

# Cupole

Le cupole sottili sono praticamente prove di momenti flettenti se i vincoli non alterano il regime di membrana che si avrebbe se la membrana fosse estesa indefinitamente (non limitata da un bordo)

Occorre in particolare che i vincoli trasmettano alla membrana gli stessi sforzi che le trasmetterebbe il prolungamento della membrana cioè devono trasmettere solo lo sforzo  $S_1$  di meridiano

Come nel caso di carrelli o pendoli coassiali con la membrana

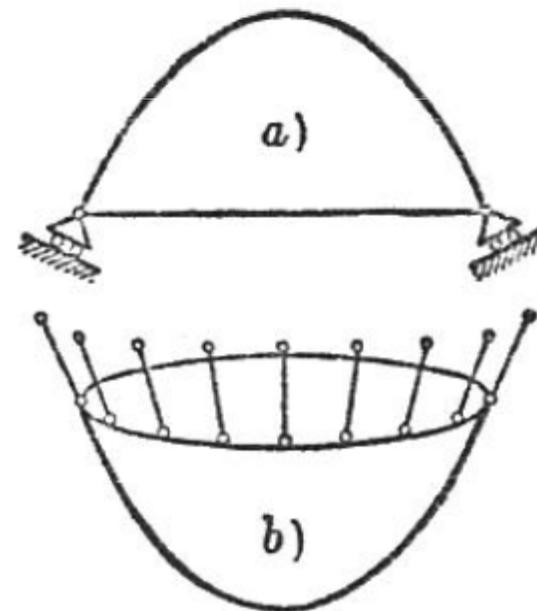


Fig. 1426.

# Cupole

Possono nascere azioni flessionali

Per esempio se i vincoli trasmettono azioni non solo lungo i meridiani (caso di carrelli scorrevoli su un piano orizzontale)

La reazione  $V$  si può scomporre in una componente  $S_1$  ed una componente  $H_1$

$H_1$  provoca dei momenti e dei tagli  
Il regime di membrana è localmente alterato ma l'effetto si estingue velocemente e rimane confinato ad una zona ristretta in corrispondenza del contorno

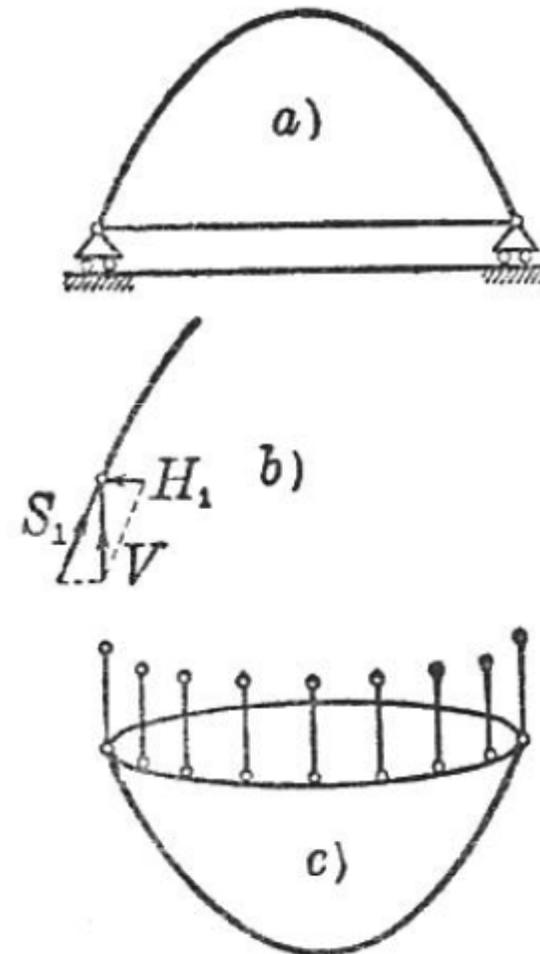


Fig. 1427.

# Cupole

**Possono nascere azioni flessionali**

**Un altro caso è quello in cui si ha una trave ad anello di rinforzo che in genere esplica un'azione orizzontale diversa da  $H_1$**

**Oppure quando si hanno incastri al bordo**

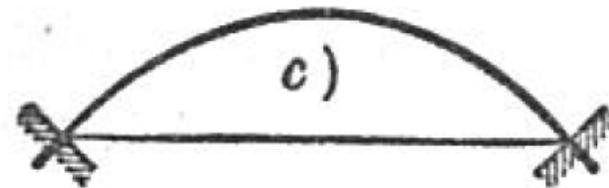
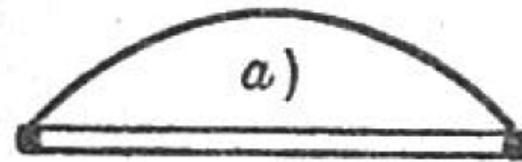


Fig. 1428.

# Cupole

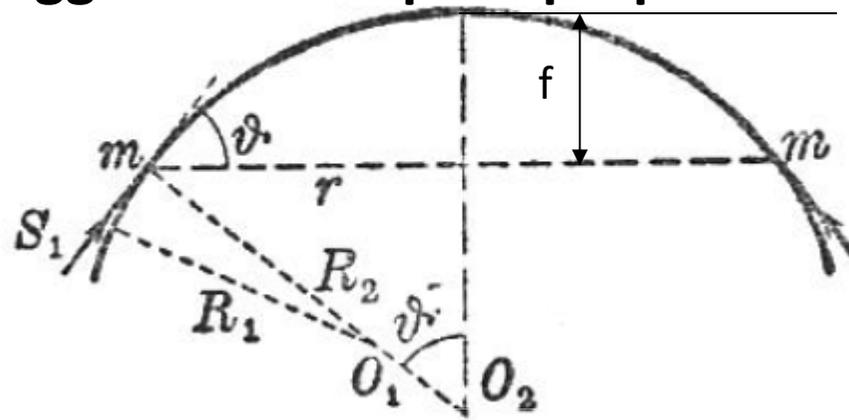
**Le cupole sottili sono praticamente prove di momenti flettenti**

**Si calcolano come le membrane**

- 1) si scrive l'equilibrio alla traslazione verticale della porzione di cupola sopra un generico parallelo  $mm$**
- 2) Si determina così lo sforzo  $S_1$  in corrispondenza di  $mm$**
- 3) si ricava  $S_2$  tramite la formula di Mariotte generalizzata**

# Cupole sottili

Consideriamo il caso di una cupola sottile di spessore uniforme  $s$  soggetta solo al peso proprio



$$f = R(1 - \cos \theta)$$

$$r = R \sin \theta$$

$$A = f 2\pi R$$

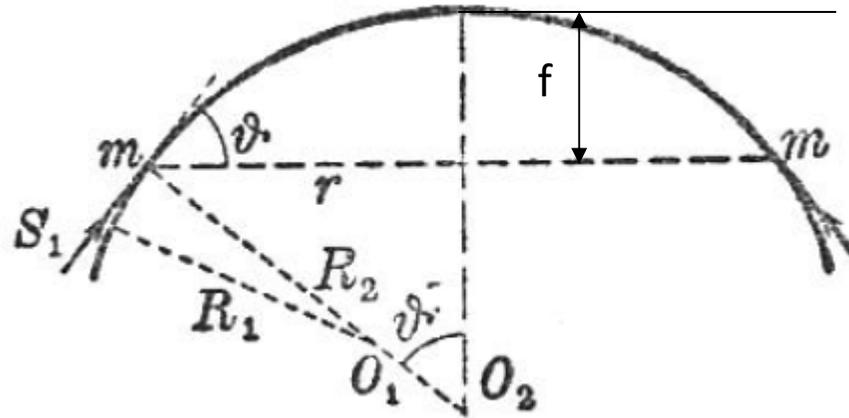
Sfera

$$R_1 = R_2 = R$$

Il peso di una porzione di cupola di densità  $\gamma$ , area  $A$  e spessore  $s$  è

$$Q = \gamma 2\pi R s f = \gamma 2\pi R s R (1 - \cos \theta)$$

# Cupole sferiche



Equilibrio alla traslazione verticale (segno '-' indica compressione)

