vincoli Reificati

- A ogni vincolo (matematico, del tipo  $\#>$ ,  $\#<$ ,  $\#<=$ ,  $\#\neq$ , ...) viene associata una variabile booleana  $B$ .
  - Se  $B=1$  il vincolo è verificato e viceversa,
  - se  $B=0$  il vincolo non è verificato e viceversa.

$$c \Leftrightarrow B$$

- Con i meta-constraints posso modellare la disgiunzione nel modo seguente:

```
B1 :: [0,1], B2 :: [0,1],
L1Start+Duration1 #<= L2Start #<=> B1,
L2Start+Duration2 #<= L1Start #<=> B2,
B1 + B2 #= 1.
```

99

## PROPAGAZIONE DI VINCOLI

---

- **Vincoli Simbolici:** esempio 3

– `cumulative`( $[S_1, \dots, S_n]$ ,  $[D_1, \dots, D_n]$ ,  $[R_1, \dots, R_n]$ ,  $L$ )

- $S_1, \dots, S_n$  sono istanti di inizio di attività (variabili con dominio)
  - $D_1, \dots, D_n$  sono durate (variabili con dominio)
  - $R_1, \dots, R_n$  sono richieste di risorse (variabili con dominio)
  - $L$  limite di capacità delle risorse (fisso o variabile nel tempo)
- Dato l'intervallo  $[min, max]$  dove  $min = \min_i \{S_i\}$ ,  $max = \max\{S_i + D_i\} - 1$ , il vincolo `cumulative` assicura che

$$\max \left\{ \sum_{j|S_j \leq i \leq S_j + D_j} R_j \right\} \leq L$$

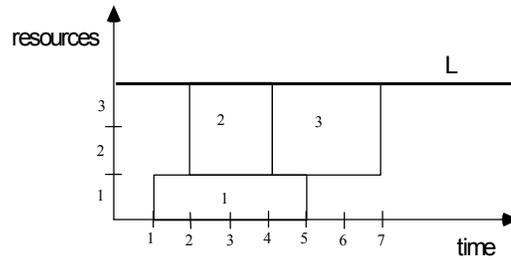
100

## PROPAGAZIONE DI VINCOLI

---

- **Vincoli Simbolici: esempio 3**

```
lib(edge_finder) o lib(edge_finder3).
cumulative([1,2,4],[4,2,3],[1,2,2],3)
```



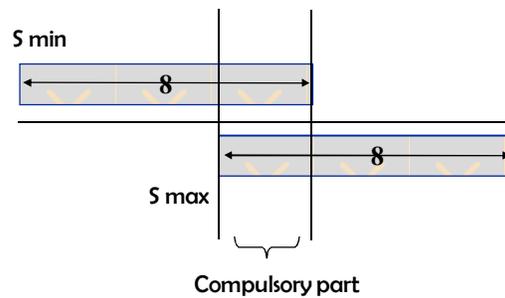
101

## PROPAGAZIONE DI VINCOLI

---

- **Vincoli Simbolici: esempio 3**

- un esempio di propagazione usato nei vincoli sulle risorse è quello basato sulle *parti obbligatorie*



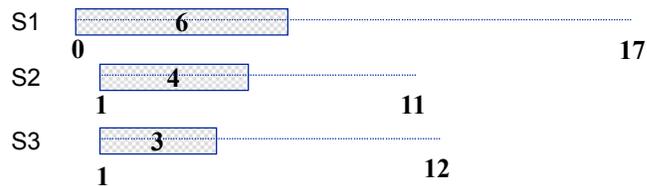
102

## PROPAGAZIONE DI VINCOLI

---

- **Vincoli Simbolici: esempio 3**
  - un'altra propagazione usata nel vincolo di capacità è quella basata sull'*edge finding* [Baptiste, Le Pape, Nuijten, IJCAI95]

Consideriamo una risorsa unaria e tre attività

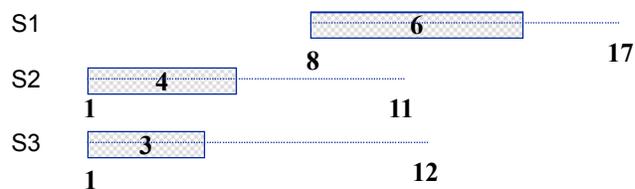


103

## PROPAGAZIONE DI VINCOLI

---

- **Vincoli Simbolici: esempio 3**



Possiamo dedurre che minimo istante di inizio per S1 e' 8.

