

Carichi critici aste compresse

Il carico critico Euleriano si scrive come

$$\mathbf{P_E} = \frac{\pi^2 \mathbf{EI}}{\ell_0^2}$$

Dove ℓ_0 è la lunghezza libera di inflessione

$$\ell_0 = \frac{\ell}{\sqrt{\chi}}$$

$$\chi = \left(\frac{\alpha_1 \ell}{\pi} \right)^2$$

**Coefficiente adimensionale che riflette
l'influenza dei vincoli**

**α_1 è la più piccola radice dell'equazione che si
ottiene ponendo = 0 il determinante della
matrice dei coefficienti**

Snellezza

Risulta conveniente considerare la tensione ottenuta dividendo per l'area della sezione trasversale

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2 A} = \frac{\pi^2 E \rho^2}{l_0^2}$$

Dove il raggio di inerzia è

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

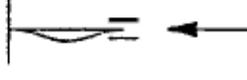
Poniamo $\lambda = \frac{l_0}{\rho} = \frac{l}{\sqrt{\chi}} \sqrt{\frac{A}{I}}$

Si ha

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Snellezza, adimensionale, esprime la geometria della sezione, lunghezza trave, e condizioni di vincolo

Tabella 15.1

Caso	Condizioni al contorno		$v_\ell(x)$	x	ℓ_0/ℓ
	$x = 0$	$x = \ell$			
(a) 	$v = 0$	$v = 0$	$\sin \frac{\pi x}{\ell}$	1.0	1.0
	$v'' = 0$	$v'' = 0$			
(b) 	$v = 0$	$v'' = 0$	$1 - \cos \frac{\pi x}{2\ell}$	0.25	2.0
	$v' = 0$	$v''' + \alpha^2 v' = 0$			
(c) 	$v = 0$	$v = 0$	$-1 + \frac{x}{\ell} + \cos \frac{4.493x}{\ell}$	2.046	0.699
	$v' = 0$	$v'' = 0$	$-\frac{1}{4.493} \sin \frac{4.493x}{\ell}$		
(d) 	$v = 0$	$v = 0$	$1 - \cos \frac{2\pi x}{\ell}$	4.0	0.5
	$v' = 0$	$v' = 0$			
(e) 	$v' = 0$	$v = 0$	$1 + \cos \frac{\pi x}{\ell}$	1.0	1.0
	$v''' = 0$	$v' = 0$			
(f) 	$v' = 0$	$v = 0$	$\cos \frac{\pi x}{2\ell}$	0.25	2.0
	$v''' = 0$	$v'' = 0$			

Influenza della deformabilità assiale sul carico critico

Se si considera la deformabilità assiale il carico critico cambia
Per esempio nel caso della trave doppiamente incernierata

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \left(1 + \frac{P_E}{EA}\right) = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} + \frac{\pi^2 EI}{\ell^2 EA} P_E \Rightarrow$$

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2}$$

il carico critico cresce rispetto a quello calcolato senza deformabilità assiale, ma in modo molto lento al crescere della snellezza ed in modo marginale per aste tozze

Per esempio se $\lambda=30$ (valore attendibile per molte travi) P_E cresce solo dell' 1%



Influenza della deformabilità tagliante sul carico critico

In tal caso, utilizziamo la cinematica della trave deformabile a taglio di Timoshenko

- la rotazione φ della sezione non coincide con v'
- Le variabili cinematiche sono lo spostamento trasversale della linea media $v(x)$ e la rotazione φ

le equazioni di equilibrio nel caso di soli carichi assiali si scrivono come (A^* è l'area ridotta a taglio)

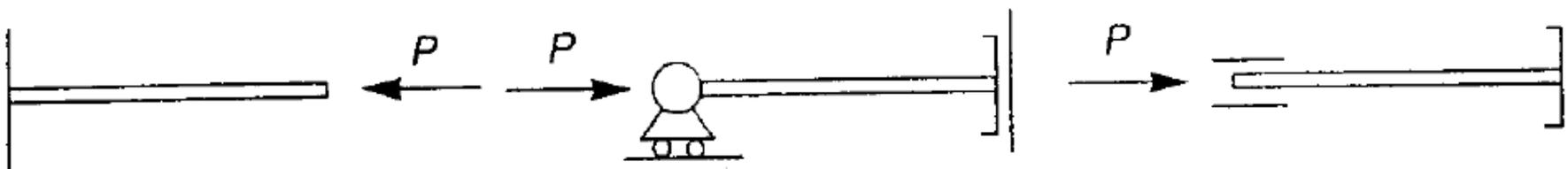
$$\mathbf{GA}_* (\mathbf{v}''(\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{x})) - \mathbf{Pv}''(\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{EI}\varphi''(\mathbf{x}) + \mathbf{GA}_* (\mathbf{v}'(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) = 0$$

