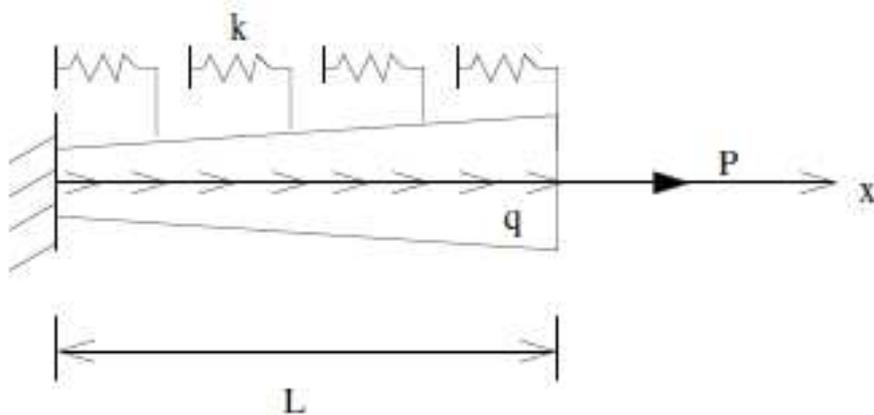


Forma debole del problema dell'equilibrio

Consideriamo il problema di equilibrio di un concio di trave caricata come in figura. La trave sia monodimensionale deformabile solo assialmente, avente lunghezza l , sezione trasversale $A(x)$ e modulo di Young $E(x)$, soggetta a forze elastiche di costante k ed un carico assiale $q(x)$.



Forma debole del problema dell'equilibrio

Se si isola un concio di trave, l'equazione differenziale di equilibrio alla traslazione orizzontale si scrive:

$$\frac{d}{dx} \left(E(x) A(x) \frac{du}{dx} \right) - ku(x) + q(x) = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{c.c. essenziali}$$

$$\left(E(x) A(x) \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} = P \quad \text{c.c. naturali}$$

Forma debole del problema

Sia V lo spazio delle funzioni di spostamento v cinematicamente ammissibili tali che:

- v soddisfa le condizioni al contorno essenziali
- v sufficientemente regolare (derivabile)

Forma debole del problema dell'equilibrio

Si moltiplichiamo m.a.m. per un qualunque $v \in (V)$:

$$\int_0^l \left\{ \frac{d}{dx} \left(E(x)A(x) \frac{du}{dx} \right) v(x) - ku(x)v(x) \right\} dx = \quad (7)$$
$$- \int_0^l q(x)v(x) dx \quad \forall v(x) \in \mathbb{V}$$

La soluzione del problema in forma debole (7) deve soddisfare un'equazione integrale e non differenziale; deve soddisfare il problema in forma media e non puntuale \Rightarrow soluzione *debole*.

Forma debole del problema dell'equilibrio

Integrando per parti il primo termine:

$$\left[E(x)A(x)\frac{du}{dx}v(x) \right]_{x=0}^{x=l} - \int_0^l E(x)A(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} dx \quad (8)$$
$$- \int_0^l ku(x)v(x) dx = - \int_0^l q(x)v(x) dx$$

Forma debole del problema dell'equilibrio

Lavoro interno: i termini a primo membro rappresentano il lavoro interno, dove $\sigma = E u' / dx$ rappresenta la tensione staticamente ammissibile e $v' = dv/dx$ rappresenta una deformazione cinematicamente ammissibile, $ku v$ rappresenta il lavoro della forza elastica delle molle per lo spostamento virtuale

$$L_{vi} = \int_0^l E(x) A(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_0^l ku(x) v(x) dx$$

Forma debole del problema dell'equilibrio

Lavoro esterno: i termini a secondo membro rappresentano il lavoro virtuale esterno delle forze esterne concentrate (P) e distribuite (q) per gli spostamenti al bordo

$$L_{ve} = \left[E(x)A(x)\frac{du}{dx}v(x) \right]_{x=0}^{x=l} + \int_0^l q(x)v(x) dx = P v(l) + \int_0^l q(x)v(x) dx$$

Forma debole del problema dell'equilibrio

Pertanto, partendo dalla forma debole delle equazioni di equilibrio siamo arrivati a scrivere il **Principio dei lavori virtuali**

$$L_{vi} - L_{ve} = 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

vale per qualunque spostamento ammissibile $v \in \mathbb{V}$
(VIRTUALE)

Principio dei Lavori virtuali

Il principio variazionale precedente si può anche scrivere introducendo la forma bilineare

$$a(u, v) := L_{vi} = \int_0^l E(x)A(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_0^l k u(x) v(x) dx \quad (9)$$

Principio dei Lavori virtuali

e la forma lineare

$$l(v) := L_{ve} = \left[E(x)A(x) \frac{du}{dx} v(x) \right]_{x=0}^{x=l} + \int_0^l q(x)v(x) dx \quad (10)$$

Principio dei Lavori virtuali

Il principio dei lavori virtuali si scrive (PLV):

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

Principio di minimo Energia Potenziale Totale

Poichè siamo in presenza di sistemi conservativi, il problema dell'equilibrio puo' essere alternativamente formulato anche attraverso il **Principio di minimo dell'Energia potenziale totale**

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_0^l \frac{1}{2} E(x) A(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{1}{2} k (u(x))^2 dx - \\ & - \left[E(x) A(x) \frac{du}{dx} u(x) \right]_{x=0}^{x=l} - \int_0^l q(x) u(x) dx \end{aligned}$$

Principio di minimo Energia Potenziale Totale

La condizione di stazionarietà del funzionale Π conduce all'equazione di equilibrio

Nelle ipotesi di validità del principio di sovrapposizione degli effetti (piccoli spostamenti e deformazioni, vincoli perfetti bilateri lisci, carichi limitati e regolari, materiale iperelastico lineare), la soluzione del problema elastico rende minima l'EPT

$$\Pi = \frac{1}{2}a(u, u) - l(u)$$

Soluzione del Problema in forma debole

- Risolvere il problema al contorno di equilibrio assiale della trave in forma differenziale con condizioni al contorno essenziali e naturali significa trovare la soluzione analitica $u = u(x)$ che soddisfa punto per punto l'equazione differenziale. In tal modo, si trova la soluzione della forma forte del problema. Tale soluzione non è sempre nota in generale, qualunque siano la geometria ed i carichi.

Soluzione del Problema in forma debole

- Il problema integrale ottenuto integrando l'equazione differenziale e moltiplicando per un campo di spostamenti ammissibile rappresenta la *forma debole* del problema. La soluzione del problema in forma debole soddisfa le equazioni differenziali di equilibrio solo in forma media, pesata sull'integrale, quindi non la soddisfa in tutti i punti. Per qualunque geometria e condizione di carico, è possibile determinare una soluzione approssimata del problema di partenza sostituendo una forma approssimata dello spostamento dentro la forma debole dell'equilibrio.

Formulazione variazionale

La formulazione debole del problema dell'equilibrio è una formulazione variazionale. Il metodo degli elementi finiti si basa sulla soluzione approssimata della forma debole del problema.

Metodo degli Elementi Finiti

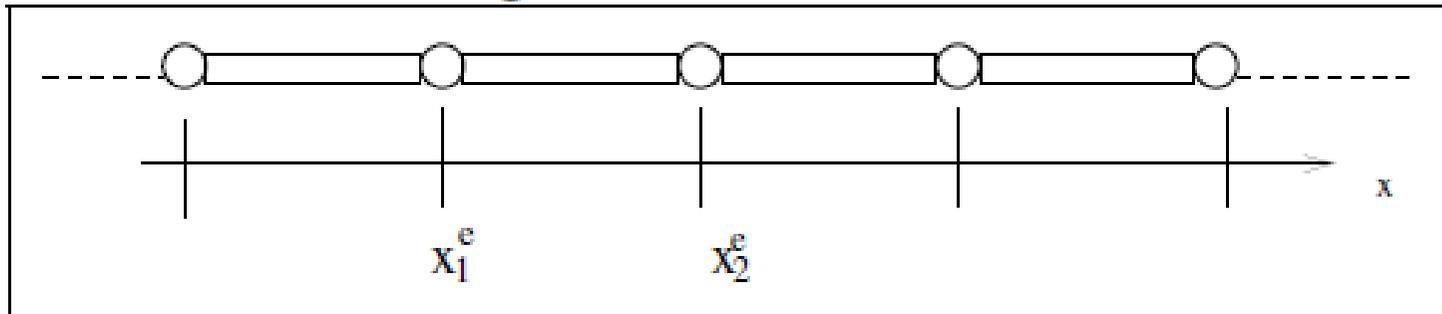
- 1 Discretizzazione del dominio in una collezione di sottodomini chiamati elementi finiti
 - a costruire la mesh
 - b numerare i nodi e gli elementi
 - c generare le proprietà geometriche
- 2 Derivare le equazioni elementari di ogni elemento della mesh
 - a costruire la formulazione variazionale dell'equazione debole dell'equilibrio
 - b si assume il campo approssimante del tipo
$$u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$$
sostituirla nella forma debole per ottenere le equazioni dell'elemento nella forma
$$K^e U^e = F^e$$

Metodo degli Elementi Finiti

- 3 Assemblare le matrici elementari nella matrice di rigidezza globale
- 4 Imposizione delle condizioni al contorno
- 5 Soluzione delle equazioni assemblate
- 6 Post-processing dei risultati: Calcolo delle tensioni, delle azioni interne, rappresentazioni grafiche

Discretizzazione del dominio

Si effettua una partizione del dominio Ω in NE elementi finiti, $\Omega \approx \Omega^h = \bigcup \Omega^e$



$$u^h = \sum_{i=1}^{NE+1} \phi_i(x) U_i \quad \text{trial}$$

$$v^h = \sum_{i=1}^{NE+1} \phi_i(x) V_i \quad \text{test}$$

dove i indica il numero dei nodi che in questo caso varia da $1, \dots, NE + 1$ con NE il numero di elementi finiti

Discretizzazione del dominio

Sostituendo nel PLV le espressioni approssimate delle funzioni test e trial si ottiene

$$a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad (11)$$

dove

$$a(u^h, v^h) = a\left(\sum_{i=1}^{NE+1} \phi_i(x) U_i, \sum_{j=1}^{NE+1} \phi_j(x) V_j\right)$$

$$l(v^h) = l\left(\sum_{j=1}^{NE+1} \phi_j(x) V_j\right)$$

Matrice di rigidezza

Il principio dei lavori virtuali si scrive anche in forma indiciale

$$L_{vi} = \sum_{i=1}^{NE+1} \sum_{j=1}^{NE+1} U_i \bar{K}_{ij} V_j \quad (12)$$

Per esempio, nel caso monodimensionale, il generico coefficiente ij della matrice di rigidezza \bar{K} si scrive

$$\bar{K}_{ij} = \int_0^l EA \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx + \int_0^l k \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (13)$$

Matrice di rigidezza

La matrice di rigidezza K deriva dall'assemblaggio delle matrici di rigidezza elementari, \bar{K}^e , $\bar{K} = \bigwedge_{e=1}^{NE} \bar{K}^e$, dove $\bigwedge_{e=1}^{NE} \rightsquigarrow$ assemblaggio

La matrice di rigidezza elementare \bar{K}^e è formata da coefficienti di rigidezza elementari \bar{K}_{ij}^e del tipo

$$\bar{K}_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} EA \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} k \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (14)$$

dove $[x_1^e, x_2^e]$ rappresentano gli estremi dell'elemento e

Matrice di rigidezza

Possiamo anche porre $\bar{K} = K + M$ dove:

$$K_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} EA \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx \quad \text{matrice di rigidezza elastica}$$

$$M_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} k \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad \text{matrice delle masse}$$

I carichi nodali equivalenti

Il vettore carichi esterni in caso di solo carico distribuito si esprime come

$$l \left(\sum_{j=1}^{NE+1} \phi_j(x) V_j \right) := \int_0^l q(x) \left(\sum_{j=1}^{NE+1} \phi_j(x) V_j \right) dx$$

ovvero:

$$L_{ve} = l \left(\sum_{j=1}^{NE+1} \phi_j(x) V_j \right) = \int_0^l \sum_{j=1}^{NE+1} q(x) \phi_j(x) V_j dx$$

che in notazione indiciale diventa

$$L_{ve} = \sum_{j=1}^{NE+1} F_j V_j$$

dove $F_j = \int_0^l q(x) \phi_j(x) dx$.

