

# Integrazione numerica

Gli integrali che devono essere risolti nei problemi ingegneristici non possono sempre essere risolti analiticamente. Pertanto, si possono utilizzare tecniche approssimate, chiamate **tecniche di integrazione numerica** o di **quadratura numerica**. Tali tecniche si basano sulla **approssimazione della funzione integranda con polinomi**, poichè l'integrazione esatta di polinomi è possibile.

Per esempio, si consideri l'integrale

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Si approssimi la funzione integranda attraverso un polinomio del tipo:

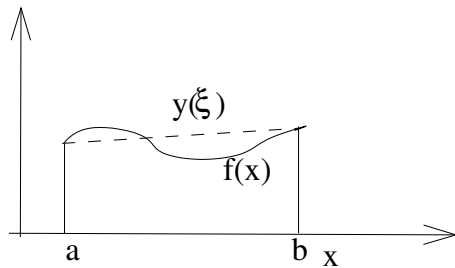
$$f(x) \approx \sum_{i=1}^N f_i \psi_i(x) \quad (2)$$

dove  $f_i$  indica il valore di  $f(x)$  al punto  $i$ -esimo dell'intervallo  $[a, b]$  e  $\psi_i(x)$  rappresenta l' $i$ -esimo polinomio di ordine  $i$  con  $i = 1, N$ .

## Metodo del trapezio (retta)

Se si prende una interpolazione lineare tra  $a$  e  $b$  si ottiene la regola del trapezio. In tal caso

$\psi_1 = \frac{b-x}{h}$ ,  $\psi_2 = \frac{x-a}{h}$ ,  $f_1 = f(a)$ ,  $f_2 = f(b)$ , dove  $h = b - a$

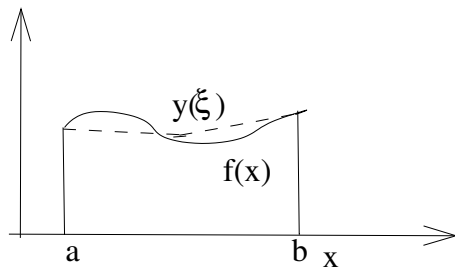


$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2}h(f_1 + f_2)$$

## Metodo di Cavalieri-Simpson (parabola)

Se si utilizza un'approssimazione quadratica, si hanno 3 funzioni cubiche di integrazione (parabole) e

$f_1 = f(a)$ ,  $f_2 = f(a + \frac{h}{2})$ ,  $f_3 = f(b)$



$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{6} \left( f_1 + f_3 + 4f_2 \right)$$

# Integrazione numerica

In generale, una formula di integrazione numerica è del tipo

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^r f(x_i) w_i \quad (3)$$

dove  $x_i$  sono i punti di quadratura e  $w_i$  sono i pesi di quadratura. Queste formule sono esatte nel caso in cui  $f(x)$  sia un polinomio di ordine  $r - 1$ . I metodi di quadratura più usati sono:

- il metodo di Newton-Cotes, dove i punti di integrazione sono equispaziati
- il metodo di Gauss-Legendre, dove i punti di integrazione non sono equispaziati

Vedremo in dettaglio solo il metodo di Gauss.

## Alcuni concetti di base

### Cambio di variabile

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(g(\zeta)) \frac{d(g(\zeta))}{d\zeta} d\zeta \text{ dove } x = g(\zeta).$$

### Coordinate naturali

La formula di Gauss-Legendre è la più usata, richiede l'uso delle coordinate naturali. La formula di G-L richiede di trasformare l'integrale tra  $a$  e  $b$  nell'integrale tra gli estremi adimensionali  $-1$  e  $1$ . Pertanto, occorre operare la trasformazione di coordinate

$$x = \alpha\xi + \beta \quad (4)$$

dove  $\xi = [-1, 1]$  e le costanti  $\alpha, \beta$  si ricavano ponendo:  $\xi = -1$  quando  $x = a$ ,  $\xi = 1$  quando  $x = b$ , ovvero  $a = -\alpha + \beta$  e  $b = \alpha + \beta$ , da cui  $\beta = \frac{a+b}{2}$  e  $\alpha = \frac{b-a}{2}$ , che sostituiti sopra danno

$$x = \frac{b-a}{2}\xi + \frac{a+b}{2} \quad (5)$$

OSS: lo jacobiano della trasformazione  $J = \frac{b-a}{2}$

# Metodo di Gauss

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f(\xi) J_\xi d\xi \approx J_\xi \sum_{g=1}^{ng} w_g f(\xi_g)$$

$w_g$ : pesi del polinomio approssimante

$\xi_g$ : coordinate dei punti di campionamento (punti di Gauss)

punti di campionamento sono gli zeri dei polinomi di Legendre

un polinomio di grado  $p$  e' integrato esattamente con  $(p+1)/2$  punti di Gauss

$ng = 1, g = 1, w_g = 2, \xi_g = 0$

$ng = 2, g = 1, 2, w_g = 1, \xi_g = \pm 0.57735$

$ng = 3, g = 1, 2, w_g = 0.8; 0.5, \xi_g = 0, \pm 0.7745966$

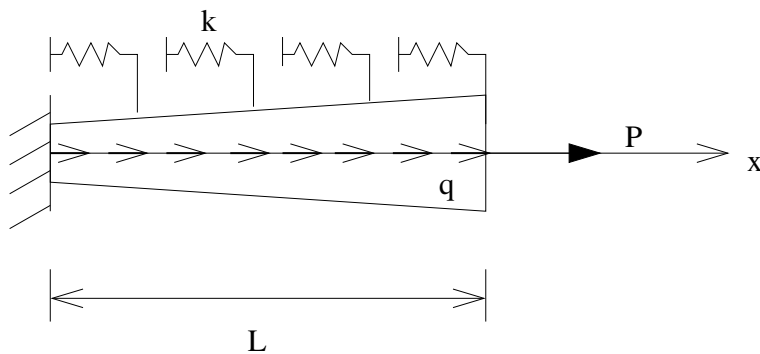
l'approssimazione della matrice di rigidezza avviene per difetto  $\rightarrow$  a favore di sicurezza

In 2D:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) dx \approx J_\xi J_\varsigma \sum_{g=1}^{ng} \sum_{h=1}^{nh} f(\xi_g, \varsigma_h) w_g w_h \quad (6)$$

## Forma debole del problema dell'equilibrio

Consideriamo il problema di equilibrio di un concio di trave caricata come in figura. La trave sia monodimensionale deformabile solo assialmente, avente lunghezza  $l$ , sezione trasversale  $A(x)$  e modulo di Young  $E(x)$ , soggetta a forze elastiche di costante  $k$  ed un carico assiale  $q(x)$ .