Dove le equazioni costitutive sono

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = -\mathbf{EI}\varphi'(\mathbf{x}), \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{GA}_* (\mathbf{v}'(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) - \mathbf{Pv}'(\mathbf{x})$$

Influenza della deformabilità tagliante sul carico critico



Con riferimento ai casi riportati in figura dove il taglio $T(\ell)=0$, dopo opportuni passaggi si perviene alla seguente equazione di equilibrio

$$v''''(\mathbf{x}) + \alpha^2 v''(\mathbf{x}) = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI \left(1 - \frac{P}{GA_*}\right)}$$

+condizioni al contorno (LC III pag 226)

OSS: l'equazione differenziale di equilibrio ha la stessa struttura dell'equazione di equilibrio della trave non deformabile a taglio dunque i valori di α per cui si perde l'unicità della soluzione sono gli stessi ma cambia il valore del carico critico in quanto l'espressione di α in funzione di P è cambiata

Influenza della deformabilità tagliante sul carico critico

Risolvendo il problema agli autovalori associato all'equazione di equilibrio differenziale si ha che la prima radice sarà α_1 tale che

$$\alpha_1^2 = \chi(\pi/\ell)^2$$

Risolvendo per P_E si ha il carico critico

$$P_E = \frac{EI\alpha_1^2}{1 + \alpha_1^2 \frac{EI}{GA_*}}$$

Ponendo

$$\beta = \chi\pi^2 \frac{EI}{GA_*\ell^2} = \pi^2 \frac{EI}{GA_*\ell_0^2}$$

Il carico critico si esprime come

$$P_E = \frac{\chi\pi^2}{1 + \beta} \frac{EI}{\ell^2} = \frac{1}{1 + \beta} P_{EF} \quad , \quad \text{dove} \quad P_{EF} = \chi\pi^2 \frac{EI}{\ell^2}$$

Influenza della deformabilità tagliante sul carico critico

Spesso si utilizza l'espressione

$$P_E = \frac{P_{EF}}{1 + \frac{P_{EF}}{GA_*}}$$

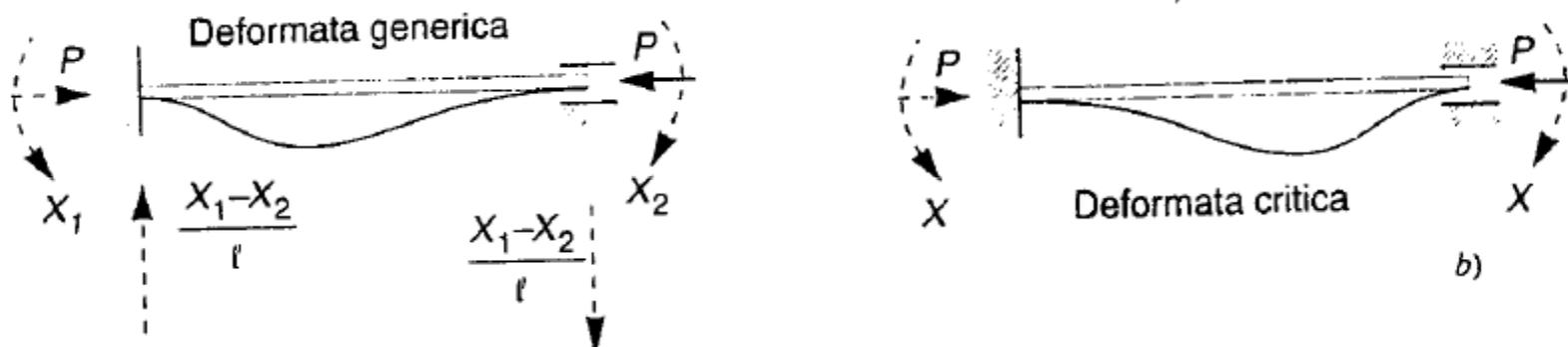
OSS: essa è valida per i casi vincolati con $T(\ell)=0$

Tuttavia possiamo dire che si tratta di una condizione verificata anche per l'asta incernierata