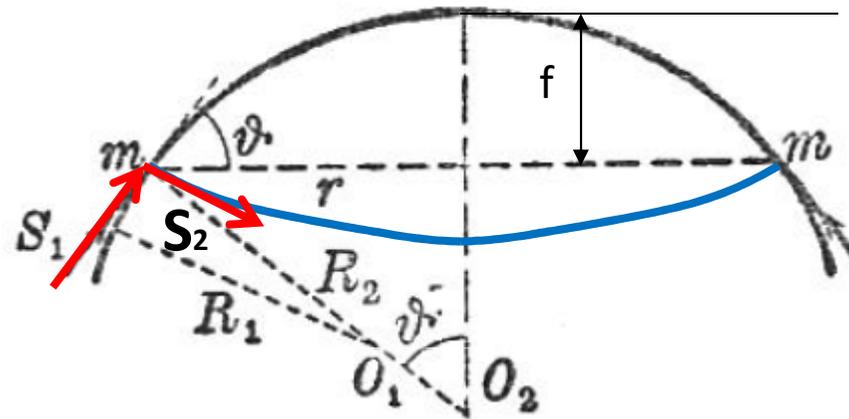
$$-S_1 \sin \theta 2\pi r = Q = 2\pi R f s \gamma = 2\pi s R^2 \gamma (1 - \cos \theta)$$

$$S_1 = -\frac{2\pi s R^2 \gamma (1 - \cos \theta)}{\sin \theta 2\pi r} = -\frac{2\pi s R^2 \gamma (1 - \cos \theta)}{\sin \theta 2\pi R \sin \theta}$$

$$S_1 = -\frac{\gamma R s (1 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta} = -\frac{\gamma R s (1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} = \boxed{-\frac{\gamma R s}{1 + \cos \theta}}$$

# Cupole sottili sferiche

## Formula di Mariotte generalizzata



Sfera  
 $R_1=R_2=R$

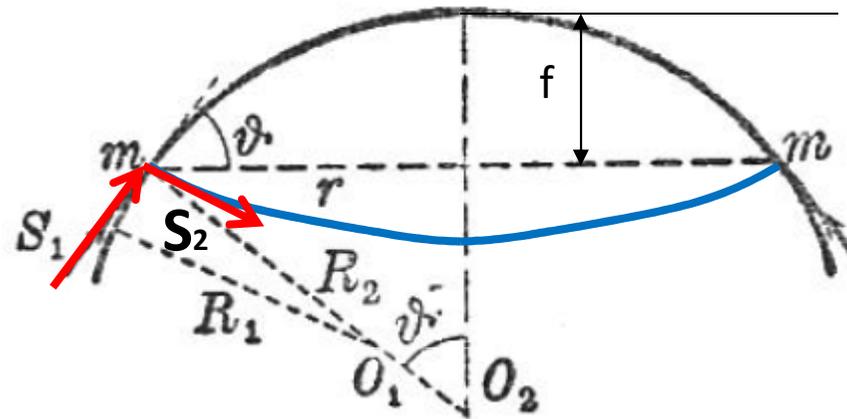
$$\frac{S_1}{R} + \frac{S_2}{R} = p_z \quad p_z = p \cos \theta = \gamma s \cos \theta$$

$S_2$  Sforzo parallelo –sforzo cerchiante

$$S_2 = -S_1 + p_z R \Rightarrow S_2 = \frac{\gamma R s}{1 + \cos \theta} - \gamma R s \cos \theta = \gamma R s \frac{1 - \cos \theta - \cos^2 \theta}{1 + \cos \theta}$$

# Cupole sottili sferiche

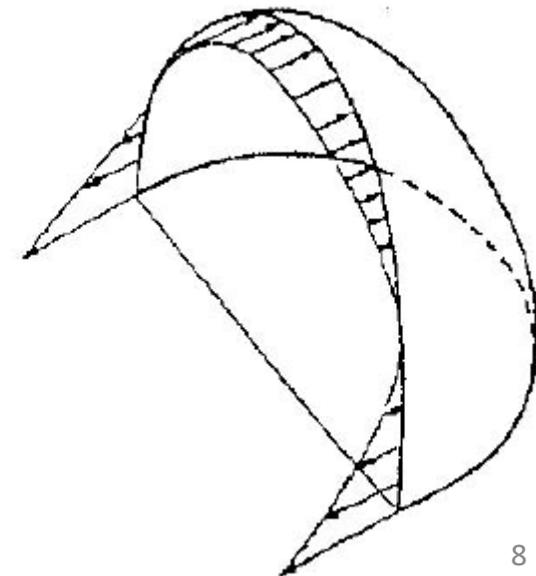
Lo sforzo cerchiante cambia segno e diventa di trazione



Sfera  
 $R_1=R_2=R$

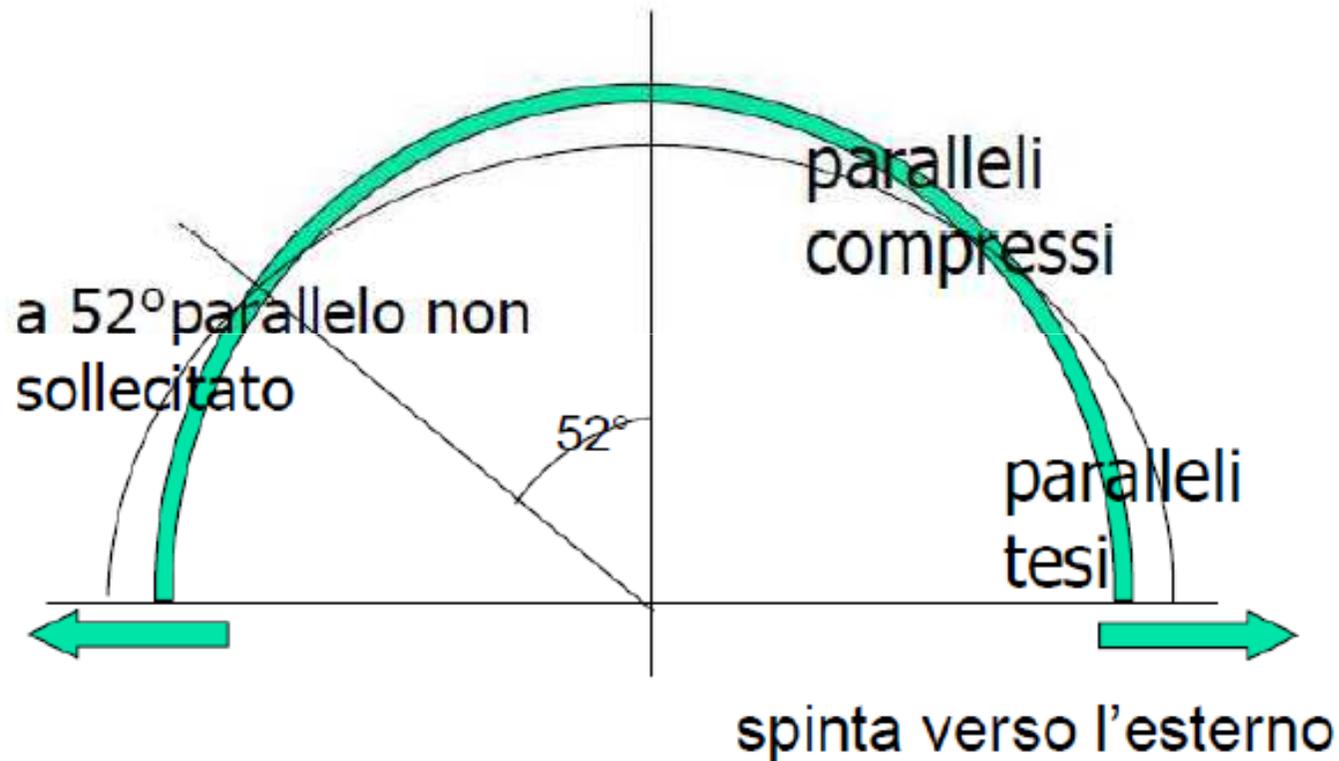
$S_2$  Sforzo parallelo –sforzo cerchiante

$$S_2 = \gamma R_s \frac{1 - \cos \theta - \cos^2 \theta}{1 + \cos \theta} > 0 \quad \text{in} \quad \theta = \theta_0 \cong 51^\circ 50'$$



