

- [5] ARGYRIS J.H., KELSEY S., *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworths, Londra, 1960.
- [6] BATHE K.J., *Finite Element Procedures in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall Int., Londra, 1982.
- [7] COOK R.D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 2^a ed., John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [8] STRANG G., FIX G.J., *An analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.
- [9] HINTON E., CAMPBELL J.S., Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least square method, *Int.J.Num.Meth. Engng*, **8**, p.461 (1974).
- [10] BARLOW J., Optimal stress locations in finite element models, *Int.J. Num.Meth.Engng*, **10**, p.243 (1976).
- [11] CORRADI L., On stress computation in displacement finite element models, *Comp.Meth.Appl.Mech.Engng*, **54**, p. 325 (1986).
- [12] BARLOW J., More on optimal stress points - Reduced integration, element distortions and error estimation, *Int.J.Num.Meth.Engng*, **28**, p.1487 (1989).
- [13] MORLEY L.S.D., The constant moment plate bending element, *J.Strain Anal.*, **6**, p. 20 (1971).
- [14] GOLUB G.H., WELSH J.H., Calculation of Gauss quadrature rules, *Math.Comp.*, **23**, p. 221 (1969).
- [15] PEANO A.G., Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending, *Comp.Meth.Appl.*, **2**, p. 99 (1976).
- [16] HINTON E., OWEN D.R.J., *An introduction to finite element computation*, Pineridge Press Limited, Swansea, G.B., 1979.
- [17] TEZCAN S.S., Computer analysis of plane and space structures, *Proc.ASCE, J.Strct.Div.*, **92**, p.143 (1966).
- [18] DUFF I.S., A survey of sparse matrix research, *Proc.IEEE*, **65**, p. 500 (1977).
- [19] MARTIN J.B., *Plasticity - Fundamentals and general results*, MIT Press, Cambridge, MA, 1975.
- [20] ARGYRIS J.H., Elasto-plastic matrix displacement analysis of three-dimensional continua, *J.Roy.Aero.Soc.*, **32**, p. 700 (1974).
- [21] ZIENKIEWICZ O.C., VALLIAPPAN S., KING I.P., Elasto-plastic solutions of engineering problems - Initial stress, finite element approach, *Int.J. Num.Meth.Engng*, **1**, p.75 (1969).
- [22] OWEN D.R.J., HINTON E., *Finite elements in plasticity*, Pineridge Press Limited, Swansea, G.B., 1980.
- [23] NAYAK G.C., ZIENKIEWICZ O.C., Elasto-plastic stress analysis - A generalization for various constitutive relations including strain softening, *Int.J.Num.Meth.Engng*, **5**, p. 113 (1972).
- [24] CORRADI L., Finite element modelling of the elastic-plastic problem, in: *Mathematical programming methods in structural plasticity*, ed. D. Lloyd Smith, p. 255, Spriger Verlag, Vienna, 1990.

Il metodo degli elementi finiti: sviluppi ulteriori

12.1 LIMITAZIONI DELL'APPROCCIO AGLI SPOSTAMENTI

12.1.1 INTRODUZIONE

Nella pratica applicativa, l'approccio agli spostamenti gode di una posizione di privilegio quasi assoluto, al punto che questa versione del procedimento viene a volte inconsapevolmente identificata con il metodo degli elementi finiti nella sua interezza. Ciò è dovuto non solo alla sua generalità e facilità di applicazione, ma anche alla sua semplicità concettuale. L'approccio agli spostamenti, infatti, generalizza in maniera spontanea e diretta l'idea della modellazione cinematica alla base delle classiche teorie strutturali, pervenendo a una formulazione estremamente versatile, traducibile in algoritmi gestibili in modo molto efficiente da strumenti di calcolo automatico.

Molte delle proprietà delle teorie strutturali si trasferiscono pressoché inalterate nel nuovo contesto. Purtroppo a volte si trasferiscono anche gli inconvenienti. Quello più frequentemente riscontrato è l'eccesso di rigidità, dovuto ai vincoli che un modello cinematico fatalmente introduce nel problema originario. I modelli flessionali di trave o di piastra trascurano il contributo delle deformazioni taglianti e producono quindi soluzioni più rigide che non le formulazioni che le considerano; l'effetto è marginale se la trave è snella o la piastra sottile, ma può divenire sensibile in caso contrario. Anche uno schema ad elementi finiti basato su di un modello agli spostamenti può presentare rigidità eccessiva, talvolta al punto di non essere in grado di rappresentare neppure gli aspetti essenziali del comportamento strutturale.

12.1.2 PROBLEMI "VINCOLATI"

ESEMPIO 12.1 Si inizia a discutere il fenomeno con riferimento alla mensola a sezione costante in Figura 12.1a. Il problema era già stato risolto in precedenza (Esempio 7.2) e si era ottenuto per lo spostamento trasversale all'estremo libero il valore

$$f = \frac{FL^3}{3EI} \left(1 + \frac{3}{\beta} \right) \quad \beta = L^2 \frac{GA}{EI} \quad (12.1a, b)$$

Il termine $3/\beta$ rappresenta il contributo percentuale delle deformazioni taglianti, che diviene rapidamente trascurabile al crescere di β e quindi, a parità di sezione, di L . L'esempio era stato in effetti utilizzato per legittimare l'introduzione del modello puramente flessionale di trave.

Si vuole ora trovare una soluzione a elementi finiti del problema, basata sul modello

di trave alla Timoshenko. La schematizzazione più semplice comporta un unico elemento con funzioni di forma lineari, la cui matrice di rigidità è fornita dalla (11.70a). L'incastro annulla i due gradi di libertà dell'estremo di sinistra; indicando con f e ϑ lo spostamento e la rotazione dell'estremo libero e ricordando la (12.1b), il sistema risolvibile si scrive quindi

$$\begin{bmatrix} \frac{\beta}{L^2} & -\frac{\beta}{2L} \\ -\frac{\beta}{2L} & 1 + \frac{\beta}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \\ \vartheta \end{Bmatrix} = \frac{FL}{EI} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12.2)$$

si ottiene, in luogo della (12.1a)

$$f = \frac{FL^3}{3EI} \left(1 + \frac{3}{\beta} \right) \frac{12}{12 + \beta} \quad (12.3)$$

L'andamento della (12.3) è diagrammato in funzione di β nella curva L1 di Figura 12.1b, sempre sensibilmente al di sotto dei valori esatti, ragionevolmente approssimati solo per β irrealisticamente piccoli (si osservi a questo proposito che per una sezione rettangolare di altezza h e un materiale con coefficiente di Poisson $\nu = .25$ risulta $\beta = 4(L/h)^2$; per $L/h \geq 5$ è allora $\beta \geq 100$; i valori del rapporto L/h relativi a questo caso sono pure riportati in Figura 12.1b). Al crescere di β la soluzione, anziché avvicinare il valore previsto dal modello puramente flessionale, tende a zero, rivelando come lo schema discreto sia incapace di rappresentare il comportamento di una trave snella.

Il fenomeno non viene rimosso operando con un maggior numero di elementi. La curva L2 in Figura 12.1b riporta la soluzione ottenuta con due elementi: si riscontrano solo marginali incrementi di flessibilità, che comunque ancora tende a zero con l'aumentare della snellezza. Un parziale miglioramento è associato all'uso di elementi di ordine più elevato: un unico elemento finito con modello quadratico per entrambe le componenti $v(x)$ e $\varphi(x)$ produce la soluzione rappresentata dalla curva Q1; per $\beta \rightarrow \infty$ la freccia non si annulla, ma è pari solo al 75% del valore corretto. La soluzione è comunque sorprendentemente rigida per valori significativi di β , prevedendo scarti superiori al 15% rispetto alla soluzione esatta.

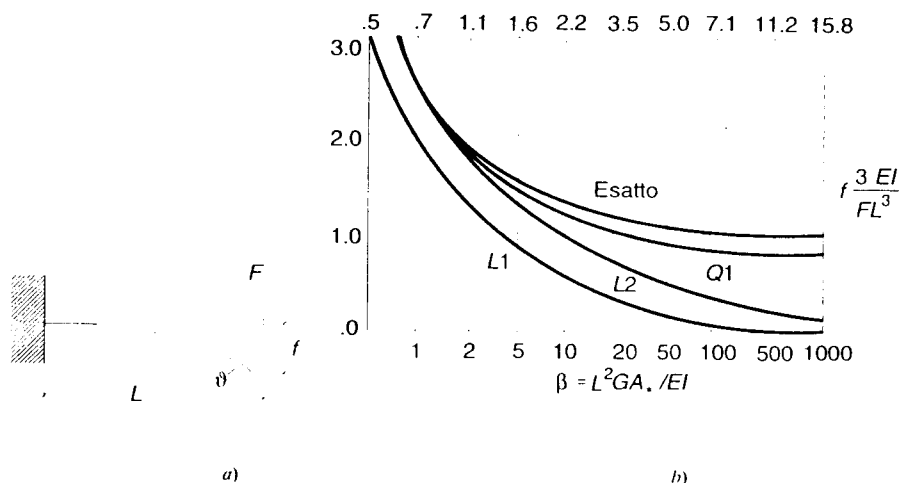


Figura 12.1

L'elemento di trave alla Timoshenko costituisce un esempio di *problema vincolato*, caratterizzato dalla presenza di un legame, indotto dal modello di spostamento, tra diverse componenti di deformazione. Nel caso di un modello lineare, il regime deformativo nell'elemento è governato dalla matrice \mathbf{B} espressa dalla (11.40b). Indicando con f_s , ϑ_s e f_d , ϑ_d gli spostamenti e rotazioni agli estremi di sinistra e di destra, le deformazioni in ogni elemento risultano

$$\begin{Bmatrix} \chi \\ t \end{Bmatrix} = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -\ell + x & 1 & -x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_s \\ \vartheta_s \\ f_d \\ \vartheta_d \end{Bmatrix} \quad (12.4a)$$

dove, al solito, χ indica la curvatura flessionale e t lo scorrimento medio. Al crescere della snellezza della trave, quest'ultimo tende a zero. Peraltro, per $t = 0$ dalla (12.4a) consegue

$$f_d - f_s - \ell \vartheta_s = 0 \quad \vartheta_s - \vartheta_d = 0 \quad (12.4b)$$

il che configura un moto rigido ed implica anche $\chi = 0$. Un elemento lineare di trave di Timoshenko non è quindi in grado di deformarsi flessionalmente in assenza di deformazioni taglianti.

Questo elemento in realtà non dovrebbe essere considerato valido, in quanto i modi a deformazione costante, pur entrambi presenti, non sono indipendenti da contributi di ordine superiore. Modelli di ordine più elevato rispettano questa condizione ma non eliminano completamente l'eccesso di rigidità. La situazione $t = 0$, avvicinata in soluzione da una trave snella, introduce comunque dei vincoli sulle curvature, di fatto rappresentate più poveramente di quanto l'ordine delle approssimazioni polinomiali non lasci a prima vista prevedere.

Lo stesso fenomeno può riscontrarsi in problemi tridimensionali o piani nelle deformazioni, qualora il modello non sia in grado di separare le componenti deviatoriche da quelle volumetriche di deformazione; se il materiale è pressoché incompressibile ($\nu \rightarrow .5$) queste ultime tendono a zero e vengono a costituire un vincolo sulle prime.

12.1.3 EFFETTI DELLA DISTORSIONE GEOMETRICA

Un eccesso di rigidità può anche essere introdotto nello schema discreto dalla distorsione geometrica degli elementi di cui è costituito. Il fenomeno viene illustrato con riferimento alla mensola tozza di Figura 12.2a, considerata come un problema piano nelle tensioni e schematizzata con elementi bilineari S_4 . Si considerano due suddivisioni, composte rispettivamente da 4 e 16 elementi, e si assume come valore di riferimento la massima componente verticale di spostamento all'estremo libero calcolata con elementi quadrati.

Tale valore non è di per sé accurato (in particolare, con soli 4 elementi si ottengono risultati decisamente grossolani). Esso tuttavia viene qui utilizzato ai soli fini del confronto con quello che risulta distorcendo isoparametricamente gli elementi nelle geometrie indicate con ① e ② in Figura 12.2b (il secondo caso richiede ovvie modifiche negli elementi adiacenti le sezioni di estremità). Le matrici di rigidità sono calcolate numericamente utilizzando una griglia 2×2 , che assicura l'integrazione completa. La distorsione geometrica è misurata dal parametro adimensionale

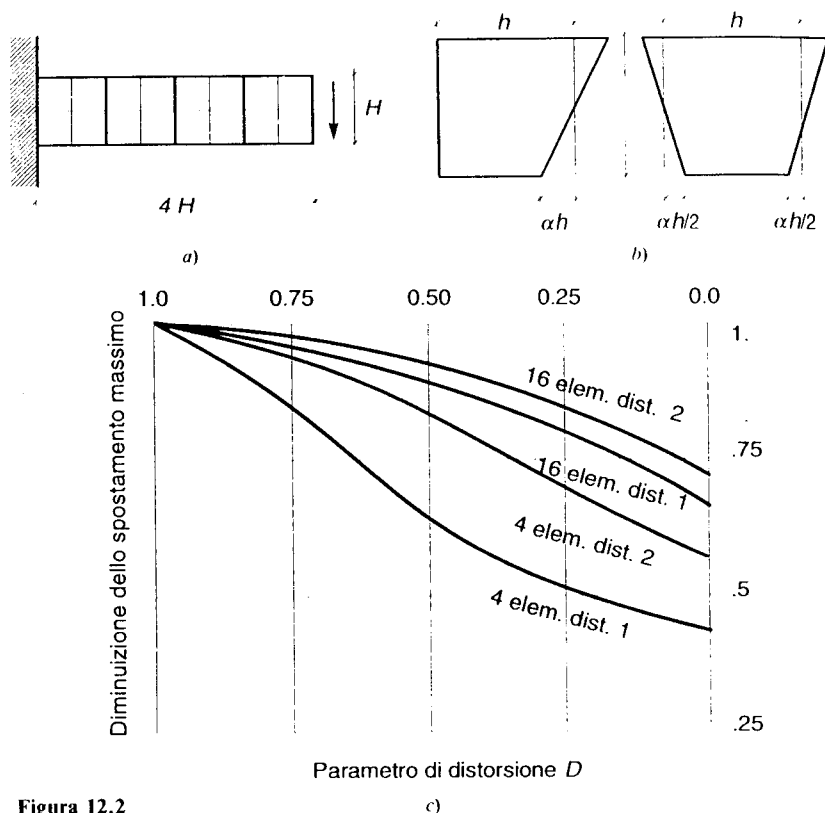


Figura 12.2

$$D = \frac{4}{A} \min J(\xi, \eta) \quad (12.5)$$

dove A è l'area dell'elemento, sempre pari a h^2 nel caso in esame, e $J(\xi, \eta)$ lo Jacobiano della trasformazione isoparametrica. Esso è calcolabile sulla base delle (11.112c) e (11.116b) e risulta, in entrambi i casi

$$J = \frac{h^2}{4} (1 + \alpha\eta) \quad (a)$$

Sull'elemento, esso è minimo per $\eta = -1$. Si ottiene pertanto

$$D = 1 - \alpha \quad (b)$$

$D = 1$ corrisponde all'elemento non distorto, uguale a meno di un fattore di scala al suo genitore, e $D = 0$ al caso limite in cui l'elemento degenera in un triangolo. Il rapporto tra gli spostamenti massimi calcolati per vari D e quello relativo a $D = 1$ è diagrammato in Figura 12.2c. I risultati mettono in luce un incremento di rigidità, sempre più marcato all'aumentare della distorsione. Il fenomeno è inoltre più sensibile per il

reticolo rado che non per quello fitto. Comunque, anche per 16 elementi e una distorsione abbastanza modesta ($D = .75$) lo spostamento massimo diminuisce del 5% circa, in misura quindi non trascurabile.

L'effetto irrigidente della distorsione geometrica è drammaticamente evidente nell'elemento S_4 ma, pur se non sempre in modo altrettanto pronunciato, si presenta anche in altri casi. Esso è attribuibile al fatto che la formulazione isoparametrica conserva la capacità di rappresentare, oltre ai moti rigidi, i modi a deformazione costante, ma altera la natura dei modi deformativi di ordine più elevato. La soluzione converge sempre all'infittirsi del reticolo, come il confronto tra le curve relative a 4 e 16 elementi in Figura 12.2c lascia intuire, ma la soluzione per una suddivisione non eccessivamente fitta può rivelarsi inadeguata. La quantità (12.5), nota come *parametro di distorsione* e definibile, con modifiche puramente formali, anche per elementi derivati da genitori triangolari o tridimensionali, rappresenta un indice atto a quantificare l'effetto; di regola, elementi per cui risulta $D \leq .25$ sono considerati potenzialmente problematici [1]. Va detto, peraltro, che anche elementi non distorti possono dar luogo a inconvenienti; un elemento rettangolare, a esempio, presenta sempre $D = 1$ ma il suo comportamento può essere cattivo se le dimensioni dei suoi lati sono sensibilmente diverse.

12.1.4 FENOMENI DI "LOCKING"

Quanto sopra osservato indica che i modelli agli spostamenti possono in determinate circostanze presentare comportamenti patologici. L'eccesso di rigidità insito in ogni approccio cinematico risulta a volte ben più marcato di quanto l'ordine delle approssimazioni polinomiali non lasci ragionevolmente prevedere. Può infatti accadere che lo schema discreto si riveli incapace di rappresentare anche solo gli aspetti essenziali della risposta strutturale, che risultino cioè drasticamente sottostimati anche quei parametri (tipicamente, gli spostamenti nodali) che ci si attende essere adeguatamente approssimati anche da modelli relativamente poveri.

Il fenomeno è attribuibile a vincoli cinematici, che possono intervenire a diversi livelli. A volte, come negli elementi di trave alla Timoshenko, essi sono insiti nel modello stesso, il quale instaura un legame tra componenti deformative che presentano, in soluzione, valori tra loro marcatamente diversi. In altre circostanze il buon comportamento di un elemento di forma regolare può venire deteriorato dalla distorsione geometrica, in misura anche drammatica se questa è notevole. Può anche accadere che modi deformativi ben rappresentati in elementi isolati vengano a essere vincolati in sede di assemblaggio. Anche le conseguenze possono essere diverse. A volte la convergenza è distrutta, indicando che i vincoli sono tali da compromettere la validità dell'elemento; in altre circostanze, la soluzione converge al valore esatto all'infittirsi del reticolo, ma un'approssimazione adeguata richiede suddivisioni molto ricche. Ne risulta comunque un comportamento patologicamente rigido, cui in letteratura ci si riferisce genericamente col termine di *locking*.

Tali situazioni richiedono interventi correttivi e sono state formulate varie proposte in questo senso. In alcuni casi il fenomeno di locking può essere eliminato valutando le matrici di rigidità in via approssimata, mediante tecniche di *integrazione ridotta* o *selettiva*, mirate a migliorare le caratteristiche di comportamento di particolari elementi. È anche possibile abbandonare o generalizzare l'approccio agli spostamenti modellando, in alternativa o in aggiunta agli spostamenti stessi, gli andamenti di altre variabili, quali sforzi o deformazioni. Spesso, impostazioni apparentemente diverse producono

gli stessi risultati, suggerendo la presenza di connessioni. Il panorama è indubbiamente molto articolato e ancora oggetto sia di ricerca teorica che di sperimentazione numerica, tanto che una sua trattazione completa ed esauriente non è ancora reperibile neppure in testi specificamente dedicati agli elementi finiti. Comunque, anche solo un'introduzione alla problematica richiede un più approfondito esame delle implicazioni dei modelli cinematici, cui è dedicato il paragrafo che segue.

12.2 LA FORMULAZIONE "NATURALE" DELL'APPROCCIO AGLI SPOSTAMENTI

12.2.1 SFORZI E DEFORMAZIONI GENERALIZZATI

12.2.1.1 Moti rigidi e modi deformativi

La relazione

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (12.6)$$

esprime le deformazioni nell'elemento finito in funzione dei suoi spostamenti nodali. Questi peraltro includono anche moti rigidi, possibili in un elemento isolato e doverosamente rappresentati dal modello, cui non corrispondono deformazioni. Esisteranno quindi spostamenti nodali \mathbf{u}_e tali per cui dalla (12.6) si ottiene

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}_e = \mathbf{0} \quad (a)$$

Come osservato in [2], è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra le m componenti di \mathbf{u} e due vettori ρ e \mathbf{q} che rappresentano, rispettivamente, i p moti rigidi e i d modi deformativi dell'elemento ($p + d = m$). Simbolicamente, si scrive

$$\mathbf{u} = \Lambda \begin{Bmatrix} \rho \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}_e \ \mathbf{A}] \begin{Bmatrix} \rho \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \rho \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \Lambda^{-1} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_e \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (12.7a, b)$$

La (12.7a) esprime gli spostamenti nodali come somma dei contributi seguenti

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{A}_e \rho \quad \mathbf{u}_q = \mathbf{A} \mathbf{q} \quad (12.8a, b)$$

Sostituendo la (12.8a) nella (a) e imponendo che l'eguaglianza valga per ogni ρ , si ottiene

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{A}_e = \mathbf{0} \quad (12.9)$$

Le p colonne della matrice \mathbf{A}_e sono quindi vettori linearmente indipendenti tali da soddisfare la (12.9). Essi possono essere determinati considerando gli spostamenti nodali che corrispondono a traslazioni e rotazioni rigide dell'elemento. La matrice \mathbf{A} è costituita da $d = m - p$ colonne tali da costruire, unitamente ad \mathbf{A}_e , una matrice Λ non singolare. La definizione di \mathbf{A} non è univoca, essendo solo necessario che le sue colonne siano linearmente indipendenti tra loro e dalle colonne di \mathbf{A}_e . Dalla (12.6) si ottiene allora

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}_q = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{A} \mathbf{q} \quad (b)$$

Introducendo la matrice

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{A} \quad (12.10)$$

tale relazione può anche scriversi

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \mathbf{q} \quad (12.11)$$

Le d componenti del vettore \mathbf{q} sono le *deformazioni generalizzate* dell'elemento (chiamate *modi naturali* in [2]), che governano gli andamenti locali attraverso la (12.11). Se il modello è correttamente formulato, le colonne di $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ risultano linearmente indipendenti: non è cioè possibile che un vettore $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ dia luogo a deformazioni identicamente nulle nell'elemento.

La (12.7b) consente di esprimere sia i moti rigidi che le deformazioni generalizzate in termini di spostamenti nodali. Si ottiene

$$\rho = \mathbf{C}_e \mathbf{u} \quad \mathbf{q} = \mathbf{C} \mathbf{u} \quad (12.12a, b)$$

dove le matrici \mathbf{C}_e e \mathbf{C} sono costituite, rispettivamente, dalle prime p e dalle ultime d righe di Λ^{-1} . Inserendo la (12.12b) nella (12.11) e confrontando con la (12.6) si deduce la relazione

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \mathbf{C} \quad (12.13)$$

Introducendo le (12.12) nelle (12.8) si ottiene anche

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{C}_e \mathbf{u} \quad \mathbf{u}_q = \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{u} \quad (12.14a, b)$$

relazioni che permettono di separare, negli spostamenti nodali \mathbf{u} dell'elemento, i moti rigidi dai contributi deformativi. Si osservi che valgono anche le relazioni

$$\mathbf{A}_e \mathbf{C}_e + \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{I}_m \quad \mathbf{C}_e \mathbf{A}_e = \mathbf{I}_p \quad \mathbf{C} \mathbf{A} = \mathbf{I}_d \quad (12.15a-c)$$

$$\mathbf{C}_e \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \mathbf{C} \mathbf{A}_e = \mathbf{0} \quad (12.15d, e)$$

dove si è indicato con \mathbf{I}_n la matrice identica $n \times n$.

ESEMPIO 12.2: quadrato a quattro nodi Si consideri un elemento S_4 , supponendo, per semplicità, che esso sia un quadrato di lato l (Figura 12.3). Numerando i suoi spostamenti nodali come in figura, la matrice \mathbf{B} risulta

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2l} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) & -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \end{bmatrix} \quad (12.16)$$

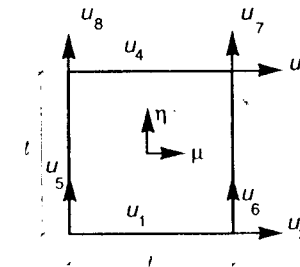


Figura 12.3

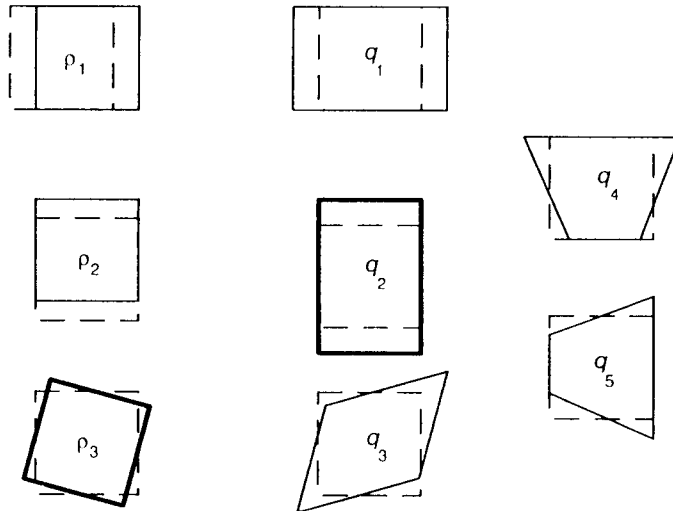
dove (ξ, η) sono le coordinate intrinseche; sostituendo le (11.84), la (12.16) si riconduce alla (11.39) particolarizzata a $h = \ell$.