I carichi nodali equivalenti

Il vettore dei carichi nodali equivalenti F deriva dall'assemblaggio dei vettori carichi nodali elementari, $F = \bigwedge_{e=1}^{NE} F^e$, dove il termine j -esimo del vettore carico nodale equivalente elementare si calcola come

$$F_j^e := \int_{x_1^e}^{x_2^e} q(x) \phi_j(x) dx \quad (15)$$

Formulazione del problema dell'equilibrio

Ci siamo ricondotti a studiare il seguente problema

$$\sum_{i=1}^{NE+1} \sum_{j=1}^{NE+1} U_i \bar{K}_{ij} V_j = \sum_{j=1}^{NE+1} F_j V_j \quad \forall V_j$$

Formulazione del problema dell'equilibrio

in forma compatta

$$\boxed{U^t \bar{K} V = F V \quad \forall V} \Rightarrow \boxed{\bar{K} U = F}$$

$$\text{dove } \bar{K} = \bigwedge_{e=1}^{NE} \bar{K}^e, \quad F = \bigwedge_{e=1}^{NE} F^e$$

Formulazione del problema dell'equilibrio

Passo successivo: calcolare

- i contributi delle matrici di rigidezza elementare K^e e M^e il cui termini generici sono (per ogni $i, j = 1, NE + 1$)

- $K_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} EA \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx$ matrice di rigidezza elastica

- $M_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} k \phi_i(x) \phi_j(x) dx$ (matrice delle masse ove presente)

- i carichi nodali elementari

- $F_j^e := \int_{x_1^e}^{x_2^e} q(x) \phi_j(x) dx$ per ogni $j = 1, NE + 1$

Proprietà delle funzioni approssimanti

La funzione approssimante deve soddisfare delle condizioni precise affinché converga alla soluzione esatta all'aumentare del numero di elementi finiti (J.N. Reddy, An introduction to the finite element method, Mc-Graw-Hill).

Proprietà delle funzioni approssimanti

- 1 la soluzione approssimante deve essere continua sull'elemento e sufficientemente regolare da potere essere usata nella forma debole del problema \Rightarrow la matrice di rigidezza ha coefficienti non nulli

Proprietà delle funzioni approssimanti

2 il polinomio approssimante deve essere un **polinomio completo** , ovvero deve includere tutti i termini dal termine con esponente più basso a quelli con esponente più elevato (e.g. $1, x, x^2, x^3, \dots, x^{p-1}, x^p$) \Rightarrow cattura tutte le possibili soluzioni: costante, lineare, etc.

Proprietà delle funzioni approssimanti

3 deve interpolare i valori nodali delle variabili primarie (spostamenti nel nostro caso, ma possono essere anche rotazioni o stress nei modelli misti) \Rightarrow vengono soddisfatte le condizioni al contorno essenziali dell'elemento e si garantisce la compatibilità all'inter-elemento

Elementi finiti monodimensionali

1D

Lagrangiani gli elementi finiti Lagrangiani descrivono la cinematica di un'asta;

casi particolari che vedremo in dettaglio:

a) elementi lineari che coincidono con gli elementi bar

b) elementi quadratici

Elementi finiti monodimensionali

1D

Hermitiani: gli elementi finiti Hermitiani descrivono la cinematica di una trave

casi particolari che vedremo in dettaglio:

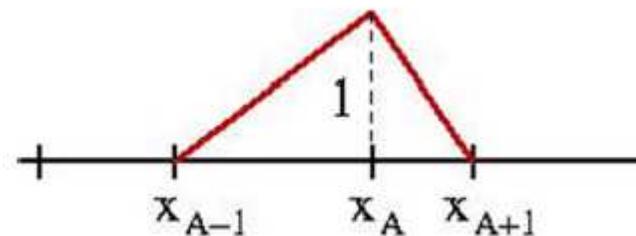
quelli del primo ordine che coincidono con gli elementi beam

Funzioni di approssimazione lineari

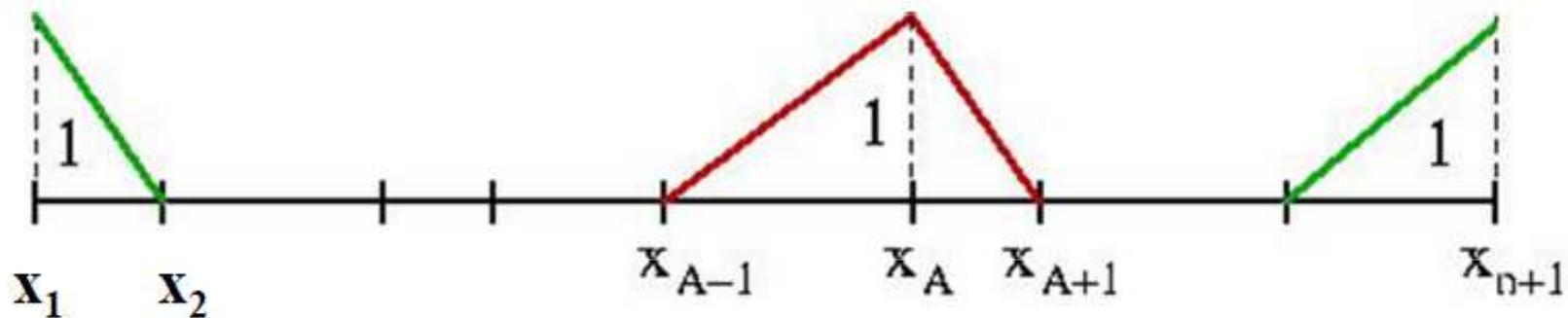
Le funzioni di forma $\phi(x)$ possono essere definite nel sistema di riferimento globale oppure nel sistema di riferimento naturale.

Consideriamo prima il caso più semplice di funzioni di approssimazione: il caso lineare (vedi figura)

$$N_A(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{A-1})}{h_{A-1}}, & x_{A-1} \leq x \leq x_A \\ \frac{(x_{A+1}-x)}{h_A}, & x_A \leq x \leq x_{A+1} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$



Funzioni di approssimazione lineari



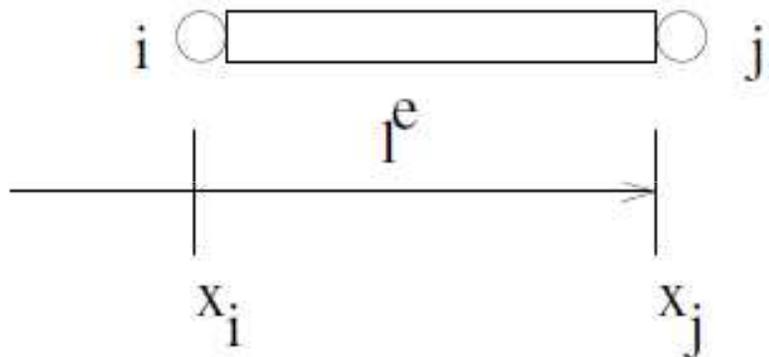
- Mentre per i due nodi sul contorno si ha:

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{h_1}, \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

$$N_{n+1}(x) = \frac{x - x_n}{h_n}, \quad x_n \leq x \leq x_{n+1}$$

Elementi Asta (bar) lineari

Si assuma un campo di spostamenti u lineare del tipo



$$u(x) = c_1 + c_2x$$

con $x \in [x_i, x_j]$

vogliamo determinare c_1 e c_2 tali che:

$$u = U_i \text{ in } x = x_i, \quad u = U_j \text{ in } x = x_j:$$

$$U_i = c_1 + c_2x_i, \quad U_j = c_1 + c_2x_j$$

Elementi Asta (bar) lineari

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_j - x_i} \begin{bmatrix} x_j & -x_i \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ U_j \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{x_j U_i}{x_j - x_i} - \frac{x_i U_j}{x_j - x_i}$$

$$c_2 = \frac{-U_i}{x_j - x_i} + \frac{U_j}{x_j - x_i}$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{x_j U_i - x_i U_j}{x_j - x_i} + \frac{x(U_j - U_i)}{x_j - x_i}$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} U_i + \frac{x - x_i}{x_j - x_i} U_j$$

Elementi Asta (bar) lineari

$$\Rightarrow u(x) = \phi_i(x)U_i + \phi_j(x)U_j$$

dove le funzioni di forma (shape functions) sono:

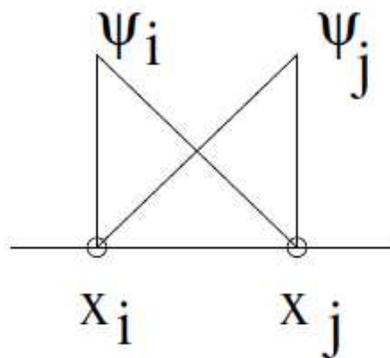
$$\phi_i = \frac{x_j - x}{x_j - x_i}, \quad \phi_j = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Oss: Abbiamo così espresso il campo di spostamento come una funzione lineare degli spostamenti nodali U_i, U_j

Rappresentazione in coordinate naturali

In alternativa, le funzioni di forma possono essere espresse nel sistema di coordinate naturali $\xi \in [-1, 1]$ tale che:

$$\xi = \frac{2}{x_j - x_i} x - \frac{x_j + x_i}{x_j - x_i}$$

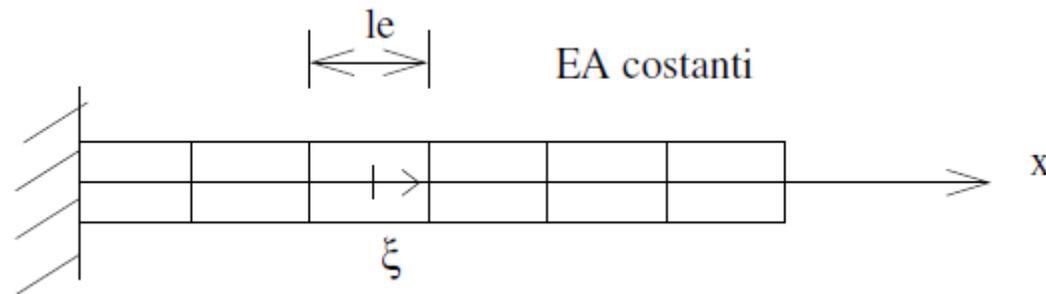


$$\psi_i = \frac{1 - \xi}{2}$$

$$\psi_j = \frac{1 + \xi}{2}$$

$$u(\xi) = \psi_i(\xi)U_i + \psi_j(\xi)U_j$$

Esempio: Asta a sezione costante



coordinata x

$$x = x_i \frac{1 - \xi}{2} + x_{i+1} \frac{1 + \xi}{2}$$

Esempio: Asta a sezione costante

coordinata naturale

$$\xi = \frac{2x}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} + x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (17)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\psi}{d\xi} \frac{2}{x_{i+1} - x_i} \quad (18)$$

da cui lo jacobiano

$$J^{-1} = \frac{2}{x_{i+1} - x_i} = \frac{2}{l^e} \quad (19)$$

Esempio: Asta a sezione costante

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} EA \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx = \frac{2EA}{l_e} \int_{-1}^{+1} \frac{d\psi_i}{d\xi} \frac{d\psi_j}{d\xi} d\xi$$

$$K_{11}^e = \frac{2EA}{l_e} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} d\xi = \frac{EA}{l_e}$$

$$K_{12}^e = K_{21}^e = \frac{2EA}{l_e} \int_{-1}^{+1} -\frac{1}{4} d\xi = -\frac{EA}{l_e}$$

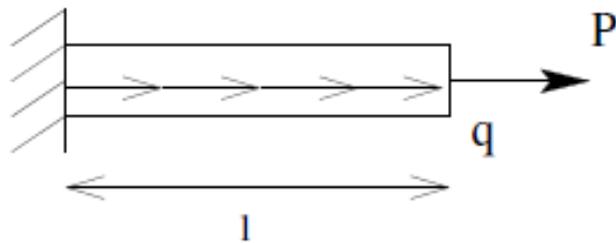
$$K_{22}^e = \frac{2EA}{l_e} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} d\xi = \frac{EA}{l_e}$$

Esempio: Asta a sezione costante

$$K = \frac{EA}{l^e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e' la matrice di rigidezza "esatta" dell'elemento asta!