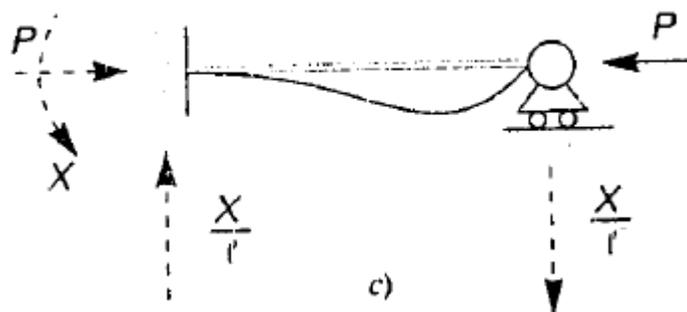


Influenza della deformabilità tagliante sul carico critico

Si dimostra che essa è valida anche nel caso seguente
Dove il taglio potrebbe esserci ma si annulla in
corrispondenza della deformata critica



Mentre la formula precedente non vale nel caso incastro-
appoggio



Influenza della deformabilità tagliante sul carico critico

In definitiva si utilizza la formula in tutti i casi

$$P_E = \frac{1}{1 + \beta} P_{EF}$$

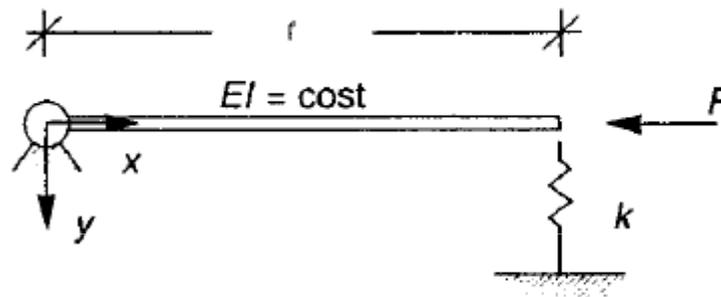
Tenendo conto che è approssimata, oppure si utilizza la definizione della tensione corrispondente

$$\sigma_E = \pi^2 \frac{E}{\lambda_{eq}^2} \quad \lambda_{eq} = \lambda \sqrt{1 + \beta}$$

Oss: Si osservi che $P_E < P_{EF}$

Aste vincolate elasticamente

Nel caso di vincoli cedevoli elasticamente occorre cambiare le condizioni al contorno per tener conto della presenza delle molle



Per esempio per la trave in figura le condizioni al contorno sono

$$v(0) = 0, \quad v''(0) = 0, \quad v''(l) = 0$$

$$v'''(l) + \alpha^2 v'(l) - \frac{k}{EI} v(l) = 0$$

Aste vincolate elasticamente

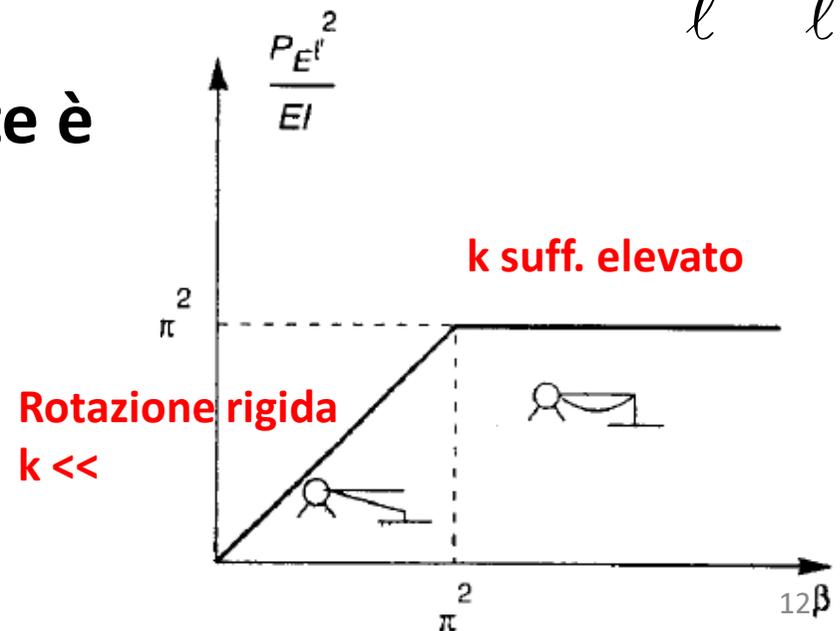
Il determinante della matrice associata al problema agli autovalori relativo al calcolo dei carichi critici si annulla per

$$((\alpha l)^2 - \beta) \sin \alpha l = 0 \quad \text{dove} \quad \beta = \frac{k l^3}{EI}$$

La più piccola soluzione significativa è $\alpha_1 = \min\left(\frac{\sqrt{\beta}}{l}, \frac{\pi}{l}\right)$