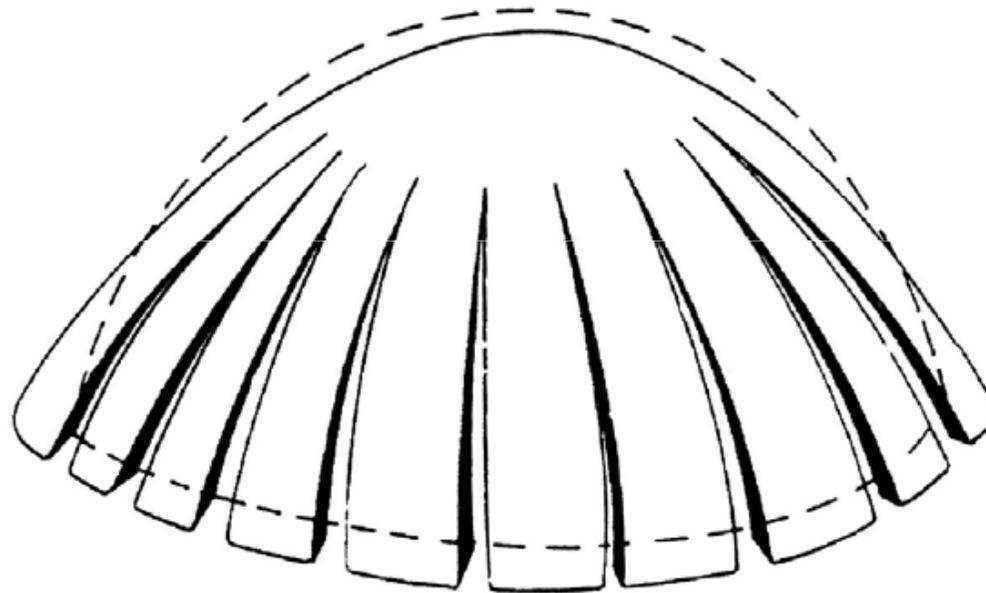
# Cupole sottili sferiche

Lo sforzo cerchante cambia segno e diventa di trazione



# Cupole sottili sferiche

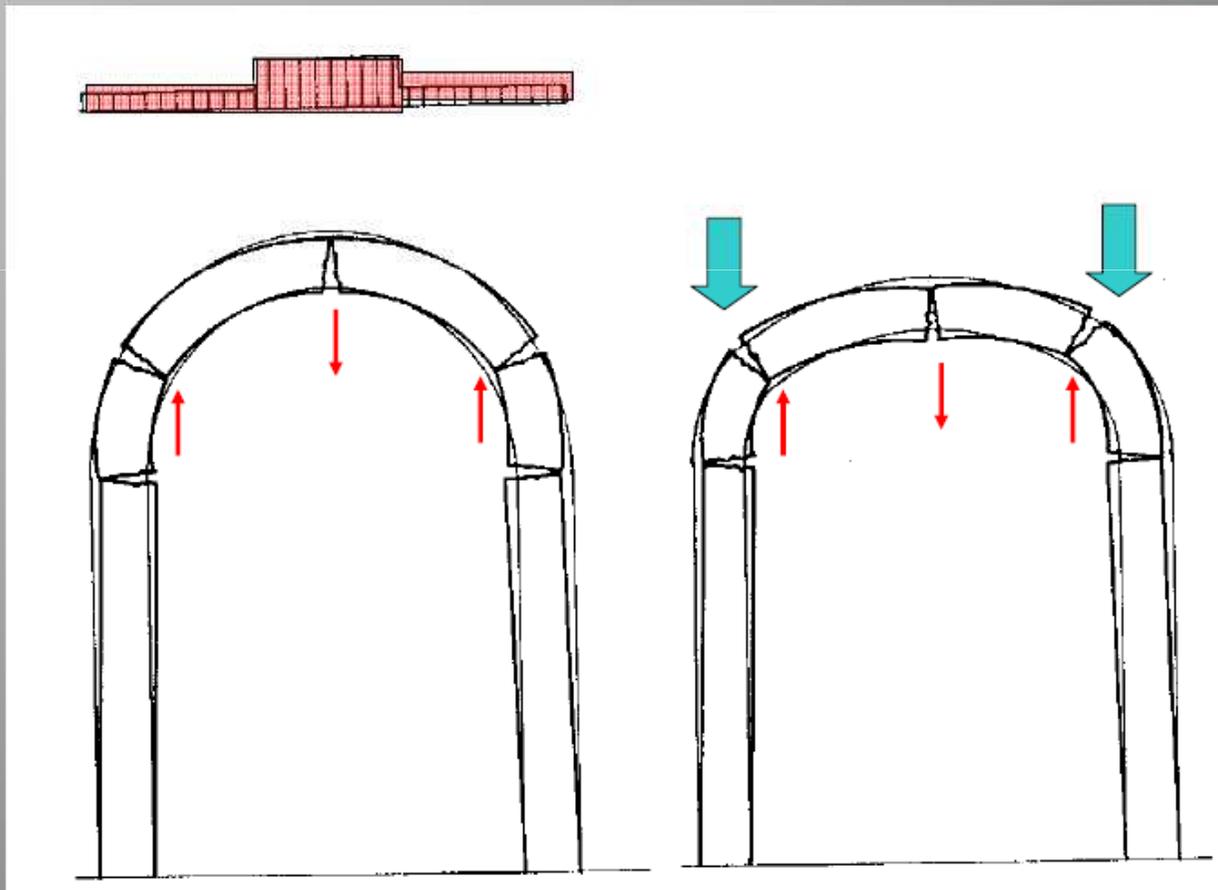
**Le cupole hanno la tendenza a sviluppare fratture lungo i meridiani**



da "The Science of Structural Engineering"  
di Jacques Heyman

# Cupole

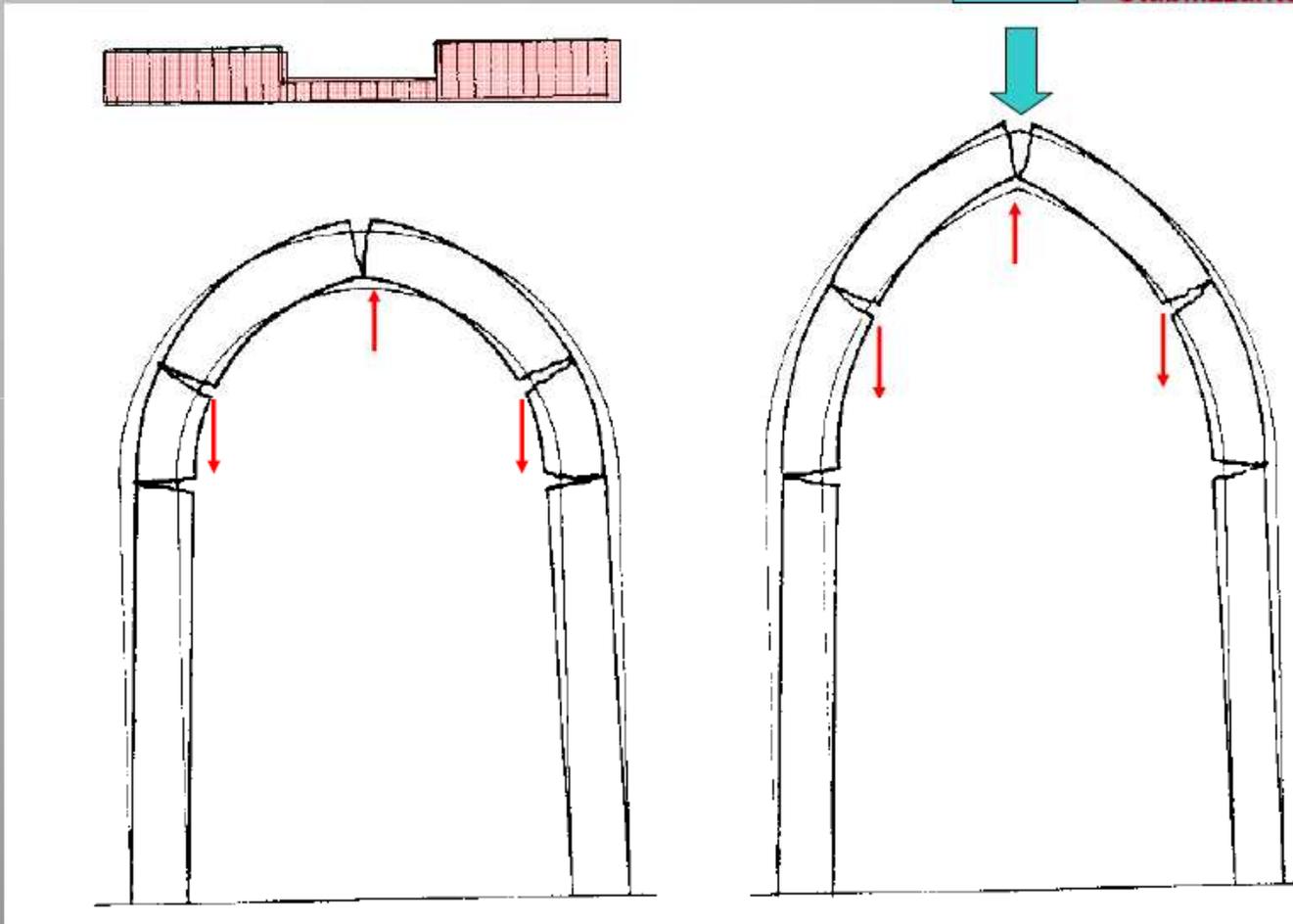
## DISSESTI SUGLI ARCHI E SULLE VOLTE effetti di carichi concentrati