Se si isola un concio di trave, l'equazione differenziale di equilibrio alla traslazione orizzontale si scrive:

$$\frac{d}{dx} \left( E(x) A(x) \frac{du}{dx} \right) - k u(x) + q(x) = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{c.c. essenziali}$$

$$\left( E(x) A(x) \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} = P \quad \text{c.c. naturali}$$

## Forma debole del problema

Sia  $\mathbb{V}$  lo spazio delle funzioni di spostamento  $v$  cinematicamente ammissibili tali che:

- $v$  soddisfa le condizioni al contorno essenziali
- $v$  sufficientemente regolare (derivabile)

Si moltiplichino m.a.m. per un qualunque  $v \in (V)$ :

$$\int_0^l \left\{ \frac{d}{dx} \left( E(x) A(x) \frac{du}{dx} \right) v(x) - k u(x) v(x) \right\} dx = \quad (7)$$
$$- \int_0^l q(x) v(x) dx \quad \forall v(x) \in \mathbb{V}$$

La soluzione del problema in forma debole (7) deve soddisfare un'equazione integrale e non differenziale; deve soddisfare il problema in forma media e non puntuale  $\Rightarrow$  soluzione *debole*.

Integrando per parti il primo termine:

$$\left[ E(x) A(x) \frac{du}{dx} v(x) \right]_{x=0}^{x=l} - \int_0^l E(x) A(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \quad (8)$$
$$- \int_0^l k u(x) v(x) dx = - \int_0^l q(x) v(x) dx$$

**Lavoro interno:** i termini a primo membro rappresentano il lavoro interno, dove  $N = EA du/dx$  rappresenta la tensione staticamente ammissibile e  $v' = dv/dx$  rappresenta una deformazione cinematicamente ammissibile,  $ku v$  rappresenta il **lavoro della forza elastica delle molle** per lo spostamento virtuale

$$L_{vi} = \int_0^l E(x)A(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_0^l ku(x)v(x) dx$$

**Lavoro esterno:** i termini a secondo membro rappresentano il **lavoro virtuale esterno** delle forze esterne concentrate ( $P$ ) e distribuite ( $q$ ) per gli spostamenti al bordo

$$L_{ve} = \left[ E(x)A(x) \frac{du}{dx} v(x) \right]_{x=0}^{x=l} + \int_0^l q(x)v(x) dx = \\ Pv(l) + \int_0^l q(x)v(x) dx$$

Pertanto, partendo dalla forma debole delle equazioni di equilibrio siamo arrivati a scrivere il **Principio dei lavori virtuali**

$$L_{vi} - L_{ve} = 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

vale per qualunque spostamento ammissibile  $v \in \mathbb{V}$  (VIRTUALE)



# Principio dei Lavori virtuali

Il principio variazionale precedente si può anche scrivere introducendo la forma bilineare

$$\begin{aligned} a(u, v) := L_{vi} = & \int_0^l E(x) A(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \\ & + \int_0^l k u(x) v(x) dx \end{aligned} \quad (9)$$

e la forma lineare

$$\begin{aligned} l(v) := L_{ve} = & \left[ E(x) A(x) \frac{du}{dx} v(x) \right]_{x=0}^{x=l} + \\ & \int_0^l q(x) v(x) dx \end{aligned} \quad (10)$$

Il principio dei lavori virtuali si scrive (PLV):

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

## Principio di minimo dell'EPT

Poichè siamo in presenza di sistemi conservativi, il problema dell'equilibrio puo' essere alternativamente formulato anche attraverso il **Principio di minimo dell'Energia potenziale totale**

$$\begin{aligned}\Pi = & \int_0^l \frac{1}{2} E(x) A(x) \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{1}{2} k(u(x))^2 dx - \\ & - \left[ E(x) A(x) \frac{du}{dx} u(x) \right]_{x=0}^{x=l} - \int_0^l q(x) u(x) dx\end{aligned}$$

La condizione di stazionarietà del funzionale  $\Pi$  conduce all'equazione di equilibrio

Nelle ipotesi di validità del principio di sovrapposizione degli effetti (piccoli spostamenti e deformazioni, vincoli perfetti bilateri lisci, carichi limitati e regolari, materiale iperelastico lineare), la soluzione del problema elastico rende minima l'EPT

$$\Pi = \frac{1}{2} a(u, u) - l(u)$$

## Soluzione del problema debole

- Risolvere il problema al contorno di equilibrio assiale della trave in forma differenziale con condizioni al contorno essenziali e naturali significa trovare la soluzione analitica  $u = u(x)$  che soddisfa punto per punto l'equazione differenziale. In tal modo, si trova la soluzione della forma forte del problema. Tale soluzione non è sempre nota in generale, qualunque siano la geometria ed i carichi.
- Il problema integrale ottenuto integrando l'equazione differenziale e moltiplicando per un campo di spostamenti ammissibile rappresenta la *forma debole* del problema. La soluzione del problema in forma debole soddisfa le equazioni differenziali di equilibrio solo in forma media, pesata sull'integrale, quindi non la soddisfa in tutti i punti. Per qualunque geometria e condizione di carico, è possibile determinare una soluzione approssimata del problema di partenza sostituendo una forma approssimata dello spostamento dentro la forma debole dell'equilibrio.

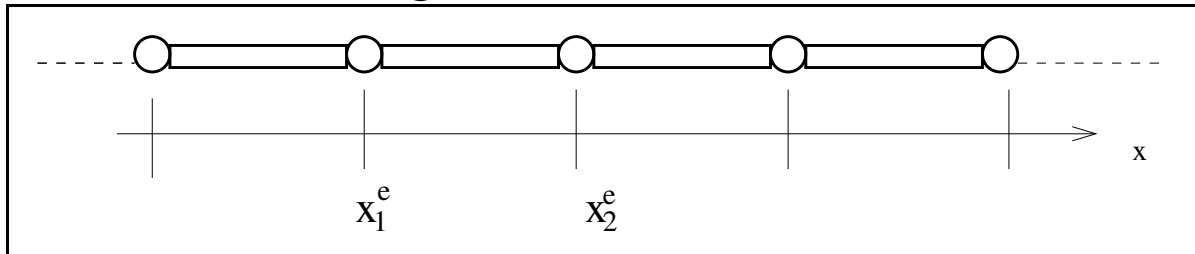
La formulazione debole del problema dell'equilibrio è una formulazione variazionale. Il metodo degli elementi finiti si basa sulla soluzione approssimata della forma debole del problema.

Il metodo degli EF si articola nei passi seguenti:

- 1** Discretizzazione del dominio in una collezione di sottodomini chiamati elementi finiti
  - a** costruire la mesh
  - b** numerare i nodi e gli elementi
  - c** generare le proprietà geometriche
- 2** Derivare le equazioni elementari di ogni elemento della mesh
  - a** costruire la formulazione variazionale dell'equazione debole dell'equilibrio
  - b** si assume il campo approssimante del tipo
$$u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$$
sostituirla nella forma debole per ottenere le equazioni dell'elemento nella forma
$$K^e U^e = F^e$$
- 3** Assemblare le matrici elementari nella matrice di rigidezza globale
- 4** Imposizione delle condizioni al contorno
- 5** Soluzione delle equazioni assemblate
- 6** Post-processing dei risultati: Calcolo delle tensioni, delle azioni interne, rappresentazioni grafiche