Il carico critico corrispondente è

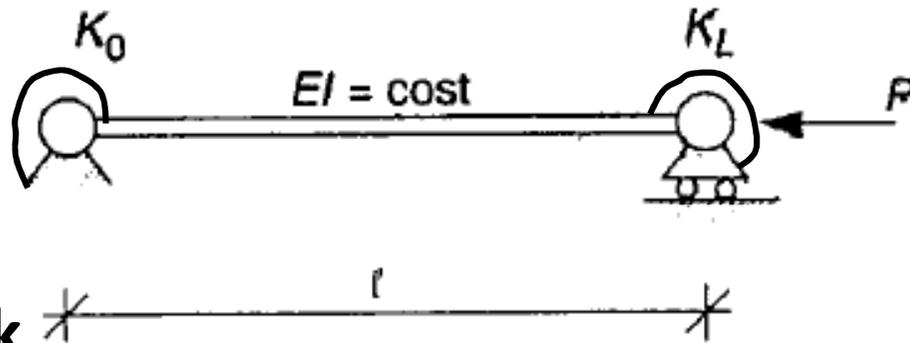
$$P_E = \begin{cases} \beta \frac{EI}{l^2} & \text{se } \beta \leq \pi^2 \\ \pi^2 \frac{EI}{l^2} & \text{se } \beta \geq \pi^2 \end{cases}$$



Aste vincolate elasticamente

Esistono in letteratura molte soluzioni per casi particolari
 Si segnala in particolare la soluzione di Newmark per il
 caso della trave con cerniere elastiche

$$P_E = \chi \pi^2 \frac{EI}{\ell^2}$$



Formula di Newmark

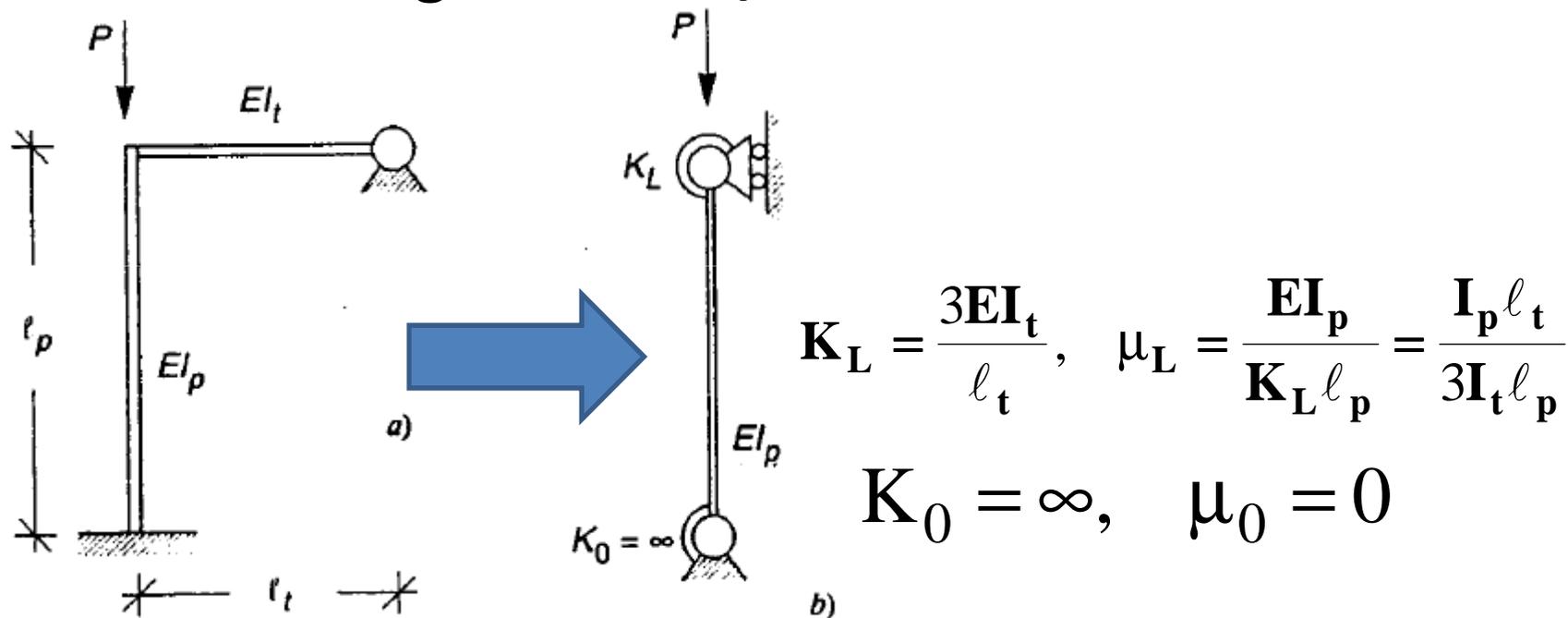
$$\chi = \frac{(0.4 + \mu_0)(0.4 + \mu_L)}{(0.2 + \mu_0)(0.2 + \mu_L)} \quad \text{con} \quad \mu_0 = \frac{EI}{K_0 \ell}, \quad \mu_L = \frac{EI}{K_L \ell}$$