L'elemento ha $m = 8$ componenti di spostamento nodale; i moti rigidi nel piano sono $p = 3$ e sono quindi presenti $d = 5$ modi deformativi. Una possibile espressione per la matrice A è la seguente

$$A = \frac{\ell}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 & -1 & 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & 0.5 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 & -1 & 0 & 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & -1 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 & -1 & 0.5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 1 & -0.5 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [A_e | A] \quad (12.17)$$

Le prime tre colonne, che costituiscono la matrice A_e , risultano dagli spostamenti nodali che configurano le traslazioni dell'elemento secondo i due assi e la rotazione rigida attorno all'origine del riferimento intrinseco (Figura 12.4a). È facile constatare che la condizione (12.9) è effettivamente rispettata. Le rimanenti cinque colonne formano invece la matrice A . Premoltiplicando per la (12.16), si ottiene

$$b(\xi, \eta) = B(\xi, \eta)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \quad (12.18)$$



a) moti rigidi

b) modi deformativi

Figura 12.4

I modi corrispondenti alle cinque componenti di deformazione generalizzata sono illustrati in Figura 12.4b. I primi tre comportano deformazioni costanti, cui il modello aggiunge due ulteriori contributi, noti come *modi a clessidra (hourglass modes)*.

La matrice A definita dalla (12.17) è nonsingolare, come è facile constatare osservando che le sue colonne sono mutuamente ortogonali. Il calcolo della sua inversa è immediato e fornisce

$$A^{-1} = \frac{1}{2\ell} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_e \\ C \end{bmatrix} \quad (12.19)$$

Le prime tre righe della (12.19) costituiscono la matrice C_e che definisce, attraverso la (12.12a), i moti rigidi dell'elemento in funzione degli spostamenti nodali. Si ottiene

$$e_1 = \frac{1}{2\ell} (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) \quad e_2 = \frac{1}{2\ell} (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) \\ e_3 = \frac{1}{2\ell} [(u_3 + u_4 + u_5 + u_8) - (u_1 + u_2 + u_6 + u_7)] \quad (12.20a)$$

Le ultime cinque righe definiscono invece la matrice C che permette di esprimere le deformazioni generalizzate. Risulta

$$q_1 = \frac{1}{2\ell} [(u_2 + u_3) - (u_1 + u_4)] \quad q_2 = \frac{1}{2\ell} [(u_7 + u_8) - (u_5 + u_6)] \\ q_3 = \frac{1}{2\ell} [(u_3 + u_4 + u_6 + u_7) - (u_1 + u_2 + u_5 + u_8)] \quad (12.20b)$$

$$q_4 = \frac{1}{2\ell} [(u_1 + u_3) - (u_2 + u_4)] \quad q_5 = \frac{1}{2\ell} [(u_5 + u_7) - (u_6 + u_8)] \quad (12.20c)$$

Le (12.20b) definiscono i modi a deformazione costante e le (12.20c) quelli a clessidra.

La (12.17) rappresenta solo una delle possibili definizioni per A . Una combinazione lineare delle sue prime tre colonne rappresenta un moto rigido e tre qualsiasi vettori di questo tipo, purché linearmente indipendenti, costituiscono una valida definizione di A_e . Analogamente, espressioni alternative di A possono essere costruite combinando linearmente le ultime cinque colonne della (12.17). La forma qui presentata, peraltro, evidenzia immediatamente gli aspetti fondamentali del comportamento dell'elemento.

ESEMPIO 12.3: elemento di trave alla Timoshenko Si consideri ora un elemento rettilineo di trave, definito nell'intervallo $0 \leq x \leq \ell$, e si assumano approssimazioni polinomiali di grado N sia per lo spostamento trasversale che per la rotazione della sezione. Operando in termini della coordinata intrinseca ξ si scrive allora

$$v(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots = \sum_{n=0}^N a_n \xi^n \quad (12.21a)$$

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\ell} (b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + \dots) = \frac{1}{\ell} \sum_{n=0}^N b_n \xi^n \quad (12.21b)$$

Ricordando la (11.84a), le deformazioni corrispondenti si scrivono

$$\chi(\xi) = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{2}{\ell} \frac{d\varphi}{d\xi} \quad t(\xi) = \frac{dv}{dx} - \varphi = \frac{2}{\ell} \frac{dv}{d\xi} - \varphi$$

dove χ è la curvatura flessionale e t lo scorrimento medio. Risulta

$$\chi(\xi) = -\frac{1}{\ell^2} (2b_1 + 4b_2\xi + \dots) = -\frac{1}{\ell^2} \sum_{n=1}^N 2n b_n \xi^{n-1} \quad (12.22a)$$

$$t(\xi) = \frac{1}{\ell} [(2a_1 - b_0) + (4a_2 - b_1)\xi + \dots - b_N \xi^N] = \frac{1}{\ell} \left\{ \sum_{n=1}^N (2na_n - b_{n-1})\xi^{n-1} - b_N \xi^N \right\} \quad (12.22b)$$

Le (12.22) esprimono le deformazioni nell'elemento nella forma (11.30b), dove si può adesso porre

$$\mathbf{a} = \{a_0 \quad b_0 | a_1 \quad b_1 | a_2 \quad b_2 | \dots | a_N \quad b_N\}^t \quad (12.23)$$

$$\mathbf{B}_*(\xi) = \left[\begin{array}{cc|cc|cc| \dots | cc} 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\ell^2} & 0 & -\frac{4\xi}{\ell^2} & & 0 & -\frac{2N\xi^{N-1}}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{1}{\ell} & \frac{2}{\ell} & -\frac{\xi}{\ell} & -\frac{4\xi}{\ell} & -\frac{\xi^2}{\ell} & \dots & \frac{2N\xi^{N-1}}{\ell} & -\frac{\xi^N}{\ell} \end{array} \right] \quad (12.24)$$

I coefficienti \mathbf{a} sono legati agli spostamenti nodali attraverso le (11.31). Precisamente

$$\mathbf{u} = \Gamma \mathbf{a} \quad \mathbf{a} = \Gamma^{-1} \mathbf{u} \quad (c1, 2)$$

Sostituendo la seconda di queste nella (11.30b) si riottiene la (12.6), con \mathbf{B} espressa dalla (11.33b).

Moti rigidi e deformazioni generalizzate possono tuttavia essere definite operando direttamente sulla (12.24). Si introduca una matrice nonsingolare \mathbf{A}_* che permetta di scrivere, in luogo delle (12.7)

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}_* \begin{Bmatrix} \rho \\ q \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}_{*o} | \mathbf{A}_{*e}] \begin{Bmatrix} \rho \\ q \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{*e}^{-1} \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_{*o} \\ \mathbf{C}_{*e} \end{Bmatrix} \mathbf{a} \quad (d1, 2)$$

dove \mathbf{A}_{*e} è definita dalla condizione

$$\mathbf{B}_*(\xi) \mathbf{A}_{*e} = \mathbf{0} \quad (e1)$$

La matrice

$$\mathbf{b}(\xi) = \mathbf{B}_*(\xi) \mathbf{A}_* \quad (e2)$$

esprime, attraverso la (12.11), le deformazioni locali in funzione di quelle generalizzate. Le (c) permettono di riconoscere che valgono le relazioni

$$\mathbf{A} = \Gamma \mathbf{A}_* \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}_{*e}^{-1} \Gamma^{-1} \quad (f1, 2)$$

Risulta, in particolare

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{*e} \Gamma^{-1} \quad (g)$$

È facile verificare che \mathbf{A}_* può scriversi come segue

$$\mathbf{A}_* = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & 1/2 & -\ell^2/2 & \ell/2 & . & . \\ . & . & -\ell^2/8 & . & \ell/4 & . \\ . & . & . & -\ell^2/24 & . & \ell/6 \\ . & . & . & . & -\ell^2/6 & . \\ . & . & . & . & -\ell^2/48 & . \end{bmatrix} \quad (12.25a)$$

Le due prime colonne, che verificano la condizione (e1), costituiscono la matrice \mathbf{A}_{*o} , le rimanenti \mathbf{A}_{*e} . L'inversa della (12.25a) risulta

$$\mathbf{A}_{*e}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & -1/\ell & 2/\ell & . & . & . \\ . & . & -1/\ell & 4/\ell & -4\ell^2 & . \\ . & . & . & . & -1/\ell & 6/\ell \\ . & . & . & . & . & -6\ell^2 \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \quad (12.25b)$$

Tali espressioni sono di validità generale; per ogni grado N dei polinomi approssimanti vanno considerate le prime $2N + 2$ righe e colonne delle (12.25).

Calcolando la (e2) relativa all'espressione (12.24) di \mathbf{B}_* e alla \mathbf{A}_* che si evince dalla (12.25a) si ottiene

$$\mathbf{b}(\xi) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \xi & 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \xi & 0 & \xi^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^{N-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right] \quad (12.26)$$

Per gli elementi lineare ($N = 1$), quadratico ($N = 2$) e cubico ($N = 3$) la (12.26) si particolarezza nelle espressioni seguenti

$$\mathbf{b}_1(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell\xi/2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 1 & \ell\xi^2/4 & \xi \end{bmatrix} \quad (12.27a, b)$$

$$\mathbf{b}_3(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi & 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \xi & \ell\xi^3/6 & \xi^2 \end{bmatrix} \quad (12.27c)$$

La matrice \mathbf{b} consente di esprimere attraverso la (12.11) la curvatura χ (prima riga della (12.26)) e lo scorrimento medio t (seconda riga) in funzione delle deformazioni generalizzate dell'elemento. Il modello non è in grado di disaccoppiare completamente i due contributi, in quanto la deformazione generalizzata q_{2N-1} interviene in entrambi. Questo accoppiamento è responsabile dell'eccesso di rigidità che si riscontra in travi snelle. In tal caso, infatti, $t \rightarrow 0$ e ciò implica che, oltre alle deformazioni generalizzate con indice pari, anche q_{2N-1} risulti pressoché nulla; la curvatura flessionale è rappresentata solo fino all'ordine $N - 2$, di un grado inferiore a quello che l'approssimazione polinomiale per φ non lascerebbe prevedere.

Le conseguenze sono particolarmente drammatiche per il modello lineare. Dalla (12.27a) si evince infatti

$$N = 1: \quad t = 0 \rightarrow q_1 = q_2 = 0 \rightarrow \chi = 0 \quad (h1)$$

L'elemento diviene quindi incapace di deformarsi anche flessionalmente, dando luogo al fenomeno di *locking*. Per i due successivi elementi si ha invece

$$N = 2: \quad t = 0 \rightarrow q_2 = q_3 = q_4 = 0 \rightarrow \chi = q_1 \quad (\text{costante}) \quad (h2)$$

$$N = 3: \quad t = 0 \rightarrow q_2 = q_4 = q_5 = q_6 = 0 \rightarrow \chi = q_1 + q_3\xi \quad (\text{lineare}) \quad (h3)$$

L'elemento quadratico risulta di fatto molto rigido.

Il legame tra deformazioni generalizzate e spostamenti nodali è stabilito dalla matrice \mathbf{C}_* , calcolabile tramite la (g) sulla base della \mathbf{C}_* che si evince dalla (12.25b). Per l'elemento lineare risulta

$$\mathbf{C}_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2/\ell^2 \\ 0 & -1/\ell & 2/\ell & 0 \end{bmatrix} \quad (12.28a)$$

Si assumano gli spostamenti nodali nell'ordine seguente

$$\begin{aligned} u_1 = v(-1) = a_0 - a_1 & & u_2 = \varphi(-1) = \frac{1}{\ell} (b_0 - b_1) \\ u_3 = v(1) = a_0 + a_1 & & u_4 = \varphi(1) = \frac{1}{\ell} (b_0 + b_1) \end{aligned}$$

è allora

$$a_0 = \frac{1}{2} (u_1 + u_3) \quad a_1 = \frac{1}{2} (-u_1 + u_3) \quad b_0 = \frac{\ell}{2} (u_2 + u_4) \quad b_1 = \frac{\ell}{2} (-u_2 + u_4)$$

e risulta

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ell & 0 & \ell \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\ell & 0 & \ell \end{bmatrix} \quad (12.28b)$$

Introducendo le (12.28) nella (g) si ottiene

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\ell & 0 & -1/\ell \\ -1/\ell & -1/2 & 1/\ell & -1/2 \end{bmatrix} \quad (12.29)$$

Le deformazioni generalizzate sono quindi

$$q_1 = \frac{1}{\ell} (u_2 - u_4) \quad q_2 = \frac{1}{\ell} (u_3 - u_1) - \frac{1}{2} (u_2 + u_4) \quad (12.30a)$$

Operando in modo analogo sulla matrice \mathbf{C}_* , si ottiene per i moti rigidi l'espressione

$$e_1 = \frac{1}{2} (u_1 + u_3) \quad e_2 = \frac{\ell}{2} (u_2 + u_4) \quad (12.30b)$$

Geometricamente, la (12.12b) può essere interpretata come la relazione che trasforma lo spazio R^m degli spostamenti nodali \mathbf{u} dell'elemento nel sottospazio R^d relativo ai soli

modi deformativi, noto anche come *spazio quoziente moti rigidi*. Tra le d componenti di \mathbf{q} non sussiste alcun legame, nel senso che a ogni punto dello spazio quoziente corrisponde una possibile deformazione per l'elemento. Si osservi che essendo le deformazioni derivate da un modello di spostamento, ogni colonna di \mathbf{b} (come, del resto, di \mathbf{B}) deve rispettare individualmente le condizioni di congruenza interna. Per un elemento piano, queste si riconducono alla sola (4.27). Precisamente

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (12.31)$$

La (12.31) è comunque soddisfatta se le deformazioni sono costanti o lineari. È allora a volte possibile associare a ogni deformazione generalizzata q_i , $i = 1, \dots, d$, l'andamento di una singola componente di deformazione locale. Ad esempio, nell'elemento T_3 ($m = 6$, $d = 3$) le deformazioni sono costanti e ogni componente coincide con una deformazione generalizzata. L'elemento T_6 ha $m = 12$ gradi di libertà e $d = 9$ modi deformativi; le tre componenti di deformazione variano linearmente nell'elemento e possono essere espresse per interpolazione su tre punti [3]. È cioè possibile definire \mathbf{q} in modo che la matrice \mathbf{b} risulti

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & P_1 & 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & P_3 \end{bmatrix} \quad (12.32a)$$

dove P_i , $i = 1, 2, 3$, sono funzioni lineari. I punti di interpolazione possono coincidere con i vertici dell'elemento o con i $G = 3$ punti di Gauss di una delle formule 3a e 3b in Tabella 11.4, che integrano esattamente la matrice di rigidezza elastica dell'elemento genitore. Risulta, nei due ultimi casi

$$P_i = 1 - 2L_i \quad P_i = \frac{1}{3} (6L_i - 1) \quad (12.32b, c)$$

Accoppiamenti tra le componenti di deformazione locale nascono quando il numero di modi deformativi non è sufficiente a rappresentare tutti i termini lineari, come avviene nell'elemento S_4 dove, come si evince dalle ultime due colonne della (12.18), i due modi a clessidra associano lo scorrimento angolare alle componenti di deformazione diretta. Essi sono inevitabilmente presenti in elementi di ordine più elevato, in quanto ogni colonna di \mathbf{b} deve individualmente soddisfare la (12.31). Ad esempio, per l'elemento S_8 (per semplicità si considera il genitore, identificando le coordinate effettive con quelle intrinseche) la matrice \mathbf{b} può essere scritta [4]

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & -Y/16 & P_2 & 0 & Y/16 & P_3 & 0 & -Y/16 \\ 0 & P_1 & -X/16 & 0 & P_2 & X/16 & 0 & P_3 & -X/16 \\ -X/8 & -Y/8 & P_1 & X/8 & Y/8 & P_2 & -X/8 & -Y/8 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Y/3 \\ X/3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.33a)$$

dove

$$P_1 = \frac{1}{4} (1 - \sqrt{3}\xi) (1 - \sqrt{3}\eta) \quad P_2 = \frac{1}{4} (1 + \sqrt{3}\xi) (1 - \sqrt{3}\eta)$$

$$P_3 = \frac{1}{4} (1 + \sqrt{3}\xi) (1 + \sqrt{3}\eta) \quad P_4 = \frac{1}{4} (1 - \sqrt{3}\xi) (1 + \sqrt{3}\eta) \quad (12.33b)$$

$$X(\xi) = 1 - 3\xi^2 \quad Y(\eta) = 1 - 3\eta^2 \quad (12.33c)$$

Nello scrivere le (12.33) si è imposto che 12 delle 13 componenti di deformazione generalizzata si identifichino con i valori locali nei punti di integrazione relativi ad una griglia 2×2 , di coordinate $\xi_r = \pm 1/\sqrt{3}$, $\eta_r = \pm 1/\sqrt{3}$. Le (12.33b) sono infatti polinomi interpolanti su tali punti, dove le funzioni quadratiche (12.33c) si annullano. Se ivi valutati, i quattro blocchi 3×3 che costituiscono le prime 12 colonne di \mathbf{b} si riconducono o alla matrice identica \mathbf{I}_3 o a matrici nulle. Sono tuttavia presenti anche termini non diagonali; quelli relativi all'ultima colonna di ogni blocco sono richiesti dalla congruenza: dal momento che le funzioni (12.33b) sono bilineari, la loro derivata mista non è nulla e la (12.31) richiede che sia compensata da contributi a primo membro. Tali termini ne richiamano di analoghi nella terza riga.

Si è visto nel capitolo precedente che perché un elemento possa essere considerato valido occorre che il modello di spostamento rappresenti i suoi moti rigidi e i modi a deformazione costante. Si era inoltre affermato che questi contributi, se presenti nell'elemento genitore, si conservavano in un elemento di geometria distorta isoparametricamente.

Tale proprietà verrà ora illustrata per il caso di elementi piani. La matrice \mathbf{B} è espressa dalla (11.114), qui riscritta

$$\mathbf{B} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'_n \mathbf{n} & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0}' & -\mathbf{X}'_n \mathbf{n} \\ -\mathbf{X}'_n \mathbf{n} & \mathbf{Y}'_n \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (12.34)$$

dove, si ricorda, \mathbf{X}_n e \mathbf{Y}_n raccolgono le ascisse e le ordinate degli r nodi dell'elemento effettivo, J è lo Jacobiano (11.112c) della trasformazione e \mathbf{n} è la matrice emisimmetrica (11.112b). Precisamente

$$\mathbf{J} = \mathbf{Y}'_n \mathbf{n} \mathbf{X}_n = -\mathbf{X}'_n \mathbf{n} \mathbf{Y}_n \quad \mathbf{n} = -\mathbf{n}' = \mathbf{N}_{,\eta} \mathbf{N}'_{,\xi} - \mathbf{N}_{,\xi} \mathbf{N}'_{,\eta} \quad (12.35a, b)$$

$\mathbf{N}_{,\xi}$ e $\mathbf{N}_{,\eta}$ sono i vettori che raccolgono le derivate delle funzioni di forma dell'elemento genitore

$$\mathbf{N}_{,\xi} = \{ \dots \partial N_r / \partial \xi \dots \}' \quad \mathbf{N}_{,\eta} = \{ \dots \partial N_r / \partial \eta \dots \}' \quad (12.36)$$

Per l'elemento S_4 essi sono esplicitati dalle (11.116a), mentre la matrice \mathbf{n} è espressa dalla (11.116b). Si introduca ora un vettore \mathbf{t} di r componenti, tante quanti i nodi dell'elemento, tutte di valore unitario

$$\mathbf{t} = \{ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \}' \quad (12.37)$$

Per un valido elemento genitore, deve risultare

$$\mathbf{N}'_{,\xi} \mathbf{t} - \mathbf{N}'_{,\eta} \mathbf{t} = 0 \quad (12.38a)$$

Tali quantità sono infatti le deformazioni che nascerebbero nell'elemento genitore qualora venisse attribuito valore unitario a tutte le componenti orizzontali o verticali di spostamento nodale; l'operazione configura traslazioni rigide, cui devono corrispondere deformazioni nulle. Dalla (12.35b) consegue allora

$$\mathbf{n} \mathbf{t} = \mathbf{0} \quad (12.38b)$$

Inoltre, la natura emisimmetrica di \mathbf{n} assicura che qualunque forma quadratica a essa associata risulta nulla. Sarà, in particolare

$$\mathbf{X}'_n \mathbf{n} \mathbf{X}_n = \mathbf{Y}'_n \mathbf{n} \mathbf{Y}_n = 0 \quad (12.38c)$$

È adesso facile riconoscere che la matrice \mathbf{A}_e può scriversi

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{Y}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{t} & -\frac{1}{2} \mathbf{X}_n \end{bmatrix} \quad (12.39)$$

Premoltiplicando per la (12.34) e ricordando le (12.35a) e (12.38) si ottiene infatti

$$\mathbf{B} \mathbf{A}_e = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'_n \mathbf{n} \mathbf{t} & \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{Y}'_n \mathbf{n} \mathbf{Y}_n \\ \mathbf{0} & -\mathbf{X}'_n \mathbf{n} \mathbf{t} & \frac{1}{2} \mathbf{X}'_n \mathbf{n} \mathbf{X}_n \\ -\mathbf{X}'_n \mathbf{n} \mathbf{t} & \mathbf{Y}'_n \mathbf{n} \mathbf{t} & -\frac{1}{2} (\mathbf{X}'_n \mathbf{n} \mathbf{Y}_n + \mathbf{Y}'_n \mathbf{n} \mathbf{X}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

È possibile identificare le colonne della (12.39) con le due traslazioni secondo gli assi del riferimento globale e una rotazione nel piano.

La matrice \mathbf{A} relativa ai modi deformativi può essere suddivisa nelle due sottomatrici seguenti

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_c \ \mathbf{A}_r] \quad (12.40)$$

dove \mathbf{A}_c si riferisce ai modi a deformazione costante e \mathbf{A}_r ai rimanenti. La prima si scrive

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_n & \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{Y}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}_n & \frac{1}{2} \mathbf{X}_n \end{bmatrix} \quad (12.41)$$

Premoltiplicando per l'espressione (12.34) di \mathbf{B} e ricordando sempre le (12.35a) e (12.38) si ottiene infatti

$$\mathbf{B} \mathbf{A}_c = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'_n \mathbf{n} \mathbf{X}_n & \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{Y}'_n \mathbf{n} \mathbf{Y}_n \\ \mathbf{0} & -\mathbf{X}'_n \mathbf{n} \mathbf{Y}_n & -\frac{1}{2} \mathbf{X}'_n \mathbf{n} \mathbf{X}_n \\ -\mathbf{X}'_n \mathbf{n} \mathbf{X}_n & \mathbf{Y}'_n \mathbf{n} \mathbf{Y}_n & \frac{1}{2} (-\mathbf{X}'_n \mathbf{n} \mathbf{Y}_n + \mathbf{Y}'_n \mathbf{n} \mathbf{X}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le tre colonne nella (12.41) configurano quindi spostamenti nodali cui corrispondono deformazioni costanti. L'espressione (12.40) di \mathbf{A} va poi completata definendo le colonne della matrice \mathbf{A}_r , che devono risultare linearmente indipendenti da quelle di \mathbf{A}_c e \mathbf{A}_c , oltre che tra di loro.

Quanto detto mostra, sia pure limitatamente ad elementi piani, che la trasformazione isoparametrica conserva sia i moti rigidi che i modi a deformazione costante. È solo richiesto che le funzioni di forma dell'elemento genitore soddisfino le (12.38a), vale a dire che la somma delle loro derivate sia nulla. Tale condizione è certamente verificata se l'elemento genitore è correttamente formulato.

È anche possibile constatare che i modi deformativi non costanti vengono ad essere alterati dalla trasformazione. Si consideri, per semplicità, l'elemento S_4 . Nel caso di Figura 12.3 le coordinate dei nodi risultano

$$\mathbf{X}_n = \ell \{0 \ 1 \ 1 \ 0\}' \quad \mathbf{Y}_n = \ell \{0 \ 0 \ 1 \ 1\}' \quad (i)$$

il che riconduce le (12.39) e (12.41) alle prime sei colonne della (12.17). Le due ultime possono essere scritte compattamente nella forma

$$\mathbf{A}_r = \frac{\ell}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{h} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (j)$$

Si può osservare che esse sono comunque linearmente indipendenti dalle colonne delle (12.39) e (12.41), salvo che per geometrie degeneri. La (j) rappresenta quindi una legittima espressione di \mathbf{A}_r anche per elementi distorti. Premoltiplicando per la (12.34) si ottiene

$$\mathbf{B}\mathbf{A}_r = \frac{1}{J} \frac{\ell}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'_n \mathbf{n}\mathbf{h} & 0 \\ 0 & -\mathbf{X}'_n \mathbf{n}\mathbf{h} \\ -\mathbf{X}'_n \mathbf{n}\mathbf{h} & \mathbf{Y}'_n \mathbf{n}\mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (k1)$$

dove, ricordando la (11.116b), risulta

$$\mathbf{n}\mathbf{h} = \frac{1}{4} \{(\xi - \eta) \quad -(\xi + \eta) \quad -(\xi - \eta) \quad (\xi + \eta)\}' \quad (k2)$$

Per l'elemento quadrato di Figura 12.3, dalle (i) e (12.35a) si ottiene $J = \ell^2/4$ e le (k) si riconducono alle ultime due colonne della (12.18), vale a dire alla parte della matrice \mathbf{b} relativa ai modi a clessidra, che prevedono variazioni lineari delle deformazioni sull'elemento. Se questo però è distorto in una forma diversa dalla rettangolare, J risulta funzione del punto e, siccome nelle (k) compare al denominatore, i corrispondenti modi deformativi presentano andamenti non riconducibili ad espressioni polinomiali (in tal caso ℓ è una lunghezza arbitraria, introdotta allo scopo di rendere le deformazioni generalizzate dimensionalmente omogenee tra loro).