# Cupole

DISSESTI SUGLI ARCHI E SULLE VOLTE  
effetti di carichi concentrati

 Dannoso  
 Stabilizzante



# Cupole

## DISSESTI SUGLI ARCHI E SULLE VOLTE



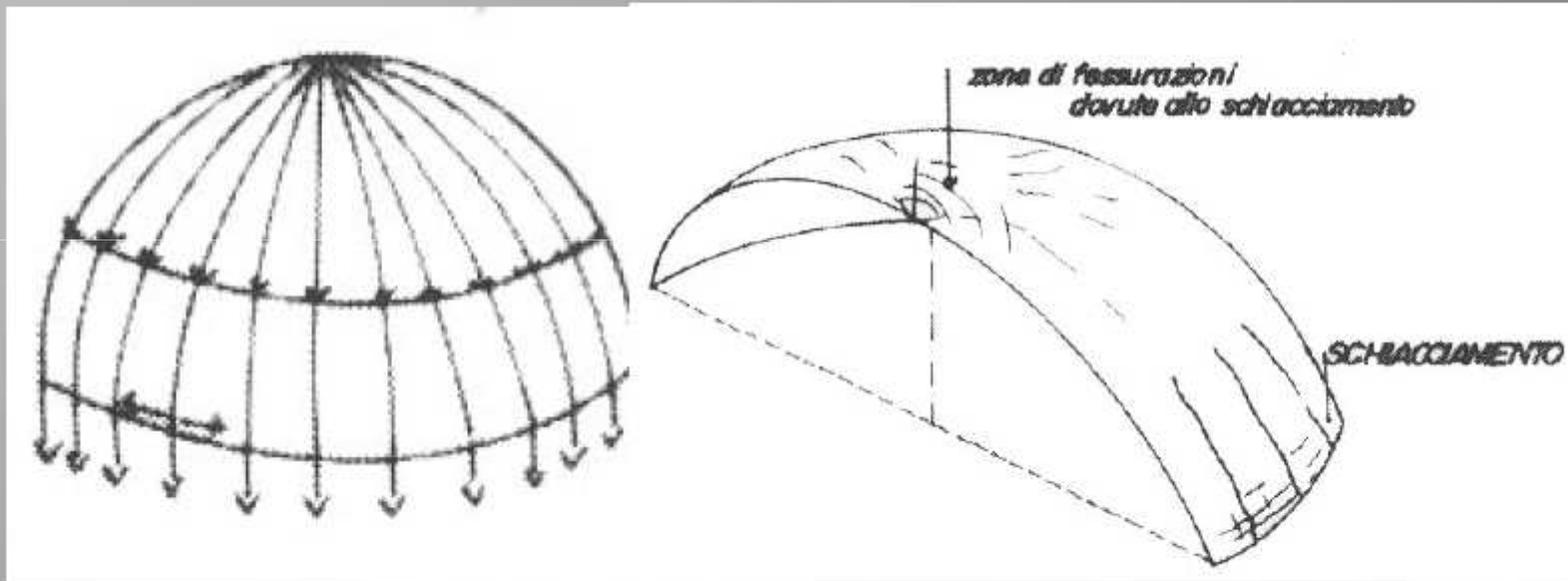
Mileto, Terme di Faustina,  
particolare di un arco.



Antalya, Chiesa di S. Nicola, particolare di  
una fessura intradossale in chiave.

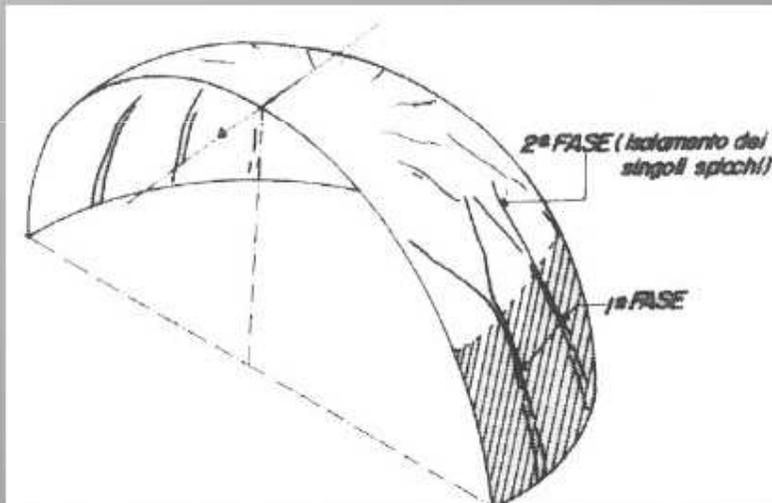
# Cupole

## DISSESTI SULLE CUPOLE: CUPOLE SEMPLICI (CUPOLE EMISFERICHE E CUPOLE RIBASSATE)



Manifestazioni del quadro fessurativo nelle cupole ribassate (Piccirilli C., 1989)

# Cupole



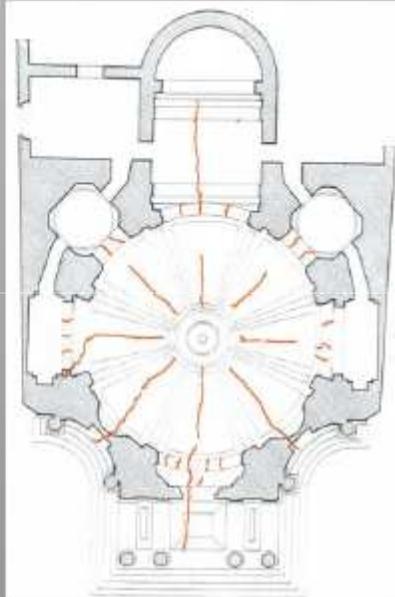
Manifestazioni del quadro fessurativo nelle cupole semplici (Piccirilli C., 1989)



Bursa, Moschea Verde, particolare di una lesione nella cupola semplice

# Cupole

## DISSESTI SULLE CUPOLE: CUPOLE COMPOSTE CON COSTOLONI



Roma, Santa Maria dei Miracoli, posizione sul prospetto e in pianta delle principali fessure sulla cupola (Fiengo G., 1978)

Roma, Santa Maria dei Miracoli, vista dal basso della cupola

# Cupole

## DISSESTI SULLE CUPOLE: CUPOLE COMPOSTE CON COSTOLONI



Firenze, Santa Maria del Fiore, posizione in pianta delle principali fessure sulla cupola  
(Docci M., Maestri D., 1994)