Per ogni valore di K_0 e K_L la formula di Newmark comporta un'approssimazione $< 4\%$

Esempio con aste vincolate elasticamente

Consideriamo il telaio in figura

La trave può essere vista come una molla flessionale di rigidezza $3EI_t/\ell$



$$\chi = \frac{(0.4 + \mu_0)(0.4 + \mu_L)}{(0.2 + \mu_0)(0.2 + \mu_L)} \quad \text{con} \quad \mu_0 = \frac{EI}{K_0 \ell}, \quad \mu_L = \frac{EI}{K_L \ell}$$

Esempio con aste vincolate elasticamente

Per $\ell_t=0.6\ell_p$, $I_t=4I_p$, si ha $\mu_L=0.15$

$$\chi = \frac{(0.4)(0.4 + 0.15)}{(0.2)(0.2 + 0.15)} = 3.143 \quad \Rightarrow \quad P_E = 3.143\pi^2 \frac{EI_p}{\ell_p^2} = 31.020 \frac{EI_p}{\ell_p^2}$$

$$\ell_0 = \frac{\ell_p}{\sqrt{\chi}} = 0.564\ell_p$$

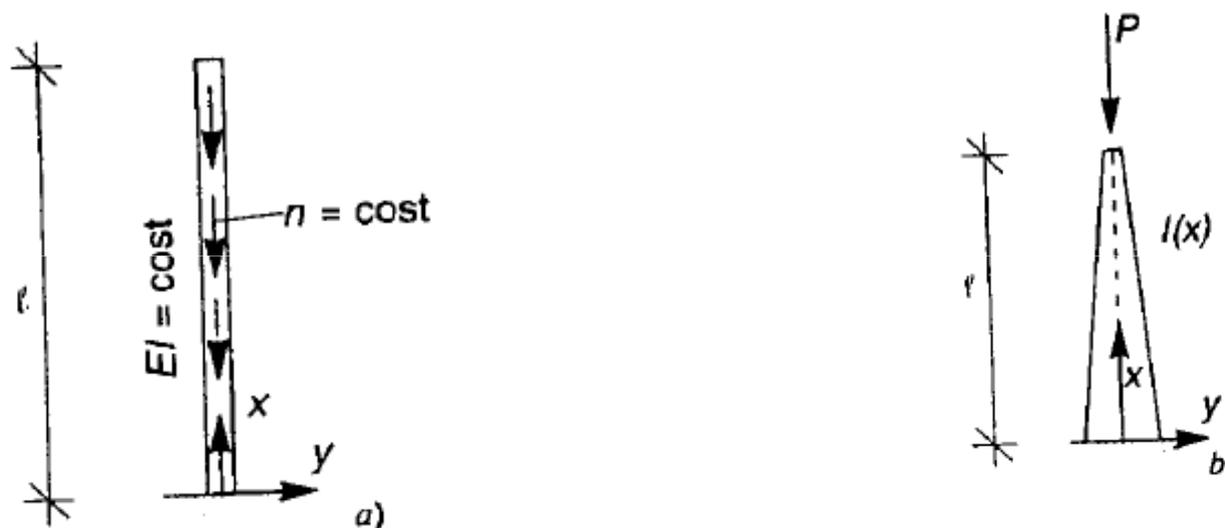
$\ell_p=5\text{m}$, sezione circolare cava, raggio medio $R=45\text{mm}$, spessore $b=5\text{mm}$

$$\ell_0 = 2.82\text{m}, \quad \lambda = 88.7 \quad \sigma_E = 258.6\text{MPa}, \quad P_E = 0.366\text{MN}$$

Se la molla in sommità sparisce e rimane solo la cerniera il carico critico è $P_E = 0.238\text{MN}$ dunque il 54% inferiore allo schema attuale

Aste di sezione variabile o soggette a carichi distribuiti (pile da ponte)

