Aste compresse: Effetti della non linearità del materiale sul carico critico

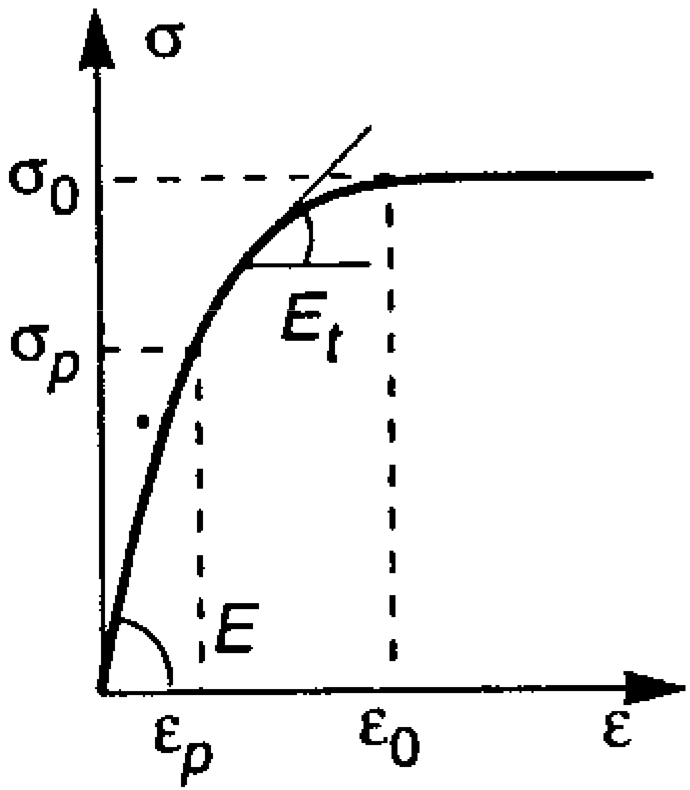
RIF: LC III pag 319

Il carico critico per unità di superficie corrispondente alla perdita di unicità della risposta in caso di comportamento puramente elastico (formula di Eulero)

$$\sigma_{\mathbf{E}} = \frac{\pi^2 \mathbf{E}}{\lambda^2}$$

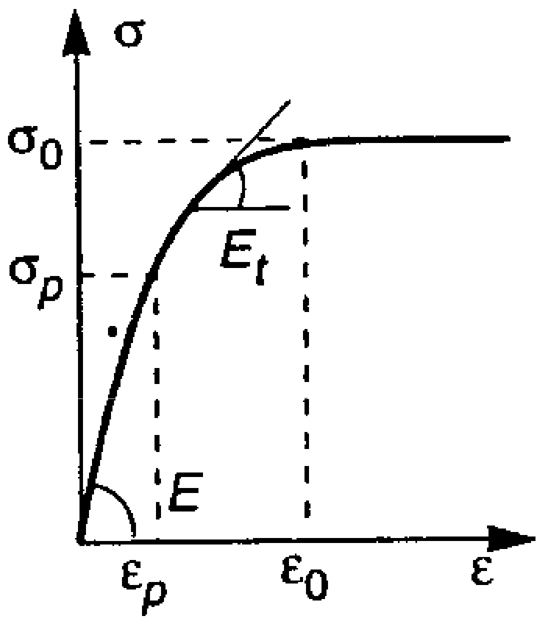
Risulta tanto più elevato quanto meno l'asta è snella.
Tuttavia, nessun materiale da costruzione si mantiene indefinitamente elastico
Che succede se si tiene conto della non linearità del materiale?

Aste compresse: Effetti della non linearità del materiale sul carico critico



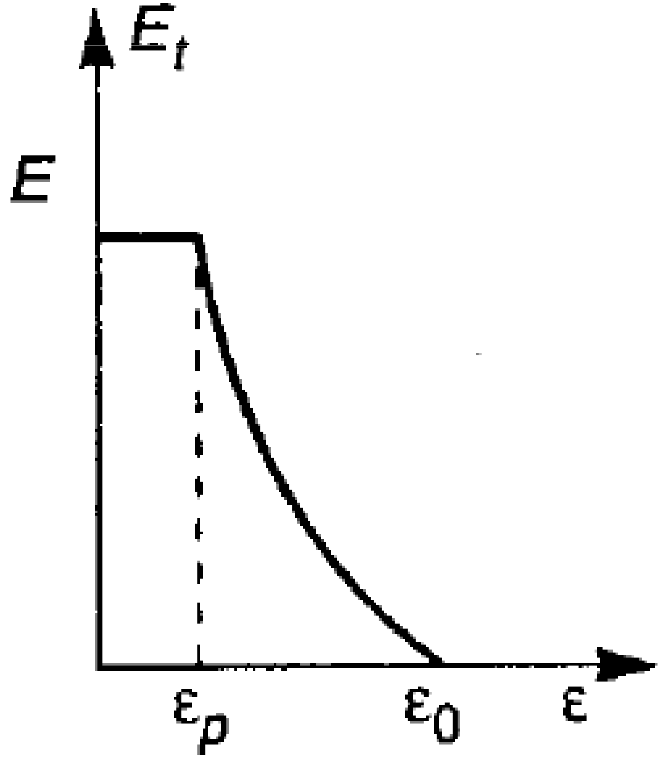
Che succede se si tiene conto della non linearità del materiale? Sappiamo che il legame costitutivo di un materiale metallico prevede, oltre una soglia limite di proporzionalità σ_p, un tratto non lineare crescente fino al picco σ_0, che è il limite di plasticizzazione, seguito da un plateau lineare

Aste compresse: Effetti della non linearità del materiale sul carico critico

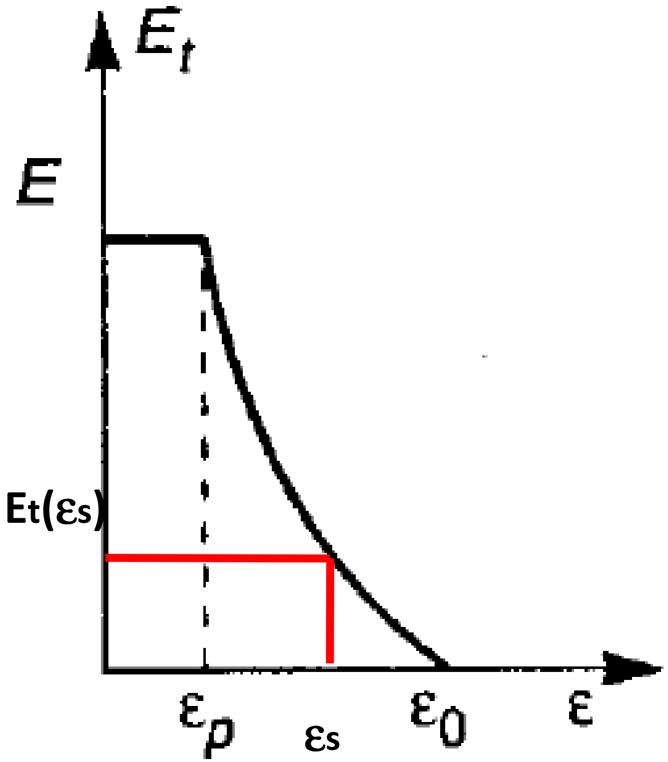


Il modulo tangente $\mathbf{E_t = \dfrac{d\sigma}{d\varepsilon}}$

varia con il valore della deformazione



Aste compresse: Effetti della non linearità del materiale sul carico critico



Supponiamo che l'asta compressa sia caratterizzata dalla tensione $\sigma_s > \sigma_p$ corrispondente alla deformazione ε_s
Allora il modulo tangente corrente corrispondente sarà quello corrispondente alla ε_s, cioè $E_t(\varepsilon_s)$