Firenze, Santa Maria del Fiore, particolare di lesioni sulla cupola

# Cupole

**Fessurazione meridiana e statica delle cupole in muratura**

***Dallo stato membranale a quello di pressoflessione meridiana***

**La cupola si fessura quando le sollecitazioni di trazione che si esercitano lungo i suoi paralleli, disposti verso l'imposta, raggiungono intensità pari alla debole resistenza a trazione della muratura.**

# Cupole

**In assenza dell'azione di cerchiamento esplicata dai paralleli inferiori tesi, l'equilibrio membranale si perde e si formano lesioni lungo i meridiani: queste investono una fascia di cupola ben più alta di quella interessata dalle sollecitazioni di trazione relative all'equilibrio membranale.**

**Le lesioni meridiane si propagano quindi in alto, molto al di sopra della colatitude  $\phi = 51^{\circ},8$  che segna l'inversione di segno degli sforzi nei paralleli.**

**Queste lesioni possono essere di numero variabile: una sola è già sufficiente a rompere l'azione cerchiante degli anelli.**

**solo 4 lesioni meridiane principali sono, ad esempio, presenti nella cupola del Brunelleschi, mentre nel Pantheon le lesioni meridiane sarebbero 14. Dello stesso numero sarebbero state quelle riscontrate nel Settecento nella cupola di S. Pietro.**

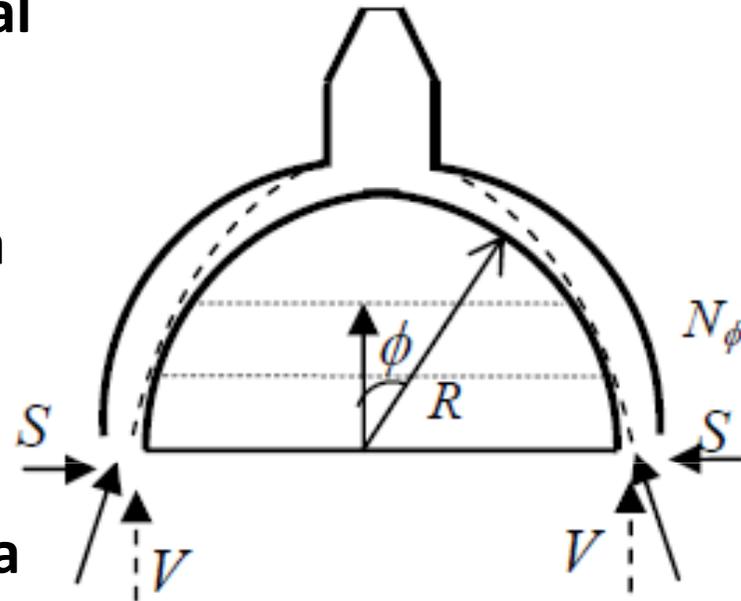
# Cupole

La cupola, fessurandosi, si dilata nella sua fascia inferiore per una larghezza di notevole ampiezza e si suddivide in tanti spicchi che si comportano, a due a due, come archi indipendenti. In buona parte della superficie della cupola vengono quindi meno gli sforzi *dei paralleli ed i soli sforzi meridiani non riescono ad assicurare l'equilibrio se si mantengono ancora diretti lungo la linea media degli spicchi.*

La curva delle pressioni, lungo la quale agiscono gli sforzi *dei meridiani si inclina* sull'orizzontale ed abbandona la superficie media della cupola.

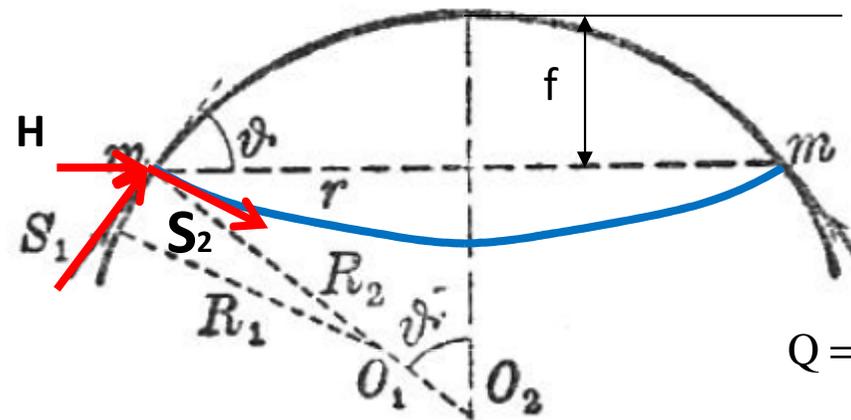
# Cupole

Gli spicchi di cupola, che tendono a divaricarsi, trasmettono ora una spinta al tamburo. La Figura descrive schematicamente lo stato di sollecitazione che si attiva in una cupola sferica che, fessurandosi, si suddivide in spicchi. Si può vedere come la curva delle pressioni, abbandonando la linea media dello spicchio, alle imposte risulta inclinata rispetto alla verticale: la componente orizzontale dell'azione esercitata all'imposta e rapportata alla larghezza dello spicchio alla sua base costituisce la spinta  $S$  della cupola per unità di lunghezza della circonferenza di imposta.



# Cupole sottili sferiche

## Spinta orizzontale al bordo



Sfera  
 $R_1=R_2=R$

$$Q = \gamma 2\pi r s f = \gamma 2\pi r s R_2 (1 - \cos \theta)$$

Al contorno la spinta  $S_1$  ha una componente orizzontale

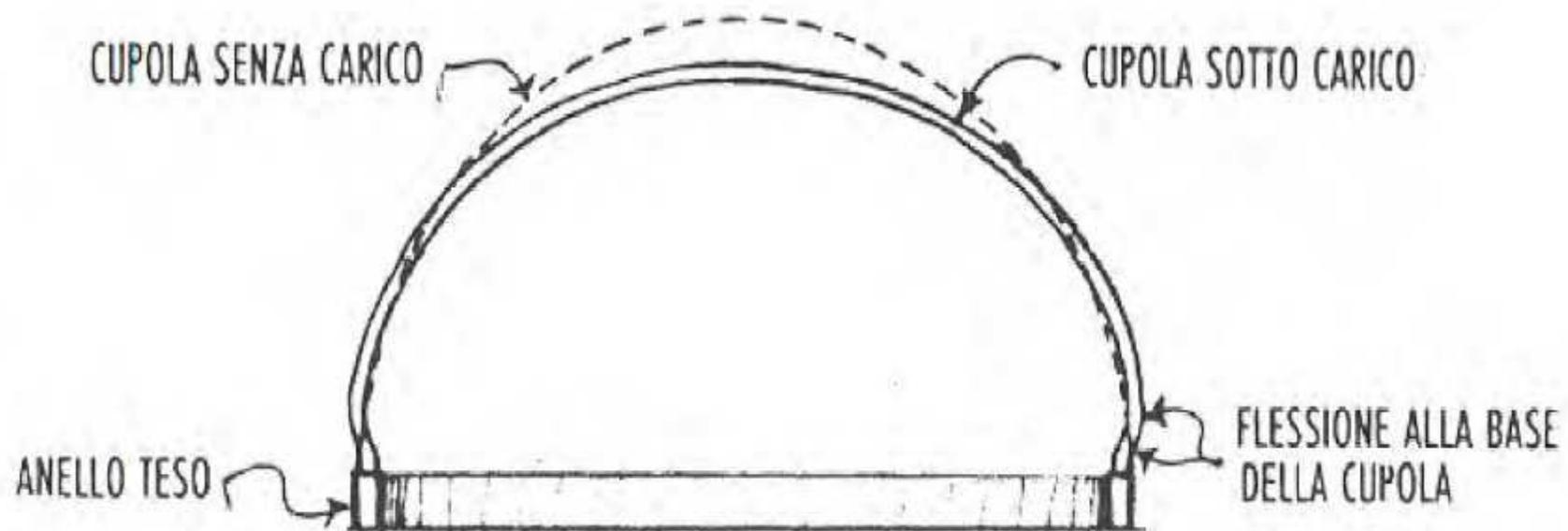
$H = S_1 \cos \theta_c$  dove  $\theta_c$  rappresenta l'angolo di apertura in corrispondenza del contorno