Considerazione basata sul fatto che S1 deve essere eseguito dopo S2 e S3.

**Ragionamento globale:** supponiamo che S2 o S3 siano eseguiti dopo S1. Allora l'istante di fine di S2 e S3 e' almeno 13 (elemento non contenuto nel dominio di S2 e S3).

104

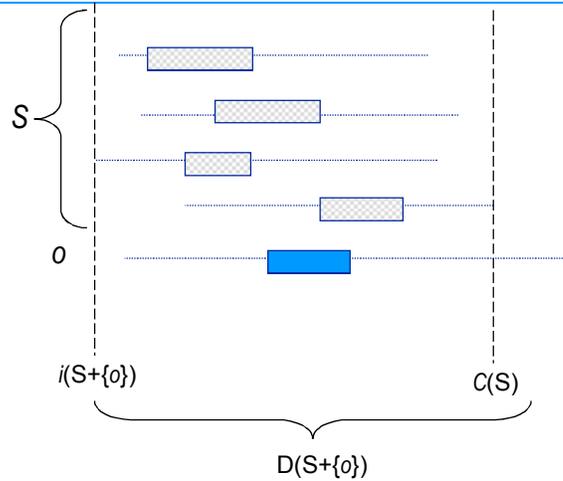
## Teorema: [Carlier, Pinson, Man.Sci.95]

Sia  $o$  un'attività e  $S$  un insieme di attività che utilizzano la stessa risorsa unaria ( $o$  non contenuta in  $S$ ). Il minimo istante di inizio è  $i$ , la somma delle durate è  $D$  e il massimo istante di terminazione è  $C$ . Se

$$i(S+\{o\}) + D(S+\{o\}) > C(S)$$

Allora non è possibile che  $o$  preceda alcuna operazione in  $S$ . Questo implica che il minimo istante iniziale per  $o$  può essere fissato a

$$\max_{(S' \subseteq S)} \{i(S') + D(S')\}.$$



105

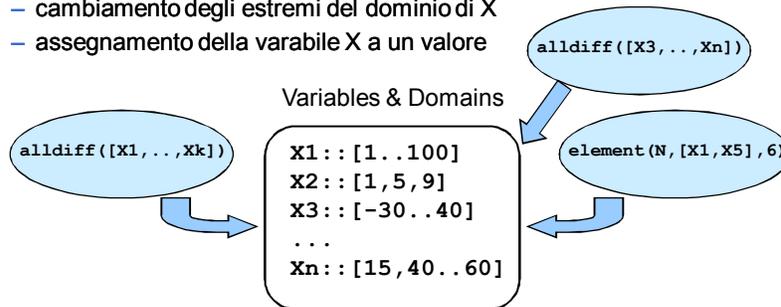
## VINCOLI: CONSIDERAZIONI GENERALI

- Vincoli simbolici disponibili nella maggior parte dei linguaggi a vincoli
  - Ragionamento locale vs. globale  $\Rightarrow$  propagazione potente
  - Ragionamento locale vs. globale  $\Rightarrow$  costo computazionale
- } Tradeoff
- Generalizzazione di vincoli che appaiono frequentemente in applicazioni reali
  - Codice conciso e semplice da capire e scrivere
  - Vincoli simbolici rappresentano sottoproblemi indipendenti (rilassamenti del problema originale)

106

## INTERAZIONE TRA VINCOLI

- I vincoli interagiscono attraverso variabili condivise nel constraint store
- La propagazione di un vincolo attivata quando sulla variabile X coinvolta nel vincolo si scatena un **evento**
  - cambiamento nel dominio di X
  - cambiamento degli estremi del dominio di X
  - assegnamento della variabile X a un valore

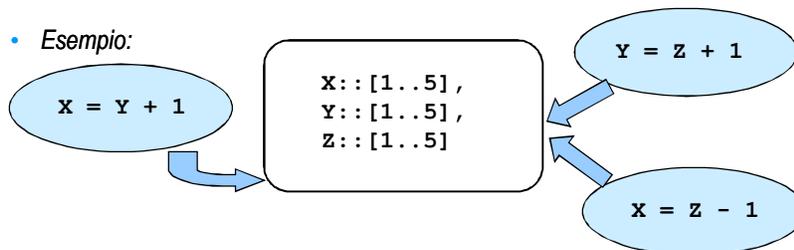


107

## INTERAZIONE TRA VINCOLI

- In generale ogni variabile è coinvolta in molti vincoli. Di conseguenza, ogni cambiamento nel dominio della variabile come risultato di una propagazione può causare la rimozione di altri valori dai domini delle altre variabili.
- **Prospettiva ad agenti:** durante il loro tempo di vita, i vincoli alternano il loro stato da sospesi e attivi (attivati da eventi)