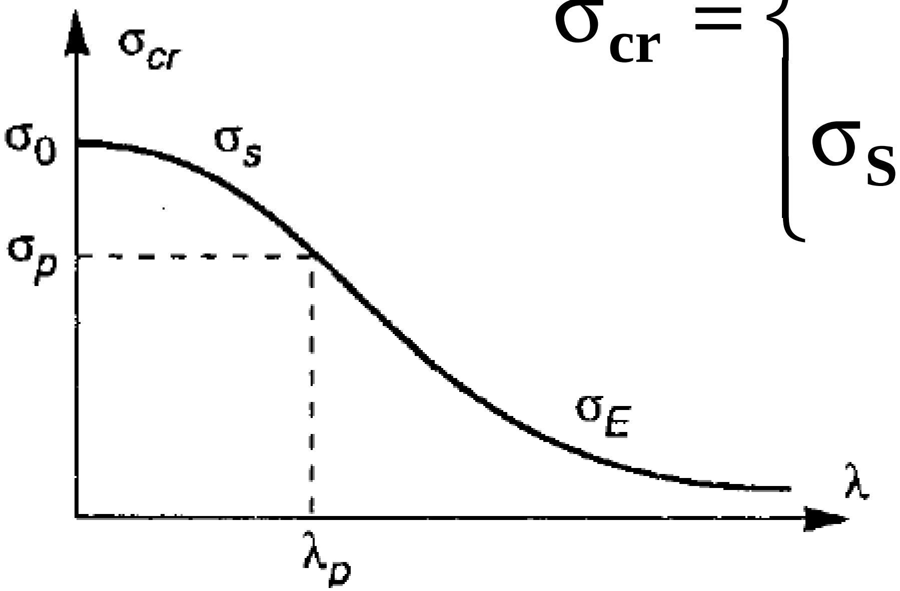
Effetti della non linearità sul carico critico

Allora la formula di Eulero nel regime in cui l'asta sperimenta una tensione maggiore di σ_p sarà data da

$$\sigma_S(\varepsilon_s) = \frac{\pi^2 E_t(\varepsilon_s)}{\lambda^2}$$

Formula di Shanley

$$\sigma_{cr} = \begin{cases} \sigma_E = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2} & \textbf{per} \quad \sigma < \sigma_p \\ \sigma_S = \dfrac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} & \textbf{per} \quad \sigma \geq \sigma_p \end{cases}$$



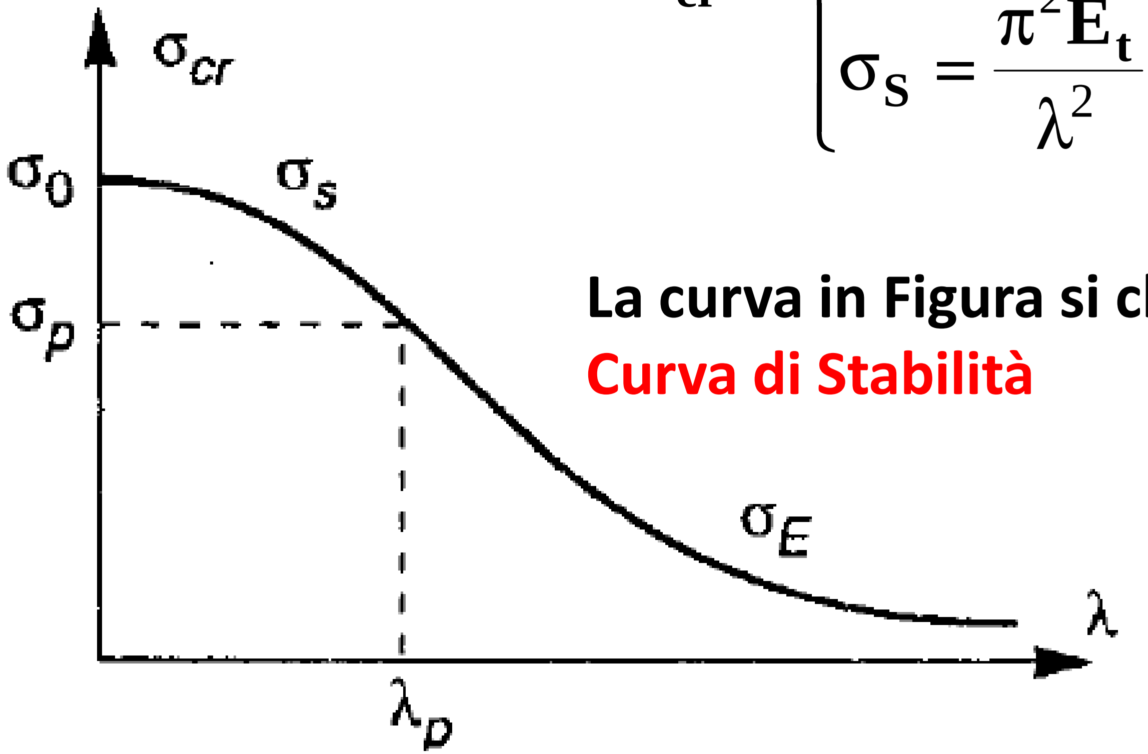
Dove $\lambda_p = \pi\sqrt{\dfrac{E}{\sigma_p}}$

È detta snellezza di transizione

Effetti della non linearità sul carico critico

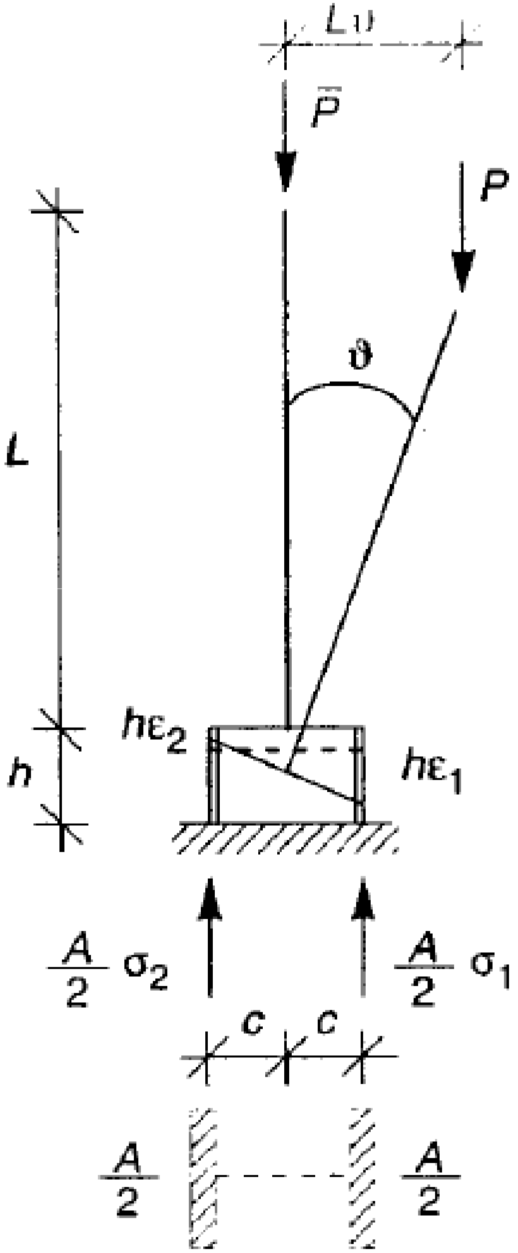
Possiamo anche scrivere la tensione critica come funzione della snellezza

$$\sigma_{cr} = \begin{cases} \sigma_E = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2} & \text{per} \quad \lambda > \lambda_p \\ \sigma_S = \dfrac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} & \text{per} \quad \lambda \leq \lambda_p \end{cases}$$