12.2.1.2 Sforzi generalizzati

Alle deformazioni generalizzate \mathbf{q} , espresse dalla (12.12b) in funzione degli spostamenti nodali, sono associate quantità statiche, indicate con \mathbf{Q} e definite, al solito, da una condizione di equivalenza in termini di lavoro virtuale interno. Nel caso in esame, questa si scrive

$$\mathbf{Q}' \delta \hat{\mathbf{q}} = \int_V \sigma'(\mathbf{x}) \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) dV \quad \forall \delta \hat{\mathbf{q}}, \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \delta \hat{\mathbf{q}} \quad (12.42)$$

dove V indica il volume dell'elemento. Si ottiene

$$\mathbf{Q} = \int_V \mathbf{b}'(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) dV \quad (12.43)$$

Sono questi gli sforzi generalizzati dell'elemento finito (noti anche come componenti naturali di sforzo [2]), che rappresentano particolari misure globali (risultanti) del regime tensionale locale.

ESEMPIO 12.4 Per l'elemento piano di Figura 12.3 la (12.43) si scrive, supponendo lo spessore t costante

$$\mathbf{Q} = \frac{t\ell^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{b}'(\xi, \eta) \boldsymbol{\sigma}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (l)$$

dove \mathbf{b} è espressa dalla (12.18) e $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}\}'$. Le componenti di sforzo generalizzato sono quindi

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{t\ell^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sigma_x d\xi d\eta & Q_2 &= \frac{t\ell^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sigma_y d\xi d\eta & Q_3 &= \frac{t\ell^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tau_{xy} d\xi d\eta \\ Q_4 &= \frac{t\ell^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\sigma_x \eta + \tau_{xy} \xi) d\xi d\eta & Q_5 &= \frac{t\ell^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\sigma_y \xi + \tau_{xy} \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (m)$$

Le prime tre di queste, corrispondenti ai modi a deformazione costante, sono proporzionali ai valori medi delle tre componenti di sforzo locale. Le due rimanenti sono proporzionali ai momenti rispetto all'origine del riferimento intrinseco delle tensioni agenti su giaciture di normale, rispettivamente, ξ e η (Figura 12.5; si noti che questa interpretazione, peraltro di dubbia utilità, richiede che le τ_{xy} siano considerate positive quando dirette nel verso opposto di quello usuale).

Se l'elemento è distorto isoparametricamente, si ha, in luogo della (12.18)

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\ell}{2J} \mathbf{Y}'_n \mathbf{n}\mathbf{h} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\ell}{2J} \mathbf{X}'_n \mathbf{n}\mathbf{h} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\ell}{2J} \mathbf{X}'_n \mathbf{n}\mathbf{h} & \frac{\ell}{2J} \mathbf{Y}'_n \mathbf{n}\mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (12.44)$$

con $\mathbf{n}\mathbf{h}$ definito dalla (k2). Le prime tre componenti \mathbf{Q} mantengono inalterata la loro espressione, salvo che per il dominio di integrazione, sempre costituito dal volume dell'elemento ma non più necessariamente pari a $t\ell^2$. Ricordando la (11.106), le ultime due si scrivono (sempre per t costante)

$$\begin{aligned} Q_4 &= \frac{\ell}{2} \int_V \frac{1}{J} (\mathbf{Y}'_n \mathbf{n}\mathbf{h} \sigma_x - \mathbf{X}'_n \mathbf{n}\mathbf{h} \tau_{xy}) dV = \\ &= \frac{t\ell}{2} \left[\mathbf{Y}'_n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{n}\mathbf{h} \sigma_x d\xi d\eta - \mathbf{X}'_n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{n}\mathbf{h} \tau_{xy} d\xi d\eta \right] \end{aligned} \quad (n1)$$

$$Q_5 = \frac{t\ell}{2} \left[-\mathbf{X}'_n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{n}\mathbf{h} \sigma_y d\xi d\eta + \mathbf{Y}'_n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{n}\mathbf{h} \tau_{xy} d\xi d\eta \right] \quad (n2)$$

Anche nel caso in esame, che pur rappresenta il più semplice esempio non banale di elemento isoparametrico, non è facile attribuire un significato meccanico alle (n). In generale, gli sforzi generalizzati vanno considerati come definizioni formali, che solo in particolari circostanze possono essere tradotte in informazioni ingegneristicamente utilizzabili.

In modo analogo si procede per l'elemento di trave alla Timoshenko. Si ha ora, in luogo della (l)

$$\mathbf{Q} = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{b}'(\xi) \boldsymbol{\sigma}(\xi) d\xi \quad (o)$$

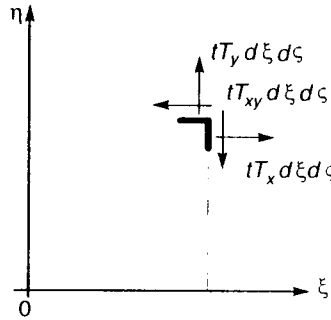


Figura 12.5

dove σ è costituito dal momento flettente M e dall'azione tagliante T . Nel caso del modello lineare, \mathbf{b} si particolarizza nella (12.27a) e dalla (o) si ottiene

$$Q_1 = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 M d\xi + \frac{\ell^2}{4} \int_{-1}^1 \xi T d\xi \quad Q_2 = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 T d\xi \quad (p1, 2)$$

12.2.1.3 Relazioni con le variabili nodali

Occorre ora introdurre i legami tra deformazioni e sforzi generalizzati e le variabili nodali che, a valle dell'operazione di assemblaggio, si identificano con spostamenti e forze generalizzati dello schema discreto. La relazione di congruenza è direttamente fornita dalla (12.12b), che esprime \mathbf{q} in funzione degli spostamenti nodali. L'equazione di equilibrio corrispondente si ricava sempre imponendo l'eguaglianza dei lavori virtuali (11.42). Il lavoro esterno è ancora

$$\mathcal{L}_e = (\mathbf{p} + \mathbf{p}_0)' \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (q1)$$

con \mathbf{p} e \mathbf{p}_0 definiti dalle (11.44). Il lavoro virtuale interno può invece scriversi, in virtù della (12.42)

$$\mathcal{L}_i = \mathbf{Q}' \delta \hat{\mathbf{q}} \quad (q2)$$

La condizione di equilibrio per l'elemento è quindi

$$(\mathbf{p} + \mathbf{p}_0)' \delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}' \delta \hat{\mathbf{q}} \quad \forall \delta \hat{\mathbf{u}}, \delta \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{C} \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (r)$$

Si ottiene

$$\mathbf{p} = \mathbf{C}' \mathbf{Q} - \mathbf{p}_0 \quad (12.45)$$

Si osservi che la definizione (12.43) di \mathbf{Q} e la (12.13) stabiliscono la completa equivalenza tra la (12.45) e la (11.46).

L'equilibrio impone anche un legame tra le componenti di forze nodali. Se nella (q1) si assume per $\delta \hat{\mathbf{u}}$ un moto rigido (12.8a), il corrispondente lavoro virtuale interno è nullo. Dovrà pertanto risultare

$$(\mathbf{p} + \mathbf{p}_0)' \delta \hat{\mathbf{u}}_e = 0 \quad \forall \delta \hat{\rho}, \delta \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{A}_e \delta \hat{\rho} \quad (s)$$

da cui discende

$$\mathbf{A}'_e (\mathbf{p} + \mathbf{p}_0) = \mathbf{0} \quad (12.46)$$

La (12.46) esprime formalmente la condizione di equilibrio globale per le forze nodali, il cui significato era stato discusso nel Paragrafo 11.3.1.

L'operazione di assemblaggio si mantiene inalterata, anche se ora si riferisce alle (12.12b) e (12.45). Nel caso di vincoli fissi ed in assenza di carichi direttamente applicati ai nodi, valgono sempre le (11.55, 59). Precisamente

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{U} \quad (e = 1, \dots, N) \quad \sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e \mathbf{p}_e = \mathbf{0} \quad (12.47a, b)$$

dove in \mathbf{U} si intendono presenti solo le componenti di spostamento libere. Introducendo la (12.47a) nella (12.12b) si esprime l'equazione di congruenza per lo schema discreto nella forma

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{C}_e \mathbf{L}_e \mathbf{U} \quad (e = 1, \dots, N) \quad (12.48a)$$

mentre l'equazione di equilibrio si ottiene sostituendo la (12.45) per \mathbf{p}_e nella (12.47b). Risulta

$$\mathbf{P}_0 = \sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e \mathbf{C}'_e \mathbf{Q}_e \quad (12.48b)$$

con \mathbf{P}_0 sempre definito dalla (11.61).

Le relazioni cinematiche e statiche che governano il comportamento del modello ad elementi finiti sono riassunte in Tabella 12.1; eliminando sforzi e deformazioni generalizzati e ricordando la (12.13), è facile constatare che essa si identifica con l'analoga Tabella 11.2.

12.2.2 IL COMPORTAMENTO ELASTICO

Si vuole ora stabilire il legame costitutivo per l'elemento finito, ovvero la relazione che ne descriva il comportamento in termini di sforzi e deformazioni generalizzati. Nel caso elastico lineare la sua derivazione è immediata: inserendo la (11.62), con ϵ espresso dalla (12.11), nella definizione (12.43) di \mathbf{Q} si ottiene infatti

$$\mathbf{Q} = \int_V \mathbf{b}' [\mathbf{d}(\mathbf{b}\mathbf{q} - \vartheta) + \zeta] dV \quad (t)$$

Si ponga

$$\mathbf{D} = \int_V \mathbf{b}' \mathbf{d} \mathbf{b} dV \quad \mathbf{Q}_0 = - \int_V \mathbf{b}' (\mathbf{d}\vartheta - \zeta) dV \quad (12.49a, b)$$

La (t) allora si scrive

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}\mathbf{q} + \mathbf{Q}_0 \quad (12.50)$$

La matrice \mathbf{D} definita dalla (12.49a) è nota come *rigiditàzza naturale* dell'elemento finito [2]. Essa è simmetrica e definita positiva se, come di regola, \mathbf{d} gode di queste proprietà. Supponendo che non siano presenti contributi anelastici e ricordando sempre la (12.11), l'energia di deformazione nell'elemento può infatti scriversi

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{e}' \mathbf{d} \epsilon dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{q}' \mathbf{b}' \mathbf{d} \mathbf{b} \mathbf{q} dV = \frac{1}{2} \mathbf{q}' \mathbf{D} \mathbf{q} \quad (u1)$$

Essa è certamente positiva per ogni vettore ε le cui componenti non siano tutte nulle ovunque sull'elemento. Dal momento che la (12.11) prevede $\varepsilon = \mathbf{0}$ solo se $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, consegue

$$\frac{1}{2} \mathbf{q}' \mathbf{D} \mathbf{q} > 0 \quad \forall \mathbf{q} \neq \mathbf{0} \quad (u2)$$

La (12.49b) definisce la quotaparte degli sforzi generalizzati associata a eventuali deformazioni o sforzi iniziali.

Le (12.45) e (12.12b) permettono di tradurre il legame (12.50) in termini di variabili nodali. Si riottiene la (11.65), dove è adesso

$$\mathbf{k} = \mathbf{C}' \mathbf{D} \mathbf{C} \quad \mathbf{p}_0 = -\mathbf{C}' \mathbf{Q}_0 \quad (12.51a, b)$$

La (12.13) consente ancora di riconoscere la completa equivalenza tra le (12.51) e le (11.63, 64). Come del resto osservato nel Paragrafo 11.3.1, la matrice \mathbf{k} è solamente semidefinita positiva, con nullità pari al numero di moti rigidi rappresentati dal modello. In virtù della (12.15c), il legame (12.12b) prevede infatti $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ se $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{p}$.

Tabella 12.1

(vincoli fissi - nodi scarichi)

ELEMENTO

Spostamenti nodali \mathbf{u}_e

Forze nodali $\mathbf{p}_e, \mathbf{p}_{0e}$

$$\mathbf{s}_e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_e \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{p}_e = \int_{V_e} \mathbf{N}' \sigma_{ne} dV \\ \mathbf{p}_{0e} = \int_{V_e} \mathbf{N}' \mathbf{F} dV + \int_{S_{f_e}} \mathbf{N}' f dS \end{cases}$$

Deformazioni generalizzate \mathbf{q}_e

Sforzi generalizzati \mathbf{Q}_e

$$\varepsilon_e(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \mathbf{q}_e \quad \rightarrow \quad \mathbf{Q}_e = \int_{V_e} \mathbf{b}' \sigma_e dV$$

Congruenza

Equilibrio

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{C} \mathbf{u}_e \quad \rightarrow \quad \mathbf{p}_e = \mathbf{C}' \mathbf{Q}_e - \mathbf{p}_{0e}$$

SCHEMA DISCRETO (assemblaggio di N elementi)

Spostamenti generalizzati \mathbf{U}
(componenti libere [vincoli fissi])

Forze generalizzate \mathbf{P}_0
(forze nodali equivalenti ai carichi)

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{U} \quad (e = 1, \dots, N) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sum_e \mathbf{L}'_e \mathbf{p}_e = \mathbf{0} \text{ [nodi scarichi]} \\ \sum_e \mathbf{L}'_e \mathbf{p}_{0e} = \mathbf{P}_0 \end{cases}$$

Congruenza

Equilibrio

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{C} \mathbf{L}_e \mathbf{U} \quad (e = 1, \dots, N) \quad \rightarrow \quad \mathbf{P}_0 = \sum_e \mathbf{L}'_e \mathbf{C}' \mathbf{Q}_e$$

ESEMPIO 12.5: quadrilatero a quattro nodi Per un problema piano negli sforzi, la matrice delle costanti elastiche si scrive

$$\mathbf{d} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (12.52)$$

Per l'elemento quadrato di Figura 12.3, la matrice \mathbf{b} è espressa dalla (12.18). Dalla (12.49a) si ottiene allora

$$\mathbf{D} = \frac{Et\ell^2}{1-\nu^2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{3-\nu}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3-\nu}{6} \end{array} \right] \quad (12.53)$$

Nel caso di geometria distorta, la (12.44) sostituisce la (12.18). Per la (11.106), l'espressione di \mathbf{D} risulta

$$\mathbf{D} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{J} \mathbf{b}' \mathbf{d} \mathbf{b} \, d\xi d\eta \quad (v)$$

con \mathbf{J} sempre espresso dalla (12.35b) in funzione delle coordinate dei nodi. Il calcolo conduce ad una matrice di struttura simile alla (12.53). La sottomatrice 3×3 relativa ai modi a deformazione costante è alterata solo nel termine a fattore, dove l'area dell'elemento sostituisce ℓ^2 ; i termini di accoppiamento con i modi a clessidra si mantengono nulli, almeno nel caso $\mathbf{d} = \text{cost}$; la sottomatrice 2×2 relativa a questi ultimi deve ora essere integrata numericamente (e ovviamente dipende dall'ordine di integrazione usato).

ESEMPIO 12.6: trave alla Timoshenko È adesso

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GA_* \end{bmatrix} \quad (12.54a)$$

La natura diagonale di questa matrice consente di esprimere \mathbf{D} come somma dei due contributi dovuti alle deformazioni flessionali e taglianti. Ponendo infatti nella (12.26)

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_\nu \\ \mathbf{b}_t \end{bmatrix} \quad (12.54b)$$

la (12.49a) diviene

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_\nu + \mathbf{D}_t = \int_0^\ell EI \mathbf{b}'_\nu \mathbf{b}_\nu \, dx + \int_0^\ell GA_* \mathbf{b}'_t \mathbf{b}_t \, dx \quad (12.55)$$

Per il modello lineare, dalla (12.27a) si evince

$$\mathbf{b}_\nu = [1 \quad 0] \quad \mathbf{b}_t = [\ell\xi/2 \quad 1] \quad (w)$$

È inoltre $dx = (\ell/2)d\xi$. Nel caso di sezione costante risulta quindi

$$D_\xi = \frac{E\ell}{2} \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\xi = E\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.56a)$$

$$D_t = \frac{GA_*\ell}{2} \int_0^1 \begin{bmatrix} \ell\xi^2/4 & \ell\xi/2 \\ \ell\xi/2 & 1 \end{bmatrix} d\xi = GA_*\ell \begin{bmatrix} \ell^2/12 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.56b)$$

È facile constatare che inserendo le (12.56) unitamente all'espressione (12.29) di C nella (12.51a), si riottiene la (11.70a).

12.2.3 INTEGRAZIONE NUMERICA

12.2.3.1 Considerazioni preliminari

Quando le proprietà elastiche di un elemento finito vengono calcolate numericamente, il risultato ovviamente dipende dal numero G di punti di integrazione utilizzati. Se la geometria dell'elemento è distorta, esso è comunque approssimato e si vogliono ora esaminare le conseguenze dell'approssimazione, in particolare se (ed eventualmente in quale misura) la rappresentazione dei modi deformativi ne risulta influenzata.

Se calcolato mediante la formula di Gauss, un integrale sul volume dell'elemento si esprime

$$I = \int_V f(\mathbf{x}) dV \approx \sum_{r=1}^G W_r f(\xi_r) = I_* \quad (x)$$

dove un asterisco viene usato (e verrà usato nel seguito) per distinguere i valori che le quantità assumono se numericamente integrate. $\xi_r (g = 1, \dots, G)$ sono le coordinate dei punti di Gauss e W_r i relativi pesi, che ora si intendono comprensivi dello Jacobiano della trasformazione isoparametrica. Ad esempio, per un elemento monodimensionale e per elementi piani di spessore t , derivati da genitori quadrati o triangolari, si pone, rispettivamente

$$W_r = w_r J(\xi_r) \quad (y1)$$

$$W_r = w_h w_k t(\xi_h, \eta_k) J(\xi_h, \eta_k) \quad (y2)$$

$$W_r = w_r t(L_{1r}, L_{2r}, L_{3r}) J(L_{1r}, L_{2r}, L_{3r}) \quad (y3)$$

dove w_r sono i pesi riportati nelle Tabelle 11.3 e 11.4.

Se numericamente integrata, la matrice di rigidità naturale (12.49a) dell'elemento si scrive allora

$$D_* = \sum_{r=1}^G W_r \mathbf{b}'(\xi_r) \mathbf{d}(\xi_r) \mathbf{b}(\xi_r) \quad (12.57)$$

Per semplicità, ma senza effettiva perdita di generalità, si considerano solo elementi omogenei, che presentano $\mathbf{d} = \text{cost}$ al loro interno; in elementi piani si suppone costante anche lo spessore. Sempre per semplicità, non vengono considerati deformazioni o sforzi iniziali, la cui presenza, peraltro, comporta solo complicazioni formali. Il legame elastico e l'energia di deformazione dell'elemento numericamente integrato si esprimono quindi

$$\mathbf{Q} = D_* \mathbf{q} \quad \Omega_* = \frac{1}{2} \mathbf{q}' D_* \mathbf{q} \quad (12.58a, b)$$

Si introduce un'interpretazione del procedimento di integrazione numerica che può forse apparire artificiosa, ma che consente di coglierne meglio le implicazioni. Si indichi con $P_g(\xi)$ il polinomio interpolante di grado più basso sul g -simo punto di Gauss; per definizione, esso gode della proprietà

$$P_k(\xi_k) = 1 \quad P_k(\xi_h) = 0 \quad \forall h \neq g \quad (h, g = 1, \dots, G) \quad (12.59)$$

Si introduca ora la seguente *distribuzione fittizia di deformazioni* locali nell'elemento, ottenuta interpolando ogni componente sui G punti di integrazione

$$\epsilon_0(\xi) = \mathbf{b}_0(\xi) \mathbf{q}_0 \quad (12.60a)$$

$$\mathbf{b}_0(\xi) = [\dots P_g(\xi) I_s \dots] \quad \mathbf{q}_0 = \begin{Bmatrix} \epsilon(\xi_r) \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (12.60b, c)$$

Si è indicata con I_s la matrice identica $s \times s$, dove s è il numero di componenti di deformazione locale (ad esempio, è $s = 3$ nel caso piano, $s = 6$ in quello tridimensionale e $s = 2$ per una trave di Timoshenko). La matrice \mathbf{b}_0 presenta s righe e sG colonne, quante le componenti di \mathbf{q}_0 .

In modo analogo si può introdurre la *distribuzione fittizia di sforzi*

$$\sigma_0(\xi) = \mathbf{r}_0(\xi) \mathbf{Q}_0 \quad (12.61a)$$

$$\mathbf{r}_0(\xi) = \left[\dots \frac{1}{W_r} P_g(\xi) I_s \dots \right] \quad \mathbf{Q}_0 = \begin{Bmatrix} W_r \sigma(\xi_r) \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (12.61b, c)$$

Le (12.60), (12.61) definiscono andamenti locali diversi da quelli previsti dal modello, con cui però si identificano nei punti di integrazione. Per la (12.59) infatti risulta

$$\epsilon_0(\xi_r) = \mathbf{b}_0(\xi_r) \mathbf{q}_0 = [\mathbf{0} \dots I_s \dots \mathbf{0}] \begin{Bmatrix} \epsilon(\xi_r) \\ \vdots \end{Bmatrix} = \epsilon(\xi_r) \quad (12.62a)$$

$$\sigma_0(\xi_r) = \mathbf{r}_0(\xi_r) \mathbf{Q}_0 = \left[\mathbf{0} \dots \frac{1}{W_r} I_s \dots \mathbf{0} \right] \begin{Bmatrix} W_r \sigma(\xi_r) \\ \vdots \end{Bmatrix} = \sigma(\xi_r) \quad (12.62b)$$

Le componenti di \mathbf{q}_0 e \mathbf{Q}_0 coincidono (nel secondo caso a meno dei fattori W_r) con i valori assunti da deformazioni e sforzi locali negli stessi punti di Gauss. Il legame elastico del materiale in tali punti, precisamente

$$\sigma(\xi_r) = \mathbf{d} \epsilon(\xi_r) \quad (g = 1, \dots, G) \quad (z)$$

si traduce pertanto nella relazione

$$\mathbf{Q}_0 = D_0 \mathbf{q}_0 \quad D_0 = \begin{bmatrix} W_1 \mathbf{d} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & W_2 \mathbf{d} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \text{diag} [W_r \mathbf{d}] \quad (12.63a, b)$$

I pesi che moltiplicano le componenti di sforzo locale nella definizione (12.61c) di \mathbf{Q}_0 fanno sì che questo vettore sia associato a \mathbf{q}_0 attraverso una relazione analoga alla (12.43), in cui però \mathbf{b}_0 sostituisce \mathbf{b} e l'integrazione è effettuata numericamente. Per le (12.60b) e (12.59) risulta infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0 &= \int_V \mathbf{b}'_0 \sigma dV = \sum_{r=1}^G W_r \mathbf{b}'_0(\xi_r) \sigma(\xi_r) = \\ &= W_1 \begin{bmatrix} I_s \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} \sigma(\xi_1) + W_2 \begin{bmatrix} I_s \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} \sigma(\xi_2) + \dots = \begin{Bmatrix} W_1 \sigma(\xi_1) \\ W_2 \sigma(\xi_2) \\ W_3 \sigma(\xi_3) \\ \vdots \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (12.64a)$$

Anche \mathbf{D}_0 è definibile attraverso un'espressione analoga alla (12.49a) per \mathbf{D} , in cui \mathbf{b}_0 sostituisce \mathbf{b} . Svolgendo numericamente l'integrazione, infatti si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_0 &= \int_V \mathbf{b}'_0 d\mathbf{b}_0 dV = \sum_{r=1}^G W_r \mathbf{b}'_0(\xi_r) d\mathbf{b}_0(\xi_r) = \\ &= W_1 \begin{bmatrix} I_s \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} [d][I_s \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \dots] + W_2 \begin{bmatrix} I_s \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} [d][\mathbf{0} \ I_s \ \mathbf{0} \ \dots] + \dots = \text{diag}[W_r d] \end{aligned} \quad (12.64b)$$

È anche, come si constata in modo analogo

$$\mathbf{Q}'_0 \delta \hat{\mathbf{q}}_0 = \sum_{r=1}^G W_r \sigma_0(\xi_r) \delta \hat{\varepsilon}_0(\xi_r) = \int_V \sigma'_0 \delta \hat{\varepsilon}_0 dV \quad \forall \delta \hat{\mathbf{q}}_0, \delta \hat{\varepsilon}_0 = \mathbf{b}_0 \delta \hat{\mathbf{q}}_0 \quad (12.65)$$

A meno delle approssimazioni connesse con l'integrazione numerica, il prodotto scalare $\mathbf{Q}'_0 \delta \hat{\mathbf{q}}_0$ rappresenta quindi il lavoro virtuale interno relativo ai due andamenti fittizi ora introdotti.