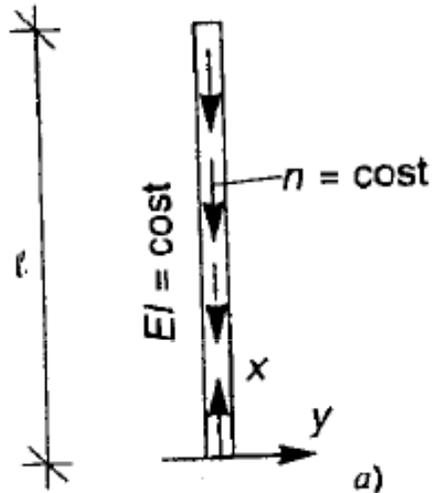
Se esiste un carico assiale distribuito (forza peso) oppure la sezione trasversale varia, allora la soluzione del



problema agli autovalori generalizzato associato alla valutazione dei carichi critici si complica notevolmente, poiché lo sforzo assiale N dipende da x

Aste di sezione variabile o soggette a carichi distribuiti (pile da ponte)

Consideriamo dapprima il caso della trave soggetta a carico assiale uniforme n costante



Lo sforzo normale è $N^0(x) = -n\ell(1 - \frac{x}{\ell})$

L'equazione di equilibrio diventa

$$EIv'''' - (N^0 v')' = EIv'''' - (N^0)'v' - N^0 v'' = 0$$

$$EIv'''' + n\ell(1 - \frac{x}{\ell})v'' - nv' = 0$$

+ condizioni al contorno

$$v(0) = 0, v'(0) = 0, v''(\ell) = 0, v'''(\ell) = 0$$

Risolvendo il problema il carico critico è

$$n_E = 7.837 \frac{EI}{\ell^3}$$

Aste di sezione variabile o soggette a carichi distribuiti (pile da ponte)

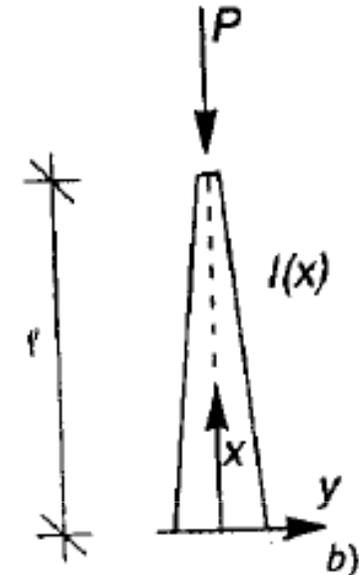
Consideriamo il caso della pila da ponte di sezione variabile con inerzia espressa dalla legge

$$I(x) = I_0 \frac{kl - x}{kl}$$

dove I_0 è il momento di inerzia all'incastro e k è una costante ≥ 1

Per ogni k di interesse, si può determinare la più piccola radice β_1 del polinomio caratteristico del tipo $\beta = \sqrt{k^2 p - \frac{1}{4}}$
Cui corrisponde il carico critico nella forma

$$P_E = p_E \frac{EI_0}{\ell^2}, \quad \text{dove} \quad p_E = \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{4} + \beta_1^2 \right)$$



Aste di sezione variabile o soggette a carichi distribuiti (pile da ponte)

I risultati relativi ad alcuni valore del rapporto l_e/l_0

Sono indicati nella tabella sottostante

Per $k \rightarrow \infty$ si ritrova $p_E = \pi^2/4$ relativo all'asta di sezione costante

Tabella 15.3

l_e/l_0	.0	.1	.2	.3	.5	.7	1.0
k	1.0	1.462	1.809	2.211	3.414	6.122	∞
p_E	.250	1.350	1.593	1.763	2.023	2.223	2.467
p_{E2}	.667	1.387	1.647	1.823	2.073	2.260	2.486
p_{E1}	1.000	1.416	1.647	1.848	2.207	2.537	3.000

Trave su suolo elastico

Consideriamo il problema agli autovalori generalizzato associato al problema della stabilità dell'equilibrio nel caso di strutture discrete o rese discrete mediante un procedimento di discretizzazione (e.g. elementi finiti, oppure altri metodi variazionali) , dopo avere definito il vettore V di gradi di libertà

$$\mathbf{K}_E \mathbf{V} - p \mathbf{K}_G \mathbf{V} = 0$$

K_E : matrice di rigidezza elastica ((semi-)definita positiva)