La curva in Figura si chiama
Curva di Stabilità

Asta di Shanley



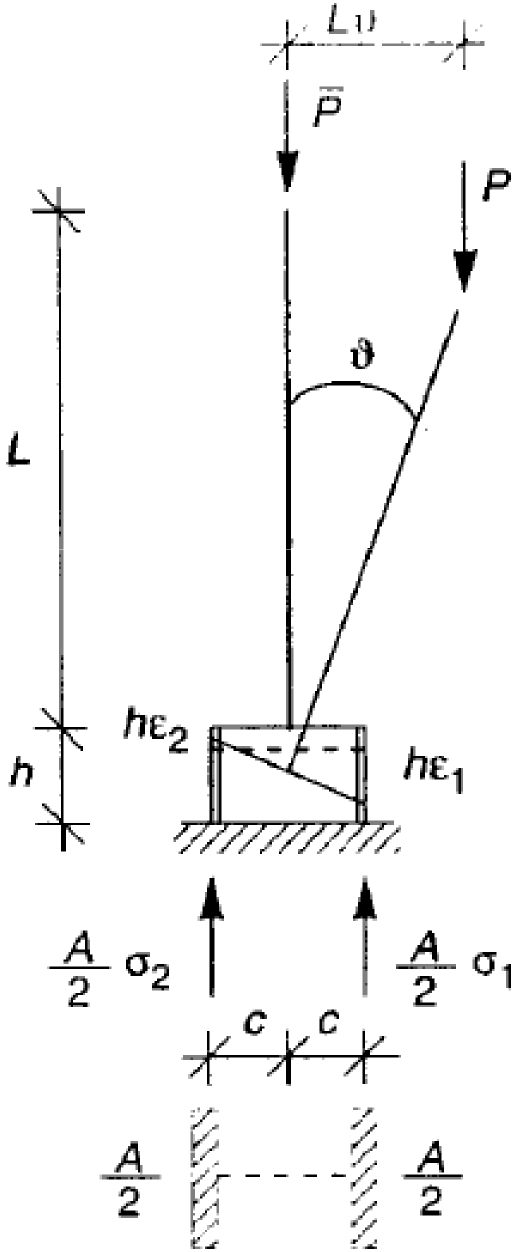
LC III p325

Un'asta rigida lunga L poggia su un tronco deformabile

Il tronco deformabile ha una sezione ad I ideale (anima trascurabile, resistono solo le ali assimilabili a delle flange) ed altezza h

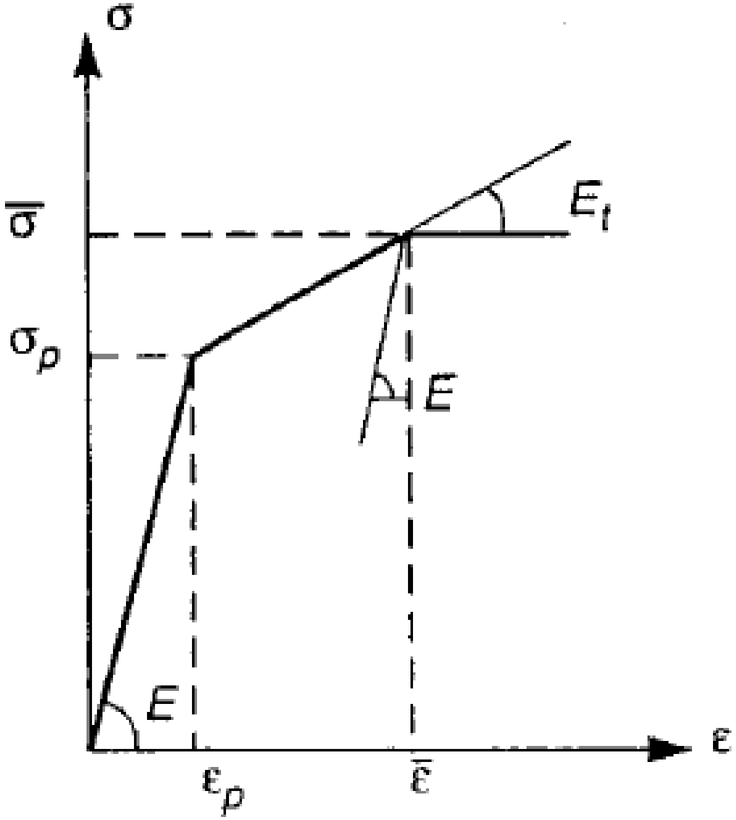
L'altezza h è supposta abbastanza piccola da poter trascurare le variazioni di sforzo e deformazione lungo di essa

Asta di Shanley

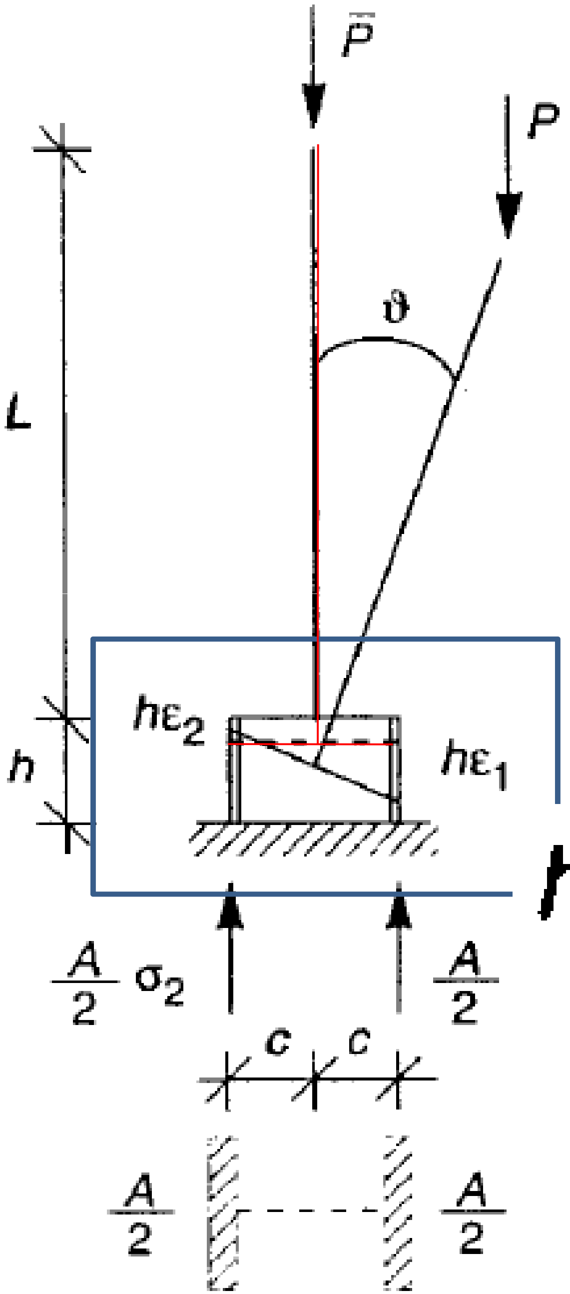


LA sezione trasversale delle flange sia A/2

Le flange hanno il comportamento bilineare elasto-plastico incrudente in figura con pendenza allo scarico pari ad E e modulo tangente E_t