## Discretizzazione del dominio

Si effettua una partizione del dominio  $\Omega$  in  $NE$  elementi finiti,  $\Omega \approx \Omega^h = \bigcup \Omega^e$



$$u^h = \sum_{i=1}^{NE+1} \phi_i(x) U_i \quad \text{trial}$$

$$v^h = \sum_{i=1}^{NE+1} \phi_i(x) V_i \quad \text{test}$$

dove  $i$  indica il numero dei nodi che in questo caso varia da  $1, \dots, NE + 1$  con  $NE$  il numero di elementi finiti

Sostituendo nel PLV le espressioni approssimate delle funzioni test e trial si ottiene

$$a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad (11)$$

dove

$$a(u^h, v^h) = a\left(\sum_{i=1}^{NE+1} \phi_i(x) U_i, \sum_{j=1}^{NE+1} \phi_j(x) V_j\right)$$

$$l(v^h) = l\left(\sum_{j=1}^{NE+1} \phi_j(x) V_j\right)$$

Il principio dei lavori virtuali si scrive anche in forma indiciale

$$L_{vi} = \sum_{i=1}^{NE+1} \sum_{j=1}^{NE+1} U_i \bar{K}_{ij} V_j \quad (12)$$

Per esempio, nel caso monodimensionale, il generico coefficiente  $ij$  della matrice di rigidezza  $\bar{K}$  si scrive

$$\bar{K}_{ij} = \int_0^l EA \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx + \int_0^l k \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (13)$$

La matrice di rigidezza  $\bar{K}$  deriva dall'assemblaggio delle matrici di rigidezza elementari,  $\bar{K}^e$ ,  $\bar{K} = \bigwedge_{e=1}^{NE} \bar{K}^e$ , dove  $\bigwedge_{e=1}^{NE} \rightsquigarrow$  assemblaggio

La matrice di rigidezza elementare  $\bar{K}^e$  è formata da coefficienti di rigidezza elementari  $\bar{K}_{ij}^e$  del tipo

$$\bar{K}_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} EA \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} k \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (14)$$

dove  $[x_1^e, x_2^e]$  rappresentano gli estremi dell'elemento e

Possiamo anche porre  $\bar{K} = K + M$  dove:

$K_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} EA \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx$  matrice di rigidezza elastica

$M_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} k \phi_i(x) \phi_j(x) dx$  matrice delle masse

## I carichi nodali equivalenti

Il vettore carichi esterni in caso di solo carico distribuito si esprime come

$$l\left(\sum_{j=1}^{NE+1} \phi_j(x) V_j\right) := \int_0^l q(x) \left(\sum_{j=1}^{NE+1} \phi_j(x) V_j\right) dx$$

ovvero:

$$L_{ve} = l\left(\sum_{j=1}^{NE+1} \phi_j(x) V_j\right) = \int_0^l \sum_{j=1}^{NE+1} q(x) \phi_j(x) V_j dx$$

che in notazione indiciale diventa

$$L_{ve} = \sum_{j=1}^{NE+1} F_j V_j$$

dove  $F_j = \int_0^l q(x) \phi_j(x) dx$ .

Il vettore dei carichi nodali equivalenti  $F$  deriva dall'assemblaggio dei vettori carichi nodali elementari,  $F = \bigwedge_{e=1}^{NE} F^e$ , dove il termine  $j$ -esimo del vettore **carico nodale equivalente** elementare si calcola come

$$F_j^e := \int_{x_1^e}^{x_2^e} q(x) \phi_j(x) dx \quad (15)$$

# Formulazione del problema dell'equilibrio

Ci siamo ricondotti a studiare il seguente problema

$$\sum_{i=1}^{NE+1} \sum_{j=1}^{NE+1} U_i \bar{K}_{ij} V_j = \sum_{j=1}^{NE+1} F_j V_j \quad \forall V_j$$

in forma compatta

$$U^t \bar{K} V = F V \quad \forall V \Rightarrow \boxed{\bar{K} U = F}$$

$$\text{dove } \bar{K} = \bigwedge_{e=1}^{NE} \bar{K}^e, \quad F = \bigwedge_{e=1}^{NE} F^e$$

Passo successivo: calcolare

- i contributi delle matrici di rigidezza elementare  $K^e$  e  $M^e$  il cui termini generici sono (per ogni  $i, j = 1, NE + 1$ )
  - $K_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} E A \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx$  matrice di rigidezza elastica
  - $M_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} k \phi_i(x) \phi_j(x) dx$  (matrice delle masse ove presente)
- i carichi nodali elementari
 
$$F_j^e := \int_{x_1^e}^{x_2^e} q(x) \phi_j(x) dx \text{ per ogni } j = 1, NE + 1$$



## Proprietà delle funzioni approssimanti

La funzione approssimante deve soddisfare delle condizioni precise affinché converga alla soluzione esatta all'aumentare del numero di elementi finiti (J.N. Reddy, An introduction to the finite element method, Mc-Graw-Hill).

- 1 la soluzione approssimante deve essere **continua sull'elemento e sufficientemente regolare** da potere essere usata nella forma debole del problema  $\Rightarrow$  la matrice di rigidezza ha coefficienti non nulli
- 2 il polinomio approssimante deve essere un **polinomio completo**, ovvero deve includere tutti i termini dal termine con esponente più basso a quelli con esponente più elevato (e.g.  $1, x, x^2, x^3, \dots, x^{p-1}, x^p$ )  $\Rightarrow$  cattura tutte le possibili soluzioni: costante, lineare, etc.
- 3 deve **interpolare i valori nodali delle variabili primarie** (spostamenti nel nostro caso, ma possono essere anche rotazioni o stress nei modelli misti)  $\Rightarrow$  vengono soddisfatte le condizioni al contorno essenziali dell'elemento e si garantisce la compatibilità all'inter-elemento

# Elementi finiti monodimensionali

**Lagrangiani** gli elementi finiti Lagrangiani descrivono la cinematica di un'asta; casi particolari che vedremo in dettaglio sono

- elementi lineari che coincidono con gli elementi *bar* precedentemente visti in analisi matriciale
- elementi quadratici

**Hermitiani** gli elementi finiti Hermitiani descrivono la cinematica di una trave; casi particolari che vedremo in dettaglio quelli del primo ordine che coincidono con gli elementi *beam* visti in analisi matriciale

Le funzioni di forma  $\phi(x)$  possono essere definite nel sistema di riferimento globale oppure nel sistema di riferimento naturale.