In quanto segue, si supponrà che i pesi w_r relativi all'elemento genitore siano positivi (condizione spesso ma non necessariamente verificata dalle formule di integrazione di più comune impiego). Se si escludono inoltre distorsioni geometriche di entità eccessiva (che oltretutto configurano comportamenti patologici), è anche $J > 0$ ovunque nell'elemento. Dalle (y) allora consegue

$$W_r > 0 \quad (g = 1, \dots, G) \quad (12.66)$$

In tal caso la matrice \mathbf{D}_0 è simmetrica e definita positiva, dal momento che \mathbf{d} gode di queste proprietà.

L'integrazione numerica delle (12.64) non comporta approssimazioni qualora la formula di Gauss calcoli esattamente gli integrali dei quadrati dei polinomi interpolanti; quando cioè risulta, senza approssimazioni

$$\int_V P_r^2 dV = \sum_{h=1}^G W_h P_r^2(\xi_h) = W_r \quad (g = 1, \dots, G) \quad (12.67)$$

dove l'ultima eguaglianza consegue sempre dalla (12.59).

In elementi non distorti, tale condizione risulta in genere verificata. Si è visto infatti che la formula di Gauss-Legendre su G punti integra esattamente polinomi di grado $2G - 1$, mentre il quadrato del polinomio interpolante è solamente di grado $2G - 2$. Per un elemento monodimensionale, la (12.67) quindi vale se lo Jacobiano è costante (si osservi che, a tal fine, non basta che l'elemento si mantenga rettilineo: i nodi, se più di due, devono anche essere egualmente spazati). La condizione è verificata anche per elementi non distorti bi- o tridimen-

sionali, se integrati mediante formule di Gauss-Legendre nelle varie direzioni. Non altrettanto si può dire per elementi triangolari; con riferimento alla Tabella 11.4, si osserva che la condizione è certamente violata per la formula relativa a $G = 4$, che comporta un peso negativo, chiaramente in contraddizione con la (12.67). Si potrebbe constatare che la condizione vale invece per le formule $G = 1$ ed entrambe le $G = 3$. Anche per genitori quadrati sono state proposte formule alternative a quelle di Gauss-Legendre (non considerate in questo testo), che non soddisfano necessariamente la (12.67).

Se la geometria dell'elemento è distorta, l'integrazione è comunque approssimata. In ogni caso, se è ovunque $J > 0$ e la (12.67) vale per l'elemento genitore, la meno restrittiva (12.66) consegue. È questa la condizione essenziale, che si supponrà verificata nel seguito.

Ci si propone ora di stabilire il legame tra i vettori \mathbf{q}_0 , \mathbf{Q}_0 , che governano gli andamenti fittizi, e le effettive variabili generalizzate \mathbf{q} , \mathbf{Q} dell'elemento. Si osservi a tale proposito che le (12.62) permettono di scrivere

$$\sum_{r=1}^G W_r \sigma'_0(\xi_r) \delta \hat{\varepsilon}_0(\xi_r) = \sum_{r=1}^G W_r \sigma'(\xi_r) \delta \hat{\varepsilon}(\xi_r) = \int_V \sigma' \delta \hat{\varepsilon} dV \quad (aa)$$

Ricordando le (12.42) e (12.65), è facile riconoscere che per ogni elemento numericamente integrato sussiste l'eguaglianza

$$\mathbf{Q}' \delta \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}'_0 \delta \hat{\mathbf{q}}_0 \quad (12.68)$$

Si introduca la matrice

$$\Theta = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{b}(\xi_r) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (12.69)$$

Dalle (12.11), (12.60c) e (12.68) allora discende

$$\mathbf{q}_0 = \Theta \mathbf{q} \quad \mathbf{Q} = \Theta' \mathbf{Q}_0 \quad (12.70a, b)$$

Il confronto tra le (12.58a) e (12.63a) mostra quindi che l'integrazione numerica comporta

$$\mathbf{D}_* = \Theta' \mathbf{D}_0 \Theta \quad (12.71)$$

È questa una relazione tra la rigidezza naturale dell'elemento calcolata per integrazione numerica su G punti di Gauss e il legame elastico del materiale negli stessi punti, compattamente espresso dalle (12.63). Le (12.71) e (12.70a) permettono anche di riconoscere che l'energia di deformazione (12.58b) nell'elemento numericamente integrato può alternativamente scriversi

$$\Omega_* = \frac{1}{2} \mathbf{q}' \mathbf{D}_* \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}' \Theta' \mathbf{D}_0 \Theta \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}'_0 \mathbf{D}_0 \mathbf{q}_0 \quad (12.72)$$

Si può pensare che l'integrazione numerica utilizzi in luogo delle deformazioni (12.11), che conseguono dal modello di spostamento, la distribuzione fittizia (12.60a), che le interpola sui punti di integrazione. Le proprietà elastiche dell'elemento sono infatti insensibili alla sostituzione, purché venga tenuto presente il legame (12.70a) tra il vettore \mathbf{q}_0 che raccoglie le deformazioni nei punti di Gauss e le variabili generalizzate \mathbf{q} dell'elemento. Di fatto, il modello (12.11) viene sostituito dall'espressione

$$\varepsilon_*(\xi) = \mathbf{b}_*(\xi) \mathbf{q} \quad \mathbf{b}_*(\xi) = \mathbf{b}_0(\xi) \Theta \quad (12.73a, b)$$

che definisce le deformazioni effettivamente considerate dall'elemento numericamente integrato.

12.2.3.2 Integrazione completa, ridotta e selettiva

Si vuole ora stabilire se e in quale misura l'integrazione numerica conservi la capacità dell'elemento di rappresentare i modi deformativi. Sono importanti a tal fine le proprietà che la matrice Θ , definita dalla (12.69), presenta nelle diverse circostanze. Tale matrice ha sG righe (quante le componenti di \mathbf{q}_0) e $d = m - p$ colonne (come il numero di modi deformativi nell'elemento genitore). Si assumerà in un primo tempo che essa abbia *rango pieno*, che esista cioè una sottomatrice quadrata e nonsingolare di Θ di ordine pari alla sua minima dimensione. Precisamente

$$R(\Theta) = \min\{d, sG\} \tag{12.74a}$$

dove si è indicato con $R(\)$ il rango della matrice in parentesi. Tale circostanza risulta spesso, anche se non sempre, verificata. Sotto l'ipotesi (12.66), \mathbf{D}_0 , in quanto definita positiva, ha rango pieno, pari al suo ordine sG . Con riferimento al prodotto (12.71) un teorema di algebra matriciale [5] assicura allora che risulta

$$R(\mathbf{D}_*) = \min\{R(\Theta), R(\mathbf{D})\} = \min\{d, sG\} \tag{12.74b}$$

Possono darsi le due situazioni seguenti.

a) $sG \geq d$: è allora $R(\mathbf{D}_*) = d$. La matrice di rigidezza naturale ha rango pieno ed è pertanto definita positiva. Il procedimento di integrazione numerica non diminuisce il numero dei modi deformativi, anche se può alterare la natura di alcuni di essi. In tal caso, l'integrazione si dice *completa*.

b) $sG < d$: è adesso $R(\mathbf{D}_*) = sG$ e l'integrazione numerica produce una rigidezza naturale singolare, con nullità pari a $n = d - sG$. Esistono infatti n vettori linearmente indipendenti \mathbf{q}_0 tali per cui dalla (12.70a) si ottiene

$$\Theta \mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \tag{12.75a}$$

Essi corrispondono a modi deformativi che l'elemento numericamente integrato considera alla stregua di moti rigidi aggiuntivi. Si osservi infatti che le (12.75a) e (12.72) comportano

$$\Omega_{*0} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_0^T \mathbf{D}_* \mathbf{q}_0 = \frac{1}{2} \mathbf{q}_0^T \Theta^T \mathbf{D}_0 \Theta \mathbf{q}_0 = 0 \quad \forall \mathbf{q}_0 \tag{12.75b}$$

Ai vettori \mathbf{q}_0 che verificano la (12.75a) non è associata alcuna energia di deformazione e per tale motivo essi sono denominati *modi a energia zero*. In questo caso l'integrazione numerica si dice *ridotta*.

ESEMPIO 12.7: quadrato a quattro nodi Si consideri l'elemento quadrato di Figura 12.3, per cui è $s = 3$ e $d = 5$. La sua matrice \mathbf{b} è la (12.18) mentre la \mathbf{d} relativa al caso piano nelle tensioni è fornita dalla (12.52). Fintanto che l'elemento si mantiene quadrato, la rigidezza naturale può facilmente essere integrata in forma chiusa; il calcolo produce l'espressione (12.53) di \mathbf{D} , definita positiva se lo è \mathbf{d} .

Si consideri dapprima un'integrazione numerica su di una griglia 2×2 ($G = 4$). Con la numerazione in Figura 12.6a, le coordinate dei punti di Gauss risultano

$$\begin{aligned} \xi_1 = -1/\sqrt{3}, \quad \eta_1 = -1/\sqrt{3} & \quad \xi_2 = 1/\sqrt{3}, \quad \eta_2 = -1/\sqrt{3} \\ \xi_3 = 1/\sqrt{3}, \quad \eta_3 = 1/\sqrt{3}, & \quad \xi_4 = -1/\sqrt{3}, \quad \eta_4 = 1/\sqrt{3} \end{aligned} \tag{12.76a}$$

I polinomi interpolanti sono le funzioni bilineari (12.33b), che rispettano, come è facile constatare, la condizione (12.59) (un andamento tipico è illustrato in Figura 12.6b). La matrice (12.60b) è pertanto

$$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 & P_4 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 & P_4 & 0 \\ 0 & 0 & P_1 & 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 & P_4 \end{bmatrix} \tag{12.76b}$$

mentre \mathbf{q}_0 raccoglie le 12 componenti di deformazione nei punti di Gauss

$$\mathbf{q}_0 = \left\{ \epsilon_x \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right), \epsilon_y \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right), \dots, \epsilon_y \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \gamma_{xy} \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}^T \tag{12.76c}$$

Lo Jacobiano risulta $J = t^2/4$; i pesi (w) relativi a ciascun punto di integrazione sono quindi

$$W_1 = W_2 = W_3 = W_4 = \frac{t^2}{4} \tag{12.76d}$$

Dal momento che essi sono tutti uguali tra loro, la matrice \mathbf{D}_0 (12×12 nel caso in esame) si scrive

$$\mathbf{D}_0 = \frac{t^2}{4} \text{diag}[\mathbf{d}] \tag{12.76e}$$

Valutando la (12.18) nei punti (12.76a) ed organizzando il risultato nella forma (12.69), si perviene alla seguente espressione di Θ

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{12.76f}$$

Tra le $sG = 3 \times 4 = 12$ righe di cui tale matrice è composta, è possibile selezionarne $d = 5$ che costituiscano una sottomatrice nonsingolare (ad esempio, la prima, seconda, terza, settima e ottava); è quindi $R(\Theta) = 5$. Si lascia come esercizio verificare che scrivendo la (12.71) per le (12.76e, f) si ottiene $\mathbf{D}_* = \mathbf{D}$, come definita dalla (12.53).

Si immagini ora di integrare su di un unico punto di Gauss, collocato nell'origine del riferimento intrinseco. Si ha allora, in luogo delle (12.76a)

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = 0 \tag{12.77a}$$

Il polinomio interpolante è adesso una costante di valore unitario. È quindi

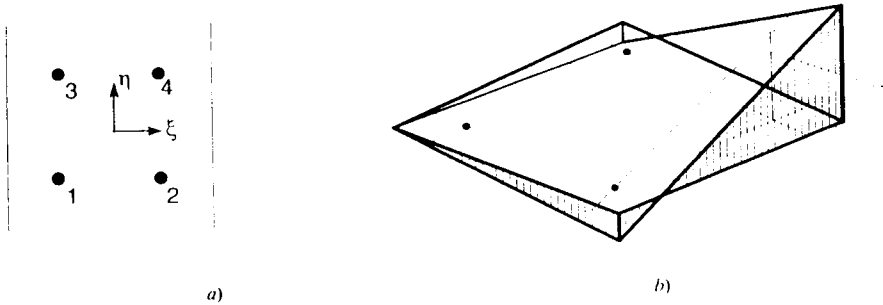


Figura 12.6

$$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(0,0) \\ \varepsilon_y(0,0) \\ \gamma_{xy}(0,0) \end{Bmatrix} \quad (12.77b, c)$$

Nel caso in esame è anche $W_1 = t\ell^2$. La (12.63b) allora fornisce

$$\mathbf{D}_0 = t\ell^2 \mathbf{d} = \frac{Et\ell^2}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (12.77d)$$

La matrice Θ è adesso una 3×5 . Come la (12.69) evidenzia, essa coincide con la (12.18) valutata nelle coordinate (12.77a) dell'unico punto di Gauss. Risulta

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.77e)$$

e dalla (71) si ottiene

$$\mathbf{D}_* = \frac{Et\ell^2}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.78)$$

Tale matrice ha solamente rango 3. Operando su di un unico punto di integrazione si è annullata la rigidità dell'elemento nei confronti dei due modi a clessidra, che vengono ora considerati come rigidi, e si è conservato solo il contributo di quelli a deformazione costante. È questo un esempio di integrazione ridotta.

ESEMPIO 12.8: modello lineare di trave di Timoshenko Le matrici \mathbf{b} e \mathbf{d} di questo elemento ($s = 2, d = 2$) sono espresse, rispettivamente, dalle (12.27a) e (12.54a). Si supponga di operare su $G = 2$ punti di Gauss. È allora

$$\xi_1 = -1/\sqrt{3}, \quad \xi_2 = 1/\sqrt{3} \quad W_1 = W_2 = \ell/2 \quad (12.79a, b)$$

$$P_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\xi) \quad P_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\xi) \quad (12.79c)$$

$$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & P_2 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & P_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_0 = \begin{Bmatrix} \chi(-1/\sqrt{3}) \\ t(-1/\sqrt{3}) \\ \chi(1/\sqrt{3}) \\ t(1/\sqrt{3}) \end{Bmatrix} \quad \mathbf{D}_0 = \frac{\ell}{2} \begin{bmatrix} EI & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GA_* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GA_* \end{bmatrix} \quad (12.79d-f)$$

La (12.69) adesso fornisce

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\ell}{2\sqrt{3}} & 1 \\ 1 & 0 \\ \frac{\ell}{2\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix} \quad (12.79g)$$

Introducendo tale espressione, unitamente alla (12.79f), nella (12.71) si ottiene

$$\mathbf{D}_* = \ell \begin{bmatrix} EI + \frac{\ell^2}{12} GA_* & 0 \\ 0 & GA_* \end{bmatrix} \quad (12.80)$$

Tale matrice è definita positiva. È facile constatare che essa coincide con l'espressione (12.56) di \mathbf{D} , ottenuta integrando in forma chiusa.

Operando su di un unico punto di Gauss ($G = 1$) si ha, in luogo delle (12.79a, b)

$$\xi_1 = 0 \quad W_1 = \ell \quad (12.81a, b)$$

Il polinomio interpolante è $P_1 = 1$. Risulta quindi

$$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_0 = \begin{Bmatrix} \chi(0) \\ t(0) \end{Bmatrix} \quad \mathbf{D}_0 = \ell \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GA_* \end{bmatrix} \quad (12.81c-e)$$

La (12.69) diviene adesso $\Theta = \mathbf{I}_2$ e la (12.71) fornisce

$$\mathbf{D}_* = \mathbf{D}_0 = \ell \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GA_* \end{bmatrix} \quad (12.82)$$

Questa matrice è ancora definita positiva (è infatti $sG = d = 2$ e Θ ha rango pieno). Rispetto alla (12.80) essa presenta peraltro una differenza nel termine D_{11} , che non prevede più il contributo della rigidità tagliente GA_* . L'integrazione su di un solo punto di Gauss conserva la capacità dell'elemento di rappresentare i due modi deformativi, ma altera le proprietà di uno di essi.

Per $sG < d$, la (12.70a) instaura un legame tra le componenti di \mathbf{q} che, in quanto non più indipendenti, non possono essere ancora considerate come variabili generalizzate. D'altra parte, nell'ipotesi in cui si opera ($R(\Theta) = sG$) sono indipendenti le componenti di \mathbf{q}_0 , che assumono il ruolo di effettive deformazioni generalizzate per l'elemento numericamente integrato in modo ridotto. Le deformazioni (12.73) considerate dall'elemento si riconducono alla distribuzione fittizia (12.60). Se $sG < d$ e Θ ha rango pieno si può infatti scrivere

$$\Theta = [\Theta_1 \quad \Theta_2] \quad (12.83a)$$

dove Θ_1 è una sottomatrice quadrata e nonsingolare e Θ_2 è composta dalle rimanenti $n = d - sG$ colonne di Θ . Si ponga

$$\mathbf{q} = \Pi \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \rho_* \end{Bmatrix} \quad \Pi = \begin{bmatrix} \Theta_1^{-1} & -\Theta_1^{-1}\Theta_2 \\ \mathbf{0} & I_n \end{bmatrix} \quad (12.83b, c)$$

La matrice Π non è singolare; la (12.83b) stabilisce quindi una corrispondenza biunivoca tra \mathbf{q} e un altro vettore, suddiviso nei due contributi \mathbf{q}_0 e ρ_* , che può sostituirlo nel rappresentare il regime deformativo dell'elemento. Sostituendo le (12.83) nella (12.73) si ottiene

$$\varepsilon_*(\xi) = \mathbf{b}_0(\xi) [\Theta_1 \ \Theta_2] \Pi \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \rho_* \end{Bmatrix} = [\mathbf{b}_0(\xi) \ \mathbf{0}] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \rho_* \end{Bmatrix} = \mathbf{b}_0(\xi) \mathbf{q}_0 \quad (12.84)$$

L'integrazione ridotta sostituisce pertanto le deformazioni che conseguono dal modello di spostamento con un'interpolazione polinomiale sui punti di Gauss. L'equazione (12.12b), che esprime le deformazioni generalizzate in funzione degli spostamenti nodali, diviene adesso

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{C}_0 \mathbf{u} \quad \text{con} \quad \mathbf{C}_0 = \Theta \mathbf{C} \quad (12.85a, b)$$

e Θ sempre definito dalle (12.69), (12.83a).

La rigidità naturale dell'elemento è ora la matrice \mathbf{D}_0 espressa dalla (12.63b), definita positiva e di rango pari a sG , che stabilisce il legame (12.63a) tra le deformazioni generalizzate \mathbf{q}_0 e i corrispondenti sforzi generalizzati, ora costituiti da \mathbf{Q}_0 . Le (12.64) confermano la legittimità di queste definizioni, che si ottengono da quelle generali, rispettivamente le (12.49a) e (12.43), sostituendo \mathbf{b} con \mathbf{b}_0 , cioè con il modello di deformazione effettivamente considerato. La matrice di rigidità elastica dell'elemento che consegue dall'integrazione ridotta è definita da una relazione analoga alla (12.51a). Precisamente

$$\mathbf{k}_* = \mathbf{C}_0' \mathbf{D}_0 \mathbf{C}_0 \quad (12.85c)$$

con \mathbf{C}_0 espresso dalla (12.85b). Tale matrice mantiene inalterate le sue dimensioni ed è sempre semidefinita positiva, ma il suo rango è adesso solamente pari a sG . Ai p moti rigidi reali si aggiungono infatti gli n modi rappresentati dalle componenti di ρ_* , che assumono energia zero e vengono a tutti gli effetti trattati come ulteriori moti rigidi.

Per definire le caratteristiche di comportamento dello schema discreto è importante identificare tali modi. Le deformazioni a essi associate comportano $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ e sono quindi nulle in tutti i punti di integrazione. Per l'elemento S_4 , la (12.18) mostra che i due modi a clessidra prevedono deformazioni nulle nel baricentro, dove si colloca l'unico punto di Gauss relativo all'integrazione ridotta. Come si è visto, proprio questi sono i modi a energia zero, la cui presenza può compromettere il comportamento dello schema discreto. Un assemblaggio di elementi così integrati non oppone infatti rigidità alcuna a una deformata come quella illustrata in Figura 12.7a (a tratteggio è indicata la *clessidra* da cui i modi traggono il nome): la matrice di rigidità della struttura è pertanto singolare se i vincoli non impediscono, oltre ai veri e propri moti rigidi, anche questi modi deformativi e, comunque, lo schema discreto si rivela spesso troppo cedevole. Per questo elemento l'integrazione ridotta non è consigliabile; essa può essere usata solo congiuntamente ad interventi intesi a conferire rigidità ai modi a clessidra [6].

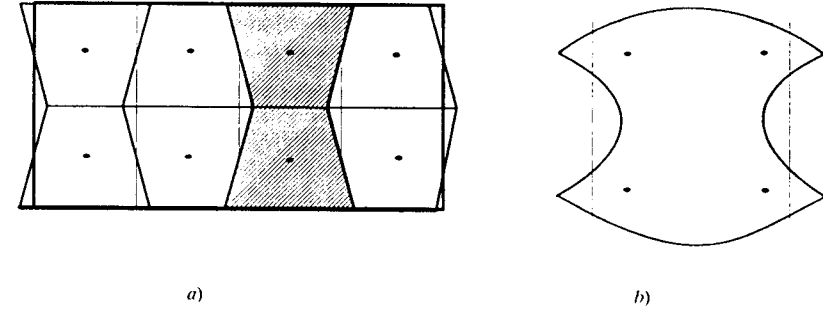


Figura 12.7

Decisamente migliore è il comportamento dell'elemento S_8 integrato su di una griglia 2×2 ($G = 4$). L'elemento originariamente presenta $d = 13$ modi deformativi, 12 dei quali sono conservati dall'integrazione ridotta. Il modo ad energia zero (che prevede deformazioni nulle in tutti i punti di integrazione) è illustrato in Figura 12.7b; appare come esso non possa svilupparsi quando anche solo due elementi sono tra loro connessi. La matrice di rigidità dello schema discreto pertanto non è singolare, anche se a volte si riscontra un eccesso di cedevolezza [1].

L'integrazione ridotta configura una violazione di congruenza. Le deformazioni (12.85a) di fatto considerate non conseguono dal modello di spostamento. In generale, non esistono neppure spostamenti, anche se diversi da quelli previsti dalle funzioni di forma, da cui esse siano derivabili, in quanto le colonne della matrice \mathbf{b}_0 definita dalla (12.60b) rispettano le condizioni di congruenza interna solo in elementi relativamente poveri. Ad esempio, se il genitore S_8 è integrato su $G = 4$ punti, il modello di deformazione non è governato dalle (12.33) ma dalla (12.76b) (le deformazioni generalizzate sono ora le 12 componenti del vettore (12.76c)). Questa espressione, oltre a non contenere il tredicesimo modo deformativo, che assume energia zero, annulla i termini non diagonali nei quattro blocchi. La (12.31) non è quindi rispettata e non esistono spostamenti da cui le ε_0 siano derivabili.

Diversa è invece la situazione se $sG > d$. La (12.70a) instaura adesso un legame tra le componenti di \mathbf{q}_0 , esprimendole in funzione delle d componenti di deformazione generalizzata \mathbf{q} e la (12.73) non si traduce nella (12.85a). A volte il prodotto $\mathbf{b}_* = \mathbf{b}_0 \Theta$ riproduce la matrice \mathbf{b} originaria, riconducendo la (12.73) alla (12.11), come avviene per il quadrato S_4 integrato su $G = 4$ punti (si lascia come esercizio verificare che postmoltiplicando la (12.76b) per la (12.76f) si riottiene la (12.18)). Tale circostanza, che assicura il completo rispetto della congruenza da parte del modello, tipicamente si verifica in elementi piani o tridimensionali non distorti se la griglia di integrazione prevede lo stesso numero di punti in ogni direzione. Esistono peraltro situazioni in cui ciò non avviene. In elementi isoparametricamente distorti è comunque $\mathbf{b}_* \neq \mathbf{b}$. In ogni caso, se $R(\Theta) = d$ il numero dei modi deformativi non viene ridotto dall'integrazione numerica, che per questo motivo è detta *completa*.

La situazione $sG = d$ richiede ulteriori commenti. La matrice Θ è adesso quadrata e, se di rango pieno, nonsingolare. La (12.70a) instaura quindi una corrispondenza biunivoca tra \mathbf{q} e \mathbf{q}_0 e ciò consente di riguardare entrambi i vettori come deformazioni generalizzate. Come per l'integrazione ridotta, le deformazioni sono di fatto espresse

dalla (12.85a); l'integrazione tuttavia è completa, in quanto non introduce modi a energia zero.

Può accadere che la (12.85a) coincida con la (12.11). È questo il caso del triangolo T_6 integrato su $G = 3$ punti: la sua matrice \mathbf{b} può infatti scriversi nella forma (12.32); in quanto lineari, le deformazioni sono congruenti e possono quindi essere espresse senza approssimazioni come interpolazione polinomiale sui punti di Gauss.