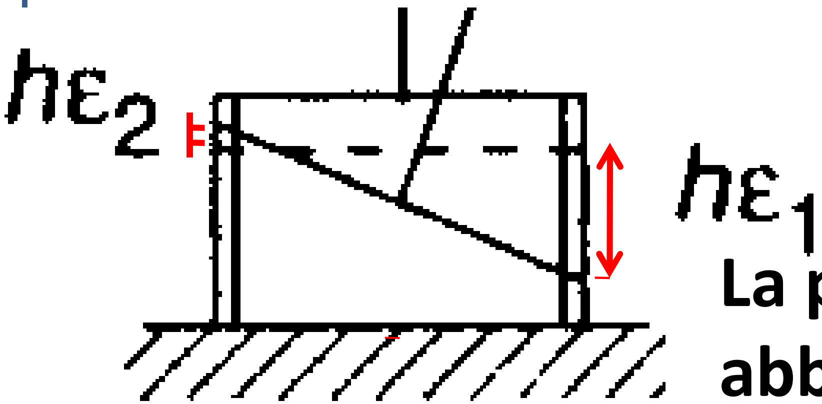


Asta di Shanley



Se l'asta è in equilibrio in configurazione invariata sotto il carico $\overline{\mathbf{P}}$ con rotazione θ=0
Equilibrio alla traslazione ed alla rotazione ➔

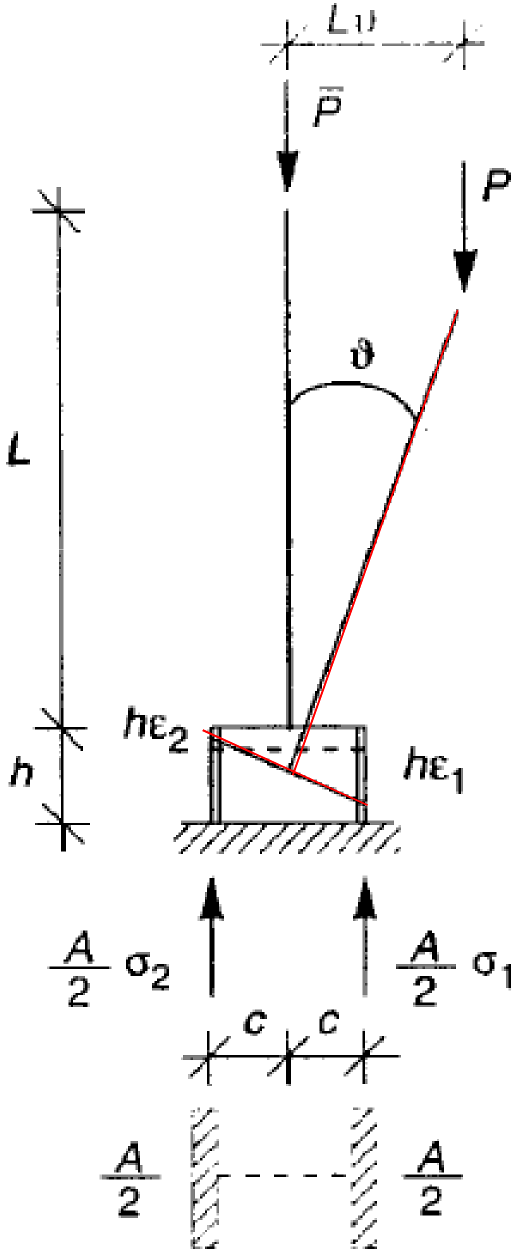
$$\left.\begin{array}{l}(\bar{\sigma}_1+\bar{\sigma}_2)\dfrac{\mathbf{A}}{2}=\overline{\mathbf{P}} \\ \bar{\sigma}_1=\bar{\sigma}_2\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{\sigma}_1=\bar{\sigma}_2=\bar{\sigma}=\frac{\overline{\mathbf{P}}}{\mathbf{A}}$$



$$\overline{\varepsilon_1}=\overline{\varepsilon_2}=0$$

La putrella si abbassa ma non ruota

Asta di Shanley



Consideriamo ora la configurazione variata

Equilibrio alla traslazione ed alla rotazione

$$\sigma_1 \frac{\mathbf{A}}{2} + \sigma_2 \frac{\mathbf{A}}{2} = \mathbf{P}$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)\frac{\mathbf{A}}{2}\mathbf{c} = \mathbf{P}\theta\mathbf{L}$$

Congruenza

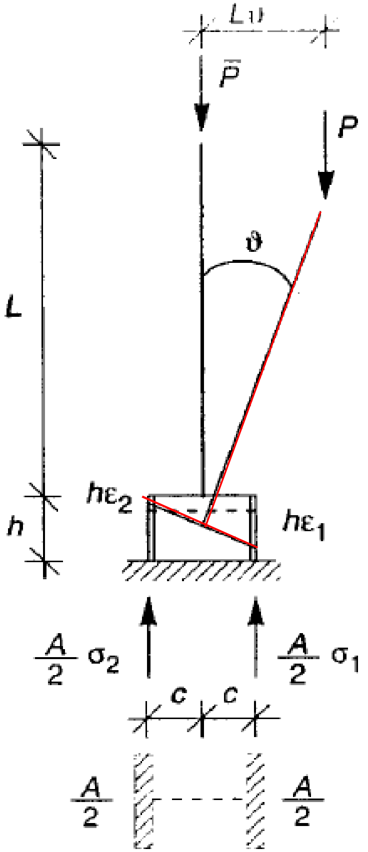
$$\vartheta = \frac{(\mathbf{h}\varepsilon_1 - \mathbf{h}\varepsilon_2)}{2\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{h}}{2\mathbf{c}}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

Poniamo

$$\sigma_1 = \bar{\sigma} + \Delta\sigma_1, \quad \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon_1 = \Delta\varepsilon_1$$

$$\sigma_2 = \bar{\sigma} + \Delta\sigma_2, \quad \varepsilon_2 = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon_2 = \Delta\varepsilon_2$$

Asta di Shanley



$$\sigma_1 = \bar{\sigma} + \Delta\sigma_1, \quad \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon_1 = \Delta\varepsilon_1$$

$$\sigma_2 = \bar{\sigma} + \Delta\sigma_2, \quad \varepsilon_2 = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon_2 = \Delta\varepsilon_2$$