Carichi nodali



Vettore dei carichi nodali

$$F_1 = \frac{l^e}{2} \int_{-1}^1 \psi_1(\xi) q d\xi = \frac{l^e}{2} \int_{-1}^1 \frac{1-\xi}{2} q d\xi = \frac{ql^e}{2}$$

$$F_2 = \frac{l^e}{2} \int_{-1}^1 \psi_2(\xi) q d\xi = \frac{l^e}{2} \int_{-1}^1 \frac{1+\xi}{2} q d\xi = \frac{ql^e}{2}$$

Esempio

Strutture reticolari: l'elemento asta

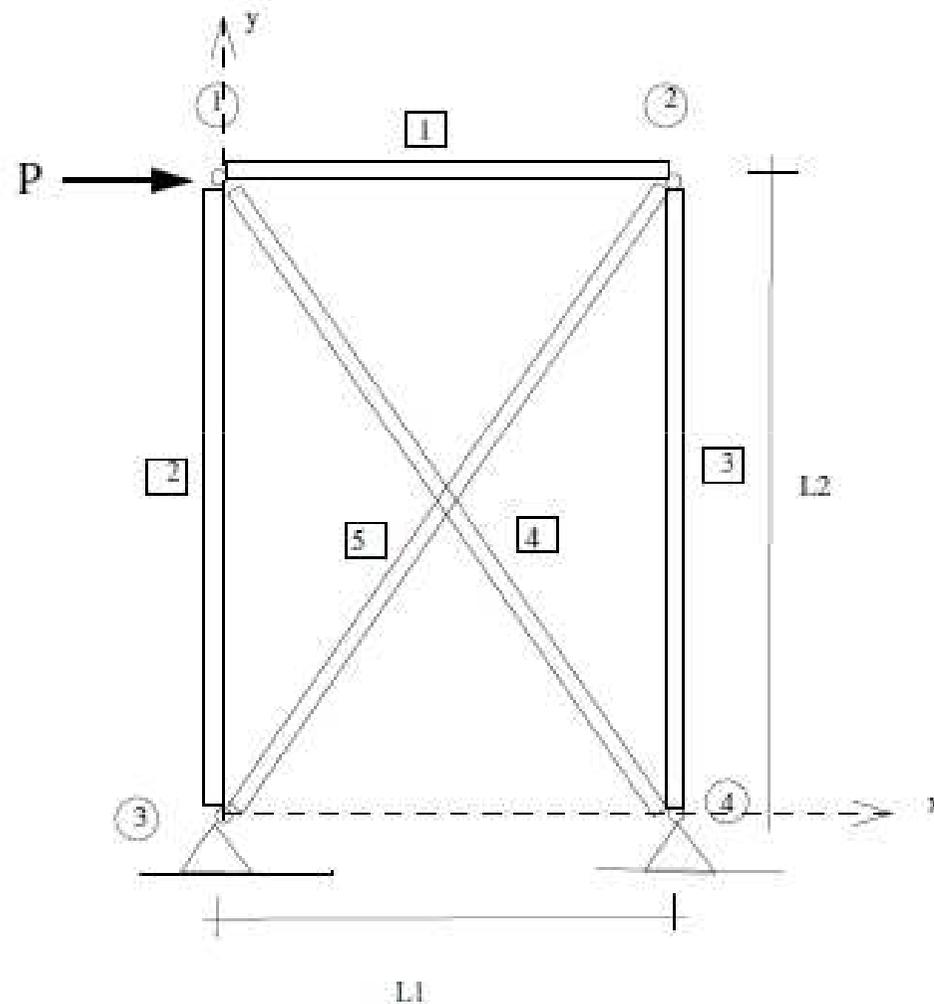


Figure 1: $L_1=1.5$ m, $L_2=2$ m.

Esempio

- Aste (elemento rod) di una reticolare (truss) soggette solo a deformazioni assiali
- (x, y) il riferimento *globale* o *esterno* generica asta (elemento e) viene riferita ad un riferimento *locale* (x^e, y^e) avente origine nel primo nodo i
- $L^e = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$ rappresenta la lunghezza dell'asta, E^e il modulo di Young ed A^e l'area della sezione trasversale

Esempio

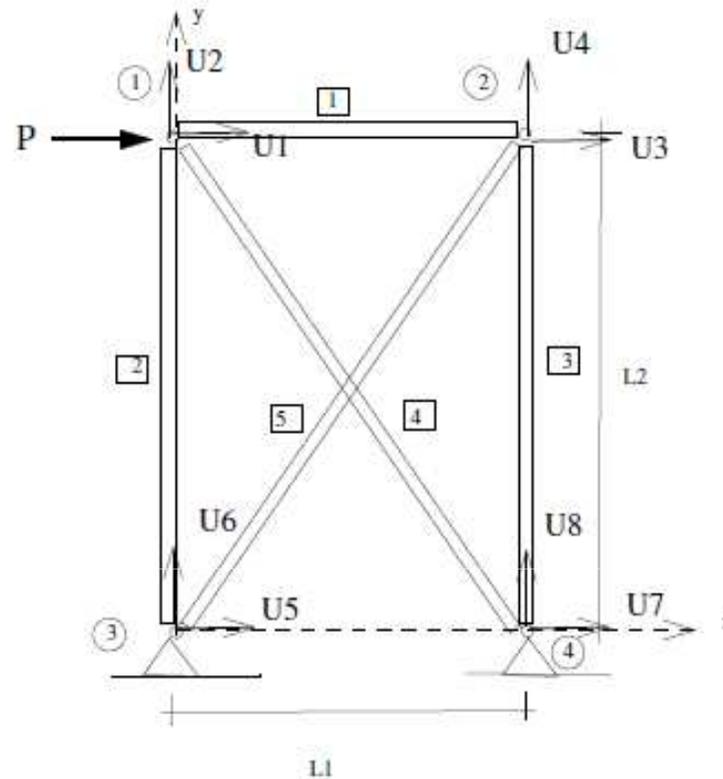


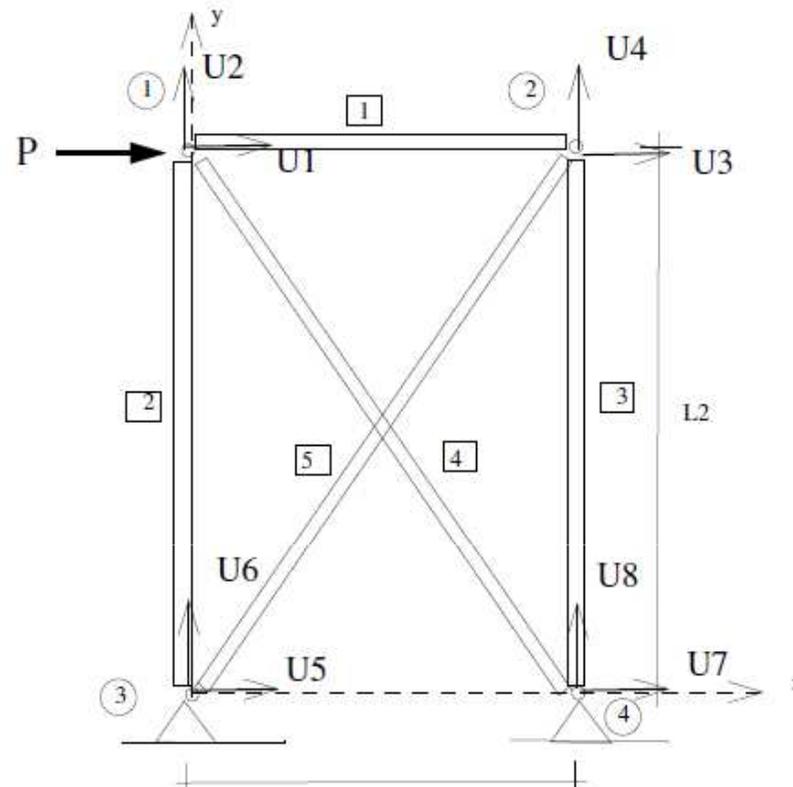
Figure 7: Figura 6, EA e' assunto costante

U il vettore degli spostamenti generalizzati

$$U^t = [U_1 U_2 U_3 \dots U_7 U_8] \quad (12)$$

numerati secondo il sistema globale.

Matrice di rigidezza nel riferimento globale



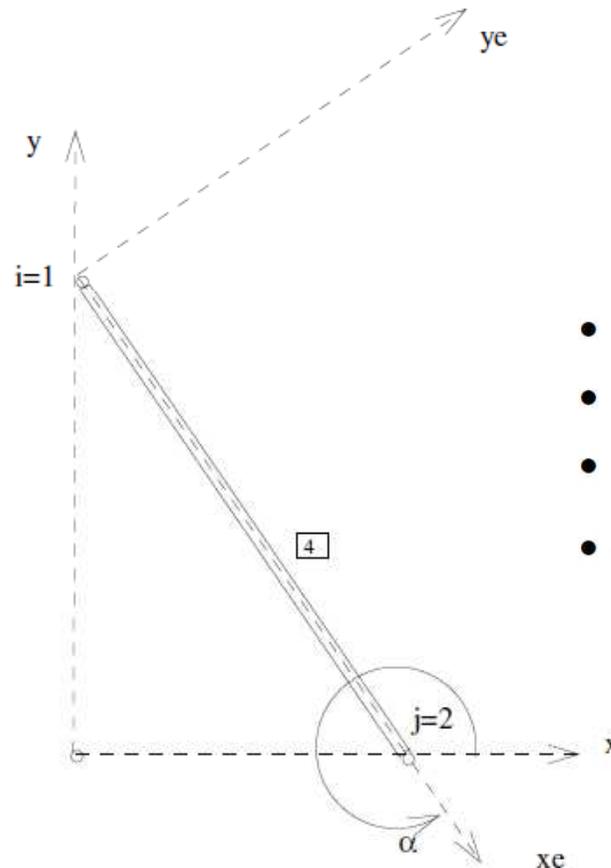
U il vettore degli spostamenti generalizzati

$$U^t = [U_1 U_2 U_3 \dots U_7 U_8] \quad (12)$$

numerati secondo il sistema globale.