Altre volte la congruenza è invece violata, come nell'elemento lineare di trave di Timoshenko integrato su di un unico punto. \mathbf{b}_0 è adesso espressa dalla (12.81c) e prevede costanti sia la curvatura flessionale che la deformazione tagliante, in contrasto con la (12.27a) che per la seconda prevede la variazione lineare richiesta dal legame deformazioni-spostamenti. L'integrazione numerica introduce quindi un'approssimazione e per questo motivo è a volte considerata come ridotta, anche se entrambi i modi deformativi sono mantenuti.

Per questo elemento l'integrazione su di un unico punto di Gauss è detta *selettiva*, in quanto l'approssimazione coinvolge solo il secondo addendo nella (12.55), che definisce il contributo della rigidità tagliante alla rigidità naturale dell'elemento (quello della rigidità flessionale è infatti esattamente integrato con $G = 1$). I due modi deformativi risultano ora indipendenti, eliminando così l'accoppiamento responsabile del fenomeno di locking; d'altra parte, l'elemento non è soggetto agli inconvenienti dovuti alla presenza di modi a energia zero. Il procedimento, applicabile anche a modelli di ordine più elevato, è generalmente suggerito per elementi di trave di Timoshenko che, se così formulati, presentano buon comportamento in condizioni affatto generali.

L'integrazione selettiva è vantaggiosa anche in altri contesti. È spesso possibile esprimere, in analogia con la (12.55), la rigidità naturale dell'elemento come somma di più termini e il comportamento globale può risultare migliore se uno di essi viene deliberatamente sottointegrato. Un caso tipico è quello di mezzi pressoché incompressibili: è allora conveniente considerare separatamente i contributi delle deformazioni deviatoriche e volumetriche, usando per le seconde un ordine di integrazione inferiore che non per le prime.

La trattazione è stata qui limitata al caso in cui la matrice Θ ha rango pieno. Questa circostanza si verifica spesso, ma si danno situazioni in cui ciò non avviene. L'esame del comportamento dell'elemento è allora più complesso, ma rimane sempre basato su considerazioni concettualmente analoghe.

12.2.4 RICOSTRUZIONE DEGLI SFORZI LOCALI

In tutte le formulazioni basate su modelli cinematici, le informazioni sul regime tensoriale si ottengono in termini di sforzi generalizzati, nel caso specifico definiti dalla (12.43). Tali quantità sono calcolate con la stessa accuratezza degli spostamenti nodali e vanno quindi considerate attendibili se lo sono questi ultimi.

Purtroppo, nel metodo degli elementi finiti gli sforzi generalizzati sono difficilmente interpretabili ed è quindi problematico ricostruire su questa base un quadro tensoriale ingegneristicamente significativo. Nelle applicazioni usuali essi non sono neppure esplicitamente introdotti e lo sforzo locale viene calcolato imponendo il legame costitutivo del materiale. In tal modo, peraltro, gli sforzi risultano proporzionali alle derivate degli spostamenti e sono soggetti al deterioramento di precisione che l'ordine di derivazione comporta. L'andamento che si ottiene è corretto solamente in media e i valori locali sono in genere poco attendibili, quando non decisamente errati.

Le implicazioni della procedura verranno ora esaminate nel caso elastico lineare, ancora supponendo per semplicità che non siano presenti deformazioni o sforzi iniziali. Il legame elastico (12.50) per l'elemento si scrive allora

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}\mathbf{q} \quad \mathbf{q} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q} \quad (12.86a, b)$$

dove sia le variabili generalizzate che la matrice di rigidità naturale sono quelle che effettivamente governano il comportamento dell'elemento. Per elementi numericamente integrati si intende pertanto $\mathbf{D} = \mathbf{D}_*$ e, se l'integrazione è ridotta, $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0$. Dal modello di deformazione (12.11) e dalla (12.86b) si ottiene quindi la seguente espressione per gli sforzi locali

$$\boldsymbol{\sigma}(\xi) = \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}(\xi) = \mathbf{d}\mathbf{b}(\xi)\mathbf{q} = \mathbf{d}\mathbf{b}(\xi)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q} \quad (12.87)$$

Anche qui, \mathbf{b} va sostituita da \mathbf{b}_* , come definita dalla (12.73b), nel caso di integrazione numerica. La (12.87) esprime gli sforzi in ogni punto dell'elemento in funzione dei valori generalizzati. Il loro andamento è dettato dalla stessa matrice $\mathbf{b}(\xi)$ che governa quello delle deformazioni.

Il legame che tale matrice presenta tra le sue righe si trasferisce alle componenti di sforzo. In elementi esattamente formulati, tale legame è indotto dalle condizioni di congruenza che le colonne di \mathbf{b} devono individualmente rispettare, e sopravvive anche in elementi distorti se l'integrazione è completa. È questa spesso una fonte di inconvenienti nella rappresentazione degli sforzi locali. Il fenomeno più clamoroso è quello detto dei *tagli parassiti* che si riscontra nell'elemento S_8 ed è illustrato in Figura 11.37: le tensioni tangenziali presentano un irragionevole andamento parabolico, con picchi molto marcati. Il motivo diviene evidente se si considera l'espressione (12.33) di $\mathbf{b}(\xi)$ per l'elemento in questione; le funzioni paraboliche $\pm X/8$ nell'ultima riga si collocano sulle stesse colonne dove si trovano i contributi relativi alla deformazione diretta ϵ_x ; la componente di deformazione generalizzata necessaria a rappresentare quest'ultima attiva quindi anche uno scorrimento angolare γ_{xy} , che la (12.87) traduce in un accoppiamento in termini di sforzi. In soluzione, la trave in Figura 11.37 prevede ovviamente valori significativi di σ_x , cui la (12.33) associa tagli parassiti con andamento parabolico.

Si osservi che la distribuzione fittizia $\boldsymbol{\sigma}_0(\xi)$ definita dalle (12.61) non presenta questo inconveniente: la matrice $\mathbf{r}_0(\xi)$ è infatti composta da blocchi diagonali e prevede il totale disaccoppiamento tra le singole componenti di sforzo. Elementi per cui la (12.87) si riconduce a distribuzioni di questo tipo non danno luogo a problemi nella ricostruzione degli sforzi locali. Essi sono quelli in cui il modello di deformazione, o direttamente o come conseguenza dell'integrazione numerica, si presenta nella forma (12.85a); in tal caso, infatti, la (12.87) diviene

$$\boldsymbol{\sigma}(\xi) = \mathbf{d}\mathbf{b}_0(\xi)\mathbf{D}_0^{-1}\mathbf{Q}_0 = \mathbf{r}_0(\xi)\mathbf{Q}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0(\xi) \quad (12.88)$$

come è facile verificare sulla base delle espressioni (12.60a), (12.64b) e (12.61a) delle matrici coinvolte. Gli sforzi generalizzati sono adesso le componenti del vettore \mathbf{Q}_0 che, a meno dell'irrelevante fattore W_k , coincidono con gli sforzi locali nei punti di integrazione, dove sono valutati con la stessa accuratezza degli spostamenti nodali.

L'elemento T_6 gode spontaneamente di questa proprietà; in effetti, l'esperienza computazionale mostra che esso ricostruisce gli sforzi locali senza inconvenienti particolari. In altri casi, il disaccoppiamento può essere ottenuto solo integrando in modo ridotto o selettivo, al prezzo quindi di un rilassamento delle condizioni di congruenza.

Si è visto, ad esempio, che per l'elemento S_8 l'integrazione ridotta su di una griglia 2×2 sostituisce le (12.33) con la (12.76b), il che elimina il fenomeno dei tagli parassiti. Elementi di trave di Timoshenko selettivamente integrati su $G = N$ punti di Gauss, dove N indica il grado dei polinomi approssimanti per gli spostamenti, pure presentano questa caratteristica.

In molti casi l'integrazione ridotta non è applicabile e gli indesiderabili accoppiamenti tra le componenti di sforzo (12.87) richiedono interventi correttivi. Si noti, a questo proposito, che è concettualmente corretto esprimere gli sforzi locali in termini dei valori generalizzati \mathbf{Q} mediante una relazione simile alla (12.11) per le deformazioni, che si scrive

$$\boldsymbol{\sigma}(\xi) = \mathbf{r}(\xi)\mathbf{Q} \quad (12.89)$$

La sola condizione che la matrice $\mathbf{r}(\xi)$ deve rispettare è che le (12.89) e (12.43) siano tra loro coerenti. Deve cioè risultare

$$\mathbf{Q} = \int_1 b'(\xi)\boldsymbol{\sigma}(\xi)dV = \int_1 b'(\xi)\mathbf{r}(\xi)dV \cdot \mathbf{Q}$$

e quindi

$$\int_1 b'(\xi)\mathbf{r}(\xi)dV = \mathbf{I} \quad (12.90)$$

dove, al solito, \mathbf{I} indica la matrice identica.

Il confronto con la (12.89) mostra che la (12.87) prevede

$$\mathbf{r}(\xi) = \mathbf{d}\mathbf{b}(\xi)\mathbf{D}^{-1} \quad (12.91)$$

tale espressione rispetta la condizione di coerenza (12.90), come è facile verificare ricordando la definizione (12.49a) della rigidità naturale. Peraltro, la (12.90) non associa a una determinata $\mathbf{b}(\xi)$ un'unica $\mathbf{r}(\xi)$. Ciò giustifica la ricerca di espressioni alternative che, nel rispetto della condizione, consentano di migliorare la rappresentazione degli sforzi locali. Per il genitore S_8 , ad esempio, è possibile verificare [4] la legittimità della matrice seguente

$$\mathbf{r}(\xi) = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 & P_4 & 0 & 0 & -15Y/32 \\ 0 & P_1 & 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 & P_4 & 0 & 15X/32 \\ 0 & 0 & P_1 & 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 & P_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.92)$$

dove i termini non nulli sono sempre definiti dalle (12.33b, c). La (12.92) è coerente con il modello di spostamento ed elimina il fenomeno dei tagli parassiti. Essa appare quindi adeguata ai fini della ricostruzione dello sforzo locale attraverso la (12.89). Rispetto alle (12.87), (12.33), le (12.89), (12.92) configurano una diversa distribuzione locale di sforzo, che tuttavia non è meno legittima.

Concettualmente, il procedimento è analogo a quello sempre seguito e generalmente accettato nelle teorie strutturali. In una trave elastica, ad esempio, gli sforzi locali vengono valutati utilizzando i risultati del problema di De Saint Venant con riferimento alle azioni interne calcolate in ogni sezione sulla base della teoria della trave; essi sono diversi da quelli che si otterrebbero imponendo localmente il legame elastico con riferimento alle deformazioni che conseguono dal modello, ma danno luogo alle stesse risultanti. Nel rispetto della (12.90), gli sforzi locali (12.89) corrispondono tutti agli stessi valori generalizzati; come nella trave tutte le distribuzioni di tensioni sulla sezione che producono le stesse azioni interne, così nell'elemento finito le possibili alternative (12.89), purché coerenti, sono equivalenti dal punto di vista del modello di spostamento.

Espressioni come la (12.92) vanno però ricercate caso per caso e, soprattutto se la geometria dell'elemento è distorta, la loro definizione non è agevole. Si osservi, peraltro, che la (12.92) mostra come, anche nel genitore S_8 esattamente integrato, 12 delle 13 componenti di sforzo generalizzato possono essere identificate con i valori locali nei punti di Gauss di una griglia

2×2 . Gli sforzi sono quindi calcolati in questi punti con precisione maggiore che non altrove, come del resto indipendentemente stabilito sulla base di altri ragionamenti [7]. È in effetti possibile definire per diversi elementi, anche se isoparametricamente distorti, un certo numero di punti dove gli sforzi risultano particolarmente accurati e basare la ricostruzione dell'andamento locale su tali valori. I testi dedicati al metodo degli elementi finiti riportano le posizioni di questi punti privilegiati per gli elementi di più comune impiego [1, 8].

Nel caso elastico, il problema della ricostruzione degli sforzi locali non è in realtà cruciale. Il loro andamento, se inadeguato, può essere corretto a valle della soluzione dello schema discreto, che non ne è influenzata. Ciò viene solitamente fatto elaborando opportunamente le informazioni direttamente prodotte dal calcolo, ad esempio applicando alle (12.87) tecniche di *smoothing* [9, 10].

Più delicati sono invece i problemi anelastici; in plasticità, ad esempio, è il livello di sforzo locale a decidere se un determinato punto si trovi o meno in campo elastico ed è di ovvia importanza che gli sforzi siano ivi accurati. Come si è visto nel Paragrafo 11.5, risulta operativamente vantaggioso imporre il legame costitutivo del materiale nei punti usati per l'integrazione numerica della matrice di rigidità, eventualmente tangente. Le osservazioni precedenti mostrano tuttavia che gli sforzi in tali punti non sono necessariamente accurati, a meno che non si operi con integrazione ridotta. Se questa non è applicabile, sono necessari interventi correttivi per evitare che la stessa soluzione dello schema discreto venga influenzata dall'errore locale [11].

12.2.5 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

La formulazione naturale dell'approccio agli spostamenti, introdotta quasi agli inizi dello sviluppo del metodo degli elementi finiti [2], trova scarso impiego diretto in algoritmi di calcolo, dove è prevalentemente utilizzata allo scopo di ridurre eventuali imprecisioni numeriche nella definizione delle proprietà degli elementi o per la valutazione del regime tensionale [12]. Essa, infatti, non comporta modifiche nelle equazioni risolventi stabilite nel capitolo precedente, che si mantengono inalterate.

È stato però presto riconosciuto [13] come la formulazione si riveli molto potente a fini interpretativi. Come si è visto in questo paragrafo, l'approccio naturale consente di spiegare determinati comportamenti patologici, quali fenomeni di locking in travi di Timoshenko o la presenza di tagli parassiti nell'elemento S_8 . Esso ha anche permesso di cogliere in maniera relativamente semplice le implicazioni dei procedimenti di integrazione numerica, in particolare il numero e la natura dei modi a energia zero conseguenti all'integrazione ridotta.

Anche se motivi di spazio hanno costretto a limitare la trattazione di dettaglio a pochi esempi, è evidente come sia possibile stabilire su questa base le caratteristiche di comportamento di modelli a elementi finiti di vario tipo e decidere gli eventuali interventi necessari a eliminare fenomeni indesiderabili.

Va osservato come quanto sviluppato a questo proposito consegua unicamente alla presenza di un modello di spostamento per l'elemento finito e non sia legato all'approccio agli spostamenti propriamente detto.

I metodi noti come misti, a uno dei quali è in particolare dedicato il paragrafo che segue, affiancano alla modellazione del campo di spostamenti anche quella di altre variabili; in quanto contengono un modello di spostamento, molte delle conclusioni qui raggiunte si applicano anche in tale ambito.

12.3 METODI MISTI

12.3.1 APPROCCIO BASATO SUL TEOREMA DI HELLINGER-REISSNER

12.3.1.1 Formulazione

Nel caso elastico l'approccio agli spostamenti del metodo degli elementi finiti può pensarsi derivato dal teorema della minima Energia Potenziale Totale (vedi Paragrafo 11.3.3). Se le funzioni di forma sono definite in modo che, a valle dell'assemblaggio, le condizioni di congruenza siano completamente rispettate, il valore dell'E.P.T. risulta sovrastimato in soluzione, configurando per lo schema discreto un comportamento più rigido che non per la struttura originaria. Questo eccesso di rigidità produce in determinate circostanze gli indesiderabili effetti di cui si è discusso.

Il problema elastico ammette tuttavia anche formulazioni variazionali che non hanno carattere estemale e che pure costituiscono valide basi per una modellazione a elementi finiti. Una è il teorema di Hellinger-Reissner, dimostrato nel Paragrafo 4.4.3. In presenza di sforzi iniziali, l'espressione (3.20) dell'energia complementare per un materiale elastico-lineare si modifica come segue

$$\gamma(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma' a \sigma + \sigma' (\vartheta - a \zeta) \quad (12.93)$$

dove, si ricorda, $a = d^{-1}$ è la matrice delle cedevolezza elastiche, simmetrica e definita positiva. In notazione matriciale, il funzionale di Hellinger-Reissner (4.198) allora si scrive

$$J(\mathbf{s}, \sigma) = \int_{V_e} \left[\sigma' (\epsilon - \vartheta + a \zeta) - \frac{1}{2} \sigma' a \sigma \right] dV - \int_V \mathbf{F}' \mathbf{s} dV - \int_{S_f} \mathbf{f}' \mathbf{s} dV - \int_{S_u} \sigma_n (\mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}}) dV \quad (12.94a)$$

dove ϵ si intende derivato da \mathbf{s} attraverso il legame deformazioni- spostamenti

$$\epsilon = \vartheta(\mathbf{s}) \quad (12.94b)$$

e σ_n indica la componente vettoriale di sforzo sulla superficie vincolata, dove sono noti gli spostamenti $\bar{\mathbf{s}}$.

I vettori \mathbf{s} e σ che rendono stazionario il funzionale (12.94) risolvono il problema elastico. In soluzione, il valore di J è ancora uguale a quello dell'E.P.T., ma la stazionarietà ora corrisponde a un punto sella e non più a un minimo. Una soluzione approssimata non si configura quindi necessariamente come più rigida di quella effettiva, anche se può ancora esserlo. Inoltre, il fatto che gli sforzi compaiano nella (12.94) come variabili indipendenti suggerisce che essi possano essere valutati con la stessa accuratezza degli spostamenti, evitando il deterioramento di precisione connesso con la derivazione.

Una formulazione a elementi finiti del teorema di Hellinger-Reissner richiede sempre che gli spostamenti in ogni elemento vengano modellati mediante la (11.32a), da cui conseguono per la (12.94b) le deformazioni (11.32b). Tali relazioni vengono ora riscritte in coordinate intrinseche

$$\mathbf{s}_e(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{u}_e \quad \epsilon_e(\xi) = \mathbf{B}(\xi) \mathbf{u}_e \quad (12.95a, b)$$

dove $e = 1, \dots, N$ è l'indice del generico elemento. Si assume che le funzioni di forma siano tali da assicurare, oltre che la continuità degli spostamenti tra elemento e elemento, il rispetto delle condizioni al contorno di congruenza $\mathbf{s} = \bar{\mathbf{s}}$ su S_u . Se scritto per le (12.95), il funzionale (12.94a) vede quindi elidersi l'ultimo termine.

È inoltre necessario introdurre un modello per gli sforzi, scrivendo

$$\sigma_e(\xi) = \mathbf{h}(\xi) \mathbf{S}_e \quad (12.96)$$

dove il vettore \mathbf{S}_e contiene gli ℓ parametri che governano l'andamento degli sforzi nell'elemento e $\mathbf{h}(\xi)$ è un'opportuna matrice di funzioni del punto.

Si introducano le matrici

$$\mathbf{H}_e = \int_{V_e} \mathbf{h}' \mathbf{B} dV \quad \mathbf{A}_e = \int_{V_e} \mathbf{h}' \mathbf{a} \mathbf{h} dV \quad \mu_e = \int_{V_e} \mathbf{h}' (\vartheta - a \zeta) dV \quad (12.97a-c)$$

Suddividendo allora gli integrali nella (12.94a) nella somma dei contributi relativi ai singoli elementi e introducendo i modelli (12.95), (12.96), il funzionale diviene

$$J = \sum_{e=1}^N \left\{ \mathbf{S}'_e \mathbf{H}_e \mathbf{u}_e - \frac{1}{2} \mathbf{S}'_e \mathbf{A}_e \mathbf{S}_e - \mathbf{S}'_e \mu_e - \mathbf{u}'_e \mathbf{p}_{0e} \right\} \quad (12.98)$$

Il vettore \mathbf{p}_{0e} delle forze nodali equivalenti ai carichi sull'elemento è sempre definito dalla (11.44b).

Si procede ora all'operazione di assemblaggio. Per quanto riguarda gli spostamenti, essa è ancora simbolicamente espressa dalla (12.47a), che lega le variabili nodali \mathbf{u}_e di ogni elemento ai parametri liberi \mathbf{U} dello schema discreto attraverso le matrici di connettività \mathbf{L}_e , ricostruendo la continuità del campo di spostamenti. I parametri di sforzo, invece, non richiedono assemblaggio alcuno, in quanto il teorema di Hellinger-Reissner accetta che le tensioni siano discontinue tra elemento e elemento. È però formalmente conveniente introdurre un vettore \mathbf{S} dei parametri di sforzo per l'intero schema discreto, che semplicemente raccoglie come sottovettori indipendenti i contributi di ogni elemento. Precisamente

$$\mathbf{S}' = \{\mathbf{S}'_1 \dots \mathbf{S}'_e \dots \mathbf{S}'_N\} \quad (12.99)$$

Simbolicamente, si può allora scrivere

$$\mathbf{S}_e = \mathbf{M}_e \mathbf{S}, \quad e = 1, \dots, N \quad (12.100a)$$

dove la matrice

$$\mathbf{M}_e = \{\mathbf{0} \dots \mathbf{I} \dots \mathbf{0}\} \quad (12.100b)$$

è composta da elementi nulli, salvo che per un blocco costituito dalla matrice identica $\ell \times \ell$ nella posizione corrispondente all' e -simo elemento. Le (12.100) hanno il solo scopo di introdurre una fittizia operazione di assemblaggio per i parametri di sforzo, esprimendola in forma analoga alla (12.47a) per gli spostamenti nodali. Introducendo queste relazioni nella (12.99) si ottiene allora

$$J(\mathbf{U}, \mathbf{S}) = \mathbf{S}'\mathbf{H}\mathbf{U} - \frac{1}{2} \mathbf{S}'\mathbf{A}\mathbf{S} - \mathbf{S}'\boldsymbol{\mu} - \mathbf{U}'\mathbf{P}_0 \quad (12.101)$$

dove si è posto

$$\mathbf{H} = \sum_{e=1}^N \mathbf{M}'_e \mathbf{H}_e \mathbf{L}_e \quad \mathbf{A} = \sum_{e=1}^N \mathbf{M}'_e \mathbf{A}_e \mathbf{M}_e \quad \boldsymbol{\mu} = \sum_{e=1}^N \mathbf{M}'_e \boldsymbol{\mu}_e \quad (12.102a-c)$$

e \mathbf{P}_0 è sempre definito dalla (11.61).

La modellazione a elementi finiti ha quindi ricondotto il funzionale (12.94) a una funzione quadratica delle variabili libere \mathbf{U} e \mathbf{S} . La stazionarietà della (101) comporta

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{H}'\mathbf{S} - \mathbf{P}_0 = \mathbf{0} \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{H}\mathbf{U} - \mathbf{A}\mathbf{S} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \quad (a)$$

Sono queste le equazioni risolventi per il problema. Esse possono essere organizzate nella forma seguente

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{P}_0 \end{Bmatrix} \quad (12.103)$$

Nella (12.103), la matrice dei coefficienti è simmetrica, in quanto \mathbf{A} è tale, ma non definita in segno, come denuncia la presenza di una sottomatrice principale nulla. Ciò consegue dal fatto che la funzione (12.101) (come del resto il funzionale (12.94) da cui trae origine) non è convessa e quindi la sua stazionarietà non corrisponde a un estremo bensì a un punto sella.

Il sistema risolvente può essere ricondotto a una forma più compatta osservando che, se la matrice \mathbf{A} non è singolare, la seconda delle (a) può essere risolta per \mathbf{S} . Si ottiene

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{H}\mathbf{U} - \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (12.104)$$

Sostituendo nella prima, risulta allora

$$[\mathbf{H}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}]\mathbf{U} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{H}'\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\mu} \quad (b)$$

Tale sistema ha struttura analoga alla (11.75), relativa all'approccio agli spostamenti. Ponendo infatti

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{H}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H} \quad \hat{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{H}'\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\mu} \quad (12.105a, b)$$

la (b) si scrive

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{U} = \mathbf{P}_0 + \hat{\mathbf{P}}_0 = \hat{\mathbf{P}} \quad (12.106)$$

$\hat{\mathbf{K}}$ si configura come la matrice di rigidezza dello schema discreto prodotta dal metodo. Se essa non è singolare (cioè non è assicurato a priori e il problema verrà esaminato in seguito), la (12.106) può essere risolta per \mathbf{U} . Attraverso la (12.104) si risale poi ai parametri di sforzo e quindi, mediante le (12.95), (12.96), si calcolano i valori locali.

12.3.1.2. Modalità operative

Così come presentata, la costruzione del sistema risolvente (12.106) richiede di operare con matrici di dimensioni notevoli. È però possibile procedere elemento per elemento, effettuando poi l'assemblaggio con le regole usuali.