# Funzioni di approssimazione lineari

Consideriamo prima il caso più semplice di funzioni di approssimazione: il caso lineare (vedi figura)

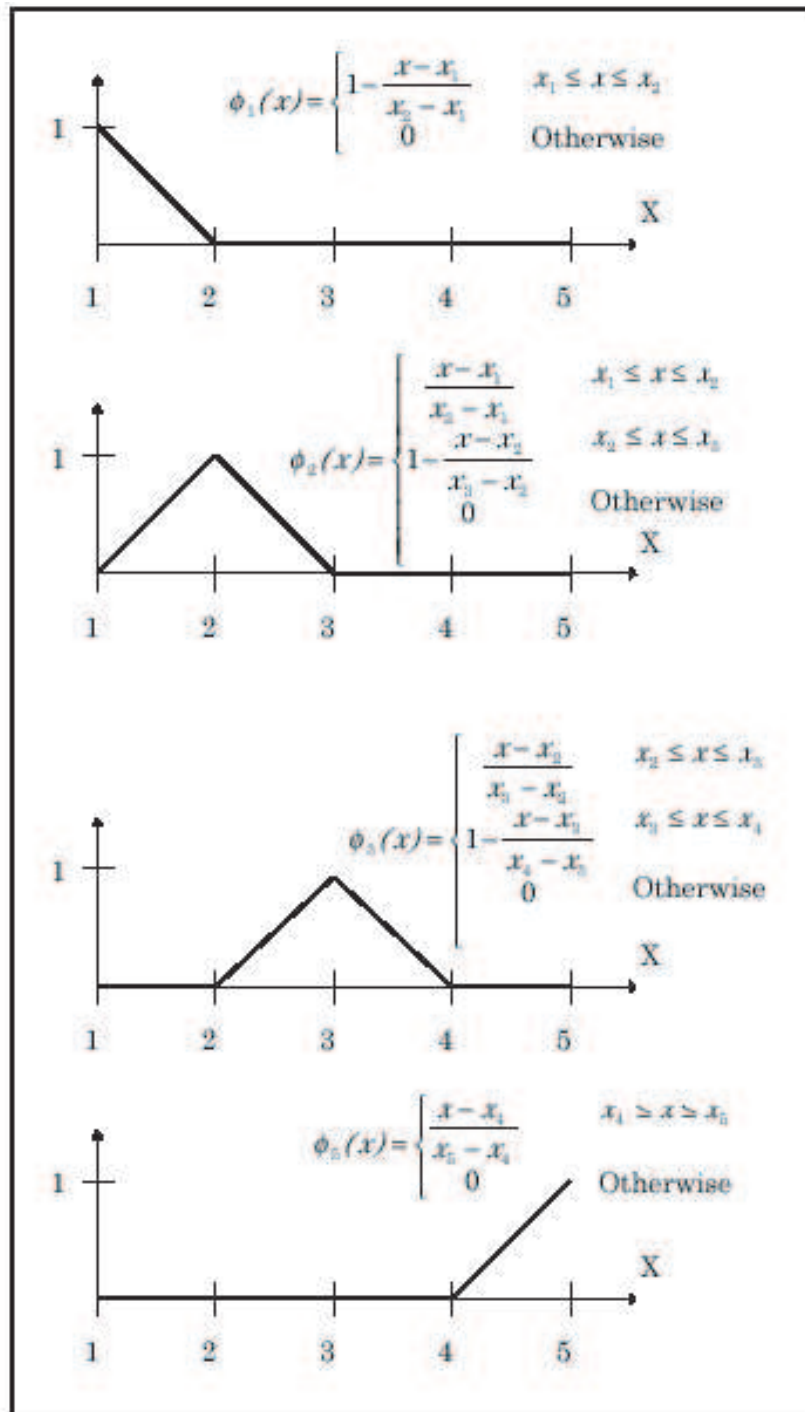
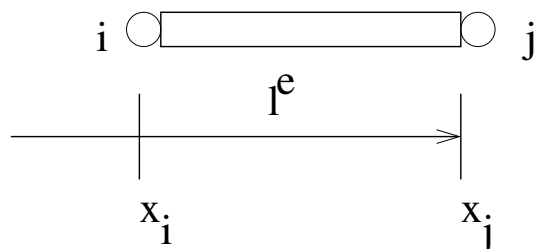


Figure 4-2: Hat functions (Node 4 skipped)

## Elementi asta lineari

Si assuma un campo di spostamenti  $u$  lineare del tipo


$$u(x) = c_1 + c_2 x$$
$$\text{con } x \in [x_i, x_j]$$

vogliamo determinare  $c_1$  e  $c_2$  tali che:

$u = U_i$  in  $x = x_i$ ,  $u = U_j$  in  $x = x_j$ :

$$U_i = c_1 + c_2 x_i, \quad U_j = c_1 + c_2 x_j$$
$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_j - x_i} \begin{bmatrix} x_j & -x_i \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ U_j \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= \frac{x_j U_i}{x_j - x_i} - \frac{x_i U_j}{x_j - x_i} \\ c_2 &= \frac{-U_i}{x_j - x_i} + \frac{U_j}{x_j - x_i} \end{aligned}$$
$$\Rightarrow u(x) = \frac{x_j U_i - x_i U_j}{x_j - x_i} + \frac{x(U_j - U_i)}{x_j - x_i}$$
$$\Rightarrow u(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} U_i + \frac{x - x_i}{x_j - x_i} U_j$$

$$\Rightarrow u(x) = \phi_i(x) U_i + \phi_j(x) U_j$$

dove le funzioni di forma (shape functions) sono:

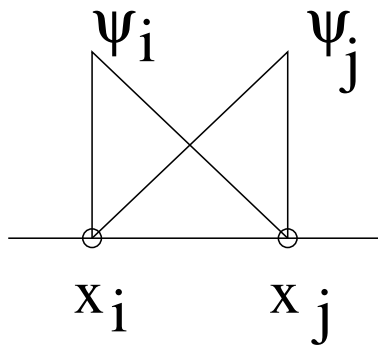
$$\phi_i = \frac{x_j - x}{x_j - x_i}, \quad \phi_j = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Oss: Abbiamo così espresso il campo di spostamento come una funzione lineare degli spostamenti nodali  $U_i, U_j$

## Rappresentazione in coordinate naturali

In alternativa, le funzioni di forma possono essere espresse nel sistema di coordinate naturali  $\xi \in [-1, 1]$  tale che:

$$x = \frac{x_j - x_i}{2}\xi + \frac{x_j + x_i}{2}$$



$$\psi_i = \frac{1 - \xi}{2}$$

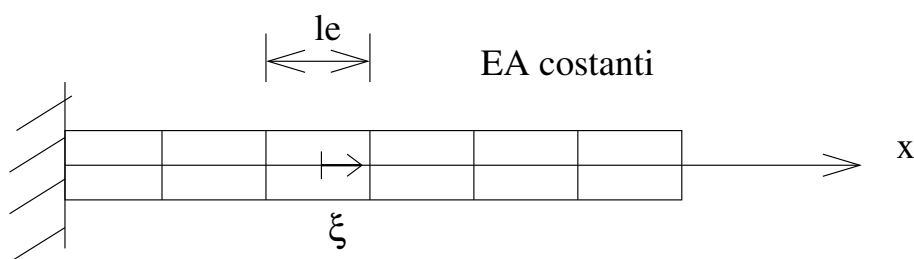
$$\psi_j = \frac{1 + \xi}{2}$$

$$u(\xi) = \psi_i(\xi)U_i + \psi_j(\xi)U_j$$

Si osservi che la trasformazione di coordinate si può anche scrivere come

$$x = \psi_i(\xi)x_i + \psi_j(\xi)x_j$$

## Esempio: Asta a sezione costante



coordinata  $x$

$$x = x_i \frac{1 - \xi}{2} + x_{i+1} \frac{1 + \xi}{2} \quad (16)$$

coordinata naturale

$$\xi = \frac{2x}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} + x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (17)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\psi}{d\xi} \frac{2}{x_{i+1} - x_i} \quad (18)$$

da cui lo jacobiano

$$J^{-1} = \frac{2}{x_{i+1} - x_i} = \frac{2}{l^e} \quad (19)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} EA \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx = \frac{2EA}{l_e} \int_{-1}^{+1} \frac{d\psi_i}{d\xi} \frac{d\psi_j}{d\xi} d\xi$$