Esempio

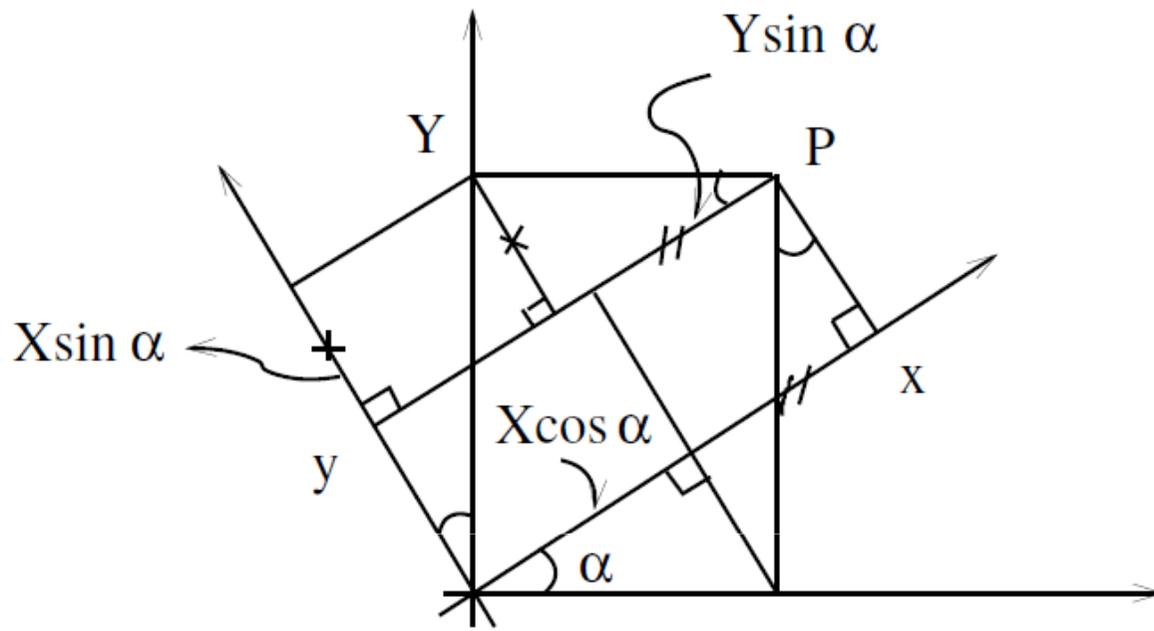
Le equazioni di equilibrio vanno scritte nel riferimento globale. Tuttavia, il riferimento globale (esterno) in generale e' distinto da quello locale.



Per l'asta 4 si ha:

- nodo $i = 1$, $x_1 = 0$, $y_1 = 2$,
- nodo $j = 4$, $x_4 = 1.5$, $y_4 = 0$,
- lunghezza $L^4 = \sqrt{6.25} = 2.5$ m
- $\cos \alpha = \frac{x_j - x_i}{L^e} = \frac{1.5}{2.5}$; $\sin \alpha = \frac{y_j - y_i}{L^e} = -\frac{2}{2.5}$;

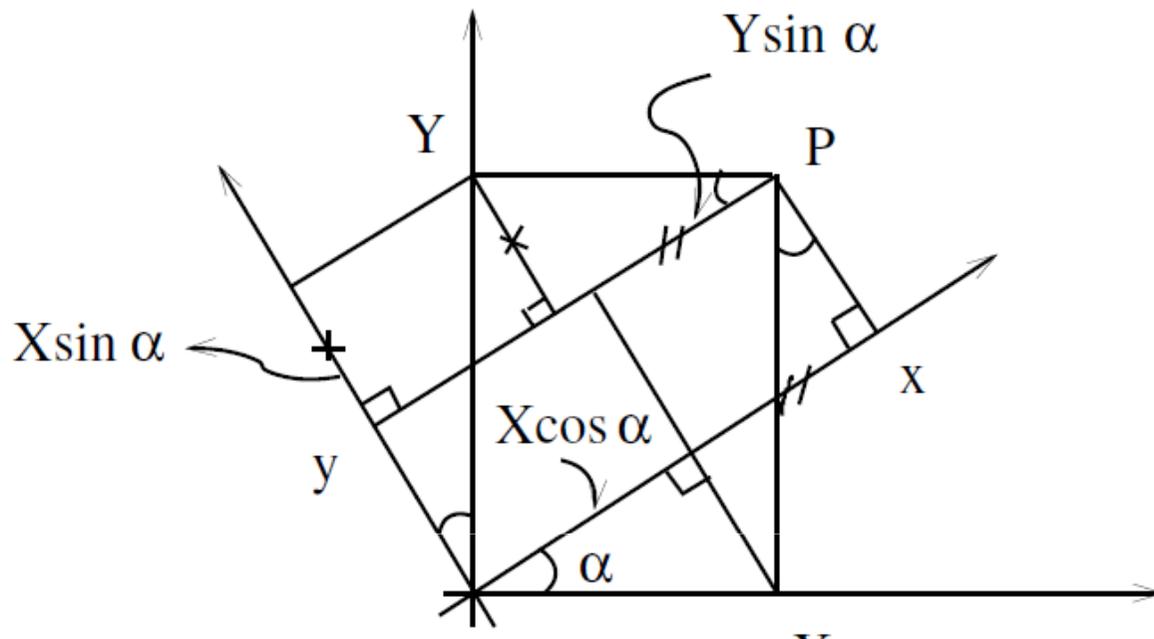
Dal riferimento locale a quello globale



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \rightsquigarrow x = RX$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow X = R^t x$$

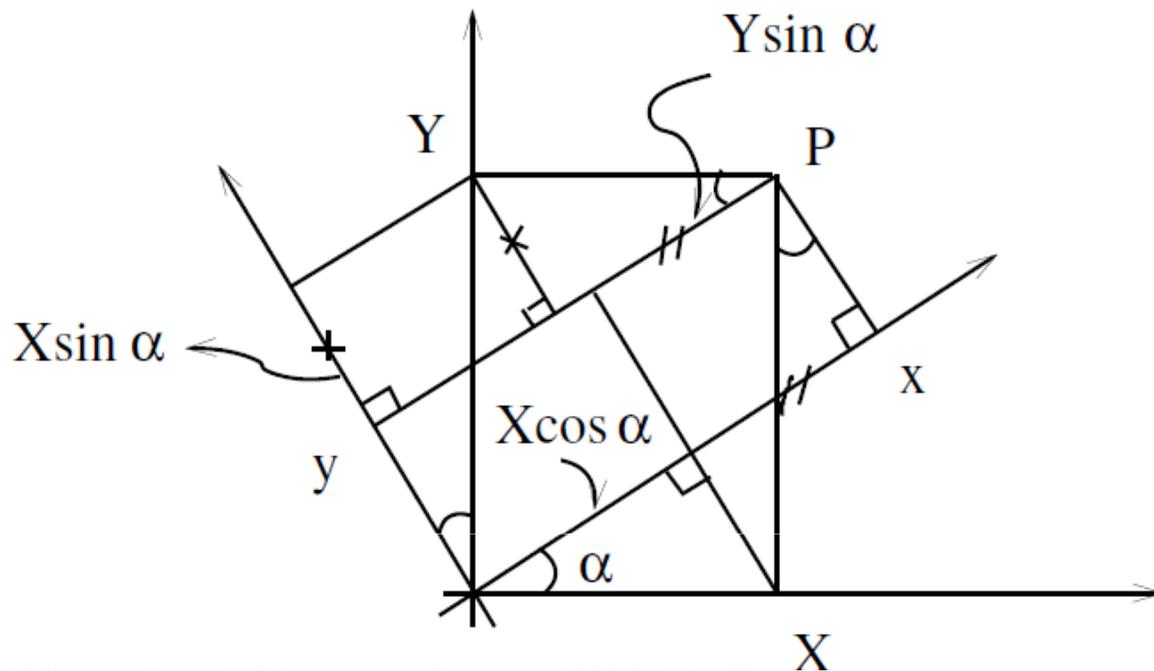
Dal riferimento locale a quello globale



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \rightsquigarrow x = RX$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow X = R^t x$$

Dal riferimento locale a quello globale



Matrice di rotazione R^e dell'elemento e

$$R^e = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (7)$$

Dal riferimento locale a quello globale

$$s^e = R^e S^e, \quad u^e = R^e U^e \quad (8)$$

- U^e ed S^e : vettore degli spostamenti e degli sforzi nel riferimento globale
- R^e è **ortonormale** (rotazione propria) tale che $R^e R^{eT} = I$, $R^{eT} = R^{e-1}$, $\det R^e = 1$ e quindi

$$S^e = R^{eT} s^e, \quad U^e = R^{eT} u^e \quad (9)$$

Sostituendo $s^e = k^e u^e$ si ottiene

$$S^e = R^{eT} s^e = R^{eT} k^e u^e = R^{eT} k^e R^e U^e \quad (10)$$

$\Rightarrow S^e = K^e U^e$ dove $K^e = R^{eT} k^e R^e$ è la matrice di rigidezza nel riferimento globale.

Matrice di rigidezza nel riferimento globale

$$K^e = R^{eT} k^e R^e$$

dove

$$R^e = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$K^e = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