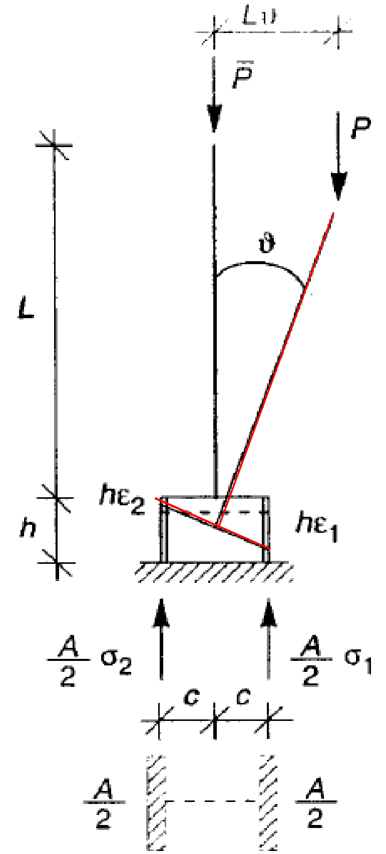
$$\left(2\frac{\bar{\mathbf{P}}}{\mathbf{A}} + \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2\right)\frac{\mathbf{A}}{2} = \mathbf{P} \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 = \frac{2(\mathbf{P} - \bar{\mathbf{P}})}{\mathbf{A}}}$$

$$(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2)\frac{\mathbf{A}}{2}\mathbf{c} = \mathbf{P}\vartheta\mathbf{L} \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2 = \frac{2\mathbf{P}\theta\mathbf{L}}{\mathbf{cA}}}$$

Congruenza

$$\vartheta = \frac{\mathbf{h}}{2\mathbf{c}}(\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2)$$

Asta di Shanley



$$\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 = \frac{2(\mathbf{P} - \overline{\mathbf{P}})}{\mathbf{A}}$$

$$\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2 = \frac{2\mathbf{P}\vartheta\mathbf{L}}{\mathbf{cA}}$$

$$\vartheta = \frac{\mathbf{h}}{2\mathbf{c}}(\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2)$$

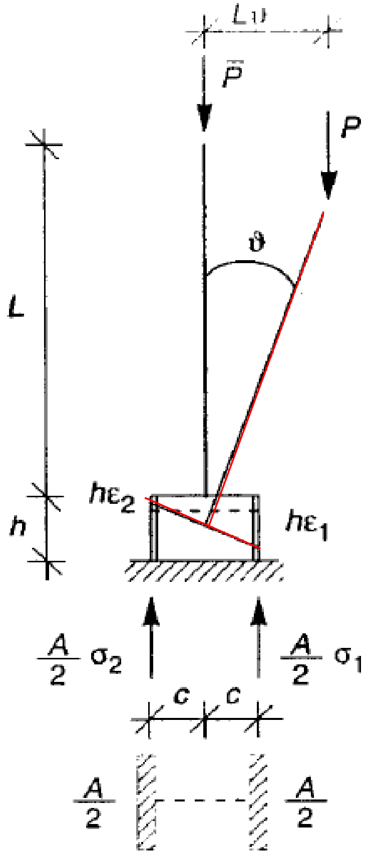
Il problema della determinazione del carico critico può essere affrontato seguendo diversi approcci

-Approccio Euleriano: il sistema si mantiene lineare fino alla perdita dell'unicità della soluzione

-Approccio alla Von Karman: la perdita di unicità dell'equilibrio si verifica a carico costante $\overline{\mathbf{P}}$

-Approccio di Shanley: la perdita di unicità si verifica per carico P > di $\overline{\mathbf{P}}$ andando a mobilitare la rigidezza tangente

Asta di Shanley: carico critico Euleriano



$$\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 = \frac{2(\mathbf{P} - \overline{\mathbf{P}})}{\mathbf{A}}$$

$$\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2 = \frac{\mathbf{2P\theta L}}{\mathbf{cA}}$$

-Approccio Euleriano: il sistema si mantiene lineare fino alla perdita dell'unicità della soluzione che avviene per $\overline{\sigma} \leq \sigma_{\mathbf{p}}$

Allora il legame costitutivo è elastico

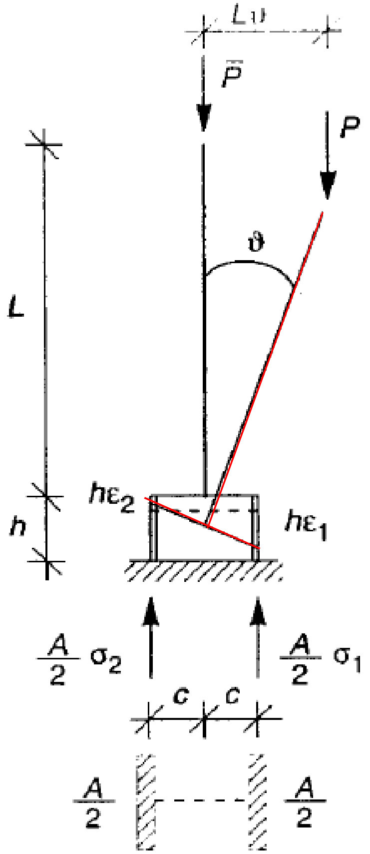
$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{\Delta\sigma_1}{\mathbf{E}}, \quad \Delta\varepsilon_2 = \frac{\Delta\sigma_2}{\mathbf{E}}$$

$$\vartheta = \frac{h}{2c}(\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2) = \frac{h}{2cE}(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2) =$$

$$= \frac{h}{2cE}\frac{2P\vartheta L}{cA}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{hPL}{c^2AE}\right)\vartheta = 0 \Rightarrow P_E = \frac{c^2AE}{hL}, \quad \sigma_E = \frac{c^2E}{hL}$$

Asta di Shanley: carico critico di Von Karman



$$\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 = \frac{2(\mathbf{P} - \overline{\mathbf{P}})}{\mathbf{A}}$$

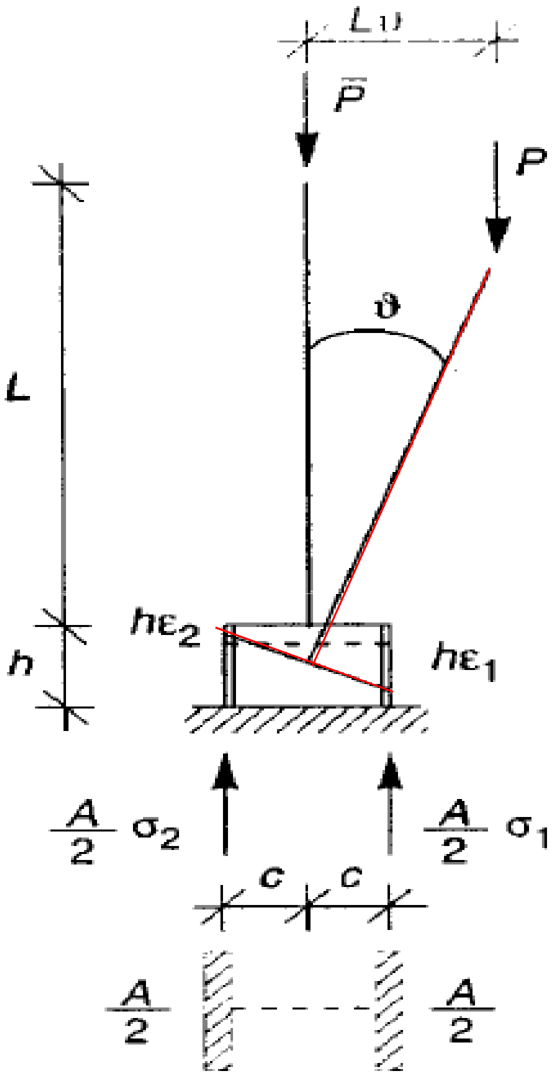
$$\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2 = \frac{2\mathbf{P}\vartheta\mathbf{L}}{\mathbf{cA}}$$