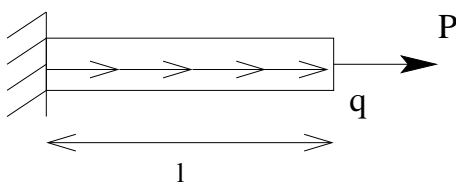
$$K_{11}^e = \frac{2EA}{l^e} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} d\xi = \frac{EA}{l^e}$$

$$K_{12}^e = K_{21}^e = \frac{2EA}{l^e} \int_{-1}^{+1} -\frac{1}{4} d\xi = -\frac{EA}{l^e}$$

$$K_{22}^e = \frac{2EA}{l^e} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} d\xi = \frac{EA}{l^e}$$

$$K = \frac{EA}{l^e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e' la matrice di  
rigidezza "esatta"  
dell'elemento asta!

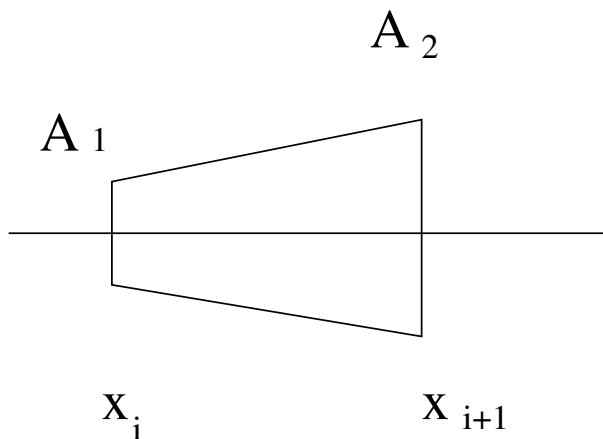


Vettore dei carichi  
nodali

$$F_1 = \frac{l^e}{2} \int_{-1}^1 \psi_1(\xi) q d\xi = \frac{l^e}{2} \int_{-1}^1 \frac{1-\xi}{2} q d\xi = \frac{ql^e}{2}$$

$$F_2 = \frac{l^e}{2} \int_{-1}^1 \psi_2(\xi) q d\xi = \frac{l^e}{2} \int_{-1}^1 \frac{1+\xi}{2} q d\xi = \frac{ql^e}{2}$$

## Esempio: Asta a sezione variabile



$$K_{ij}^e = \frac{2}{l^e} \int_{-1}^1 E A(\xi) \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{d\xi} dx \quad (20)$$

dove

$$A(\xi) = A_1 \frac{1-\xi}{2} + A_2 \frac{1+\xi}{2} \quad (21)$$

La matrice di rigidezza diventa:

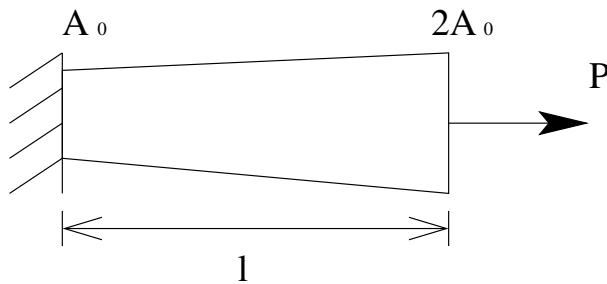
$$K^e = \frac{E(A_1 + A_2)}{2l^e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Otengo la matrice di rigidezza approssimata



## Asta a sezione variabile

Soluzione esatta



$$A(x) = A_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right)$$
$$\frac{d}{dx}(E(x)A(x)u') = 0$$

(poniamo  $l = 1$ ):

$$EA(x) \frac{du(x)}{dx} = \text{costante} = c_1$$
$$\Rightarrow \frac{du(x)}{dx} = \frac{c_1}{EA_0(1+x)}$$

Tenendo conto delle condizioni al contorno,  $u(x)$  esatta e':

$$u(x) = \frac{P}{EA_0} \ln \frac{EA(x)}{EA_0}$$

lo spostamento in  $x = l$  e':

$$u(l) = \frac{P}{EA_0} \ln 2 = \frac{P}{EA_0} 0.693147$$

## soluzione approssimata

- 1 elemento finito

$$\frac{E(A_1 + A_2)}{2l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix}$$

$$U(l) = \frac{Pl}{E} \frac{2}{A_1 + A_2} = 0.6 \frac{Pl}{EA_0}$$

- 2 elementi finiti

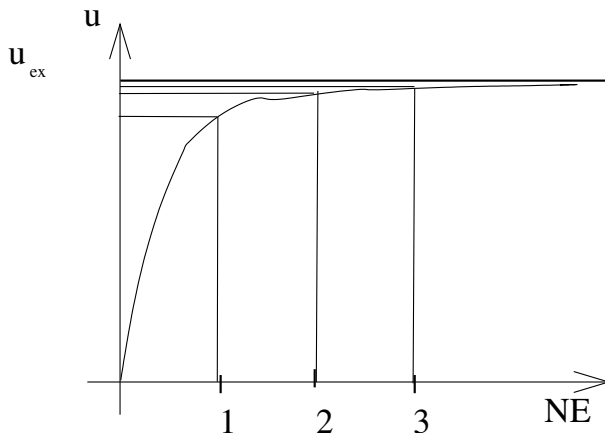
$$U(l) = 0.686 \frac{Pl}{EA_0}$$

- 3 elementi finiti

$$U(l) = 0.690 \frac{Pl}{EA_0}$$

## $h$ – e $p$ – convergenza

- $h$ -convergenza: si raffittisce la mesh, aumento il numero di elementi finiti



all'aumentare del numero di elementi finiti, la soluzione approx converge dal basso

Dimostriamo che la soluzione approssimata  $u^h$  è più rigida di quella esatta  $u^{ex}$ , ovvero che  $u^h$  approssima  $u^{ex}$  dal basso  $u^h < u^{ex}$ .

Si supponga di essere in presenza di un carico concentrato  $P$ , per cui l'EPT diventa

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - Pu$$

In base al Teorema di Clapeyron, si ha che il potenziale elastico  $\frac{1}{2}a(u, u) = \frac{1}{2}Pu$ , quindi

$$\Pi^{ex} = -\frac{1}{2}Pu^{ex}, \text{ ed inoltre } \Pi^h = -\frac{1}{2}Pu^h$$

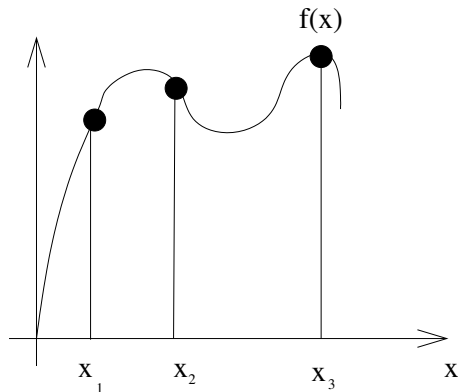
Poiche' la soluzione esatta rende minimo il potenziale, segue che

$$\Pi^h = -\frac{1}{2}Pu^h \geq \Pi^{ex} = -\frac{1}{2}Pu^{ex}$$

ma questo è vero se e solo se  $\Rightarrow u^h \leq u^{ex}$  (c.v.d.)