$H$  deve essere assorbita da un tamburo ad anello in modo da non gravare sul muro di appoggio

$$H = -S_1 \cos \theta_c = \frac{Q}{2\pi r_c} \operatorname{ctg} \theta_c$$

# Cupole sottili sferiche

**Per combattere le lesioni lungo i meridiani si irrigidisce l'anello di base, cosa che introduce localmente sollecitazioni di flessione**



da "The Science of Structural Engineering"  
di Jacques Heyman

# Cupole

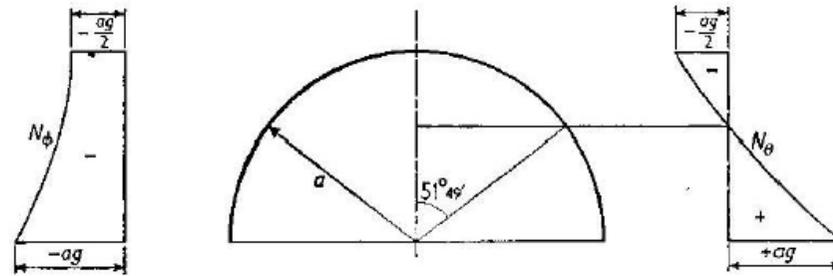


Fig. 24. Dead-load force distribution in a spherical dome.

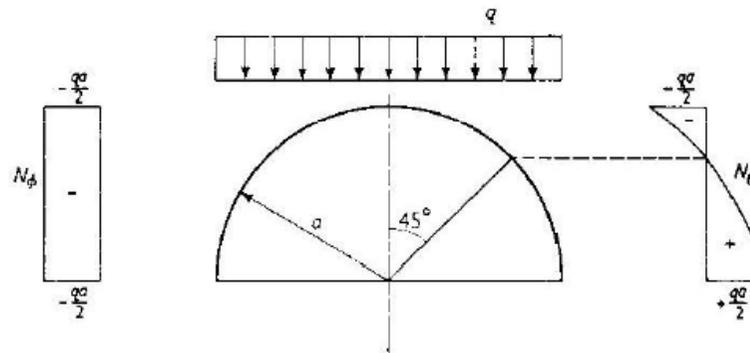


Fig. 26. Snow-load force distribution in a spherical dome.

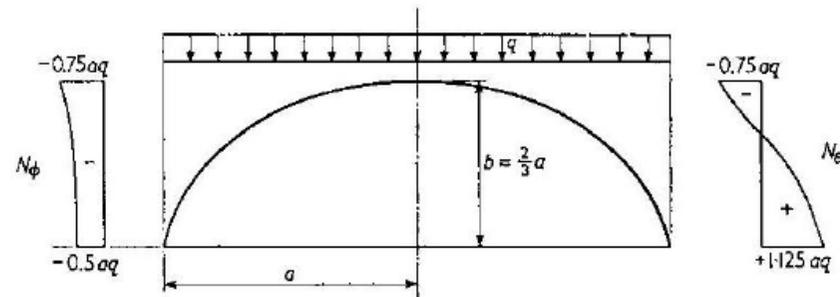


Fig. 37. Unit-force distribution in an ellipsoid ( $a = 1.5b$ ) for snow load.

# Trave ad anello

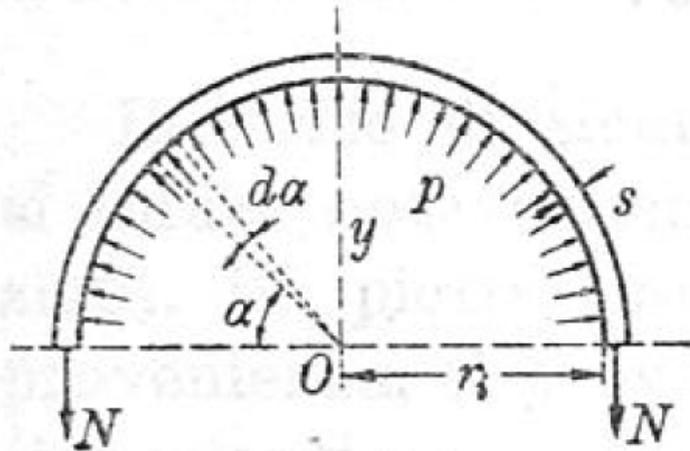


Fig. 143.

$$N = pr$$

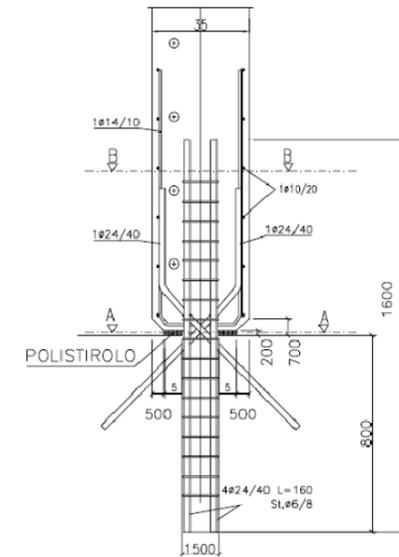


Figura 7.4 Particolare d'appoggio (carniera tipo Mesnager).

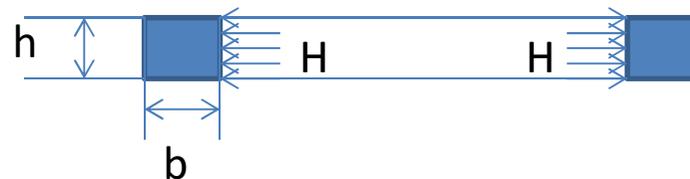
**Se la connessione è a cerniera trasmette solo azioni e non momenti**

**La spinta orizzontale H agisce sulla trave ad anello formante il tamburo che risulta soggetto ad uno sforzo normale N di trazione (>0)**

$$N = Hr_c = \frac{Q}{2\pi} \text{ctg}\theta_c$$

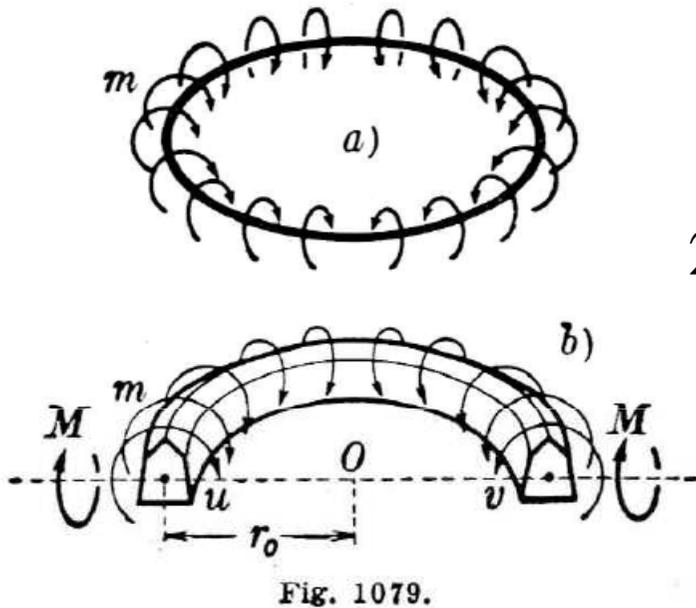
$$\sigma = \frac{Hr_c}{sh}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{Hr_c}{Esh} \Rightarrow \Delta r_c = \varepsilon r_c = \frac{Hr_c^2}{Esh}$$



# Trave ad anello soggetta a distribuzione di momenti radiali

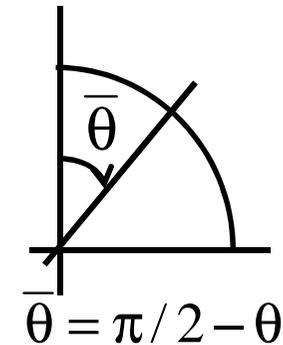
Quando la connessione cupola- trave ad anello trasmette anche momenti



Equilibrio alla rotazione attorno al diametro

$$2M = 2 \int_0^{\pi/2} mR \cos \bar{\theta} d\bar{\theta} = 2mR \Rightarrow M = mR$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{mR}{J} \frac{h}{2}$$