Carichi nodali equivalenti

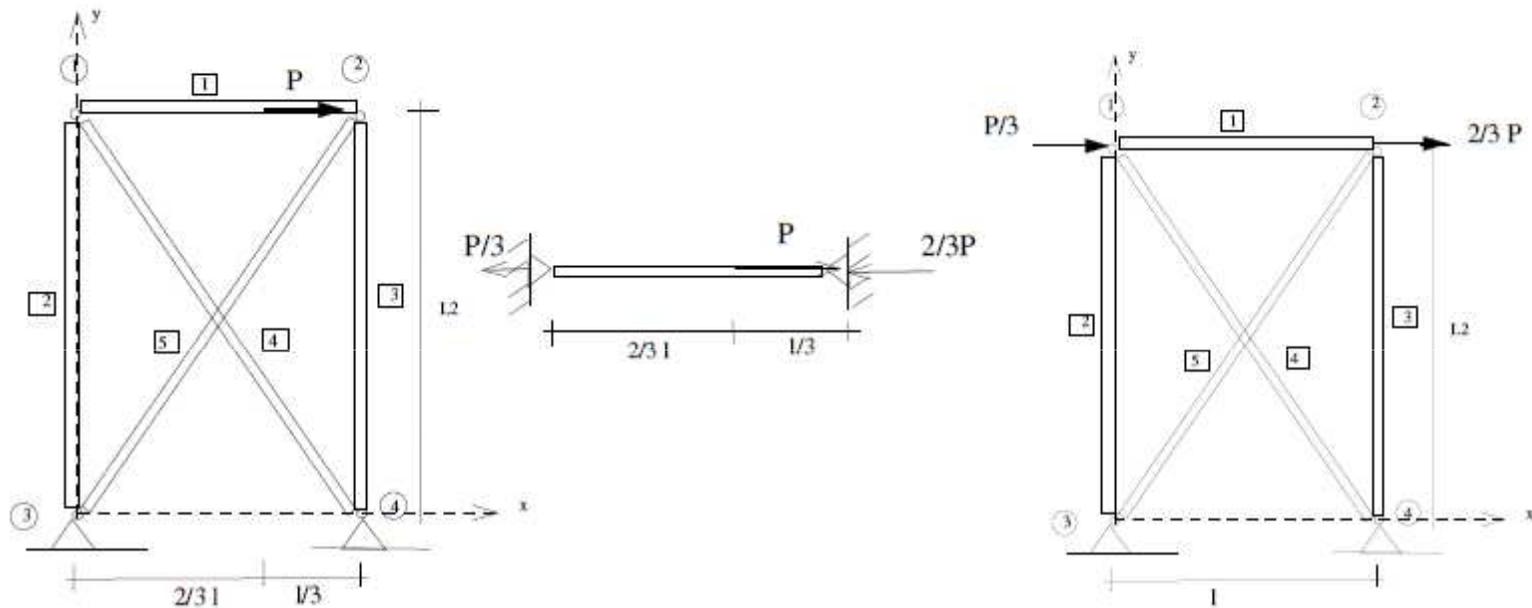


Figure 8: Esempio 1

Carichi nodali equivalenti

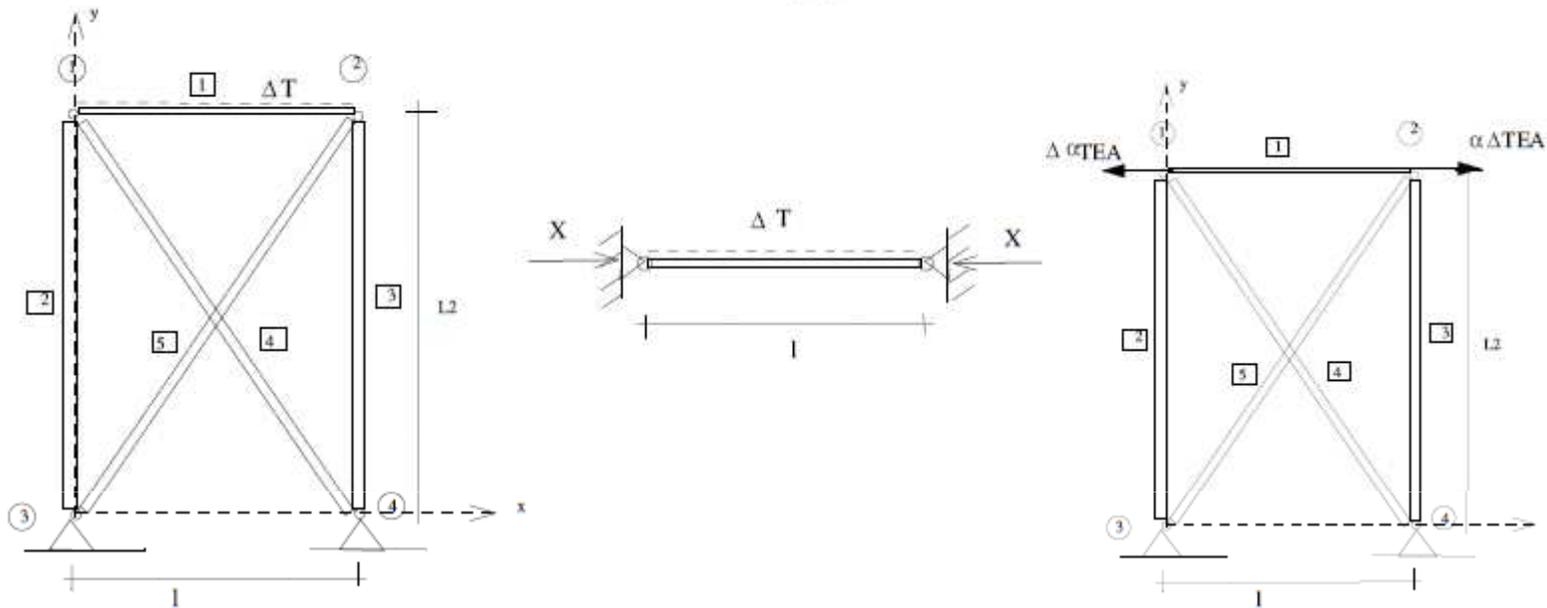


Figure 9: $\alpha \Delta T l = \frac{X l}{E A}$, $X = \alpha \Delta T E A$. L'assemblaggio del vettore dei carichi nodali consiste nel sommare equazione per equazione i contributi dei carichi direttamente applicati ai nodi e dei carichi nodali equivalenti.

Imposizione delle condizioni di vincolo

- vincoli vengono supposti perfetti, ovvero lisci e bilateri.
- gradi di liberta' U (*spostamenti generalizzati*) dell'intera struttura

$$U^T = [U_l^T \quad U_o^T] \quad (16)$$

U_L : vettore dei gradi di liberta' liberi (incogniti)

U_o indica il vettore dei gradi di liberta' assegnati.

Imposizione delle condizioni di vincolo

- vettore dei carichi F

$$F^T = [\bar{F}^T \quad R^T] \quad (17)$$

\bar{F} : vettore dei carichi assegnati;
 R : vettore delle reazioni vincolari.

Imposizione delle condizioni di vincolo

Il sistema di equazione che si ottiene rappresenta le equazioni di equilibrio di tutti i nodi

$$KU = F \rightsquigarrow \begin{pmatrix} K_{LL} & K_{L0} \\ K_{0L} & K_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_L \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F} \\ R \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{cases} K_{LL}U_L + K_{L0}U_0 = \bar{F} \\ K_{0L}U_L + K_{00}U_0 = R \end{cases} \quad (19)$$

da cui

$$U_L = K_{LL}^{-1}(\bar{F} - K_{L0}U_0) \quad (20)$$

Soluzione del problema

$$U_L = K_{LL}^{-1}(\bar{F} - K_{L0}U_0) \quad (20)$$

OSS: Si mette da parte la riga corrispondente ai gradi di liberta' vincolati U_0 , si risolve il sistema di equazioni che corrispondono ai gradi di liberta' U_L

OSS: *Se i vincoli sono rigidi: $U_0 = 0$ e quindi le incognite nodali si calcolano come:*

$$U_L = K_{LL}^{-1}\bar{F} \quad (21)$$

K_{LL} : *matrice di rigidezza della struttura dopo avere tenuto conto dei vincoli.*

Proprietà di K_{LL}

- 1** Posto che la struttura non sia labile, la soluzione del sistema (19) esiste ed è unica (teorema di Kirchhoff). Pertanto la matrice K_{LL} deve essere non singolare ($\det K_{LL} \neq 0$)
- 2** La matrice di rigidezza K_{LL} è simmetrica (Teorema di Betti-Maxwell); si memorizza e/o costruisce solo metà di essa.

Proprietà di K_{LL}

- 3 La simmetria di K o di K_{LL} comporta che $\delta U^T(KU - F) = \delta\Pi(U)$ sia un differenziale esatto e $\delta\Pi(U) = 0$ rappresenti la condizione di stazionarietà dell'Energia Potenziale Totale della struttura:

$$\Pi(U) = \frac{1}{2}U^T KU - U^T F \quad (22)$$

Tra tutti i campi di spostamento cinematicamente ammissibili (congruenti e che verificano le condizioni di vincolo), rappresentati dai parametri Lagrangiani U , quello che verifica le equazioni di equilibrio rende minima l'Energia Potenziale Totale (22). Si noti che in assenza di vincoli l'EPT risulta solo debolmente convessa e K_{LL} semi-definita positiva.

Proprietà di K_{LL}

4 matrice K_{LL} , matrice Hessiana della EPT della struttura vincolata, risulta pertanto definita positiva. Quindi, condizione necessaria e sufficiente affinché K_{LL} sia definita positiva è che:

- tutti gli autovalori di K_{LL} siano positivi (si ricordi che $\det K_{LL} = \prod_i^n \lambda_i > 0$)
- tutti i minori principali e quindi anche tutti i termini sulla diagonale principale sono positivi
- inoltre, risulta che $U^T K_{LL} U \geq 0$, per ogni U_L e $U^T K_{LL} U = 0$ sse $U_L = 0$.

Se sono possibili moti rigidi la matrice K_{LL} risulta semidefinita positiva ed ha determinate nullo; inoltre ad ogni atto di moto rigido corrisponde un autovalore nullo.

Proprietà di K_{LL}

- 5 La matrice K_{LL} è sparsa; in particolare, i termini diversi da zero sono addensati in prossimità della diagonale principale (matrice *a banda*), e la dimensione della banda dipende dalla numerazione dei nodi. Ciò riduce di molto l'onere di calcolo del sistema e lo spazio di memoria necessario.

Esempi

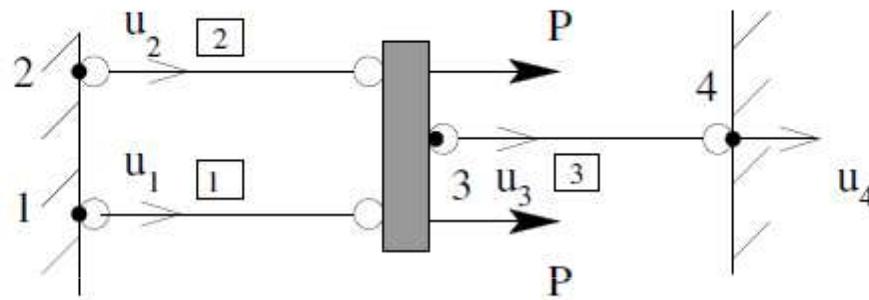


Figure 11:

DATI: E_i , area della sezione trasversale A_i ,
lunghezza l_i , con $i = 1, 2, 3$

Esempi

matrice di rigidezza

$$K = \begin{pmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 & -\frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 \\ 0 & \frac{E_2 A_2}{l_2} & -\frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{l_1} & -\frac{E_2 A_2}{l_2} & \sum_i^3 \frac{E_i A_i}{l_i} & -\frac{E_3 A_3}{l_3} \\ 0 & 0 & -\frac{E_3 A_3}{l_3} & \frac{E_3 A_3}{l_3} \end{pmatrix}$$

Soluzione

$$\begin{pmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 & -\frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 \\ 0 & \frac{E_2 A_2}{l_2} & -\frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{l_1} & \frac{E_2 A_2}{l_2} & \sum_i^3 \frac{E_i A_i}{l_i} & -\frac{E_3 A_3}{l_3} \\ 0 & 0 & -\frac{E_3 A_3}{l_3} & \frac{E_3 A_3}{l_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 2P \\ R_4 \end{pmatrix}$$

Soluzione

- Si impongono le condizioni al contorno:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_4 = 0$$

Nella soluzione manuale, si tralasciano le equazioni di equilibrio relative ad u_1, u_2, u_4 : verranno usate alla fine per il calcolo delle reazioni vincolari.