- $p$ -convergenza: si ricorre a funzioni di interpolazioni polinomiali di ordine  $p$  e si cresce l'ordine  $p$

# Famiglia di interpolazioni Lagrangiana per l'elemento asta



Elementi finiti con  
funzione di base e di  
forma polinomiale a  
tratti

$$u(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots + c_{p+1}x^p \quad (23)$$

tale che:

$$u(x_1) = c_1 + c_2x_1 + c_3x_1^2 + \dots + c_{p+1}x_1^p = U_1$$

$$u(x_2) = c_1 + c_2x_2 + c_3x_2^2 + \dots + c_{p+1}x_2^p = U_2$$

$$u(x_3) = c_1 + c_2x_3 + c_3x_3^2 + \dots + c_{p+1}x_3^p = U_3$$

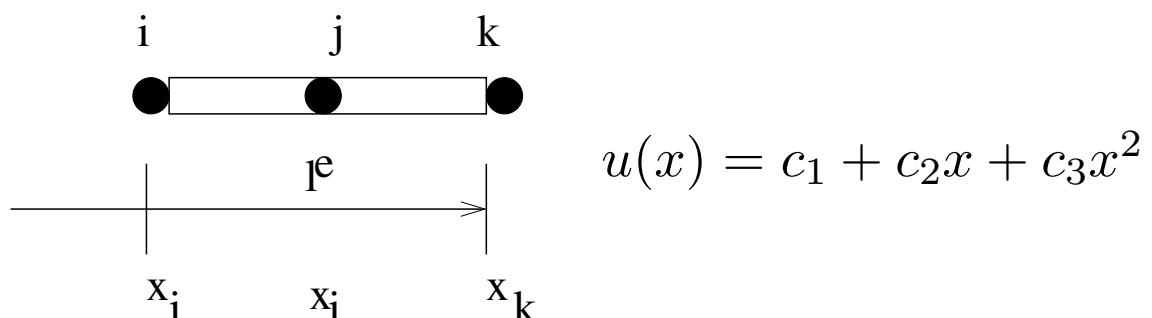
...

dove:  $U_i$  con  $i = 1, \dots, p$  sono i gradi di libert  dei nodi

Casi particolari sono gli elementi Lagrangiani lineari appena visti e gli elementi Lagrangiani quadratici

## Elementi Lagrangiani quadratici

Si approssima lo spostamento attraverso una funzione quadratica di  $x$  che interpola gli spostamenti nodali; poichè occorrono 3 condizioni per determinare l'espressione analitica di una parabola, l'elemento Lagrangiano quadratico consta di 3 nodi


$$u(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$$
$$\begin{aligned} u(x_i) &= c_1 + c_2x_i + c_3x_i^2 = U_i \\ u(x_k) &= c_1 + c_2x_k + c_3x_k^2 = U_k \\ u(x_j) &= c_1 + c_2x_j + c_3x_j^2 = U_j \end{aligned}$$

ovvero:

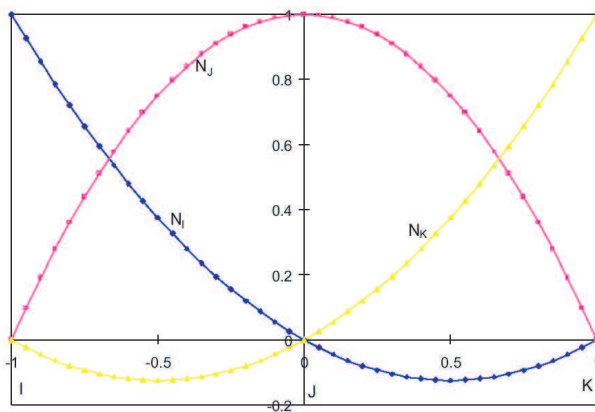
$$\begin{pmatrix} 1 & x_i & x_i^2 \\ 1 & x_k & x_k^2 \\ 1 & x_j & x_j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_i \\ U_k \\ U_j \end{pmatrix}$$

Il campo di spostamenti si esprime in funzione degli spostamenti nodali  $U_i, U_k, U_j$  come:

$$u(x) = \phi_i(x)U_i + \phi_k(x)U_k + \phi_j(x)U_j$$

oppure in funzione delle coordinate intrinseche  $\xi$

$$u(\xi) = \psi_i(\xi)U_i + \psi_k(\xi)U_k + \psi_j(\xi)U_j$$



$$\psi_i(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

$$\psi_j(\xi) = 1 - \xi^2$$

$$\psi_k(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$

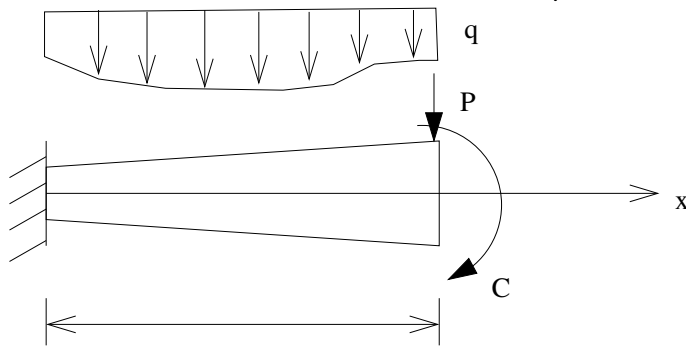
Nota che:

$$\psi_i(-1) = \psi_k(0) = \psi_j(1) = 1$$

OSS: La soluzione dell'asta incastrata a sezione variabile con 1 EF quadratico  $u(l) = 0.692307$ , l'approssimazione e' migliore di quella che otterrei con 2 EF lineari, a parita' di numero di variabili

# Trave di Eulero Bernoulli

Nella teoria della trave di Eulero-Bernoulli, si suppone che la sezione trasversale ruotando rimanga piana e normale all'asse dopo la deformazione; la rotazione della sezione trasversale  $\varphi$  viene allora assunta pari alla derivata dello spostamento verticale  $w$  rispetto alla coordinata assiale,  $\varphi = -dw/dx$



Si scriva l'equilibrio del concio di trave di E-B

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( E(x) J(x) \frac{dw}{dx} \right) = q(x) \quad 0 < x < l$$

cui corrisponde la forma debole, assumendo uno spostamento virtuale  $v \in \mathbb{V}$  ammissibile

$$\int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \left( E(x) J(x) \frac{dw}{dx} \right) v(x) dx = \int_0^l q(x) v(x) dx$$