-Approccio di Von Karman: Supponiamo che $\bar{\sigma} > \sigma_p$ e si vuole determinare le condizioni in cui a parità di carico P=$\overline{\mathbf{P}}$ l'equilibrio sussiste anche in configurazione inflessa

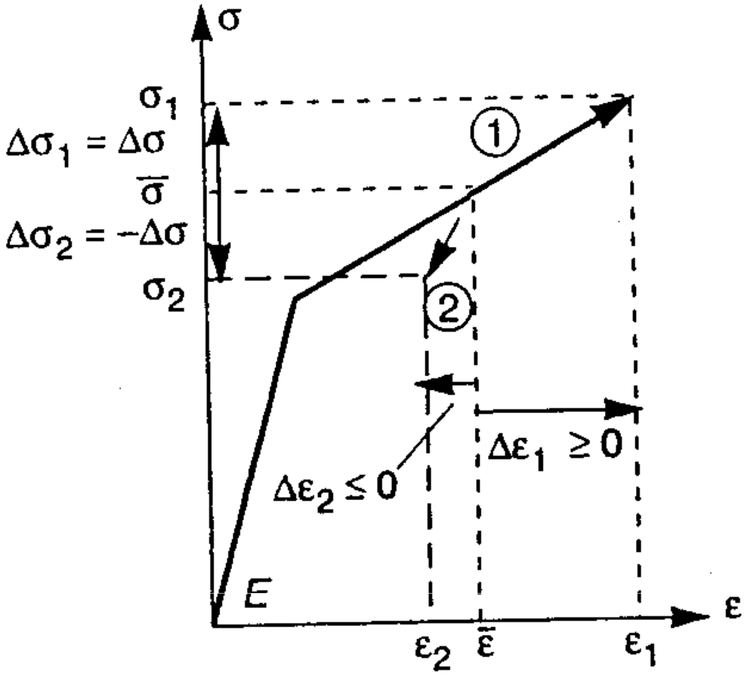
$$\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 = \frac{2(\mathbf{P} - \overline{\mathbf{P}})}{\mathbf{A}} = 0 \Rightarrow \Delta\sigma_1 = -\Delta\sigma_2$$

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma = \frac{\mathbf{P}\vartheta\mathbf{L}}{\mathbf{cA}}$$

Asta di Shanley: carico critico di Von Karman



$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma = \frac{\mathbf{P}\vartheta\mathbf{L}}{\mathbf{cA}}$$

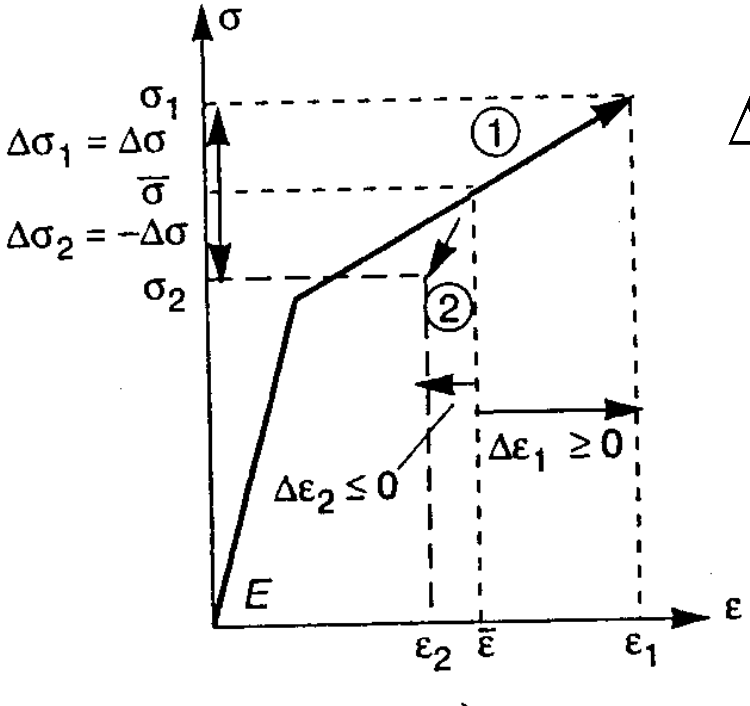


a)

La flangia di destra si comprime ulteriormente $\Delta\varepsilon_1 = \dfrac{\mathbf{P}\vartheta\mathbf{L}}{\mathbf{E_t cA}}$

Mentre quella di sinistra vede diminuire la sua deformazione $\Delta\varepsilon_2 = -\dfrac{\mathbf{P}\vartheta\mathbf{L}}{\mathbf{EcA}}$

Asta di Shanley: carico critico di Von Karman



a)

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{P\vartheta L}{E_t c A} \qquad \Delta\varepsilon_2 = -\frac{P\vartheta L}{E c A}$$

$$\vartheta = \frac{h}{2c}(\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2)$$

$$\Rightarrow \vartheta = \frac{h}{2c}\left(\frac{P\vartheta L}{E_t c A} + \frac{P\vartheta L}{E c A}\right)$$

$$\vartheta = \frac{h}{c}\frac{E+E_t}{2EE_t}\frac{P\vartheta L}{cA} \Rightarrow \left(1 - \frac{hPL}{c^2 A}\frac{E+E_t}{2EE_t}\right)\vartheta = 0$$