Per determinare la rotazione della sezione trasversale della trave ad anello si può usare il teorema di Clapeyron

$$\frac{1}{2} L_e = \frac{1}{2} 2\pi R m \varphi = L_i = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma^2}{E} = \frac{\pi m^2 R^2}{EJ}$$

$$\varphi = \frac{mR^2}{EJ}$$

# Trave ad anello con distribuzione di momenti radiali

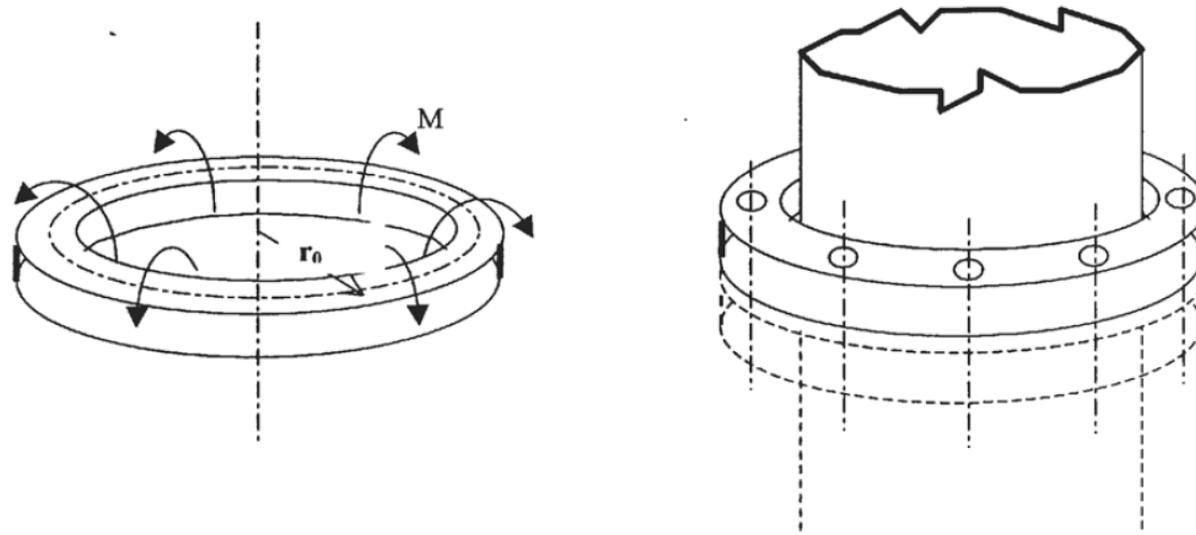


Fig.2.1 Anello soggetto a coppie distribuite e caso della flangia libera corrispondente

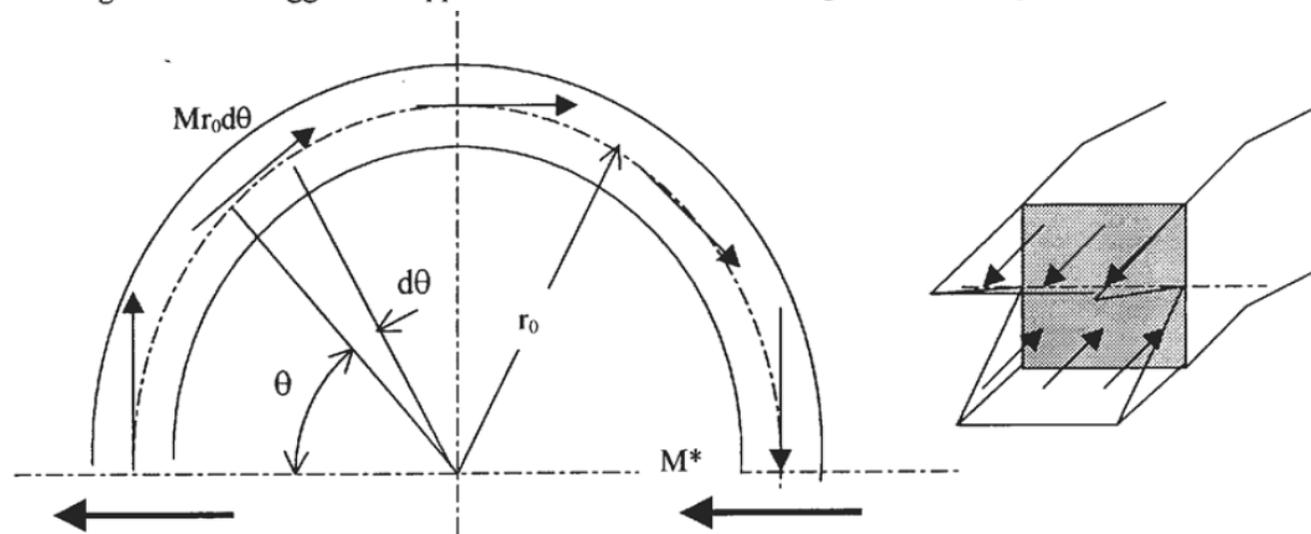
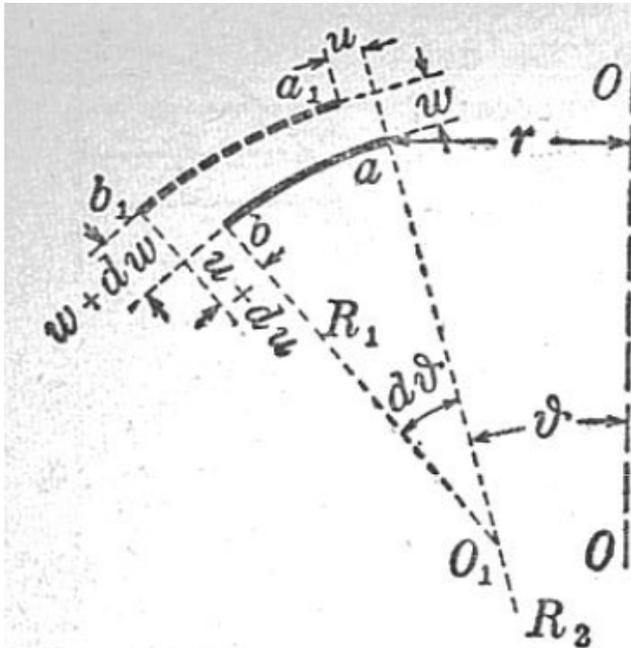


Fig. 2.3 – Schema di equilibrio di un semianello e distribuzione delle tensioni nella sezione

# Deformazioni



Per effetto degli spostamenti tangenziali  $u$  e  $u + du$  di  $a$  e di  $b$  la lunghezza  $\overline{ab}$  dell'elemento aumenta di  $du = (du/d\theta)d\theta$ . Per effetto degli spostamenti radiali  $w$  la lunghezza  $\overline{ab}$  aumenta di  $w d\theta$  (la variazione di  $\overline{ab}$  dovuta alla differenza  $dw$  dei  $w$  di  $a$  e di  $b$  è un infinitesimo di ordine superiore).