Si applichi la regola di integrazione per parti due volte all' integrale al primo membro

$$\begin{aligned}
 \int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) v(x) dx = \\
 - \int_0^l \frac{d}{dx} \left( EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \frac{dv}{dx} dx + \left[ \frac{d}{dx} \left( EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) v(x) \right]_0^l = \\
 \int_0^l EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx - \left[ EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{dv}{dx} \right]_0^l \\
 + \left[ \frac{d}{dx} \left( EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) v(x) \right]_0^l
 \end{aligned}$$

*Si osservi che la doppia integrazione per parti mette in evidenza le 4 condizioni al contorno: 2 essenziali sugli spostamenti e sulle rotazioni e 2 condizioni naturali sulle forze e sui momenti al bordo*



Identifichiamo con  $a(w, v)$  il lavoro virtuale interno  $L_{vi}$ :

$$a(w, v) = \int_0^l EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx$$

Il lavoro virtuale esterno  $L_{ve} = l(v)$  diventa

$$\begin{aligned} l(v) &= \int_0^l q(x)v(x) dx + \left[ EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{dv}{dx} \right]_0^l - \\ &\quad \left[ \frac{d}{dx} \left( EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) v(x) \right]_0^l \\ &= \int_0^l q(x)v(x) dx + \left[ (-M)(-\varphi) \right]_0^l - \left[ (-T) v \right]_0^l \end{aligned}$$

dove le relazioni costitutive  $M = -EJ d^2 w / dx^2$ ,  $T = -EJ d^3 w / dx^3$ , e la rotazione  $\varphi = -dv / dx$ .

In questo caso

$$l(v) = \int_0^l q(x)v(x) dx + C\varphi(l) + Pv(l)$$

Pertanto abbiamo ritrovato il principio dei lavori virtuali

$$a(w, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (24)$$

## Approssimazione agli elementi finiti

Consideriamo le approssimazioni  $w^h$  e  $v^h$  dei campi di spostamento  $w$  e  $v$  in funzione degli spostamenti nodali  $U_i$  e  $V_j$

$$w^h = \sum_{i=1}^{NE+1} \phi_i(x) U_i, \quad v^h = \sum_{j=1}^{NE+1} \phi_j(x) V_j$$

Sostituiamo in  $a(w, v)$ :

$$a(w^h, v^h) = a\left(\sum_{i=1}^{NE+1} \phi_i(x) U_i, \sum_{j=1}^{NE+1} \phi_j(x) V_j\right) \text{ ovvero}$$

$$L_{vi} = \int_0^l EJ \frac{d^2}{dx^2} \left( \sum_{i=1}^{NE+1} \phi_i(x) U_i \right) \frac{d^2}{dx^2} \left( \sum_{j=1}^{NE+1} \phi_j(x) V_j \right) dx$$

$$L_{vi} = \int_0^l EJ \sum_{i=1}^{NE+1} \sum_{j=1}^{NE+1} U_i \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} V_j dx$$

$$L_{vi} = \sum_{i=1}^{NE+1} \sum_{j=1}^{NE+1} U_i V_j \int_0^l EJ \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx$$

In notazione compatta si ha:

$$L_{vi} = \sum_{i=1}^{NE+1} \sum_{j=1}^{NE+1} U_i K_{ij} V_j$$

dove  $K$  ha come componente generica il termine  $K_{ij}$ ,  $i, j = 1, NE + 1$

$$K_{ij} = \int_0^l EJ \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx$$

La matrice  $K$  risulta dall'assemblaggio delle matrici elementari  $K^e$ ,

$$K = \bigwedge_{e=1}^{NE} K^e$$

il cui termine generico  $K_{ij}^e$  si calcola come

$$K_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} E(x) J(x) \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx$$

Il passo successivo consiste nel calcolare le matrici di rigidezza elementari  $K^e$ .

Analogamente si dimostra che il **vettore dei carichi nodali equivalenti**  $F$  deriva dall'assemblaggio dei carichi nodali equivalenti elementari  $F^e$ . Ogni vettore  $F^e$  ha come componente  $j$ -esima con  $j = 1, NE + 1$

$$F_j^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} q(x) \phi_j(x) dx$$

- Il lavoro esterno si esprime come

$$L_{ve} = \sum_{j=1}^{NE+1} F_j V_j$$

- Il lavoro interno si esprime come

$$L_{vi} = \sum_{i=1}^{NE+1} \sum_{j=1}^{NE+1} U_i K_{ij} V_j$$

la forma debole del problema diventa

$$\sum_{i=1}^{NE+1} \sum_{j=1}^{NE+1} U_i K_{ij} V_j = \sum_{j=1}^{NE+1} F_j V_j \text{ che vale } \forall V_j \in \mathbb{V}$$

pertanto, si può scrivere

$$U^t K V = F V \quad \forall V \in \mathbb{V},$$

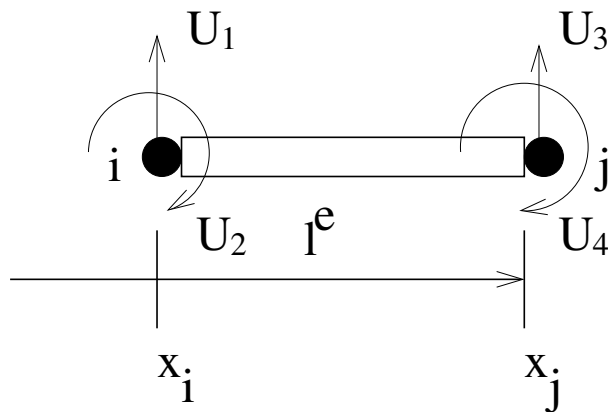
Quindi, l'equazione risolutiva diventa:

$$K U = F$$

Per risolvere il problema  $KU = F$ , occorre pertanto conoscere le matrici di rigidezza elementare  $K^e$  ed i vettori di carico nodale equivalente  $F^e$

Si osservi che nel vettore dei carichi nodali  $F$  abbiamo convogliato sia i vettori dei carichi nodali equivalenti che i carichi nodali esterni applicati.

## Famiglia di interpolazione di Hermite per la trave di E-B



Si cerca il polinomio cubico (vedi deformata flessionale linea elastica) che approssima il campo di spostamento

$$u(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 \quad (25)$$

tali che i valori ai nodi siano gli spostamenti nodali e che le derivate ai nodi siano le rotazioni della trave (trascuriamo la def. assiale):

$$\begin{aligned} v(x_i) &= U_1 & -v'(x_i) &= U_2 \\ v(x_j) &= U_3 & -v'(x_j) &= U_4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 \\ 0 & -1 & -2x_i & -3x_i^2 \\ 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 & x_{i+1}^3 \\ 0 & -1 & -2x_{i+1} & -3x_{i+1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix}$$

interpoliamo spostamenti e rotazioni nodali

$$u(x) = U_1\phi_1(x) + U_2\phi_2(x) + U_3\phi_3(x) + U_4\phi_4(x)$$

Le funzioni di interpolazione si possono esprimere in funzione della coordinata locale elementare  $\bar{x} \in [0, l^e]$