K_G : matrice di rigidezza geometrica ((semi-)definita positiva)

p : moltiplicatore dei carichi

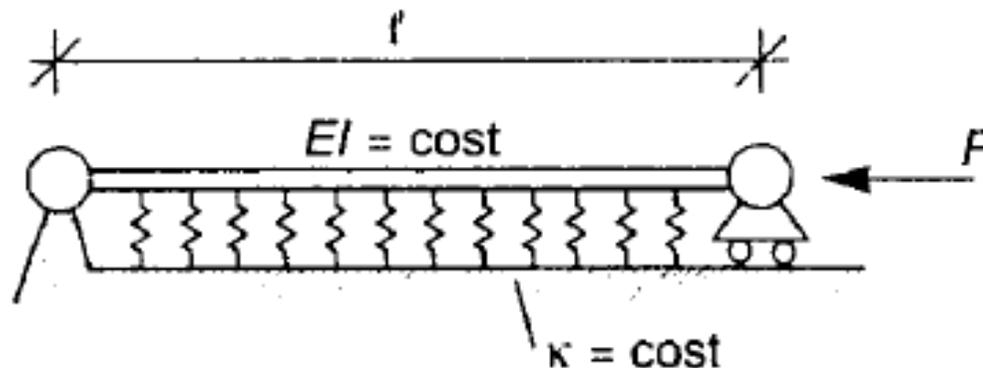
Trave su suolo elastico

Nel caso della trave su suolo elastico, ci si può ricondurre al problema agli autovalori generalizzato nella forma

$$\mathbf{K}_E \mathbf{V} - p \mathbf{K}_G \mathbf{V} = 0$$

approssimando il campo di spostamento mediante le autofunzioni

$$v^* = \sum_{n=1}^N A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$



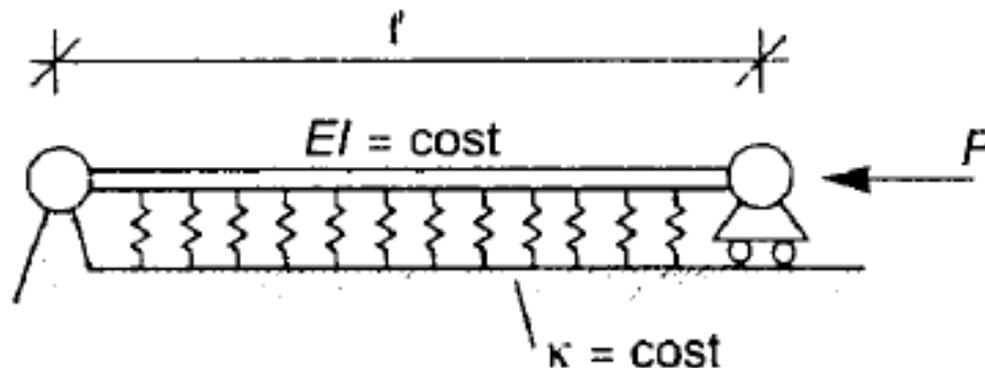
Trave su suolo elastico

Con riferimento alla trave in figura, l'EPT al II ordine si scrive

$$\Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (\mathbf{EI} \mathbf{v}''^2 - \mathbf{P} \mathbf{v}'^2 + \mathbf{k} \mathbf{v}^2) \mathbf{d} \mathbf{x}$$

Sostituendo \mathbf{v}^* si ha

$$\Pi(\mathbf{v}^*) = \frac{1}{2} \frac{\ell}{2} \sum_{\mathbf{n}=1}^{\mathbf{N}} \mathbf{A}^2_{\mathbf{n}} \left(\mathbf{EI} \left(\frac{\mathbf{n}\pi}{\ell} \right)^4 - \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{n}\pi}{\ell} \right)^2 + \mathbf{k} \right)$$



Trave su suolo elastico

I valori di P_n che verificano la condizione di stazionarietà della EPT (e la corrispondente deformata v_n) per cui il corrispondente A_n può essere $\neq 0$ sono

$$P_n = EI \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 + \frac{k}{\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2} \quad v_n = A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