- dalla equazione che governa l'equilibrio lungo u_3 si ha

$$u_3 = \frac{2P}{\frac{E_1 A_1}{l_1} + \frac{E_2 A_2}{l_2} + \frac{E_3 A_3}{l_3}} \quad (25)$$

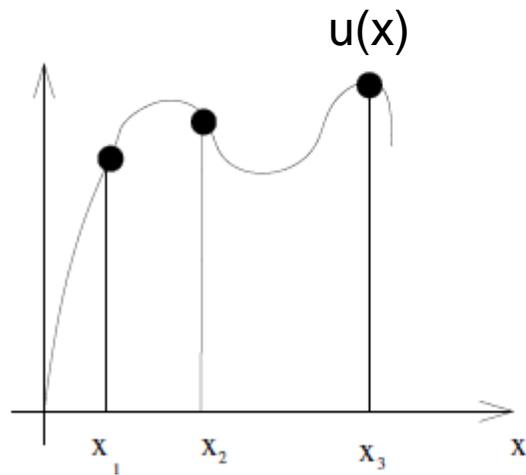
Soluzione

- Le reazioni vincolari si calcolano attraverso le equazioni di equilibrio relative ai gradi di liberta' vincolati (**post-processing**):

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 & -\frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 \\ 0 & \frac{E_2 A_2}{l_2} & -\frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E_3 A_3}{l_3} & \frac{E_3 A_3}{l_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

dove $u_1 = 0, u_2 = 0, u_4 = 0$ e $u_3 \neq 0$

Famiglia di interpolazioni Lagrangiana per l'elemento asta



Elementi finiti con
funzione di base e di
forma polinomiale a
tratti

$$u(x_1) = c_1 + c_2x_1 + c_3x_1^2 + \dots + c_{p+1}x_1^p = U_1$$

$$u(x_2) = c_1 + c_2x_2 + c_3x_2^2 + \dots + c_{p+1}x_2^p = U_2$$

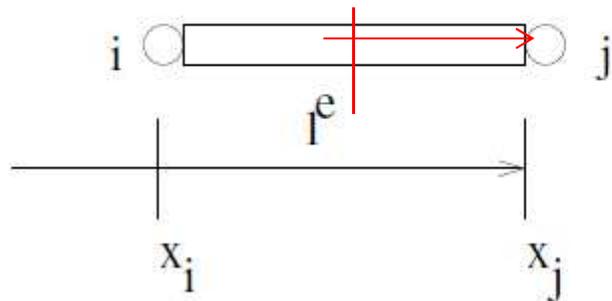
$$u(x_3) = c_1 + c_2x_3 + c_3x_3^2 + \dots + c_{p+1}x_3^p = U_3$$

...

dove: U_i con $i = 1, \dots, p$ sono i gradi di liberta' dei nodi

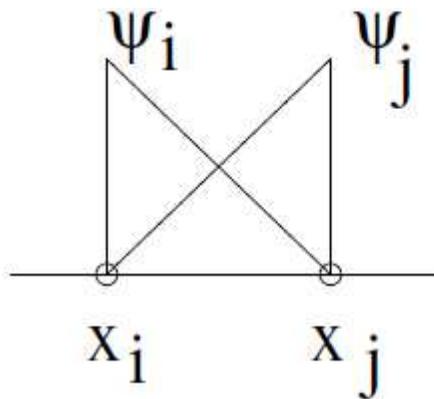
Elementi Lagrangiani lineari: elemento asta

Si assuma un campo di spostamenti u lineare del tipo



$$u(x) = c_1 + c_2x$$

con $x \in [x_i, x_j]$

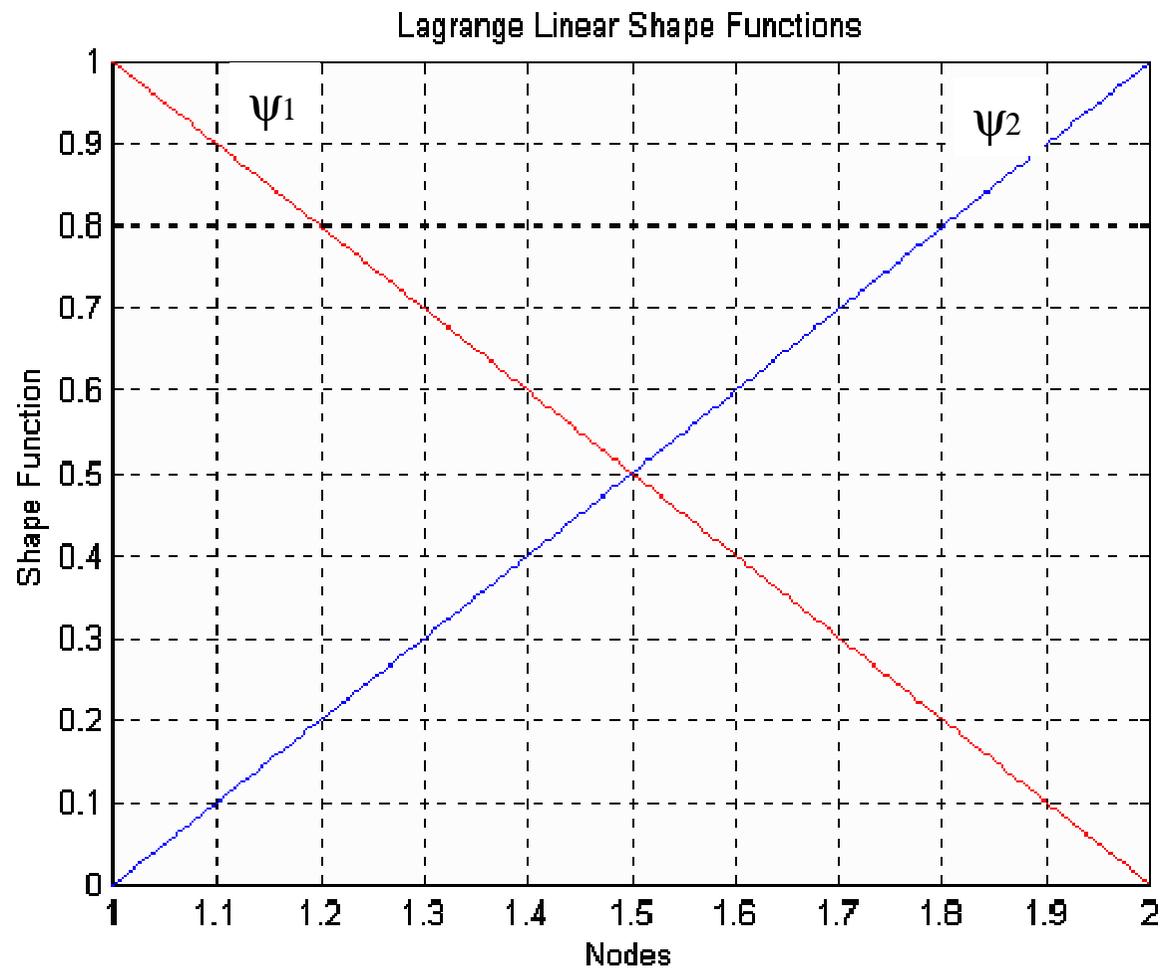


$$\psi_i = \frac{1 - \xi}{2}$$

$$\psi_j = \frac{1 + \xi}{2}$$

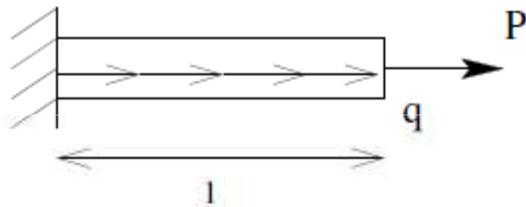
$$u(\xi) = \psi_i(\xi)U_i + \psi_j(\xi)U_j$$

Elementi Lagrangiani lineari: elemento asta



Elementi Lagrangiani lineari: elemento asta

$$K = \frac{EA}{l^e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e' la matrice di rigidezza "esatta" dell'elemento asta!}$$



Vettore dei carichi nodali

$$F_1 = \frac{l^e}{2} \int_{-1}^1 \psi_1(\xi) q d\xi = \frac{l^e}{2} \int_{-1}^1 \frac{1-\xi}{2} q d\xi = \frac{ql^e}{2}$$

$$F_2 = \frac{l^e}{2} \int_{-1}^1 \psi_2(\xi) q d\xi = \frac{l^e}{2} \int_{-1}^1 \frac{1+\xi}{2} q d\xi = \frac{ql^e}{2}$$

Elementi Lagrangiani quadratici

i j k

x_i x_j x_k

e

$u(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$

$u(x_i) = c_1 + c_2x_i + c_3x_i^2 = U_i$

$u(x_k) = c_1 + c_2x_k + c_3x_k^2 = U_k$

$u(x_j) = c_1 + c_2x_j + c_3x_j^2 = U_j$

Si approssima lo spostamento attraverso una funzione quadratica di x che interpola gli spostamenti nodali; poichè occorrono 3 condizioni per determinare l'espressione analitica di una parabola, l'elemento Lagrangiano quadratico consta di 3 nodi

Elementi Lagrangiani quadratici

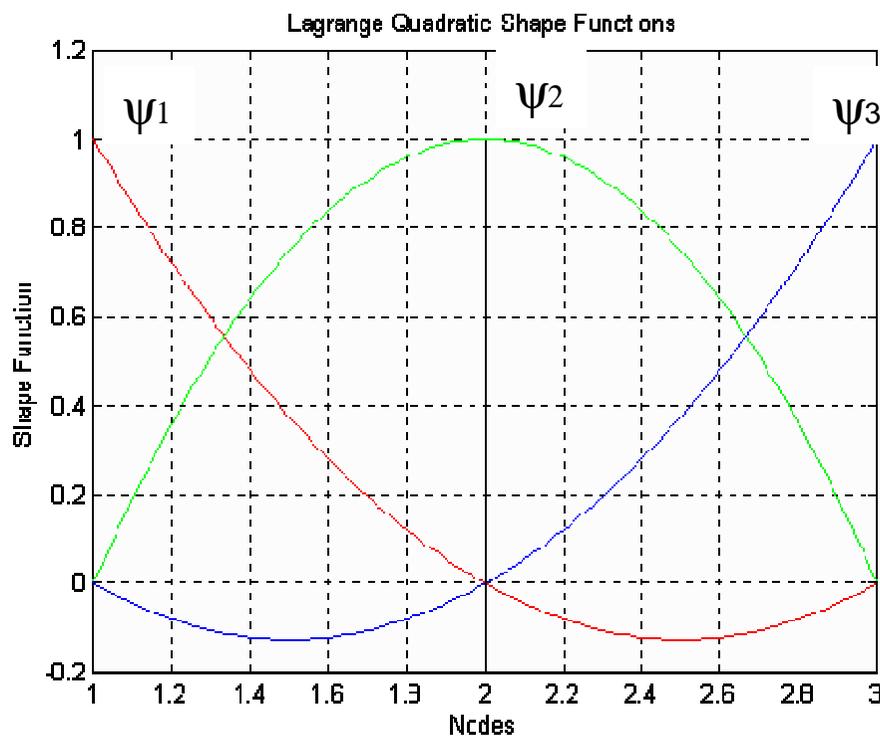
Il campo di spostamenti si esprime in funzione degli spostamenti nodali U_i, U_k, U_j come:

$$u(x) = \phi_i(x)U_i + \phi_k(x)U_k + \phi_j(x)U_j$$

Elementi Lagrangiani quadratici

oppure in funzione delle coordinate intrinseche ξ

$$u(\xi) = \psi_i(\xi)U_i + \psi_k(\xi)U_k + \psi_j(\xi)U_j$$



$$\psi_i(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

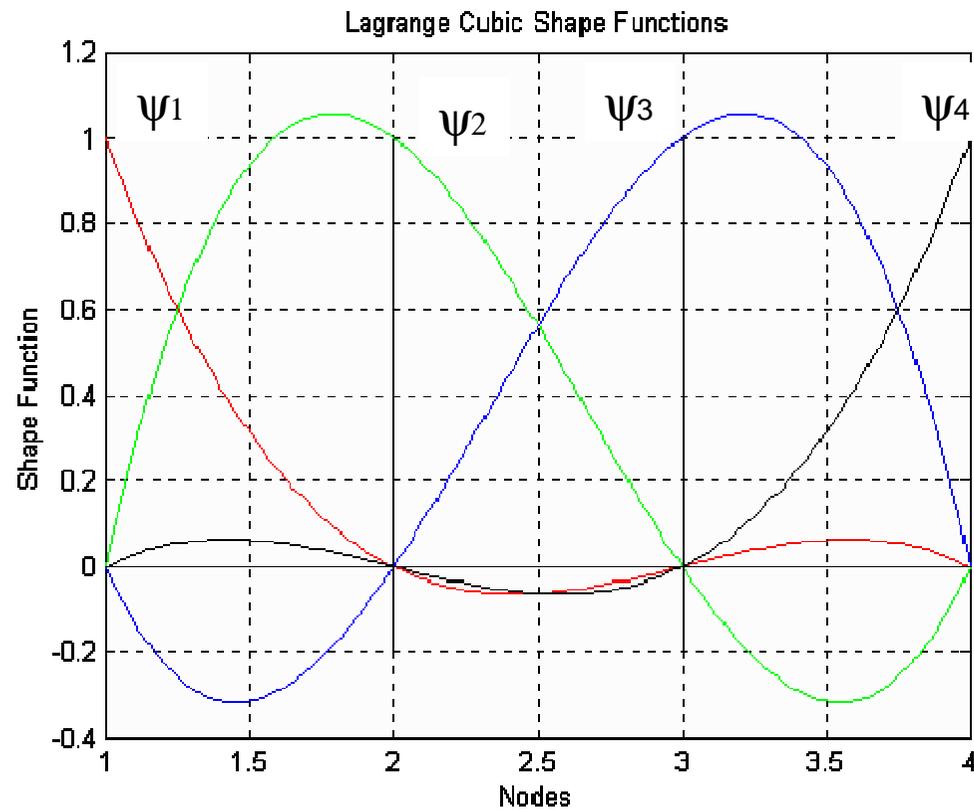
$$\psi_j(\xi) = 1 - \xi^2$$

$$\psi_k(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$

Nota che:

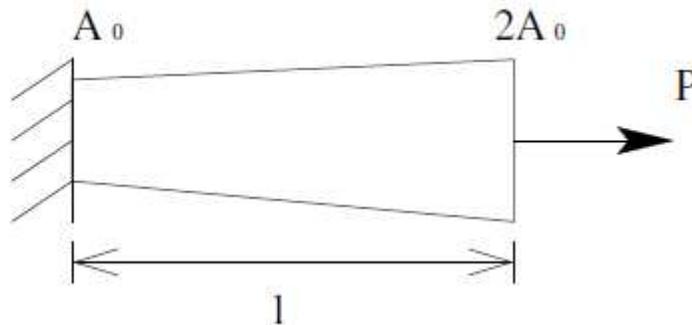
$$\psi_i(-1) = \psi_k(0) = \psi_j(1) = 1$$

Elementi Lagrangiani cubici



Asta a sezione variabile

Soluzione esatta



$$A(x) = A_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right)$$
$$\frac{d}{dx} (E(x)A(x)u') = 0$$

(poniamo $l = 1$):

$$EA(x) \frac{du(x)}{dx} = \text{costante} = c_1$$
$$\Rightarrow \frac{du(x)}{dx} = \frac{c_1}{EA_0(1+x)}$$

Asta a sezione variabile

Tenendo conto delle condizioni al contorno, $u(x)$ esatta e':

$$u(x) = \frac{P}{EA_0} \ln \frac{EA(x)}{EA_0}$$

lo spostamento in $x = l$ e':

$$u(l) = \frac{P}{EA_0} \ln 2 = \frac{P}{EA_0} 0.693147$$

Soluzione approssimata

1 EF lineare

$$\frac{E(A_1 + A_2)}{2l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix}$$

$$U(l) = \frac{Pl}{E A_1 + A_2} \cdot 2 = 0.6 \frac{Pl}{EA_0}$$

2 EF lineari

$$U(l) = 0.686 \frac{Pl}{EA_0}$$

3 EF lineari

$$U(l) = 0.690 \frac{Pl}{EA_0}$$

Soluzione approssimata

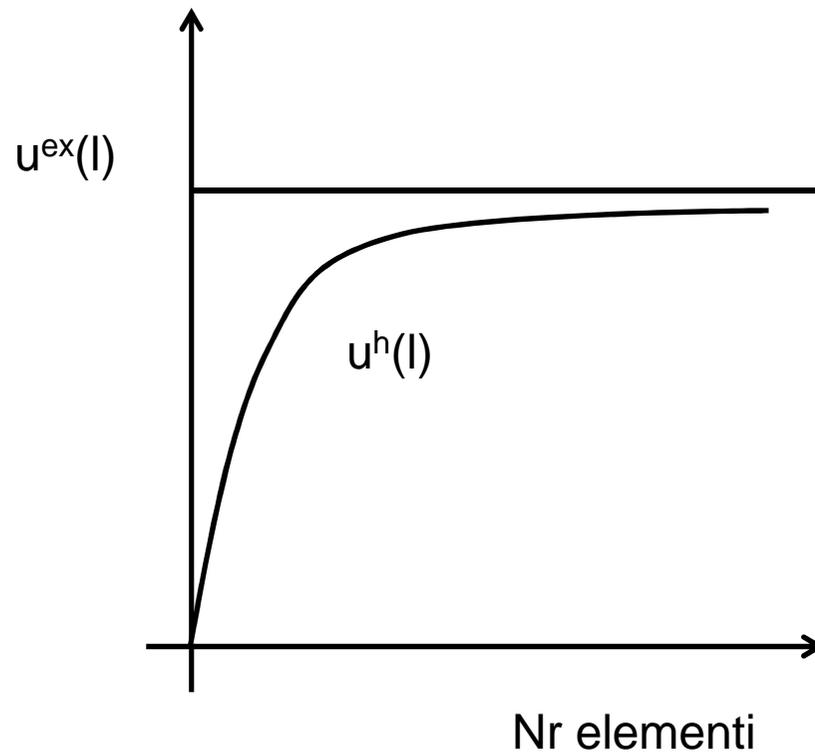
La soluzione dell'asta incastrata a sezione variabile con 1 EF quadratico

$$u(1) = 0.692307 \frac{Pl}{EA_0}$$

l'approssimazione e' migliore di quella che otterrei con 2 EF lineari, a parità di numero di variabili

h-convergenza

- h-convergenza: si raffittisce la mesh, aumento il numero di elementi finiti



all'aumentare del numero di elementi finiti, la soluzione approx converge dal basso

h-convergenza

Dimostriamo che la soluzione approssimata u^h è più rigida di quella esatta u^{ex} , ovvero che u^h approssima u^{ex} dal basso $u^h < u^{ex}$.

Si supponga di essere in presenza di un carico concentrato P , per cui l'EPT diventa

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - Pu$$

In base al Teorema di Clapeyron, si ha che il potenziale elastico $\frac{1}{2}a(u, u) = \frac{1}{2}Pu$, quindi

$$\Pi^{ex} = -\frac{1}{2}Pu^{ex}, \text{ ed inoltre } \Pi^h = -\frac{1}{2}Pu^h$$

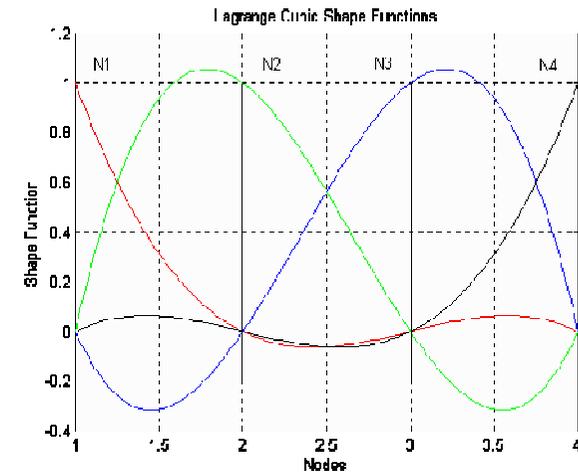
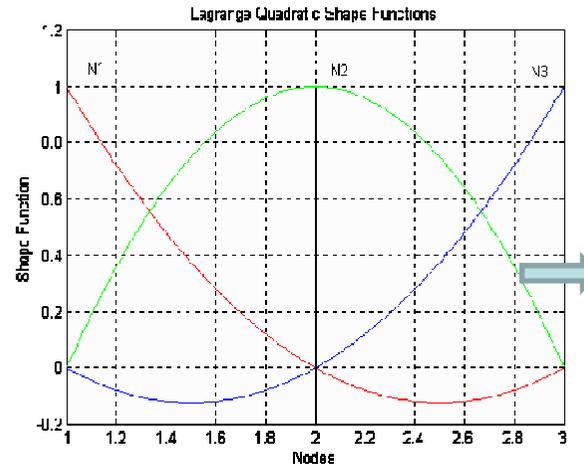
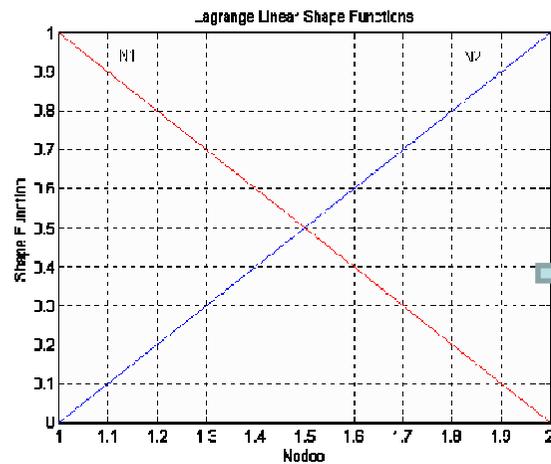
Poichè la soluzione esatta rende minimo il potenziale, segue che

$$\Pi^h = -\frac{1}{2}Pu^h \geq \Pi^{ex} = -\frac{1}{2}Pu^{ex}$$

ma questo è vero se e solo se $\Rightarrow u^h \leq u^{ex}$ (c.v.d.)

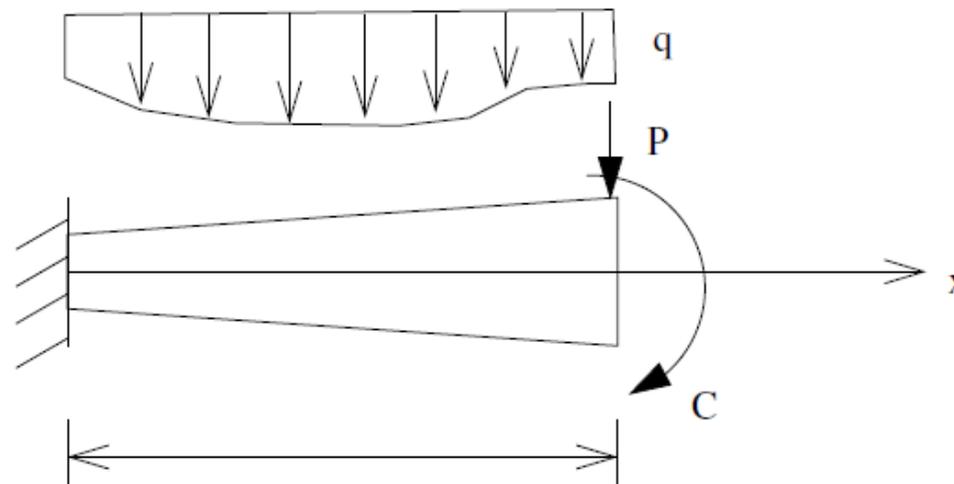
p-convergenza

- p-convergenza: si ricorre a funzioni di interpolazioni polinomiali di ordine p e si cresce l'ordine p



Elementi trave: cinematica Eulero-Bernoulli

Nella teoria della trave di Eulero-Bernoulli, si suppone che la sezione trasversale ruotando rimanga piana e normale all'asse dopo la deformazione; la rotazione della sezione trasversale φ viene allora assunta pari alla derivata dello spostamento verticale w rispetto alla coordinata assiale, $\varphi = -dw/dx$



Elementi trave: cinematica Eulero-Bernoulli

Si scriva l'equilibrio del concio di trave di E-B

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x) J(x) \frac{dw^2}{dx^2} \right) = q(x) \quad 0 < x < l$$

cui corrisponde la forma debole, assumendo uno spostamento virtuale $v \in \mathbb{V}$ ammissibile

$$\int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \left(E(x) J(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) v(x) dx = \int_0^l q(x) v(x) dx$$