## Allungamento ab

$$\Delta ab = \frac{du}{d\theta} d\theta + w d\theta$$

## Deformazioni nei meridiani

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta ab}{ab} = \frac{\Delta ab}{R_1 d\theta} = \frac{1}{R_1} \left( \frac{du}{d\theta} + w \right)$$

## Deformazioni nei paralleli

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{r} (u \cos \theta + w \sin \theta)$$

**r: raggio parallelo**

# Cupole

## Relazioni costitutive

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_S} (S_1 - \nu S_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_S} (S_2 - \nu S_1)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta ab}{ab} = \frac{\Delta ab}{R_1 d\theta} = \frac{1}{R_1} \left( \frac{du}{d\theta} + w \right) \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{R} (u \cos \theta + w \sin \theta)$$

Sostituendo si ottengono delle equazioni differenziali le cui soluzioni sono del tipo (Belluzzi pag 277)

$$w = R_2 \varepsilon_2 - u \operatorname{ctg} \theta = R_2 \varepsilon_2 - \cos \theta \left[ \int \frac{f(\theta)}{\operatorname{sen} \theta} d\theta + C \right].$$

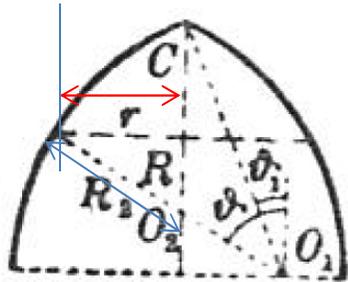
$$u = \operatorname{sen} \theta \left[ \int \frac{f(\theta)}{\operatorname{sen} \theta} d\theta + C \right],$$

$$f(\theta) = \frac{1}{E_S} [S_1(R_1 + \nu R_2) - S_2(R_2 + \nu R_1)]$$

**NB: spostamenti e deformazioni molto piccoli rispetto alla scala strutturale**

# Cupola ogivale

## Equilibrio alla traslazione verticale



**Raggio del parallelo**

$$r = R \sin \theta - R \sin \theta_1$$

**Raggio meridiano**

$$R_2 = \frac{r}{\sin \theta_1} = R \frac{\sin \theta - \sin \theta_1}{\sin \theta}$$

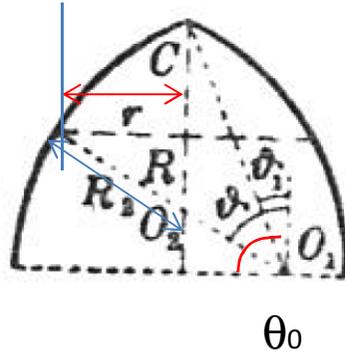
**Peso Q della cupola sovrastante il parallelo**

$$Q = \int_{\theta_1}^{\theta} 2\pi r R d\theta \gamma_s = 2\pi \gamma_s R^2 [\cos \theta_1 - \cos \theta - (\theta - \theta_1) \sin \theta_1]$$

$$S_1 = \frac{-Q}{2\pi r \sin \theta} = -\gamma_s R \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta - (\theta - \theta_1) \sin \theta_1}{\sin \theta}$$

$$S_2 = -\frac{R_2 S_1}{R_1} - R_2 \gamma_s = -\gamma_s R \frac{(\theta - \theta_1) \sin \theta_1 - \cos \theta_1 + \cos \theta + (\sin \theta - \sin \theta_1) \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

# Cupola ogivale



Sia l'angolo  $\theta_0$  l'angolo al contorno

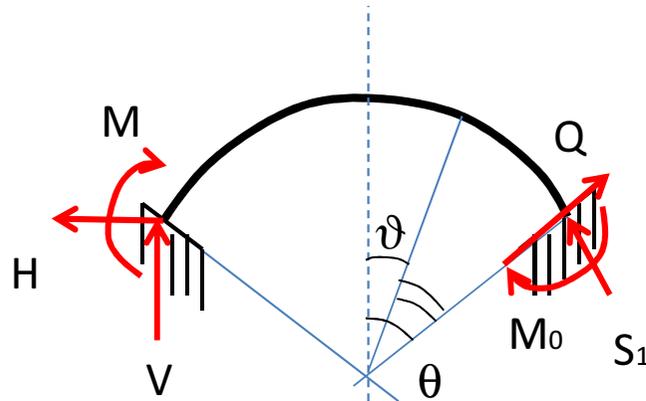
Se  $\theta_0 < \pi/2$  anello di bordo è teso

Se  $\theta_0 > \pi/2$  anello di bordo è compresso (cupole arabe)

Se  $\theta_1 = 0$  si ritorna al caso delle cupole sferiche

# Teoria flessionale asintotica (Geckeler 1926)

per carichi assial-simmetrici



$\vartheta$  colatitude

$\theta$  Colatitude al vincolo

$$\omega = \theta - \vartheta$$

Geckeler ha ottenuto una equazione di equilibrio in direzione radiale

$$\frac{d^4 Q}{d\vartheta^4} + 4\gamma^4 Q = 0 \quad \text{dove} \quad \gamma^4 = \frac{EsR^2}{B} = \frac{R^2}{12(1-\nu^2)s^2}$$

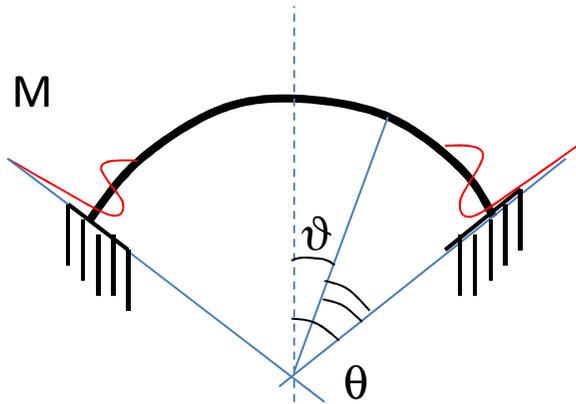
La cui soluzione è del tipo

$$Q = C_1' e^{-\gamma\omega} \sin \gamma\omega + C_2' e^{-\gamma\omega} \cos \gamma\omega$$

ponendo  $C_1' = C \cos \psi$ ,  $C_2' = C \sin \psi$

Il taglio diventa  $Q = C e^{-\gamma\omega} \sin(\gamma\omega + \psi)$

# Teoria flessionale asintotica (Geckeler 1926)



Il taglio diventa

$$Q = Ce^{-\gamma\omega} \sin(\gamma\omega + \psi)$$

Si dimostra che il momento si può calcolare come

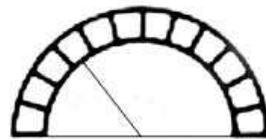
$$M = C_1 e^{-\gamma\omega} \sin(\gamma\omega + C_2)$$

In prossimità del bordo (strato limite in idraulica) si hanno momenti elevati rapidamente oscillanti

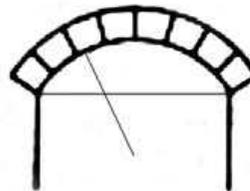
Tali momenti sono difficili da cogliere con il metodo degli elementi finiti poiché si esauriscono rapidamente

# Oss: vari tipi di arco

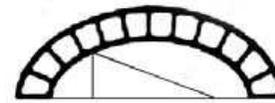
Da <http://www.webalice.it/maurizio.berti1/bertirestauro/07tecniche/dellatradizione07/fattoxmodena.htm>



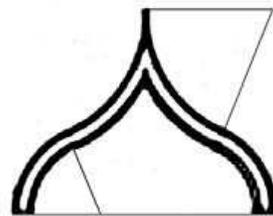
arco a tutto sesto



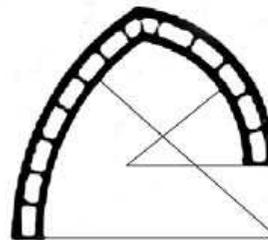
arco a sesto ribassato



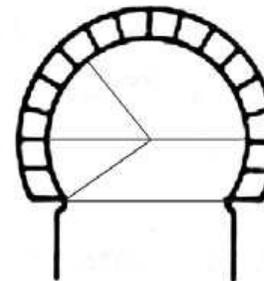
arco ellittico



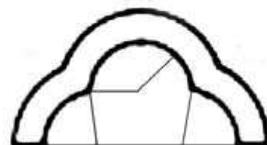
arco a ogiva



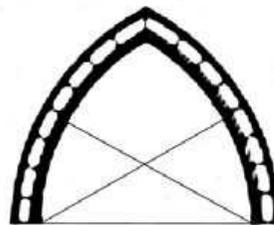
arco rampante



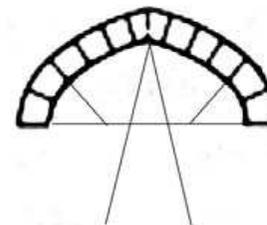
arco arabo



arco lobato



arco gotico



arco Tudor

# Oss: vari tipi di arco

Il comportamento di un arco è tanto più soddisfacente quanto meno la curva delle pressioni di discosta dall'asse dell'arco

Rispetto all'arco a tutto sesto, l'arco a sesto acuto risulta meno sollecitato a momento flettente in quanto l'asse si avvicina alla funicolare del carico uniforme distribuito