La struttura particolarmente semplice delle matrici \mathbf{M}_e , definite dalla (12.100b), permette infatti di riconoscere che le matrici (12.102) hanno la configurazione seguente

$$\mathbf{A} = \sum_{e=1}^N \mathbf{M}'_e \mathbf{A}_e \mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \text{diag}[\mathbf{A}_e] \quad (12.107a)$$

$$\mathbf{H} = \sum_{e=1}^N \mathbf{M}'_e \mathbf{H}_e \mathbf{L}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{L}_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \sum_{e=1}^N \mathbf{M}'_e \boldsymbol{\mu}_e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (12.107b, c)$$

La matrice di rigidezza (12.105a) e il vettore (12.105b) delle forze nodali equivalenti a deformazioni e sforzi iniziali risultano quindi

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{L}'_1 \mathbf{H}'_1 \quad \mathbf{L}'_2 \mathbf{H}'_2 \quad \dots] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{L}_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e \{\mathbf{H}'_e \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{H}_e\} \mathbf{L}_e \quad (c1)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_0 = [\mathbf{L}'_1 \mathbf{H}'_1 \quad \mathbf{L}'_2 \mathbf{H}'_2 \quad \dots] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e \{\mathbf{H}'_e \mathbf{A}_e^{-1} \boldsymbol{\mu}_e\} \quad (c2)$$

Ponendo

$$\hat{\mathbf{k}}_e = \mathbf{H}'_e \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{H}_e \quad \hat{\mathbf{p}}_{0e} = \mathbf{H}'_e \mathbf{A}_e^{-1} \boldsymbol{\mu}_e \quad (12.108a, b)$$

e ricordando la definizione (11.61) di \mathbf{P}_0 , si può allora scrivere

$$\hat{\mathbf{K}} = \sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e \hat{\mathbf{k}}_e \mathbf{L}_e \quad \hat{\mathbf{P}} = \sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e (\mathbf{p}_{0e} + \hat{\mathbf{p}}_{0e}) \quad (12.109a, b)$$

Il confronto con le (11.74) mette immediatamente in luce come l'approccio misto di Hellinger-Reissner si differenzi da quello agli spostamenti solo nelle proprietà degli elementi, ora definite dalle (12.108) anziché dalle (11.63,64). In effetti, la soluzione del problema può essere ottenuta con gli stessi codici di calcolo, sostituendo semplicemente il modulo che calcola tali proprietà.

Si osservi anche che la struttura diagonale a blocchi di \mathbf{A} consente di effettuare la sua inversione elemento per elemento, operando quindi su matrici di dimensioni ridotte. È ovviamente essenziale che le \mathbf{A}_e relative a ogni elemento, definite dalla (12.97b), non siano singolari. \mathbf{a} è definita positiva; tale risulterà pertanto anche \mathbf{A}_e se la matrice $\mathbf{h}(\boldsymbol{\xi})$ che governa il modello di sforzo ha colonne indipendenti, se cioè la (12.96) prevede che sia $\boldsymbol{\sigma}_e(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$ ovunque nell'elemento solo quando tutte le componenti di \mathbf{S}_e sono nulle.

Il modo puramente formale con cui sono state introdotte, non permette di stabilire il significato delle grandezze (12.97) che caratterizzano il comportamento dell'elemento finito. Peraltro, il confronto tra le (12.108a) e (12.51a) suggerisce che \mathbf{A}_e^{-1} e \mathbf{H}_e giochino

un ruolo analogo, rispettivamente, alla rigidità naturale \mathbf{D} e alla matrice \mathbf{C} nell'approccio agli spostamenti. \mathbf{A}_e rappresenta una sorta di *cedevolezza naturale* e diviene effettivamente tale se (e si vedrà che in modelli correttamente formulati ciò si verifica) le componenti del vettore \mathbf{S}_e sono sforzi generalizzati per l'elemento. Per quanto riguarda il legame tra \mathbf{H}_e e \mathbf{C} , si osservi che sostituendo nella (12.97a) la (12.13) per \mathbf{B} , risulta

$$\mathbf{H}_e = \int_{V_e} \mathbf{h}'(\xi) \mathbf{b}(\xi) dV \cdot \mathbf{C} \quad (12.110)$$

Qualora (ma ciò non è richiesto dal procedimento) il modello di sforzo \mathbf{h} fosse coerente con quello di spostamento nel senso della (12.90), l'integrale nella (12.110) si ricondurrebbe alla matrice identica e risulterebbe $\mathbf{H}_e = \mathbf{C}$.

ESEMPIO 12.9 Si consideri ancora l'elemento quadrato in Figura 12.3, in condizioni di sforzo piano. La matrice delle cedevolezza elastiche del materiale è allora l'inversa della (12.52) e risulta

$$\mathbf{a} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (d)$$

Si consideri un modello di sforzo governato dalla matrice seguente

$$\mathbf{h}(\xi) = \frac{1}{t\ell^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3\eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3\xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.111)$$

Per l'elemento in questione è anche $J = t\ell^2/4$. La (12.97b) allora fornisce, a calcoli svolti

$$\mathbf{A}_e = \frac{t\ell^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{h}' \mathbf{a} \mathbf{h} d\xi d\eta = \frac{1}{Et\ell^2} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (12.112a)$$

Invertendo, si ottiene, come è facile constatare

$$\mathbf{A}_e^{-1} = \frac{Et\ell^2}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\nu^2)/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu^2)/3 \end{bmatrix} \quad (12.112b)$$

Tale matrice è molto simile alla rigidità naturale (12.53) dell'elemento, da cui differisce solamente negli ultimi due termini diagonali. Ciò conferma l'analogia del ruolo interpretato dalle due matrici.

Per l'elemento finito in esempio, la matrice \mathbf{B} è espressa dalla (12.16). Dalla (12.97a) si ottiene allora

$$\mathbf{H}_e = \frac{t\ell^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{h}' \mathbf{B} d\xi d\eta = \frac{1}{2\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{H}_e risulta identica alla matrice \mathbf{C} che si evince dalla (12.19). In effetti (e si lascia come esercizio il verificarlo) le espressioni (12.111) di \mathbf{h} e (12.18) di \mathbf{b} comportano

$$\frac{t\ell^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{h}' \mathbf{b} d\xi d\eta = \mathbf{I}_8 \quad (e)$$

12.3.1.3 Connessioni con l'approccio agli spostamenti

Nel teorema di Hellinger-Reissner, sia spostamenti che sforzi sono variabili libere e, in linea di principio, non esiste alcun motivo che impedisca di definire i modelli (12.95) e (12.96) indipendentemente l'uno dall'altro. Possono tuttavia darsi casi in cui le (12.109) e le (11.74) si identificano (risulta cioè $\hat{\mathbf{k}}_e = \mathbf{k}_e$ e $\hat{\mathbf{p}}_{\theta e} = \mathbf{p}_{\theta e}$), per cui l'approccio misto non presenta di fatto alcuna differenza rispetto a quello agli spostamenti.

Ciò si verifica, ad esempio, se si assume come modello di sforzo $\mathbf{h} = \mathbf{r}$, con \mathbf{r} definito dalla (12.91). Ricordando la (12.49a) e che è $\mathbf{a} = \mathbf{d}^{-1}$, dalla (12.96b) si ottiene allora

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{D}^{-1} \cdot \int_{V_e} \mathbf{b}' \mathbf{d} \mathbf{a} dV \cdot \mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^{-1} \quad (12.113a)$$

Questa scelta per \mathbf{h} verifica inoltre la (12.90), per cui è anche

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{C} \quad (12.113b)$$

La (12.108a) diviene allora identica alla (12.51a), vale a dire alla matrice di rigidità relativa a un approccio agli spostamenti basata sullo stesso modello (12.95). È facile constatare che ciò si verifica anche per il vettore di forze nodali equivalenti a deformazioni o sforzi iniziali.

È questo un esempio molto particolare, tra l'altro di scarsa rilevanza pratica. Esso tuttavia mette in luce come, se si vuole che l'approccio misto effettivamente elimini gli inconvenienti che in determinate circostanze quello agli spostamenti presenta, occorra esplorare le connessioni tra i due procedimenti.

Per semplicità, ciò verrà ora fatto con riferimento a un caso specifico, anche se importante (i risultati generali verranno in seguito enunciati senza dimostrazione). Si supponga che il modello di sforzo sia definito per interpolazione polinomiale sui punti di Gauss usati per valutare numericamente le proprietà dell'elemento. Nella (12.96) si pone allora

$$\mathbf{h}(\xi) = \mathbf{r}_0(\xi) \quad \mathbf{S}_e = \mathbf{Q}_{0e} \quad (12.114a, b)$$

con $\mathbf{r}_0(\xi)$ e \mathbf{Q}_{0e} definiti dalle (12.61b, c) (i pesi W_g che compaiono in queste espressioni sono ininfluenti, in quanto si elidono nel prodotto (12.61a)).

Integrando numericamente la (12.97b) e ricordando la (12.59), si ottiene

$$\mathbf{A}_e = \sum_{g=1}^G W_g r'_0(\xi_g) \mathbf{d}^{-1} r_0(\xi_g) = \text{diag} \left[\frac{1}{W_g} \mathbf{d}^{-1} \right] = \mathbf{D}_0^{-1} \quad (12.115a)$$

dove \mathbf{D}_0 è la matrice (12.63b). È anche

$$\int_{V_e} r'_0 \mathbf{b} dV = \sum_{g=1}^G W_g r'_0(\xi_g) \mathbf{b}(\xi_g) = \left[\mathbf{b}(\xi_g) \right]$$

per cui la (12.110) fornisce

$$\mathbf{H}_e = \Theta \mathbf{C} \quad (12.115b)$$

con Θ definito dalla (12.69). Per la (12.71), la (12.108a) diviene allora

$$\hat{\mathbf{k}}_e = \mathbf{C}' \Theta' \mathbf{D}_0 \Theta \mathbf{C} = \mathbf{C}' \mathbf{D}_* \mathbf{C} = \mathbf{k}_{*e} \quad (12.116a)$$

dove \mathbf{k}_{*e} indica la matrice di rigidità dell'elemento finito ottenuta, nell'ambito dell'approccio agli spostamenti, integrando numericamente sui G punti di Gauss.

In presenza di deformazioni o sforzi iniziali si potrebbe dimostrare in modo del tutto analogo che risulta anche

$$\hat{\mathbf{p}}_{0e} = \mathbf{p}_{0*e} \quad (12.116b)$$

D'altra parte, \mathbf{p}_{0e} è identico nei due casi. Le (12.116) mostrano quindi che l'approccio misto basato sul modello di sforzo (12.114) e quello agli spostamenti, se numericamente integrati, producono le stesse proprietà per gli elementi e quindi, a valle dell'assemblaggio, le stesse equazioni risolventi per lo schema discreto.

12.3.1.4 Teorema di limitazione e condizione di rango

Quanto sopra sviluppato, seguendo negli aspetti essenziali la più generale e rigorosa dimostrazione fornita in [14], stabilisce la completa equivalenza tra i risultati prodotti dall'integrazione numerica in modelli agli spostamenti e misti alla Hellinger-Reissner basati sulla (12.114). Questa ipotesi identifica il modello di sforzo con la distribuzione fittizia (12.61) e le conclusioni ottenute con riferimento a quest'ultima nel Paragrafo 12.2.3.2 si mantengono inalterate anche nel presente contesto.

Se il numero di punti di Gauss è tale da assicurare l'integrazione completa, eventuali inconvenienti dovuti all'eccesso di rigidità nella formulazione agli spostamenti non sono rimossi dal ricorso all'approccio misto. Questo risultato non è in realtà limitato all'ipotesi (12.114) e all'impiego di tecniche di integrazione numerica. Esso è del tutto generale e costituisce il cosiddetto *teorema di limitazione*, per la prima volta introdotto in [15], che verrà ora enunciato omettendone la dimostrazione formale. Si indichino con Σ e Σ_u gli spazi algebrici cui appartengono gli sforzi locali previsti dai due approcci. Precisamente

$$\Sigma \equiv \{ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \mathbf{S} \} \quad \Sigma_u \equiv \{ \boldsymbol{\sigma}_u(\mathbf{x}) = \mathbf{d}\mathbf{b}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{Q}_u \} \quad (12.117a, b)$$

Dove l'indice ()_u è stato introdotto per distinguere le quantità relative al metodo degli

spostamenti. Nelle (12.117) le matrici si intendono organizzate in modo da riferirsi all'intero schema discreto; gli sforzi presentano quindi discontinuità all'interfaccia tra gli elementi e vanno intesi come funzioni di quadrato sommabile.

L'inclusione

$$\Sigma \supseteq \Sigma_u \quad (12.118)$$

ha il significato seguente: per tutti gli sforzi generalizzati \mathbf{Q}_u relativi al modello agli spostamenti, è possibile trovare dei vettori \mathbf{S} che producano, in ogni punto dello schema discreto, gli stessi valori per gli sforzi locali. Il teorema di limitazione stabilisce che l'inclusione (12.118) implica la completa equivalenza tra la formulazione agli spostamenti e quella mista alla Hellinger-Reissner.

Tale risultato evidenzia il carattere dominante del modello agli spostamenti (12.95) su quello di sforzo (12.96). Se il secondo è così ricco da includere tutti gli andamenti locali che conseguono dal primo, risulta da questo vincolato. L'approccio alla Hellinger-Reissner è allora *solo apparentemente misto*.

D'altro canto, il modello di sforzo non può essere eccessivamente povero. Se esso è della forma (12.114) e il numero di punti di Gauss è tale per cui $sG < d$, dove d è sempre il numero di modi deformativi che conseguono al modello di spostamento, la formulazione mista si identifica con una agli spostamenti integrata in modo ridotto e può presentare gli inconvenienti legati all'introduzione di modi a energia zero. In generale, un numero troppo limitato di parametri di sforzo può condurre a matrici $\hat{\mathbf{K}}$ singolari, o comunque mal condizionate. Perché il sistema (12.106) ammetta soluzione, il modello di sforzo deve rispettare alcune restrizioni.

È stata in particolare stabilita una condizione, associata ai nomi di Babuska e Brezzi [16,17], che assicura l'esistenza e l'unicità della soluzione di un approccio misto. Essa ha carattere molto formale e non viene qui presentata. Alcune sue interpretazioni relative a schemi discreti sono peraltro disponibili (vedi [18]) e si traducono operativamente nella cosiddetta *condizione di rango*, che assicura l'effettiva presenza in ogni elemento dei d modi deformativi previsti dal modello di spostamento. Elementi che rispettano questa condizione senza ricadere nell'inclusione (12.118) sono effettivamente misti ma, non introducendo modi a energia zero, non presentano gli inconvenienti a essi relativi.

Per meglio chiarire questi aspetti, si stabilisce ora il legame tra le ℓ componenti del vettore \mathbf{S}_e , che governano il modello di sforzo, e le d componenti di \mathbf{Q}_{me} che conseguono dal modello di spostamento e sono definite dalla (12.43). Introducendo in questa relazione gli sforzi (12.96), si ottiene

$$\mathbf{Q}_{me} = \int_{V_e} \mathbf{b}' \mathbf{h} dV \cdot \mathbf{S}_e \quad (12.119)$$

La relazione tra i due vettori si esprime quindi come segue

$$\mathbf{Q}_{me} = \mathbf{\Omega}'_e \mathbf{S}_e \quad \mathbf{\Omega}'_e = \int_{V_e} \mathbf{h}' \mathbf{b} dV \quad (12.120a, b)$$

La (12.120a) ha lo stesso significato della (12.70b), con cui si identifica se il modello di sforzo è espresso dalle (12.114) (è allora $\mathbf{\Omega}_e = \mathbf{O}_e$ e $\mathbf{S}_e = \mathbf{Q}_{me}$), e permette di stabilire con ragionamenti analoghi il comportamento del modello. Se è $\ell > d$, le (12.120) instaurano un legame tra le componenti di \mathbf{S}_e , circostanza che riflette la natura dominante del modello di spostamento ed è spesso associata all'inclusione (12.118), che riconduce la formulazione mista a quella agli spostamenti. Se invece è $\ell \leq d$ e $\mathbf{\Omega}_e$ ha rango pieno ($R(\mathbf{\Omega}_e) = \ell$), le componenti di \mathbf{S}_e non sono

vincolate dal modello di spostamento e assumono il significato di sforzi generalizzati per l'elemento finito.

Il confronto tra le (12.110) e (12.120b) permette di stabilire la relazione

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{\Omega}_e \mathbf{C}_e \quad (12.121)$$

per cui l'espressione (12.108a) della matrice di rigidità dell'elemento si può scrivere

$$\hat{\mathbf{k}}_e = \mathbf{C}_e' \mathbf{\Omega}_e' \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{\Omega}_e \mathbf{C}_e \quad (12.122)$$

dove si è ancora indicato con r il numero di spostamenti nodali nell'elemento isolato. Dal momento che è $R(\mathbf{A}_e^{-1}) = \ell$, la (12.122) mostra che il rango di $\hat{\mathbf{k}}_e$ non può eccedere il minimo tra ℓ e d . Se $\mathbf{\Omega}_e$ ha rango pieno, è in particolare

$$R(\hat{\mathbf{k}}_e) = \min\{\ell, d\} \quad (12.123)$$

Il caso $\ell \geq d$ comporta allora una rigidità elastica di rango pari al numero di modi deformativi associati al modello di spostamento e nullità pari a quello degli effettivi moti rigidi nell'elemento isolato; le singolarità vengono eliminate in sede di assemblaggio, operazione che ricostruisce la continuità della struttura e impone i vincoli esterni. Se però è $\ell < d$, alcuni dei modi deformativi assumono energia zero e l'assemblaggio non elimina necessariamente tutte le singolarità. Lo stesso può verificarsi nel caso in cui il rango di $\mathbf{\Omega}_e$ sia inferiore a d .

La definizione dei modelli richiede quindi alcune cautele. Un modello di sforzo troppo povero in rapporto a quello di spostamento può violare la condizione di rango, dando luogo a sistemi risolvibili singolari o a soluzioni eccessivamente flessibili. D'altra parte, se si ricade nell'inclusione (12.118) il teorema di limitazione stabilisce che il risultato è identico a quello di una formulazione agli spostamenti, di cui condivide anche gli inconvenienti. Esiste peraltro un ambito in cui l'approccio alla Hellinger-Reissner può essere vantaggiosamente applicato. Se consapevolmente formulato, lo schema discreto che ne risulta effettivamente elimina eventuali eccessi di rigidità senza introdurre gli inconvenienti a volte connessi con l'integrazione ridotta.

Un buon elemento misto è quello formulato nell'Esempio 12.9. Per esso è $\ell = d = 5$ e, come la (e) evidenzia, $\mathbf{\Omega}_e$ si identifica con la matrice identica 5×5 . La matrice di rigidità (12.122) ha quindi rango 5, pari al numero di modi deformativi previsti dal modello di spostamento, nessuno dei quali assume energia zero. \mathbf{S}_e è adesso una valida definizione di sforzo generalizzato per l'elemento, da cui gli andamenti locali conseguono attraverso le (12.96) e (12.111). Pur se sono governati dallo stesso numero di parametri liberi, gli spazi Σ e Σ_u , definiti dalle (12.117), non si identificano; si potrebbe infatti verificare che essi hanno in comune i modi di sforzo costante ma non i due rimanenti. Come il confronto tra le (12.112b) e (12.53) evidenzia, gli approcci misto e agli spostamenti producono due elementi effettivamente diversi e il primo può eliminare alcuni degli inconvenienti eventualmente associati al secondo.

12.3.2 ULTERIORI APPROCCI MISTI

La formulazione a elementi finiti del teorema di Hellinger-Reissner è stata sviluppata con un certo dettaglio per esemplificare la procedura relativa ai metodi misti. Esistono tuttavia altre formulazioni variazionali del problema elastico che pure possono essere vantaggiosamente utilizzate in molti casi. Si accenna qui a due di esse, che trovano un certo impiego nelle applicazioni.

L'approccio agli spostamenti può dar luogo a inconvenienti notevoli se il materiale è pressoché incompressibile ($\nu \approx .5$). Le deformazioni sono allora sostanzialmente deviatoriche, ma spesso il modello di spostamento non è in grado di separare i contributi deviatorici da quelli volumetrici. Questi ultimi sono di fatto nulli in soluzione e vengono a vincolare i primi, causando fenomeni di locking.

Allo scopo di separare i due contributi, si consideri il legame elastico lineare e isotropo (3.30), in termini di costanti di Lamè. In notazione tensoriale, esso si scrive

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (12.124)$$

dove δ_{ij} indica, al solito, il tensore di Kronecker. Si ricorda che in termini di costanti ingegneristiche λ si esprime

$$\lambda = E \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (f)$$

Nella (12.124) la quantità

$$\epsilon_{kk} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (g)$$

rappresenta la variazione di volume. Essa è legata a $\sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ dalla (3.39a). Precisamente

$$\sigma_{kk} = K\epsilon_{kk} \quad K = \frac{E}{1-2\nu} \quad (h1, 2)$$

dove K è il modulo volumetrico del materiale che, come del resto λ , non è definito per $\nu = .5$.

Si introduca la quantità

$$\mathbf{P} = \lambda\epsilon_{kk} = \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \quad (12.125)$$

Essa è proporzionale alla componente idrostatica di sforzo $p = \sigma_{kk}/3$, con cui si identifica per $\nu = .5$. Il legame (12.124) allora può scriversi

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + P\delta_{ij} \quad \mathbf{P} = \lambda\epsilon_{kk} \quad (12.126a, b)$$

È possibile dimostrare che la soluzione del problema elastico corrisponde alla stazionarietà del funzionale

$$M(s_i, P) = \int_V \mu(\epsilon_{ij}, P) dV - \int_V F_i s_i dV - \int_{S_f} f_i s_i dS \quad (12.127a)$$

$$\mu(\epsilon_{ij}, P) = \frac{1}{2} \left(2G\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} + 2P\epsilon_{kk} - \frac{1}{\lambda} P^2 \right) \quad (12.127b)$$

sotto le condizioni

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) \quad \text{in } V \quad s_i = \bar{s}_i \quad \text{su } S_u \quad (12.128)$$

La dimostrazione di questo enunciato, noto come *teorema di Herrmann*, è stata proposta come esercizio nel Capitolo 4. La stazionarietà del funzionale rispetto alla variabile libera P comporta

$$\delta_P M = \int_V \left(\epsilon_{kk} - \frac{P}{\lambda} \right) \delta P dV = 0 \quad \forall \delta P$$

il che palesemente implica

$$\frac{P}{\lambda} = \epsilon_{kk} \quad \text{in } V \quad (12.129)$$

vale a dire la porzione (12.126b) del legame elastico, non soddisfatta a priori da P arbitrari. Imponendo la stazionarietà rispetto ad una variazione di spostamento si ottiene invece

$$\delta_S M = \int_V (2G\epsilon_{ij}\delta\epsilon_{ij} + P\delta\epsilon_{kk})dV - \int_V F_i\delta s_i dV - \int_{S_f} f_i\delta s_i dS = 0$$

per ogni variazione compatibile con le (12.128). Introducendo la (12.129), facendo uso dell'identità $\delta\epsilon_{kk} = \delta_{ij}\delta\epsilon_{ij}$ e ricordando il legame elastico (12.124), la condizione si riconduce alla forma seguente

$$\int_V \sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij}dV - \int_V F_i\delta s_i dV - \int_{S_f} f_i\delta s_i dS = 0$$

$$\forall \delta\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta s_{i,j} + \delta s_{j,i}) \quad \text{in } V, \quad \delta s_i = 0 \quad \text{su } S_u \quad (12.130)$$

È immediato riconoscere che la (12.130) impone l'equilibrio attraverso il principio dei lavori virtuali.

Si osservi che se nella (12.127b) P venisse eliminato mediante la (12.129), μ si identificherebbe con l'energia di deformazione del materiale scritta in termini di costanti di Lamé. Precisamente

$$\mu(\epsilon_{ij}, P = \lambda\epsilon_{kk}) = \frac{1}{2} (2G\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} + \lambda(\epsilon_{kk})^2) = \omega(\epsilon_{ij}) \quad (12.131)$$

Per $\nu \rightarrow .5$ peraltro $\lambda \rightarrow \infty$ e ω non è definito. L'espressione (12.127b) di μ invece lo è sempre. La (12.129) si traduce allora nella condizione di incompressibilità $\epsilon_{kk} = 0$; questa non è adesso imposta a priori, ma viene ad essere soddisfatta in soluzione e non costituisce quindi un vincolo sulle componenti di deformazione. Il teorema di Herrmann consente infatti formulazioni che non danno luogo a fenomeni di locking, scopo per cui è stato originariamente introdotto [19].

Una modellazione ad elementi finiti di questo teorema richiede che in ogni elemento venga stabilito il modello (12.95) per gli spostamenti e un modello per P , definito in modo analogo alla (12.96). Precisamente

$$P_e(\xi) = \mathbf{c}(\xi)\mathbf{R}_e \quad (12.132)$$

dove \mathbf{c} è un'opportuna matrice riga di funzioni del punto e \mathbf{R}_e il vettore dei parametri liberi che governano l'andamento di $P(\xi)$ nell'elemento. Dal momento che il teorema non richiede che questa quantità sia continua attraverso l'interfaccia tra gli elementi, l'operazione di assemblaggio coinvolge solo gli spostamenti nodali. I dettagli della formulazione sono lasciati come esercizio.