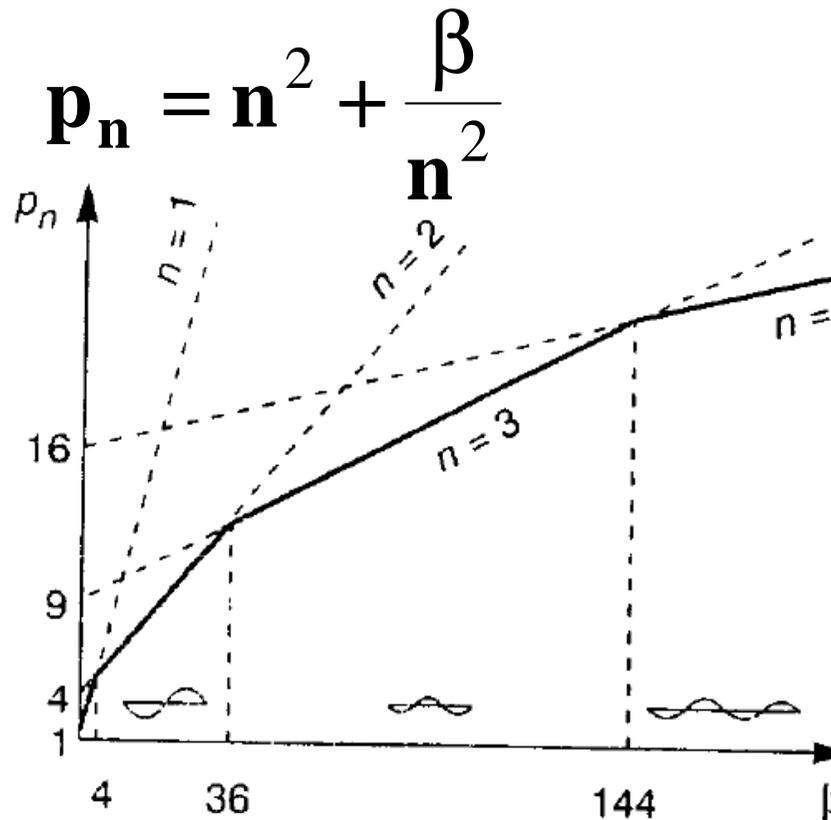
Poniamo

$$p = \frac{P l^2}{\pi^2 EI}, \quad \beta = \frac{k l^4}{\pi^4 EI}$$

Si ha che

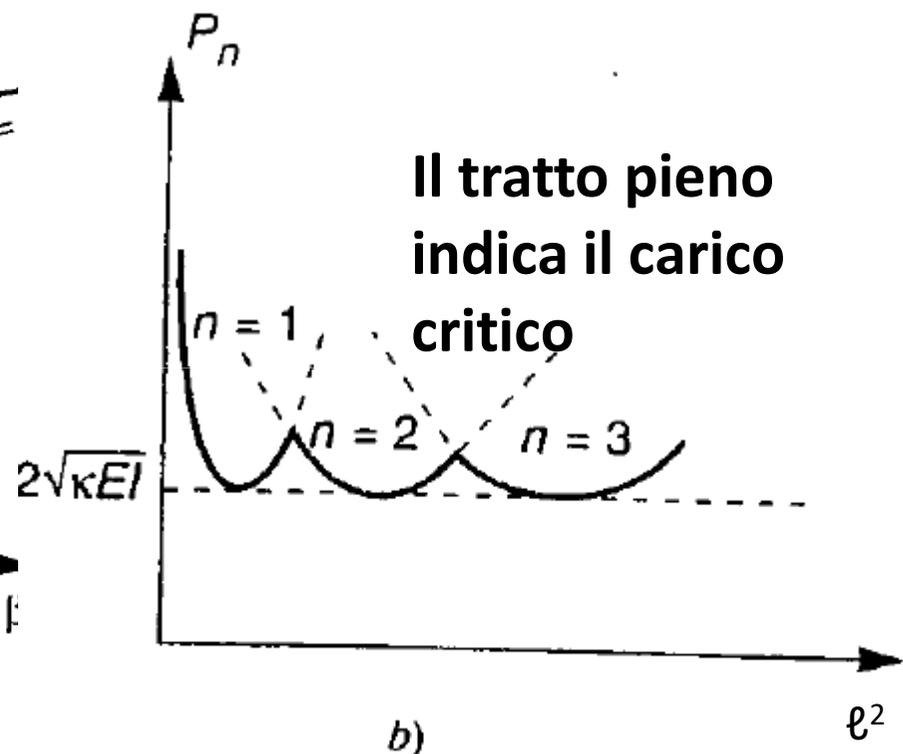
$$p_n = n^2 + \frac{\beta}{n^2}$$

Trave su suolo elastico



a)

$$p = \frac{P\ell^2}{\pi^2 EI}, \quad \beta = \frac{k\ell^4}{\pi^4 EI}$$



b)

La spezzata a tratto pieno indica il minimo dei p_n quindi indica il carico critico; al crescere di b cresce il nr. di semionde della deformata critica
 Oss: analogia trave su suolo elastico con lastra compressa nel piano.....