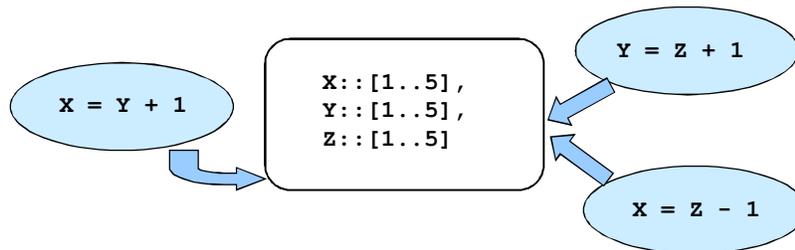
• *Esempio:*



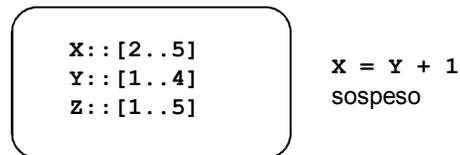
108

## INTERAZIONE TRA VINCOLI

---



- Prima propagazione di  $x = y + 1$  porta a

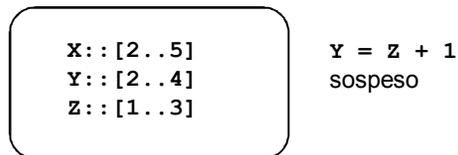


109

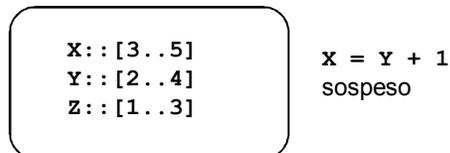
## INTERAZIONE TRA VINCOLI

---

- Seconda propagazione di  $y = z + 1$  porta a



- Il dominio di  $y$  e' cambiato  $x = y + 1$  viene attivato



110

## INTERAZIONE TRA VINCOLI

- Terza propagazione di  $z = x - 1$  porta a

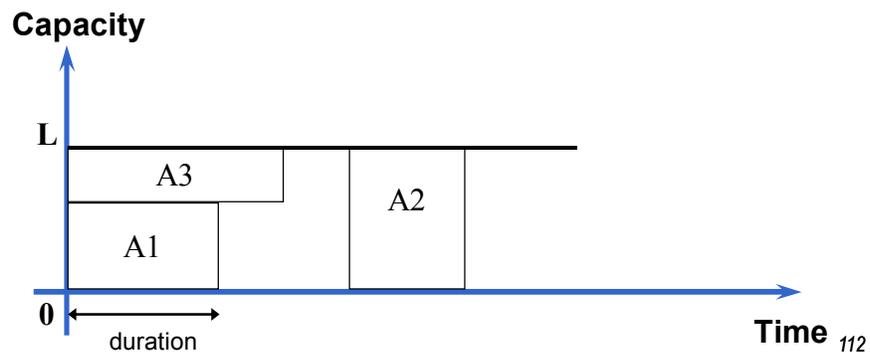
```
x : : []
y : : [2..4]
z : : [1..3] FAIL
```

- L'ordine nel quali i vincoli sono considerati (sospesi/risvegliati) non influenza il risultato MA può influenzare le prestazioni computazionali

111

## VINCOLI COME COMPONENTI SOFTWARE

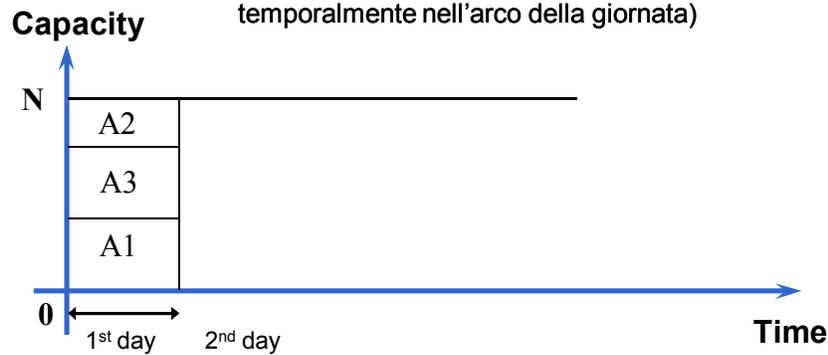
- I vincoli simbolici possono essere visti come componenti software utilizzabili in diverse situazioni. Ad esempio il vincolo cumulative può essere usato in vari modi
  - Scheduling (1): Attività A1, A2, A3 condividono la stessa risorsa con capacità limitata. Durate sull'asse X e uso delle risorse su Y