Il teorema di Herrmann rappresenta in realtà solo un caso particolare di un approccio di portata molto più ampia. È spesso possibile esprimere l'energia di deformazione come somma di due contributi scrivendo

$$\omega(\epsilon) = \frac{1}{2} \mathbf{e}'\mathbf{d}\epsilon = \frac{1}{2} \mathbf{e}'\mathbf{d}_1\epsilon + \frac{1}{2} \mathbf{e}'\mathbf{d}_2\epsilon = \omega_1(\epsilon) + \omega_2(\epsilon) \quad (12.133a)$$

dove la matrice \mathbf{d}_2 è esprimibile nella forma

$$\mathbf{d}_2 = \alpha \mathbf{m}\mathbf{m}' \quad \alpha > 0 \quad (12.133b)$$

Qualunque matrice simmetrica e semidefinita positiva può essere decomposta in tal modo [5]. Ad esempio, nel caso del legame (12.124) i due contributi risultano

$$\omega_1(\epsilon) = \frac{1}{2} 2G\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} \quad \omega_2(\epsilon) = \frac{1}{2} \lambda(\epsilon_{kk})^2 \quad (12.134)$$

e si esprimono nella forma (12.133) ponendo

$$\epsilon = \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}' \quad \alpha = \lambda \quad (i1, 2)$$

$$\mathbf{d}_1 = G \begin{bmatrix} 2 & . & . & . & . & . \\ . & 2 & . & . & . & . \\ . & . & 2 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix} \quad (i3, 4)$$

Il legame elastico può allora scriversi

$$\sigma = \frac{\partial \omega}{\partial \epsilon} = \mathbf{d}_1\epsilon + \mathbf{m}\mathbf{g} \quad \mathbf{g} = \alpha \mathbf{m}'\epsilon \quad (12.135a, b)$$

È infatti, come immediato constatare

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \epsilon} = \mathbf{d}_1\epsilon \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \epsilon} = \alpha \mathbf{m}\mathbf{m}'\epsilon = \mathbf{m}\mathbf{g}$$

Nelle (12.135), \mathbf{g} è un vettore di natura statica. Nel caso del teorema di Herrmann esso diviene uno scalare e si identifica con P , come definito dalla (12.126). Inserendo le (i) nella (12.135b) risulta infatti

$$\mathbf{g} = \alpha \mathbf{m}'\epsilon = \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \lambda\epsilon_{kk} = P \quad (j)$$

La suddivisione (12.133) è operata in modo da isolare il parametro costitutivo α , che si suppone possa divenire molto grande nei confronti di quelli che intervengono nella matrice \mathbf{d}_1 (per $\nu = .5$ è infatti $\lambda \gg G$). È questa una potenziale fonte di inconvenienti per un approccio agli spostamenti, in quanto l'energia di deformazione diviene mal definita.

Si consideri in luogo di ω la quantità

$$\mu(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{g}) = \omega_1(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{g}'\mathbf{m}'\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2\alpha} \mathbf{g}'\mathbf{g} \quad (12.136)$$

La sua derivata rispetto a $\boldsymbol{\varepsilon}$ definisce sempre lo sforzo $\boldsymbol{\sigma}$. È infatti

$$\frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{d}_1 \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m} \mathbf{g} \quad (12.137a)$$

Peraltro, la sola parte (12.135a) del legame elastico (indipendente da α) è così rappresentata. La rimanente porzione risulta dalla condizione

$$\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{g}} = \mathbf{0} \quad \text{che impone} \quad \frac{1}{\alpha} \mathbf{g} = \mathbf{m}' \boldsymbol{\varepsilon} \quad (12.137b)$$

Si osservi che per $\alpha \rightarrow \infty$ la (12.137b) comporta $\mathbf{m}' \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \mathbf{0}$. A differenza dell'energia di deformazione, la quantità (12.136) si mantiene però ben definita anche in questo caso.

Sostituendo ω con μ nell'espressione dell'Energia Potenziale Totale della struttura, si perviene al funzionale

$$M(\mathbf{s}, \mathbf{g}) = \int_V \mu(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{g}) dV - \int_V \mathbf{F}'\mathbf{s} dV - \int_{S_f} \mathbf{f}'\mathbf{s} dS \quad (12.138a)$$

il cui dominio di definizione è costituito dalle cinematiche congruenti. Precisamente

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \partial(\mathbf{s}) \quad \text{in } V \quad \mathbf{s} = \bar{\mathbf{s}} \quad \text{su } S_u \quad (12.138b)$$

I valori di \mathbf{s} e \mathbf{g} che rendono stazionario il funzionale (12.138a) nel dominio (12.138b) corrispondono alla soluzione del problema elastico. La dimostrazione è identica a quella prima fornita per il teorema di Herrmann.

Il procedimento è applicabile al modello di trave di Timoshenko. L'energia di deformazione per unità di lunghezza di trave è adesso

$$\omega(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} EI \chi^2 + \frac{1}{2} GA_* t^2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{d} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \chi \\ t \end{Bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GA_* \end{bmatrix} \quad (k1-3)$$

Essa assume la forma (12.133) ponendo

$$\mathbf{d}_1 = EI \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha = GA_* \quad (k4)$$

Dalla (12.135b) allora consegue

$$\mathbf{g} = \alpha \mathbf{m}' \boldsymbol{\varepsilon} = GA_* t = T \quad (k5)$$

\mathbf{g} si identifica quindi con l'azione tagliante. La (12.136) adesso si scrive

$$\mu(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{g}) = \frac{1}{2} EI \chi^2 + Tt - \frac{1}{2GA_*} T^2 \quad (k6)$$

Da essa si ottiene il legame elastico nella forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \partial \mu / \partial \chi \\ \partial \mu / \partial t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EI \chi \\ T \end{Bmatrix} \quad \frac{\partial \mu}{\partial T} = 0 \rightarrow t = \frac{1}{GA_*} T \quad (\ell 1, 2)$$

Nella ($\ell 1$) solo il momento flettente è definito attraverso il legame elastico. L'azione tagliante è invece una variabile indipendente, legata alla corrispondente deformazione attraverso la

($\ell 2$). In travi snelle, $t \rightarrow 0$ mentre T si mantiene finito, indicando come GA_* divenga molto grande rispetto a T . È questa una fonte di inconvenienti nell'approccio agli spostamenti, che il metodo misto può eliminare.

Lo stesso teorema di Hellinger-Reissner può essere incluso in questo schema, anche se in modo un po' faticoso. Si illustra ora la connessione limitatamente al caso in cui non siano presenti sforzi e deformazioni iniziali e $\boldsymbol{\varepsilon}$ abbia quindi natura puramente elastica. Nella (12.133a) si pone $\omega_1 = 0$ e quindi $\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}$. Questa matrice si esprime nella forma (12.133b) ponendo

$$\alpha = 1 \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}' = \mathbf{d}^{1/2} \quad (m1, 2)$$

dove $\mathbf{d}^{1/2}$ è una matrice simmetrica tale per cui

$$\mathbf{d}^{1/2} \mathbf{d}^{1/2} = \mathbf{d} \quad (m3)$$

(in generale, la matrice \mathbf{d}^n , come del resto qualunque funzione di matrici, è definita come quella che ha gli stessi autovettori di \mathbf{d} e autovalori pari a quelli di \mathbf{d} elevati alla n -sima potenza. \mathbf{d} è simmetrica e definita positiva: i suoi autovalori sono quindi reali e positivi e possono essere elevati a $1/2$; su queste matrici, le operazioni algebriche si effettuano in modo formalmente identico che su quantità scalari). La (12.135b) diviene allora

$$\mathbf{g} = \mathbf{d}^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d}^{1/2} \mathbf{d}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d}^{-1/2} \boldsymbol{\sigma} \quad (m4)$$

e la (12.136) si scrive

$$\mu(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{g}) = \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{d}^{-1/2} \mathbf{d}^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{d}^{-1/2} \mathbf{d}^{-1/2} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma} \quad (m5)$$

dove è stato fatto uso della relazione $\mathbf{a} = \mathbf{d}^{-1}$. È immediato constatare che tale definizione riconduce il problema (12.138) alle (12.94) scritte per $\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$.

Il fatto che il teorema di Hellinger-Reissner possa essere visto come un caso limite della formulazione variazionale (12.138) suggerisce che anche modelli a elementi finiti basati su quest'ultima possano ricadere in un teorema di limitazione ed essere soggetti a una condizione di rango. In effetti, un modello eccessivamente ricco per \mathbf{g} riconduce a un approccio agli spostamenti, eliminando i benefici che ci si aspetta associati all'uso di un metodo misto, mentre modelli troppo poveri possono dar luogo a singolarità nel sistema risolvente. Questi aspetti, così come le connessioni con modelli agli spostamenti integrati in modo ridotto o selettivo, sono discussi in dettaglio in [14].

Alcune formulazioni miste sono anche basate sul *teorema di Hu-Washizu* [20]. Questo identifica la soluzione del problema elastico con la stazionarietà del funzionale

$$K(s_i, \sigma_{ij}, \eta_{ij}) = \int_V \left\{ \frac{1}{2} D_{ijkl} \eta_{ij} \eta_{kl} + \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \eta_{ij}) - \eta_{ij} (D_{ijkl} \vartheta_{kl} - \zeta_{ij}) \right\} dV - \int_V F_j s_j dV - \int_{S_f} f_j s_j dS \quad (12.139a)$$

dove si è posto

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) \quad (12.139b)$$

e gli spostamenti devono rispettare la condizione di congruenza esterna

$$s_i = \bar{s}_i \quad \text{su } S_u \quad (12.139c)$$

Nella (12.139a) η_{ij} è il tensore delle piccole deformazioni, che appare come variabile libera e soddisfa la congruenza solo in soluzione. Il simbolo intende distinguerlo da ϵ_{ij} , che è invece definito dalla (12.139b) come la parte simmetrica del gradiente di spostamento.

La dimostrazione dell'enunciato è stata proposta come Esercizio 4.10, in una forma leggermente diversa che non prevedeva gli sforzi iniziali ζ_{ij} e non imponeva a priori la condizione (12.139c) su S_u , possibilità quest'ultima di limitato interesse in vista di formulazioni a elementi finiti, in quanto non è difficile definire funzioni di forma che soddisfino a priori le condizioni al contorno di congruenza. È comunque immediato constatare che le condizioni di stazionarietà del funzionale risultano

$$\delta_\eta K = \int_V \{D_{ijkl}(\eta_{kl} - \vartheta_{kl}) + \zeta_{ij} - \sigma_{ij}\} \delta \eta_{ij} dV = 0 \quad \forall \delta \eta_{ij} \quad (12.140a)$$

$$\delta_\sigma K = \int_V \{\epsilon_{ij} - \eta_{ij}\} \delta \sigma_{ij} dV = 0 \quad \forall \delta \sigma_{ij} \quad (12.140b)$$

$$\delta_s K = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_V F_j \delta s_j dV - \int_{S_f} f_j \delta s_j dS = 0$$

$$\forall \delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta s_{i,j} + \delta s_{j,i}) \text{ in } V, \quad \delta s_i = 0 \text{ su } S_u \quad (12.140c)$$

La prima impone il legame elastico; la seconda identifica η_{ij} con ϵ_{ij} , come definito dalla (12.139b) e si traduce quindi nel legame deformazioni- spostamenti; la (12.140c) infine impone l'equilibrio attraverso il principio dei lavori virtuali.

Una formulazione a elementi finiti richiede che, in aggiunta ai modelli (12.95) e (12.96) per spostamenti e sforzi, venga definito in ogni elemento anche un modello per le deformazioni, governato da un certo numero di parametri liberi raccolti nel vettore \mathbf{a}_e . Simbolicamente si scrive

$$\boldsymbol{\eta}_e(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{a}_e \quad (12.141)$$

La procedura si sviluppa attraverso una successione di operazioni analoga a quella vista con riferimento al teorema di Hellinger-Reissner e i dettagli sono lasciati come esercizio. Ci si limita qui a osservare che il teorema non richiede la continuità di $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi})$ tra elemento e elemento, per cui l'assemblaggio non coinvolge \mathbf{a}_e .

Tutti i modelli misti cui si è accennato hanno caratteristiche tra loro analoghe. Essi possono tutti essere ricondotti alla forma (12.109) e si differenziano solo per le diverse espressioni che la matrice di rigidità elastica e il vettore delle forze nodali equivalenti a deformazioni o sforzi iniziali del singolo elemento assumono nei vari casi. Anche in questo ambito sono stati dimostrati teoremi di limitazione [14, 21], che stabiliscono come in determinate circostanze il carattere dominante del modello di spostamento renda la formulazione solo apparentemente "mista", così come condizioni di rango [18] che è necessario rispettare per non introdurre modi a energia zero.

L'equivalenza con modelli agli spostamenti formulati mediante integrazione ridotta o selettiva è pure stata esplorata da molti autori [14, 22]. Nello stabilire modelli a elementi finiti di tipo misto occorre quindi operare con una certa attenzione; se consapevolmente formulati, tali modelli possono peraltro presentare considerevoli vantaggi rispetto a un approccio agli spostamenti, eliminando molti degli inconvenienti a volte associati a quest'ultimo.

12.4 CENNI A MODELLI EQUILIBRATI E IBRIDI

12.4.1 FORMULAZIONE IN TERMINI DI FUNZIONE DI SFORZO

Si è altre volte sottolineato come nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti il principio dei lavori virtuali instauri una dualità tra le relazioni che governano gli aspetti statico e cinematico del problema strutturale. Sotto condizioni abbastanza generali sul legame costitutivo, tale circostanza comporta che le formulazioni variazionali o estremali del problema si presentino in coppia. In campo elastico, il funzionale Energia Potenziale Totale

$$V(s_i) = \int_V \omega(\epsilon_{ij}) dV - \int_V F_j s_j dV - \int_{S_f} f_j s_j dS \quad (12.142a)$$

definito nel dominio della congruenza

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) \text{ in } V \quad s_i = \bar{s}_i \text{ su } S_u \quad (12.142b)$$

è stazionario in corrispondenza di una soluzione che è anche equilibrata. A esso corrisponde il funzionale Energia Complementare Totale

$$\Pi(\sigma_{ij}) = \int_V \gamma(\sigma_{ij}) dV - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_i \bar{s}_j dS \quad (12.143a)$$

che opera nel rispetto delle condizioni di equilibrio

$$\sigma_{ij,i} + F_j = 0 \text{ in } V \quad \sigma_{ij} n_i = f_j \text{ su } S_f \quad (12.143b)$$

e la cui stazionarietà impone la congruenza. In tali espressioni, si ricorda, $\omega(\epsilon_{ij})$ e $\gamma(\sigma_{ij})$ rappresentano rispettivamente le energie di deformazione e complementare, che definiscono il legame elastico del materiale attraverso le relazioni

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial \epsilon_{ij}} \quad \epsilon_{ij} = \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma_{ij}} \quad (12.144a, b)$$

Le (12.142) sono alla base degli approcci agli spostamenti; questi costruiscono modelli congruenti che, in soluzione, vengono a rispettare l'equilibrio solamente in media. In modo analogo, si può pensare di formulare a partire dalle (12.143) modelli equilibrati, la cui stazionarietà impone le condizioni di congruenza in senso globale. Nell'ambito delle formulazioni agli elementi finiti, all'approccio cinematico che si traduce nel metodo agli spostamenti, si può quindi far corrispondere un duale *approccio statico*.

La simmetria tra le due formulazioni è ben evidenziata dalla cosiddetta analogia lastra-piastra. Si consideri dapprima il problema di una piastra di Kirchhoff di spessore h costante, che per semplicità si suppone incastrata su tutto il contorno. La congruenza impone allora che lo spostamento $w(x, y)$ sia continuo con entrambe le derivate prime nel dominio A occupato dalla piastra nel piano (x, y) e che si annulli unitamente alla derivata normale sul contorno Γ . Indicando con C^n la classe delle funzioni continue con tutte le loro derivate fino all'ordine n incluso, tale condizione si scrive

$$w(x, y) \in C^1 \text{ in } A \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ su } \Gamma \quad (12.145a, b)$$

Come si è visto nel Capitolo 9, dallo spostamento w discendono le deformazioni generalizzate (curvature)

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \chi_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (12.146a)$$

Ad esse il legame elastico associa gli sforzi generalizzati (momenti)

$$M_x = D(\chi_x + \nu \chi_y) \quad M_y = D(\nu \chi_x + \chi_y) \quad M_{xy} = D \frac{1-\nu}{2} \chi_{xy} \quad (12.146b)$$

dove $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ è la rigidezza flessionale della piastra. I momenti sono legati al carico trasversale $p(x, y)$ attraverso l'equazione indefinita di equilibrio

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0 \quad (12.146c)$$

Sostituendo in questa relazione le (12.146b) per i momenti e quindi le (12.146a) per le curvature, si perviene all'equazione di Sophie Germain-Lagrange

$$\nabla_4 w = \frac{p}{D} \text{ in } A \quad (12.147)$$

Per la piastra di Kirchhoff, è questo l'equivalente delle equazioni di Navier, che formulano il problema elastico in termini di spostamenti. La risposta della piastra è definita dalla soluzione della (12.147) sotto le condizioni al contorno (12.145b).

Si consideri adesso un problema piano negli sforzi, costituito da una lastra priva di forze di volume ($F_x = F_y = 0$) e di vincoli, soggetta quindi sul contorno Γ a trazioni superficiali f_x, f_y ovunque note e globalmente equilibrate. Come si è visto nel Paragrafo 4.2.4, le condizioni di equilibrio possono essere soddisfatte introducendo una funzione di sforzo (o di Airy) $\varphi(x, y)$, continua con le sue derivate prime nel dominio A occupato dalla lastra nel piano (x, y) . Gli sforzi che da questa si ottengono attraverso le (4.52) soddisfano infatti le equazioni indefinite di equilibrio del problema; le condizioni di equilibrio al contorno possono essere espresse in funzione di φ e della sua derivata normale al bordo seguendo il procedimento indicato sempre nel Paragrafo 4.2.4. La più generale soluzione equilibrata si esprime quindi, in termini di funzione di sforzo

$$\varphi(x, y) \in C^1 \text{ in } A \quad \varphi(s) = M(s), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_c = -T(s) \text{ su } \Gamma \quad (12.148a, b)$$

dove, si ricorda, s è una coordinata che percorre il contorno a partire da un punto O arbitrario, $T(s)$ è la componente nella direzione tangente al contorno nel generico punto $P(s)$ della risultante delle trazioni superficiali agenti sul tratto OP e $M(s)$ il momento di tali trazioni rispetto al punto P .

In assenza di forze di volume, gli sforzi locali sono legati a φ dalle relazioni

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (12.149a)$$

Da esse si ottengono le deformazioni attraverso il legame elastico che, nel caso piano nelle tensioni, si scrive

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x + \sigma_y) \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (12.149b)$$

Tali deformazioni devono soddisfare la condizione di congruenza interna per un problema piano. Precisamente

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 0 \quad (12.149c)$$

Sostituendo in questa relazione le (12.149b) per le deformazioni e le (12.149a) per gli sforzi, si perviene all'equazione risolvente

$$\nabla_4 \varphi = 0 \text{ in } A \quad (12.150)$$

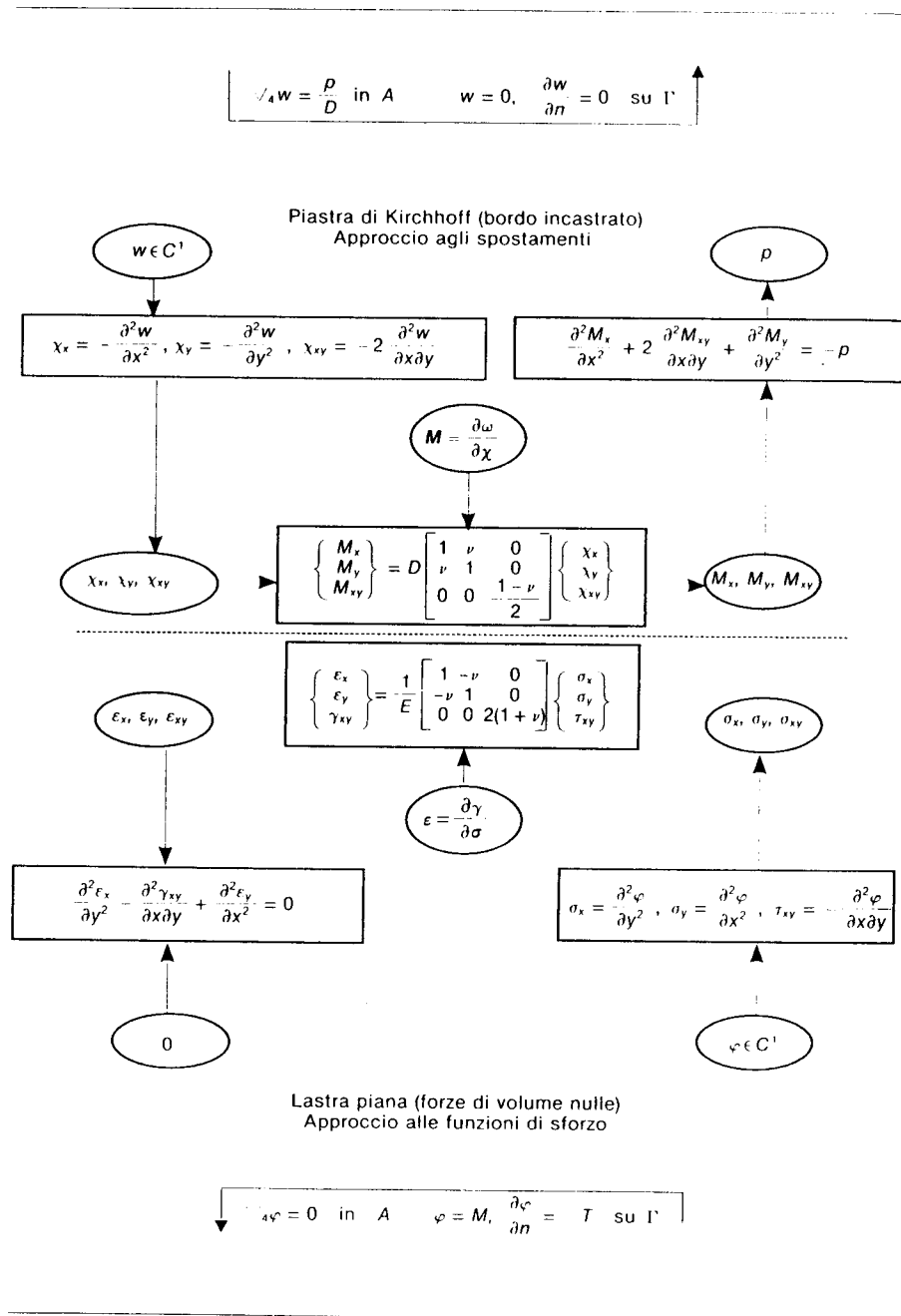
La (12.150) esprime in termini di funzione di sforzo l'equazione di Mitchell-Beltrami per il problema elastico della lastra e, unitamente alle condizioni al contorno (12.148b), ne permette la soluzione.

Le fasi attraverso cui si sviluppano le due formulazioni sono riassunte in Tabella 12.2. È evidente l'analogia formale tra di esse. In entrambe l'incognita è rappresentata da una funzione continua con le sue derivate prime in A , che sul bordo Γ assume con la sua derivata normale valori fissati dalle condizioni al contorno di congruenza o di equilibrio del problema. Le successive operazioni (12.146) o (12.149) differiscono solo per inessenziali fattori moltiplicativi e le equazioni risolventi presentano la stessa struttura. L'approccio in termini di funzioni di sforzo per il problema della lastra caricata nel piano è formalmente equivalente a un approccio agli spostamenti, sia pure relativo a un problema diverso.

Una formulazione agli spostamenti del problema della piastra di Kirchhoff stabilisce innanzi tutto un modello per lo spostamento $w(x, y)$, esprimendolo in funzione di un certo numero di variabili nodali. Il modello è definito in modo da rispettare, a valle dell'assemblaggio, le condizioni di continuità e di congruenza al contorno (12.145) per qualunque valore delle variabili nodali, che divengono quindi parametri liberi. Si calcolano poi le deformazioni (12.146a) che conseguono dal modello. Il legame elastico è adesso utilizzato non per valutare i momenti (12.146b) ma piuttosto per esprimere l'energia di deformazione ω per unità di superficie media in funzione delle variabili nodali. Il funzionale (12.142a) si riconduce quindi a una funzione di tali variabili e la sua stazionarietà, che impone l'equilibrio, si traduce in un sistema algebrico e lineare, sostitutivo dell'equazione differenziale (12.147).

Si può procedere in modo del tutto analogo con riferimento alla lastra piana stabilendo per la funzione di sforzo $\varphi(x, y)$ un modello che, a valle dell'assemblaggio, rispetti le condizioni (12.148) per qualunque valore dei parametri liberi. Gli sforzi corrispondenti si calcolano quindi mediante le (12.149a) e, su questa base e il legame elastico, si definisce l'energia complementare γ per unità di superficie e si esprime il funzionale (12.143a) in funzione dei parametri liberi. La condizione di congruenza interna

Tabella 12.2



(12.149c) viene imposta in modo approssimato dalla stazionarietà dell'Energia Complementare Totale, che si traduce ancora in un sistema algebrico e lineare, sostitutivo dell'equazione differenziale (12.150).

L'analogia sussiste anche tra la formulazione agli spostamenti del problema della lastra piana e quella in termini di funzioni di sforzo della piastra di Kirchhoff. Nel primo caso, il campo di spostamenti è definito da due funzioni continue, non necessariamente con le loro derivate, nel dominio A . Precisamente

$$\left\{ \begin{matrix} s_x(x, y) \\ s_y(x, y) \end{matrix} \right\} \in C^0 \text{ in } A \tag{12.151}$$

Se, come ipotizzato, la lastra è priva di vincoli, la congruenza non impone restrizioni sui valori di s_x, s_y al contorno. Il legame deformazioni- spostamenti, la legge di Hooke e le equazioni indefinite di equilibrio si scrivono, nel caso in esame

$$\epsilon_x = \frac{\partial s_x}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial s_y}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \tag{a1}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \epsilon_x + \epsilon_y) \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \tag{a2}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{a3}$$

(si ricorda che si suppone la lastra priva di forze di volume). È possibile adesso, procedendo per successive sostituzioni, formulare le equazioni differenziali che governano il problema in termini di spostamenti (equazioni di Navier). A esse occorre aggiungere le condizioni di equilibrio al contorno, pure esprimibili in termini di spostamenti mediante le (a1, 2). In un approccio agli elementi finiti, le condizioni di continuità (12.151) sono soddisfatte dal modello e le condizioni di equilibrio, sia indefinite che al contorno, non vengono esplicitamente considerate; esse sono imposte, in via approssimata, dalla stazionarietà del funzionale Energia Potenziale Totale discretizzato.