$$\Rightarrow P_{VK} = \frac{c^2 A 2EE_t}{hL(E+E_t)} = \frac{c^2 A E_r}{hL}$$

Dove $E_r = \dfrac{2EE_t}{E+E_t}$

È il modulo ridotto di VK

Asta di Shanley: carico critico di Shanley

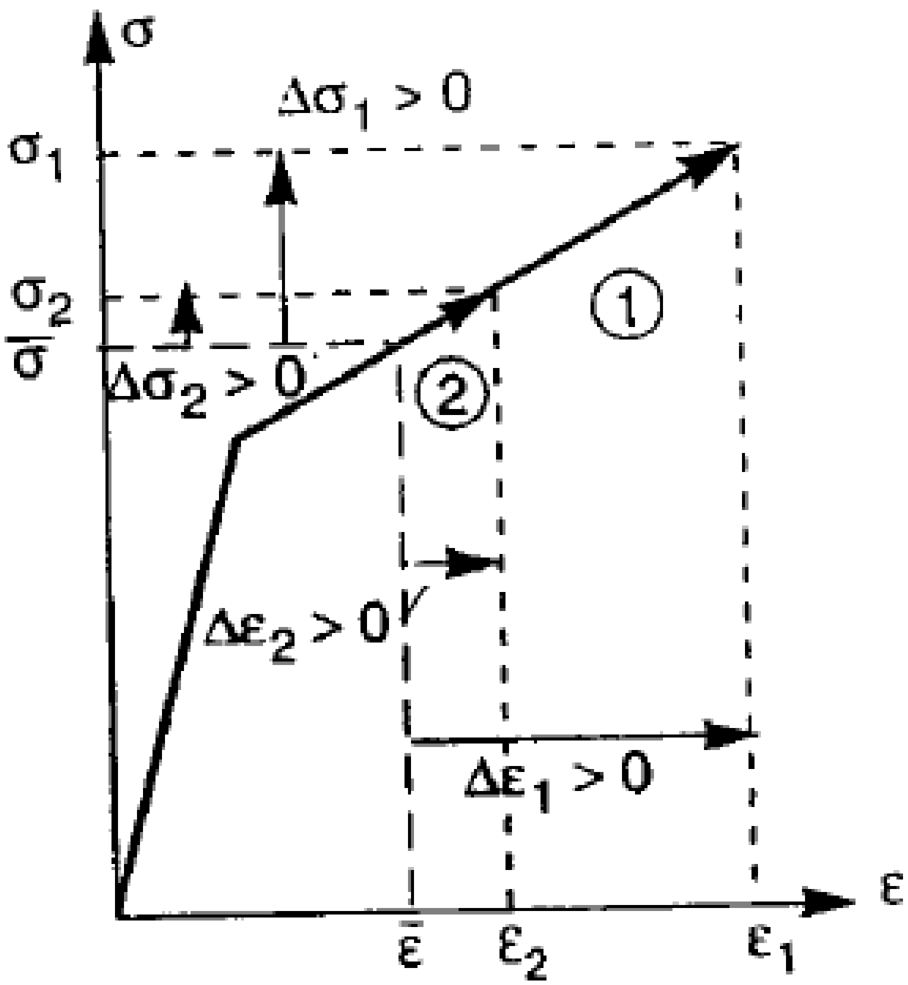
-Approccio di Shanley: Supponiamo che $\sigma > \sigma_p$ e che esistano dei valori del carico P> $\overline{\mathbf{P}}$ per cui l'equilibrio può sussistere anche in configurazione inflessa
La flangia di destra subirà ancora un incremento di compressione $\Delta\varepsilon_1$>0 ma la flangia di sinistra subisce anch'essa un incremento di compressione $\Delta\varepsilon_2$>0

Rispetto al caso di VK avremo che compare il modulo tangente anche nella deformazione $\Delta\varepsilon_2$

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{\Delta\sigma_1}{\mathbf{E_t}} \geq 0,$$

$$\Delta\varepsilon_2 = \frac{\Delta\sigma_2}{\mathbf{E_t}} \geq 0$$

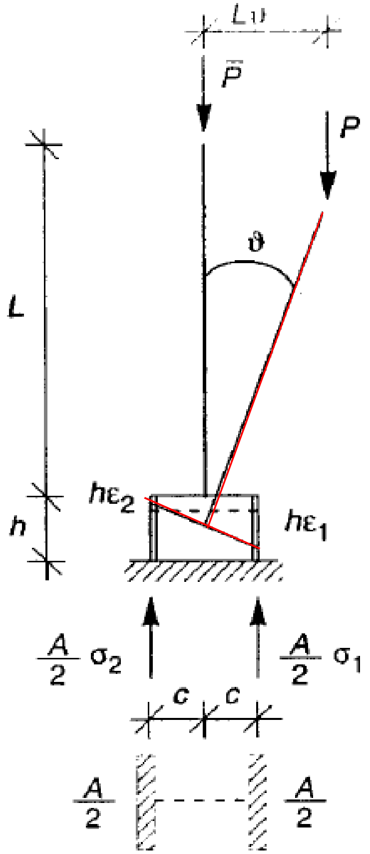
Asta di Shanley: carico critico di Shanley



-La situazione è indicata nella figura dove si vede che gli incrementi di deformazione sulle flange ora sono entrambi >0

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{\Delta\sigma_1}{\mathbf{E_t}} \neq \Delta\varepsilon_2 = \frac{\Delta\sigma_2}{\mathbf{E_t}}$$

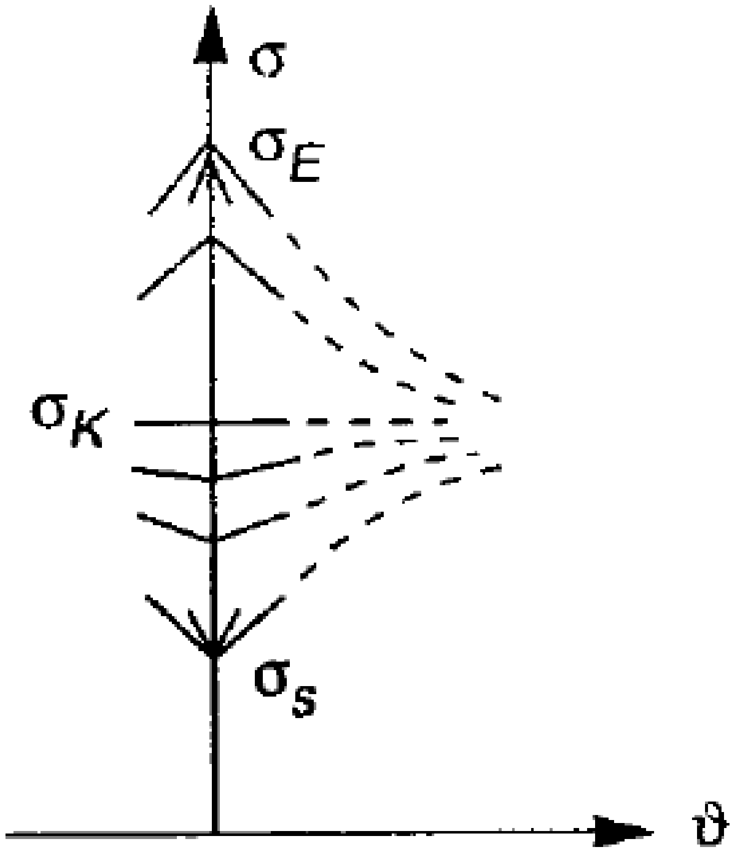
Asta di Shanley: carico critico di Shanley



Il calcolo è analogo a quello del caso elastico tranne per il fatto che al posto di E si considera Et