## VINCOLI COME COMPONENTI SOFTWARE

- Altro esempio di uso del vincolo cumulativo
  - Scheduling (2): *Numero limitato di risorse per giorno = N*. Rappresento i giorni sull'asse X e il numero di risorse usate su Y

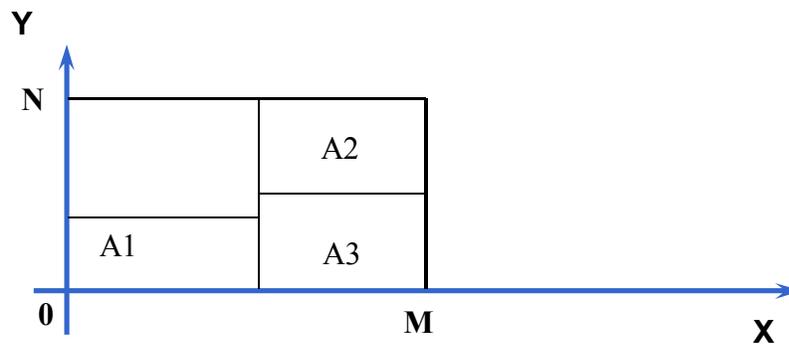
(Non interessa dove le attività sono collocate temporalmente nell'arco della giornata)



113

## VINCOLI COME COMPONENTI SOFTWARE

- Altro esempio di vincolo cumulativo
  - Packing: *Data una scatola di dimensioni  $M \times N$ , è necessario collocare dei pezzi in modo che le dimensioni della scatola siano rispettate.*



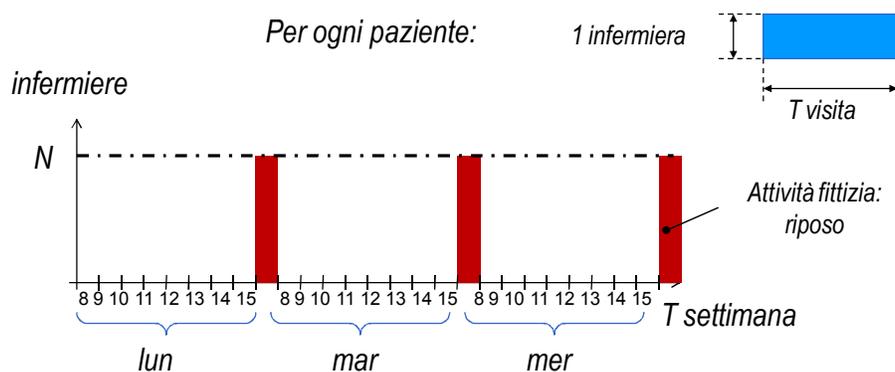
114

## Esempio

- $N$  infermiere devono visitare  $P$  pazienti nell'arco di una settimana
- Per ogni paziente si sa quanto tempo è richiesto per la visita
  - In più, possono esserci vincoli sull'orario in cui viene visitato un paziente, alcuni pazienti vanno visitati più volte in una settimana, ecc.
- Ogni infermiera lavora 8 ore al giorno
- Trovare un assegnamento dei pazienti alle infermiere

115

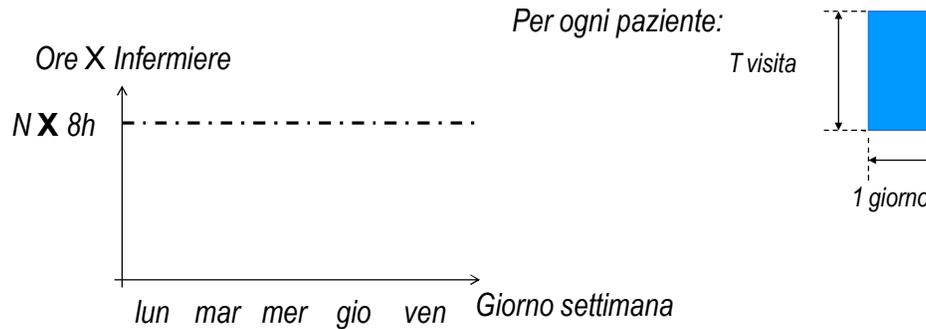
## Uso del vincolo cumulativo (I)