Un'analogia formulazione del problema della piastra di Kirchhoff può essere derivata a partire dalle seguenti funzioni di sforzo (note anche come *funzioni di Southwell*)

$$\left\{ \begin{matrix} \psi_x(x, y) \\ \psi_y(x, y) \end{matrix} \right\} \in C^0 \text{ in } A \tag{12.152}$$

La più generale espressione dei momenti che soddisfa l'equazione indefinita di equilibrio (12.146a) può esprimersi nella forma

$$M_x = M_x^0 + M_x^p \quad M_y = M_y^0 + M_y^p \quad M_{xy} = M_{xy}^0 + M_{xy}^p$$

dove i momenti

$$M_x^0 = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \quad M_y^0 = -\frac{\partial \psi_y}{\partial x} \quad M_{xy}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \tag{b2}$$

costituiscono uno stato di coazione, che soddisfa cioè la (12.146c) scritta per $p = 0$ e l'apice (0) indica un qualunque integrale particolare della stessa (12.146c).

Le (12.152) e (b) definiscono la più generale soluzione equilibrata per una piastra incastrata su tutto il bordo, vincolo che non prevede condizioni di equilibrio al contorno. Il legame elastico permette quindi di risalire alle curvature

$$\chi_x = \frac{12}{Eh^3} (M_x - \nu M_y) \quad \chi_y = \frac{12}{Eh^3} (-\nu M_x + M_y) \quad \chi_{xy} = \frac{24(1+\nu)}{Eh^3} M_{xy} \tag{c}$$

Queste devono rispettare le condizioni di congruenza interna per la piastra di Kirchhoff, che si scrivono [23]

$$2 \frac{\partial \chi_x}{\partial y} - \frac{\partial \chi_{xy}}{\partial x} = 0 \quad - \frac{\partial \chi_{xy}}{\partial y} + 2 \frac{\partial \chi_y}{\partial x} = 0 \quad (d)$$

Sostituendo in tali relazioni le (c) per le curvature e le (b) per i momenti, si perviene alle equazioni differenziali che governano il problema della piastra in termini di funzioni di sforzo. A esse andrebbero associate le condizioni al contorno di congruenza, pure scritte in termini di ψ_x, ψ_y . Tali espressioni sono in verità tutt'altro che agevoli da determinarsi, ma in un approccio agli elementi finiti ciò non risulta necessario. Le condizioni di congruenza, sia interna che al contorno, vengono infatti imposte dalla stazionarietà dell'Energia Complementare Totale, nella forma discretizzata che risulta dalla modellazione delle funzioni di sforzo (12.152).

Le relazioni precedenti sono riassunte in Tabella 12.3, che ancora evidenzia la completa analogia formale tra i due approcci. Queste rappresentazioni grafiche sono state sviluppate da Tonti [24] e ognuna di esse andrebbe in realtà riferita a un determinato problema (per la piastra di Kirchhoff, la parte inferiore della Tabella 12.3 va cioè associata alla parte superiore di Tabella 12.2, e viceversa per la lastra).

Se così organizzate, esse assumono l'aspetto illustrato in Tabella 12.4, che visualizza in modo molto espressivo la struttura duale che regge il problema elastico lineare e, più in generale, praticamente tutta la meccanica delle strutture, quantomeno all'interno dell'ipotesi di piccoli spostamenti.

Da quanto osservato si evince che un modello equilibrato agli elementi finiti può essere formulato in termini di funzioni di sforzo seguendo un procedimento analogo a quello che formula in termini di spostamenti un modello congruente. L'analogia è tale che un programma di calcolo per il primo approccio può spesso utilizzare gli stessi moduli del secondo, purché relativi al problema corrispondente [25]. La soluzione fornita da un modello equilibrato si presenta più flessibile di quella effettiva, che risulta quindi delimitata bilateralmente dalle approssimazioni relative ai due approcci.

Anche se lo schema presentato è certamente suggestivo per la sua eleganza, occorre dire che dal punto di vista delle applicazioni l'approccio equilibrato non è scevro da difficoltà e controindicazioni. La definizione delle condizioni al contorno di equilibrio in termini di funzioni di sforzo è spesso problematica e la loro imposizione è difficile da programmare.

La modellazione richiede particolari attenzioni nel caso di domini molteplicemente connessi, dove occorre introdurre vincoli per evitare la perdita di unicità della soluzione. Il risultato è inoltre preciso con riferimento alle funzioni di sforzo, informazione di interesse diretto pressoché nullo, e non altrettanto sugli sforzi, che ne conseguono per derivazione e sono calcolati sostanzialmente con lo stesso grado di accuratezza che nella corrispondente modellazione congruente.

La valutazione degli spostamenti non è immediata: l'approssimazione viola infatti la congruenza e le deformazioni prodotte dal calcolo non sono integrabili. Per risalire agli spostamenti si rendono quindi necessari interventi di varia natura a valle della soluzione dello schema discreto.

Tali difficoltà non sono insormontabili e l'approccio in termini di funzioni di sforzo è stato utilizzato con successo in svariate circostanze, segnatamente per problemi di piastre e di gusci [25]. Esse tuttavia giustificano il fatto che il procedimento gode di una popolarità ben più limitata che non il duale approccio agli spostamenti.

Tabella 12.3

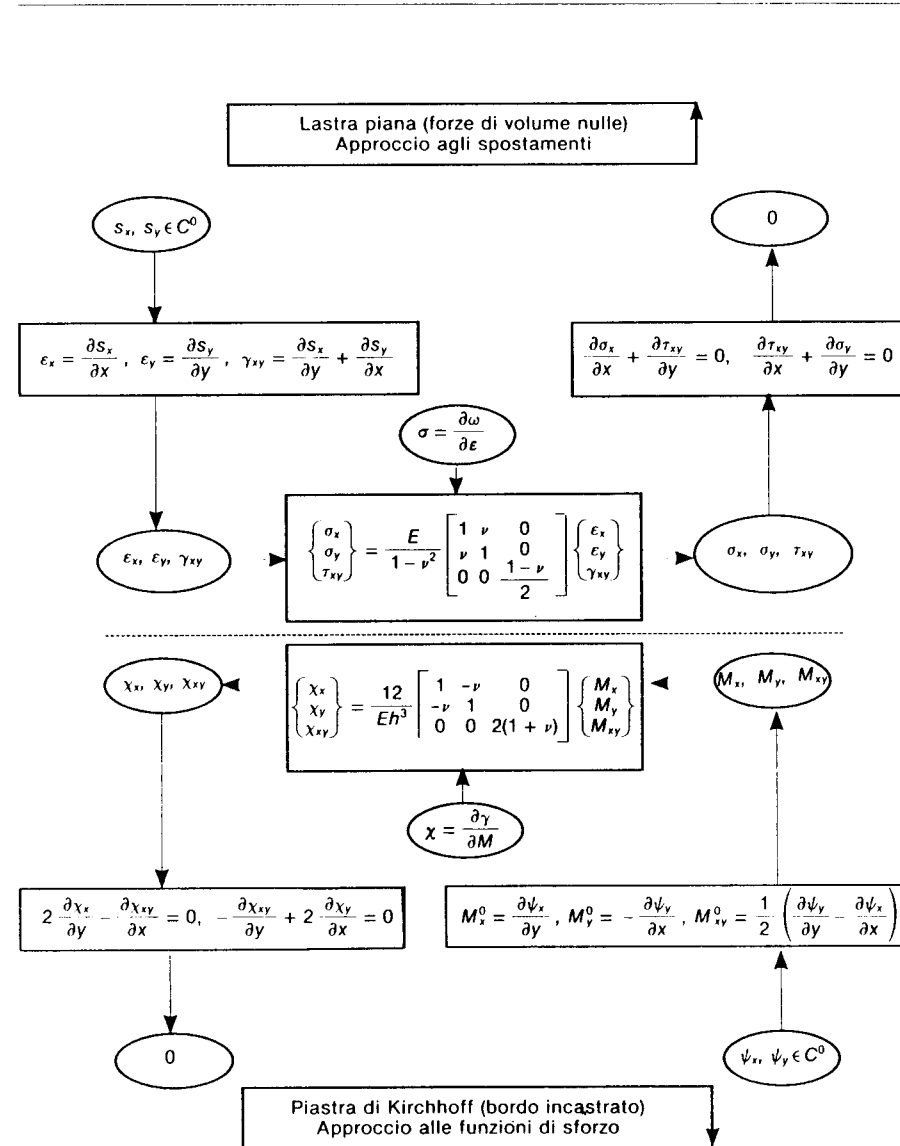
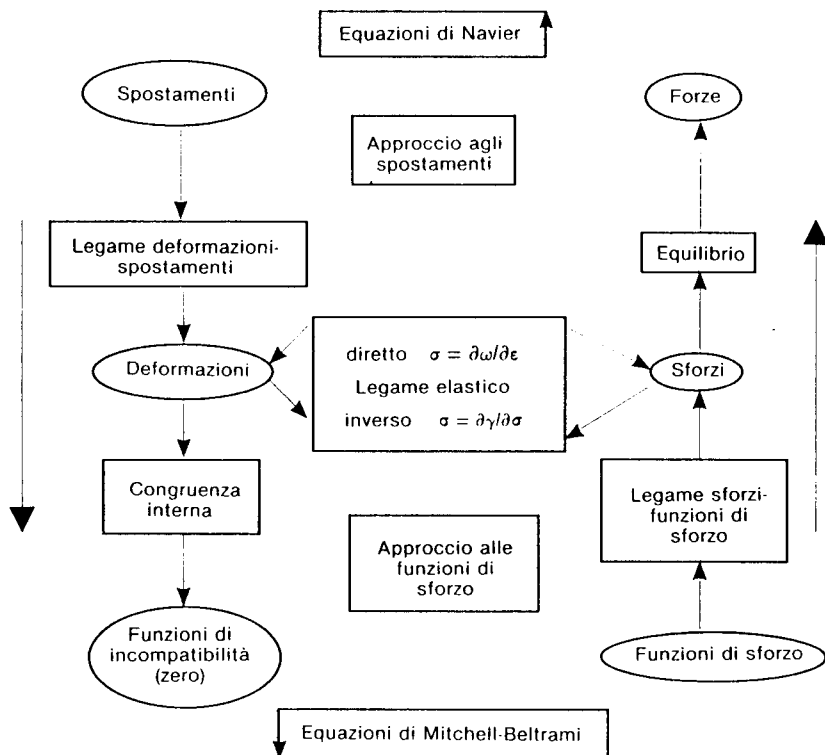


Tabella 12.4



12.4.2 MODELLAZIONE DIRETTA DEGLI SFORZI

Per stabilire un modello equilibrato non è in realtà necessario ricorrere a funzioni di sforzo. È possibile, almeno in linea di principio, modellare direttamente le tensioni locali, definendo l'approssimazione in modo che l'assemblaggio ricostruisca un andamento ovunque rispettoso delle equazioni indefinite di equilibrio, nonché delle condizioni al contorno sulla superficie caricata. Imponendo la stazionarietà del funzionale (12.143a) scritto con riferimento a tale modello, si perviene al sistema risolvibile, le cui incognite sono i parametri liberi che dettano il regime tensionale.

Gli sforzi sono ora modellati direttamente, il che elimina il deterioramento di precisione che consegue alla derivazione. Le difficoltà connesse con la valutazione degli spostamenti permangono, ma possono ancora essere aggirate con provvedimenti ad hoc. La necessità di soddisfare ovunque, in particolare attraverso l'interfaccia tra gli elementi, le condizioni di equilibrio, rende però la definizione dei modelli piuttosto

laboriosa e scarsamente sistematica. A differenza di quelli agli spostamenti, che possono essere facilmente organizzati in "famiglie" di elementi di ordine via via più elevato, elementi equilibrati di questo tipo vanno stabiliti e verificati caso per caso. Alcuni di essi, peraltro, sono stati formulati ed utilizzati con successo.

Sul funzionale Energia Complementare Totale si basano anche altre formulazioni ad elementi finiti, dette *ibride* (la terminologia è in realtà più generale, ma gli elementi ibridi di più comune impiego appartengono a questa categoria). Esse definiscono un modello di sforzo equilibrato *all'interno di ogni elemento*, ma non necessariamente tra elementi adiacenti, e, indipendentemente da questo, un modello per gli spostamenti *sul contorno di ogni elemento*, governato da opportuni valori nodali. Il funzionale (12.143) viene modificato in modo da includere mediante moltiplicatori di Lagrange le condizioni di equilibrio tra elemento e elemento, non soddisfatte a priori dall'approssimazione. I parametri che governano l'andamento degli sforzi possono venire eliminati dall'equazione risolvibile, che si presenta in termini di soli spostamenti nodali, liberi a valle dell'assemblaggio. Modelli ibridi anche relativamente poveri producono spesso buoni risultati. Il campo di spostamenti è facilmente ricostruibile a partire dai valori nodali che risolvono il sistema e il fatto che gli sforzi siano direttamente interpolati in ogni elemento suggerisce che anch'essi siano valutabili con accuratezza analoga [26].

Un buon elemento ibrido è il quadrilatero piano basato sul modello di sforzo

$$\sigma_x(x, y) = R_1 + R_4y \quad \sigma_y(x, y) = R_2 + R_5x \quad \tau_{xy}(x, y) = R_3 \quad (12.153)$$

che rispetta, come è immediato verificare, le equazioni indefinite di equilibrio (a3) per qualunque valore dei parametri R_i . Su ognuno dei quattro lati si assume inoltre per gli spostamenti un andamento lineare, governato dai valori assunti ai vertici che competono al lato considerato e che si configurano come spostamenti nodali. Questo elemento ibrido ha prestazioni confrontabili con quelle di un modello S_8 , pur presentando gli stessi gradi di libertà spostamento di un elemento S_4 .

12.5 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Il metodo degli elementi finiti, cui sono stati dedicati gli ultimi due capitoli di questo volume, è un procedimento di estrema versatilità ed efficacia che consente la soluzione di problemi strutturali di vario tipo. Come qualunque altro approccio, la qualità della soluzione dipende dalle approssimazioni introdotte, le cui implicazioni devono essere sempre tenute presenti nel formulare il modello. Se utilizzato con consapevolezza, il metodo tuttavia permette di risolvere con precisione ingegneristicamente adeguata praticamente qualunque problema. Esso consente infatti di trattare geometrie differenti, le più generali condizioni di carico e di vincolo e diversi comportamenti del materiale. A volte esso è anche applicato con riferimento a problemi la cui formulazione analitica non è ancora definita in modo soddisfacente; tali soluzioni vanno ovviamente considerate con molta cautela, ma rappresentano di fatto le sole informazioni disponibili in determinate situazioni.

La formulazione più spontanea (e di gran lunga la più utilizzata) è quella agli spostamenti, che generalizza il concetto di modellazione cinematica alla base delle classiche teorie strutturali. L'approssimazione non è però dettata da ipotesi a priori sul comportamento di un solido dotato di particolare struttura, ma piuttosto da criteri di convergenza alla soluzione continua, che viene avvicinata con l'infittimento del reticolo o con

l'arricchimento del modello. Non è questo tuttavia il solo approccio possibile. Dal momento che il modello è ora svincolato dalla natura del particolare problema in esame, gli spostamenti, che meglio si prestano a guidare l'intuizione ingegneristica nella definizione di approssimazioni adeguate, perdono la loro posizione di privilegio. Altre quantità, segnatamente gli sforzi, possono essere modellate in alternativa o in aggiunta agli spostamenti. Ne consegue un panorama estremamente articolato e duttile, al cui interno un consapevole utilizzatore è in grado di scegliere le procedure più adatte caso per caso.

Il metodo è stato qui presentato con esclusivo riferimento a problemi strutturali. Esso è però utilizzabile anche in altri contesti e trova oggi largo impiego nello studio di problemi di idraulica, conduzione del calore, magnetostatica e così via. Tali applicazioni ovviamente esulano dagli obiettivi di questo testo. Esse tuttavia costituiscono un'ulteriore conferma delle potenzialità del metodo degli elementi finiti, che va riguardato come uno dei più notevoli risultati ottenuti in tempi relativamente recenti dalla meccanica delle strutture, ambito in cui è stato originariamente sviluppato ma al cui interno non è confinato.

ESERCIZI

- 12.1 La mensola in Figura 12.1a abbia sezione rettangolare $b \times h$ e lunghezza $l = 5h$. Il coefficiente di Poisson del materiale sia $\nu = .25$. Dalla (12.1) si ottiene allora per lo spostamento trasversale dell'estremo libero

$$f = 1.030 \frac{Fl^3}{3EI}$$

Calcolare un'approssimazione per tale valore considerando elementi di trave di Timoshenko e le modellazioni seguenti:

- un unico elemento lineare;
- due elementi lineari di eguale lunghezza;
- un unico elemento quadratico.

Valutare le proprietà degli elementi sia mediante integrazione completa che selettiva ($G = 1$ per l'elemento lineare, $G = 2$ per quello quadratico).

- 12.2 Si consideri l'elemento cubico di trave di Bernoulli-Eulero definito dal modello di spostamento (11.41). Stabilire per la matrice A un'espressione tale per cui i moti rigidi e le deformazioni generalizzate risultino come indicato in Figura 12.E2a. Calcolare la matrice di rigidezza naturale che ne consegue e gli sforzi generalizzati corrispondenti a un andamento lineare dei momenti flettenti (Figura 12.E2b).
- 12.3 Si consideri il problema di cui all'esercizio 11.8 (Figura 11.E8). Mostrare che se gli elementi vengono integrati in modo ridotto ($G = 1$) la matrice di rigidezza globale risulta singolare. Identificare il modo a energia zero non impedito dai vincoli.
- 12.4 Ripetere l'Esercizio 11.8 usando, in luogo dell'elemento S_4 , l'elemento misto formulato nell'Esempio 12.9. Verificare che la soluzione è meno rigida.
- 12.5 Si consideri ancora l'elemento assialsimmetrico piano nelle deformazioni in Figura 11.E14. Determinarne la matrice di rigidezza \hat{k} relativa a una formulazione alla Hellinger-Reissner basata sui modelli

$$s(r) = \frac{1}{2h} [(R + h - r) \quad (-R + h + r)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_r(r) \\ \sigma_\theta(r) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix}$$

Verificare che \hat{k} è identica alla matrice che si ottiene dal modello di spostamento se integrata sull'unico punto di Gauss $r_k = R$.

- 12.6 Si consideri l'elemento quadrato piano negli sforzi in Figura 12.3. Se ne voglia produrre una formulazione alla Hellinger-Reissner associando al modello di deformazione (12.18) il modello di sforzo governato dalla matrice

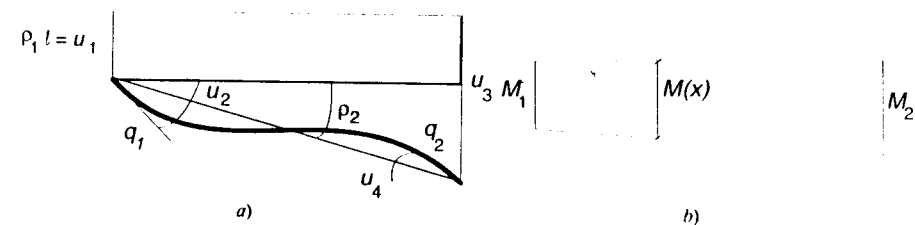


Figura 12.E2

$$\mathbf{h} = \frac{1}{t\ell^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}$$

(tale modello rientra nell'inclusione (12.118)). Verificare che risulta $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$, con \mathbf{D} espressa dalla (12.53). Verificare inoltre che, a parità di spostamenti nodali, anche gli sforzi coincidono localmente con quelli che si ottengono dall'approccio agli spostamenti.

12.7 Si consideri il problema piano nelle deformazioni in Figura 12.E7 e se ne determini la soluzione usando un unico elemento finito a quattro nodi (per eliminare il moto rigido, si imponga spostamento nullo nel baricentro). Considerare i seguenti modelli:

- Elemento S_4 integrato in modo completo
- Elemento S_4 con integrazione ridotta ($G = 1$)
- Elemento Hellinger-Reissner di cui all'Esempio 12.9 (piano nelle deformazioni anziché negli sforzi)
- Elemento basato sul teorema di Herrmann con $P = \text{cost}$

Valutare gli spostamenti nodali in funzione di ν , verificando che l'elemento *a*) non consente spostamenti per $\nu \rightarrow .5$ mentre i due elementi misti danno sempre soluzione.

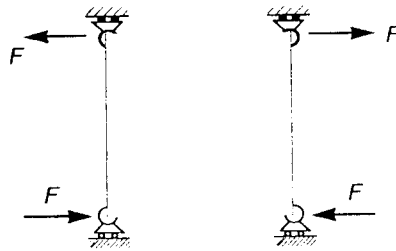


Figura 12.E7

BIBLIOGRAFIA

- COOK R.D., *Concepts and applications of finite element analysis*, 2^a ed., John Wiley & sons, New York, 1981.
- ARGYRIS J.H., Continua and discontinua, Proceedings of the first conference on *Matrix Methods in Structural Mechanics*, AFFDL.TR.66-88, Dayton, Ohio, p. 11, 1966.
- FELIPPA C.A., *Refined finite element analysis of linear and nonlinear two-dimensional structures*, tesi di dottorato, Università di California a Berkeley, 1966.
- CORRADI L., On stress computation in displacement finite element models, *Comp.Meth.Appl.Mech.Engng*, **54**, p. 325 (1986).
- HOHN F.E., *Elementary matrix algebra*, 2^a ed., MacMillan, Londra, 1958.
- BELYTSCHKO T., ONG J.S.J., LIU W.K., KENNEDY J.M., Hourglass control in linear and nonlinear problems, *Comp.Meth.Appl.Mech.Engng*, **43**, p. 251 (1984).
- BARLOW J., Optimal stress locations in finite element models, *Int. J. Num.Meth.Engng*, **10**, p. 243 (1976).

- ZIENCKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., *The Finite Element Method*, 2 vol., McGraw-Hill, Londra, 1988-1991.
- HINTON E., CAMPBELL J.S., Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least square method, *Int.J.Num.Meth. Engng*, **8**, p. 461 (1974).
- BARLOW J., More on optimal stress points - Reduced integration, element distortions and error estimation, *Int.J.Num.Meth.Engng*, **28**, p. 1487 (1989).
- CORRADI L., Finite element modelling of the elastic-plastic problem, in: *Mathematical Programming Methods in Structural Plasticity*, ed. D.Lloyd Smith, p. 255, Springer Verlag, Vienna, 1990.
- SHARPF D.W., A new method for stress calculation in the matrix displacement analysis, *Computers & Structures*, **8**, p. 465 (1978).
- BESSELING J.F., Finite element properties based upon elastic potential interpolation, in: *Hybrid and Mixed Finite Element Methods*, ed. S.N.Atluri, R.H.Gallagher e O.C.Zienkiewicz, p. 253, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- MALKUS D.S., HUGHES T.J.R., Mixed finite element methods - Reduced and selective integration techniques: a unification of concepts, *Comp.Meth. Appl.Mech.Engng*, **15**, p. 63 (1978).
- FRAEIJIS DE VEUBEKE B., Displacement and equilibrium models in the finite element method, in: *Stress Analysis*, ed. O.C.Zienkiewicz e G.S.Hollister, p. 145, John Wiley & Sons, Londra, 1965.
- BABUSKA I., The finite element method with Lagrange multipliers, *Numer. Math.*, **20**, p.179 (1973)
- BREZZI F., On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers, *RAIRO, R2*, p. 129 (1974).
- ATLURI S.N., GALLAGHER R.H., ZIENKIEWICZ O.C. (editori), *Hybrid and Mixed Finite Element Methods*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- HERRMANN L.R., Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem, *AAIA Journal*, **3**, p. 1896 (1965).
- WASHIZU K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1975.
- STOLARSKI H., BELYTSCHKO T., Limitation principles for mixed finite elements based on the Hu-Washizu variational formulation, *Comp.Meth.Appl.Mech.Engng*, **60**, p. 195 (1987).
- SHIMODAIRA H., Equivalence between mixed models and displacement models using reduced integration, *Int.J.Num.Meth.Engng*, **22**, p. 89 (1985).
- FUNG Y.C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- TONTI E., *La struttura formale delle teorie fisiche*, CLUP, Milano, 1976.
- SANDER G., Application of the dual analysis principle, Atti della *IUTAM Conference on High Speed Computing of Elastic Structures*, p. 167, Liegi, 1970.
- PIAN T.H.H., Hybrid Models, in: *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, ed. S.J.Fenves ed altri, p. 59, Academic Press, New York, 1971.