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{l^e}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{l^e}\right)^3, \phi_2 = -\bar{x}\left(1 - \frac{\bar{x}}{l^e}\right)^2, \\ \phi_3 &= 3\left(\frac{\bar{x}}{l^e}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{l^e}\right)^3, \phi_4 = -\bar{x}\left[\left(\frac{\bar{x}}{l^e}\right)^2 - \frac{\bar{x}}{l^e}\right]\end{aligned}$$

Le funzioni  $\phi$  vengono chiamate funzioni di interpolazioni cubiche di Hermite (cubic splines), sono tali che:

$$\begin{aligned}\phi_1(x_i) &= 1, \quad \phi_h(x_i) = 0 \quad \text{con } h \neq 1 \\ \phi_3(x_j) &= 1, \quad \phi_h(x_j) = 0 \quad \text{con } h \neq 3 \\ -\frac{d\phi_2}{dx}\bigg|_{x_i} &= 1, \quad -\frac{d\phi_h}{dx}\bigg|_{x_i} = 0 \quad \text{con } h \neq 2 \\ -\frac{d\phi_4}{dx}\bigg|_{x_j} &= 1, \quad -\frac{d\phi_h}{dx}\bigg|_{x_j} = 0 \quad \text{con } h \neq 4\end{aligned}$$

## Osservazioni

- *Si noti che le funzioni di interpolazione cubiche sono ottenute interpolando  $w$  e le sue derivate ai nodi. Questi polinomi sono noti come polinomi di Hermite o cubic splines.*
- *Si ricorda che le funzioni di interpolazione Lagrangiane sono concepite per interpolare i valori degli spostamenti nodali ma non le derivate ai nodi (rotazioni). Quindi un elemento Lagrangiano cubico ha 4 nodi e 4 spostamenti nodali. Esso non può essere impiegato per approssimare la deformata flessionale di una trave di E-B, in quanto la condizione di continuità della derivata dello spostamento richiesta dalla forma debole del problema non verrebbe soddisfatta, in pratica non soddisfa la condizione di continuità della rotazione all'inter-elemento.*
- *Si ricorda che la matrice delle masse  $M$  nella trave su suolo elastico alla Winkler può essere approssimata assumendo per spostamenti e rotazioni le funzioni di interpolazioni Hermitiane*

## Matrice di rigidezza

Ricordiamo che

$$K_{ij}^e = \int_{x_i}^{x_j} EJ \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx$$
$$F_i^e = \int_{x_i}^{x_j} \phi(x) q(x) dx + Q_i^e$$

Con le funzioni di interpolazione hermitiane si ottiene la matrice di rigidezza dell'elemento beam dell' analisi matriciale

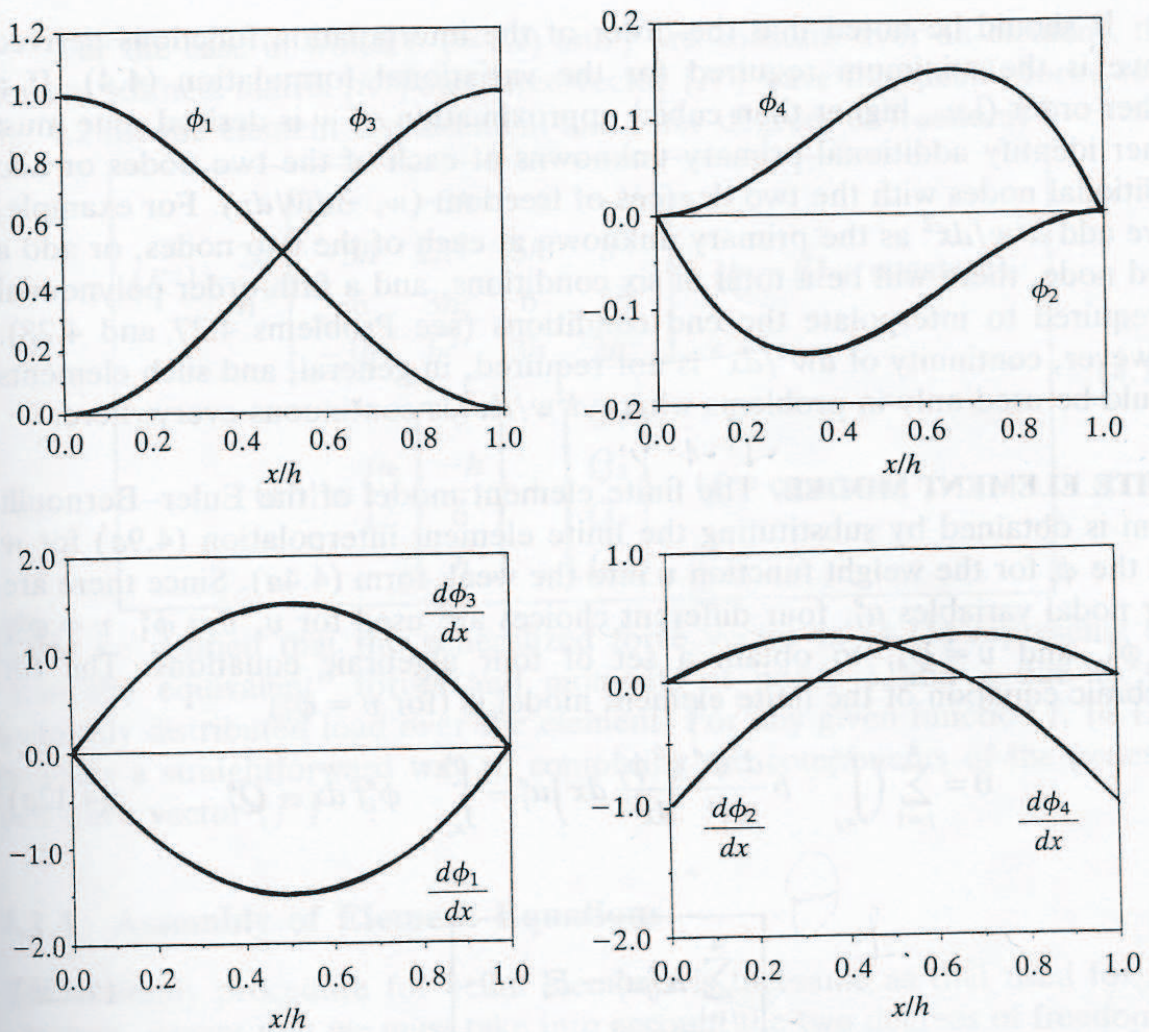
$$K^e = \frac{EJ}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l_e & -12 & -6l_e \\ -6l_e & 4l_e^2 & 6l_e & 2l_e \\ -12 & 6l_e & 12 & 6l_e \\ -6l_e & 2l_e^2 & 6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

ed il vettore dei carichi nodali equivalenti dell'elemento beam

$$F^e = \begin{bmatrix} -ql_e/2 \\ ql_e^2/12 \\ -ql_e/2 \\ -ql_e^2/12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}$$



Si osservi che le funzioni di interpolazione della splines cubiche rappresentano le deformate flessionali di una trave incastro-incastro in cui si faccia avvenire uno spostamento nodale per volta



**FIGURE 4.3**

Hermite cubic interpolation functions and their first derivatives used in the finite element model of Euler-Bernoulli beam theory.