Elementi trave: cinematica Eulero-Bernoulli

Si applichi la regola di integrazione per parti due volte all' integrale al primo membro

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) v(x) dx &= \\ - \int_0^l \frac{d}{dx} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \frac{dv}{dx} dx + \left[\frac{d}{dx} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) v(x) \right]_0^l &= \\ \int_0^l EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx - \left[EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{dv}{dx} \right]_0^l & \\ + \left[\frac{d}{dx} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) v(x) \right]_0^l & \end{aligned}$$

Elementi trave: cinematica Eulero-Bernoulli

Si osservi che la doppia integrazione per parti mette in evidenza le 4 condizioni al contorno: 2 essenziali sugli spostamenti e sulle rotazioni e 2 condizioni naturali sulle forze e sui momenti al bordo

$$\left[EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{dv}{dx} \right]_0^l$$

$$\left[\frac{d}{dx} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) v(x) \right]_0^l$$

Elementi trave: cinematica Eulero-Bernoulli

Identifichiamo con $a(w, v)$ il lavoro virtuale interno

L_{vi} :

$$a(w, v) = \int_0^l EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx$$

In questo caso

$$l(v) = \int_0^l q(x)v(x) dx + C\varphi(l) + Pv(l)$$

Pertanto abbiamo ritrovato il principio dei lavori virtuali

$$a(w, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (24)$$

Approssimazione agli elementi finiti

Consideriamo le approssimazioni w^h e v^h dei campi di spostamento w e v in funzione degli spostamenti nodali U_i e V_j

$$w^h = \sum_{i=1}^{NE+1} \phi_i(x) U_i, \quad v^h = \sum_{j=1}^{NE+1} \phi_j(x) V_j$$

Approssimazione agli elementi finiti

Sostituiamo in $a(w, v)$:

$$a(w^h, v^h) = a\left(\sum_{i=1}^{NE+1} \phi_i(x)U_i, \sum_{j=1}^{NE+1} \phi_j(x)V_j\right) \text{ ovvero}$$

$$L_{vi} = \int_0^l EJ \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{i=1}^{NE+1} \phi_i(x)U_i \right) \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{j=1}^{NE+1} \phi_j(x)V_j \right) dx$$

$$L_{vi} = \int_0^l EJ \sum_{i=1}^{NE+1} \sum_{j=1}^{NE+1} U_i \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} V_j dx$$

$$L_{vi} = \sum_{i=1}^{NE+1} \sum_{j=1}^{NE+1} U_i V_j \int_0^l EJ \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx$$

Approssimazione agli elementi finiti

In notazione compatta si ha

$$L_{vi} = \sum_{i=1}^{NE+1} \sum_{j=1}^{NE+1} U_i K_{ij} V_j$$

dove K ha come componente generica il termine K_{ij}
 $i, j = 1, NE + 1$

$$K_{ij} = \int_0^l EJ \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx$$

Approssimazione agli elementi finiti

La matrice K risulta dall'assemblaggio delle matrici elementari K^e ,

$$K = \bigwedge_{e=1}^{NE} K^e$$

il cui termine generico K_{ij}^e si calcola come

$$K_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} E(x) J(x) \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx$$

Approssimazione agli elementi finiti

- Il lavoro esterno si esprime come

$$L_{ve} = \sum_{j=1}^{NE+1} F_j V_j$$

- Il lavoro interno si esprime come

$$L_{vi} = \sum_{i=1}^{NE+1} \sum_{j=1}^{NE+1} U_i K_{ij} V_j$$

Approssimazione agli elementi finiti

la forma debole del problema diventa

$$\sum_{i=1}^{NE+1} \sum_{j=1}^{NE+1} U_i K_{ij} V_j = \sum_{j=1}^{NE+1} F_j V_j \quad \text{che vale } \forall V_j \in \mathbb{V}$$

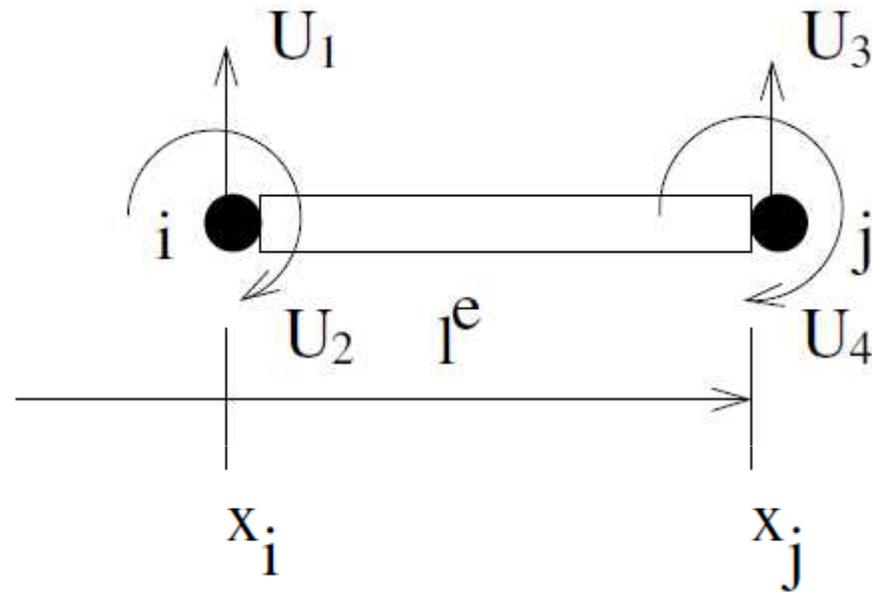
pertanto, si può scrivere

$$U^t K V = F V \quad \forall V \in \mathbb{V},$$

Quindi, l'equazione risolutiva diventa:

$$K U = F$$

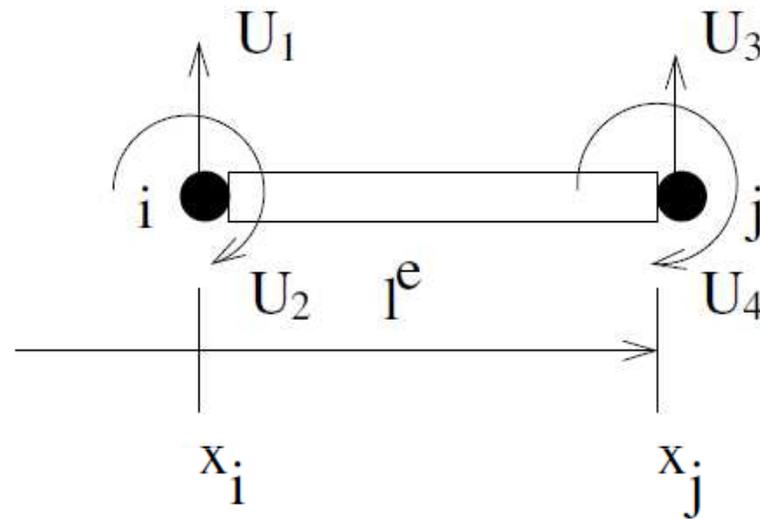
Famiglia di interpolazione di Hermite per la trave di E-B



Si cerca il polinomio cubico (vedi deformata flessionale linea elastica) che approssima il campo di spostamento

$$u(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$$

Famiglia di interpolazione di Hermite per la trave di E-B

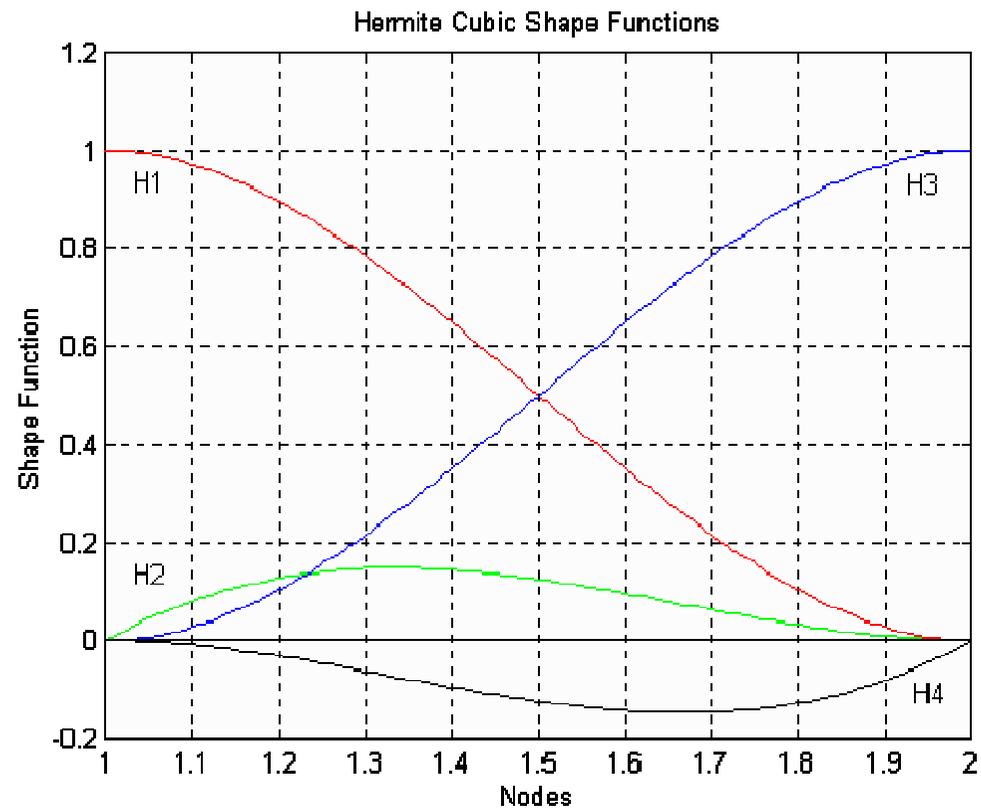


$$u(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$$

$$v(x_i) = U_1 \qquad -v'(x_i) = U_2$$

$$v(x_j) = U_3 \qquad -v'(x_j) = U_4$$

Funzioni di forma per elemento trave



Funzioni di forma per elemento trave

- *Si noti che le funzioni di interpolazione cubiche sono ottenute interpolando w e le sue derivate ai nodi. Questi polinomi sono noti come polinomi di Hermite o cubic splines.*
- *Si ricorda che le funzioni di interpolazione Lagrangiane sono concepite per interpolare i valori degli spostamenti nodali ma non le derivate ai nodi (rotazioni). Quindi un elemento Lagrangiano cubico ha 4 nodi e 4 spostamenti nodali. Esso non può essere impiegato per approssimare la deformata flessionale di una trave di $E-B$, in quanto la condizione di continuità della derivata dello spostamento richiesta dalla forma debole del problema non verrebbe soddisfatta, in pratica non soddisfa la condizione di continuità della rotazione all'inter-elemento.*

Funzioni di forma per elemento trave

Con le funzioni di interpolazione hermitiane si ottiene la matrice di rigidezza dell'elemento beam dell'analisi matriciale

$$K^e = \frac{EJ}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l_e & -12 & -6l_e \\ -6l_e & 4l_e^2 & 6l_e & 2l_e \\ -12 & 6l_e & 12 & 6l_e \\ -6l_e & 2l_e^2 & 6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

ed il vettore dei carichi nodali equivalenti dell'elemento beam

$$F^e = \begin{bmatrix} -ql_e/2 \\ ql_e^2/12 \\ -ql_e/2 \\ -ql_e^2/12 \end{bmatrix}$$

Funzioni di forma per elemento trave

Si osservi che le funzioni di interpolazione della splines cubiche rappresentano le deformate flessionali di una trave incastro-incastro in cui si faccia avvenire uno spostamento nodale per volta