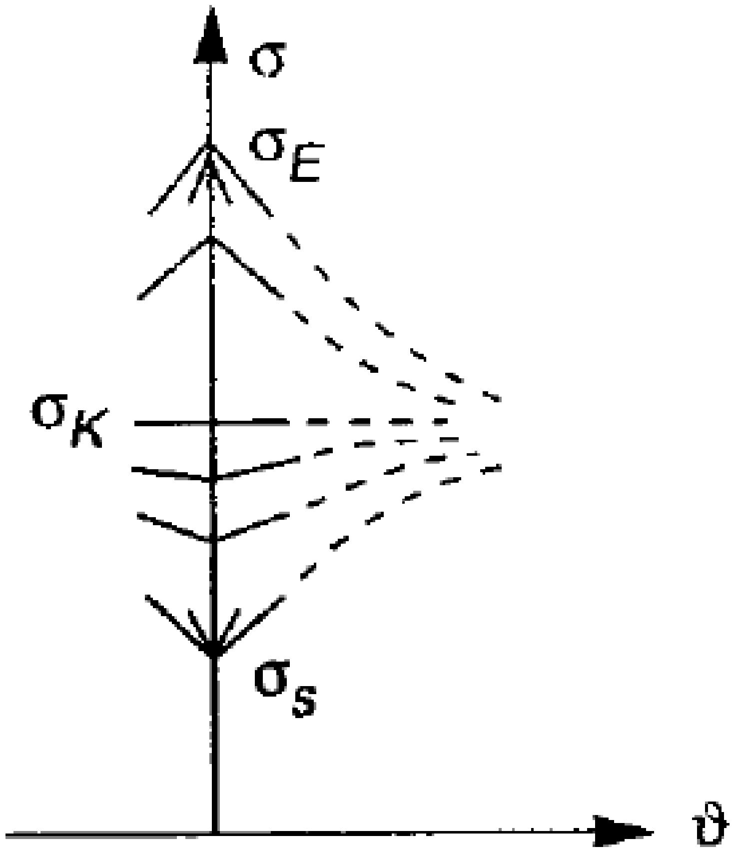
$$P_S = \frac{c^2 A E_t}{hL}, \quad \sigma_S = \frac{c^2 E_t}{hL}$$

Asta di Shanley



Dunque il carico critico di Shanley è il più piccolo valore del carico critico in corrispondenza del quale l'asta può essere in equilibrio sotto un carico $\overline{\mathbf{P}} + \Delta\mathbf{P}$ in configurazione ruotata avendo che il tronco deformabile è compresso abbastanza da dare un incremento di deformazione positivo su entrambe le flange in modo che tutte le fibre rispondono con il modulo tangente E_t

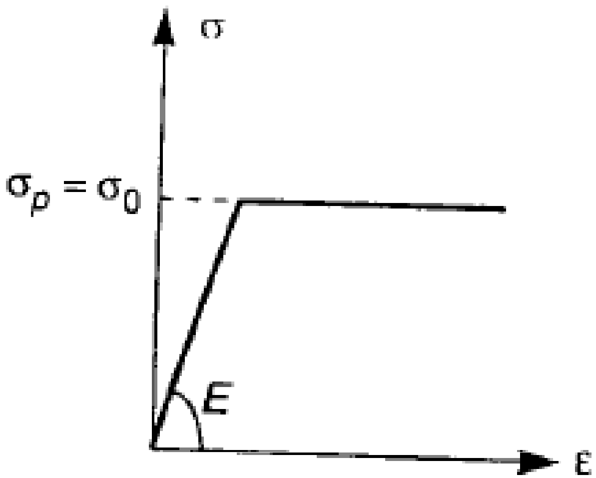
Asta di Shanley



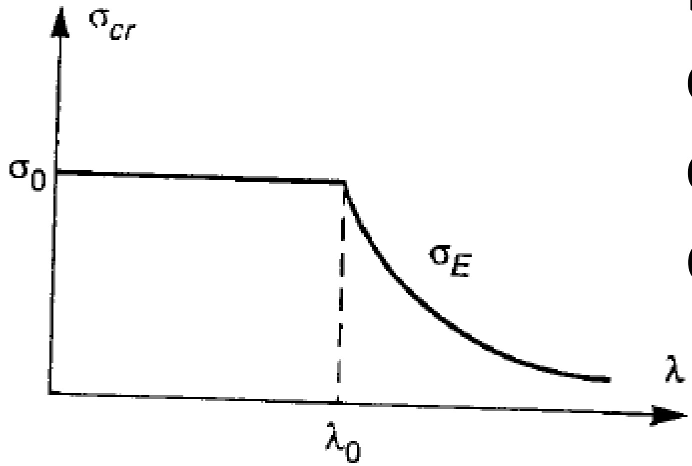
Da ogni punto dell'intervallo $\sigma_s <= \sigma <= \sigma_E$ sull'asse delle ordinate dipartono possibili configurazioni inflesse in equilibrio sotto determinati incrementi di carico
Raggiunto il carico σ_s l'asta può mantenersi rettilinea come seguire la configurazione ruotata
Per $\sigma = \sigma_K$ sono possibili inflessioni a carico costante

Per $\sigma_K <= \sigma <= \sigma_E$ le diramazioni hanno pendenza negativa e l'equilibrio richiede che il carico diminuisca

Caso elasto-plastico perfetto



Nella maggior parte dei casi si suppone che il materiale segua un legame costitutivo elastoplastico perfetto dove il modulo tangente si annulla e la tensione non cresce oltre σ_p=σ_0



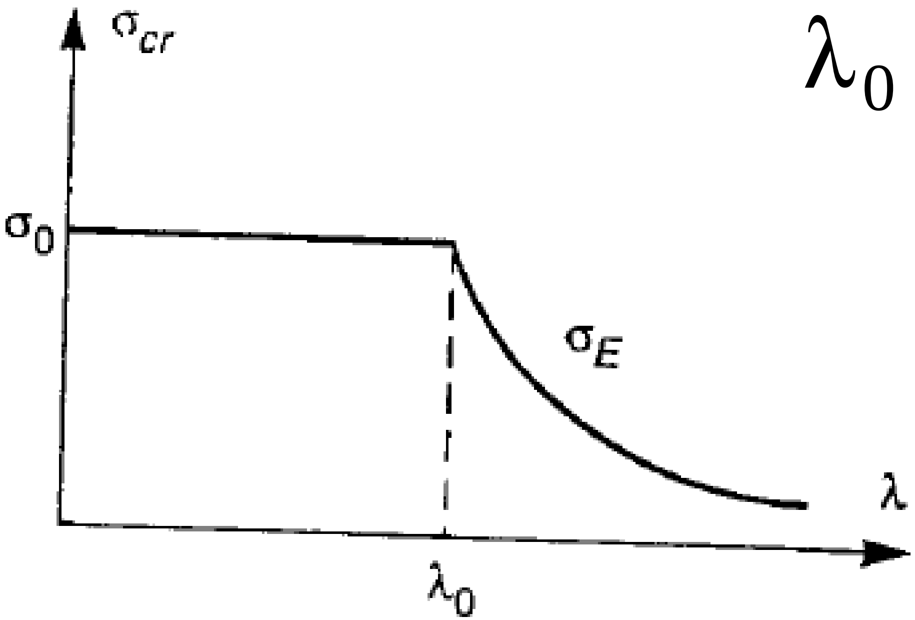
Pertanto si lavora supponendo che la dipendenza del carico critico dalla snellezza sia come quella indicata in figura

Caso elasto-plastico perfetto

$$\sigma_{cr} = \begin{cases} \sigma_E = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2} & \textbf{per} \quad \lambda > \lambda_0 \\ \sigma_S = \sigma_0 & \textbf{per} \quad \lambda \le \lambda_0 \end{cases}$$

Curva di stabilità per il caso elasto-plastico perfetto ideale

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}}$$



Validità delle formule trovate

Le considerazioni fatte precedentemente sull'asta di Shanley e le curve di stabilità hanno una validità prevalentemente teorica in quanto valgono per aste elasto-plastiche perfette ovvero senza imperfezioni

Tuttavia nella pratica le imperfezioni sono molto frequenti e devono essere considerate perché influenzano la curva di stabilità ed i carichi critici

Pertanto nel seguito si considera l'effetto di eventuali imperfezioni sulla stabilità