- Tempo = ore all'interno della settimana
- Risorse = infermiere
- Limite risorse = Numero infermiere

116

## Uso del vincolo cumulativo (II)



- $Tempo = \text{giorno della settimana (da 1 a 7)}$
- $Risorse = \text{Tempo della visita}$
- $\text{Limite risorse} = (\text{Numero infermiere}) \times 8h$

117

## Alcuni vincoli utili

Vedere il manuale: librerie `fd` e `fd_global`

- $atmost(+N, ?List, +V)$ : At most  $N$  elements of the list  $List$  have the value  $V$ .
- $element(?Index, +List, ?Value)$ :  $Value$  is the  $Index$ 'th element of the integer list  $List$ .
- $alldifferent(+List, ++Capacity)$ : The list  $List$  contains at most  $Capacity$  elements of each value
- $lexico\_le(+List1, +List2)$ :  $List1$  is lexicographically less or equal to  $List2$
- $maxlist(+List, ?Max)$ :  $Max$  is the maximum of the values in  $List$
- $minlist(+List, ?Min)$ :  $Min$  is the minimum of the values in  $List$
- $occurrences(++Value, +List, ?N)$ : The value  $Value$  occurs in  $List$   $N$  times
- $sorted(?List, ?Sorted)$ :  $Sorted$  is a sorted permutation of  $List$
- $sumlist(+List, ?Sum)$ : The sum of the list elements is  $Sum$

118

## VINCOLI RIDONDANTI

---

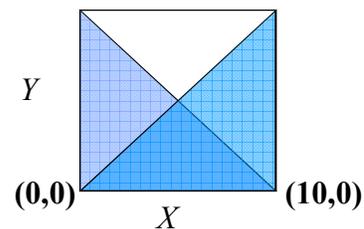
- La propagazione in generale non è completa: alcuni valori inconsistenti possono essere lasciati nei domini
- I vincoli ridondanti possono essere utili per ridurre lo spazio di ricerca anche se introducono un overhead (trade-off).
- Un vincolo ridondante  $C$  è un vincolo che è implicato da altri vincoli  $\{C_1 \dots C_k\}$ , ma il risolutore non identifica questa implicazione a causa della sua incompletezza

119

## *Vincoli logicamente ridondanti*

---

$$[x, y] :: 0 \dots 10, \quad x \# \geq y, \\ y \# \leq 10 - x$$



- *Nessuna propagazione (entrambi i vincoli già AC).*
- *Se aggiungo il vincolo (logicamente ridondante)  $y \# \leq 5$  ho propagazione*

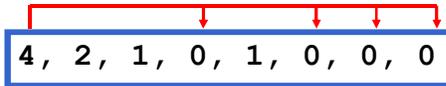
120

## VINCOLI RIDONDANTI

- Esempio: Sequenza magica
- Dato un insieme di  $n+1$  variabili  $X_0, \dots, X_n$ . Ogni  $X_i$  deve rispettare i seguenti vincoli :
  - 0 compare  $X_0$  volte in soluzione
  - 1 compare  $X_1$  volte
  - ...
  - $n$  appare  $X_n$  volte.
- Vincolo `occurrences (V,L,N) (fd_global)` impone che V compaia N volte nella lista L
- `magic_sequence ([X0, ..., Xn]) :-`

```

X0, ..., Xn :: [0..n],
occurrences (0, [X0, ..., Xn], X0),
occurrences (1, [X0, ..., Xn], X1),
...,
occurrences (n, [X0, ..., Xn], Xn),
...
```



121

## VINCOLI RIDONDANTI

- Vincolo ridondante: si noti che la somma di tutte le variabili moltiplicate per il loro valore è uguale al numero di celle nella sequenza.

`4, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 0`

- Quindi, le variabili soddisfano il vincolo:

$$X_1 + 2 \cdot X_2 + \dots + N \cdot X_n = N + 1$$

- `magic_sequence ([X0, ..., Xn]) :-`

```

X0, ..., Xn :: [0..n],
occurrences (0, [X0, ..., Xn], X0),
occurrences (1, [X0, ..., Xn], X1),
...,
occurrences (n, [X0, ..., Xn], Xn),
X1 + 2*X2 + ... + N*Xn = N + 1,
...
```

Con P4 2Ghz, N=23

•senza vincolo ridondante

 5.88s

•con vincolo ridondante

 0.55s

122