

## Fondazioni su suolo elastico

Da Lancillotta, Zanichelli , 1987, pag. 494:

*Le fondazioni sono elementi strutturali che hanno il compito di trasferire i carichi al terreno.*

*Poichè la resistenza dei terreni sciolti è sensibilmente inferiore a quella dei materiali costituenti la struttura, l'area di impronta delle fondazioni risulta superiore a quella dei pilastri o delle pareti portanti.*

*Inoltre, la necessità di contenere le deformazioni della struttura richiede che le fondazioni siano elementi rigidi. Ne consegue che si tratta, in generale, di elementi tridimensionali marcatamente iperstatici, per i quali é particolarmente difficile perseguire un calcolo rigoroso, anche a causa delle incertezze derivanti dall'individuazione della distribuzione delle pressioni di contatto.*

*Il tipo di fondazione da adottare -plinto, trave continua, graticcio di travi, platea- e' determinato dal valore della pressione media ammissibile sul terreno.*

*Tale valore è condizionato sia dall'esigenza di avere adeguati margini di sicurezza nei riguardi della pressione di collasso, sia dalla necessità di limitare i cedimenti.*

*Successivamente, l'analisi dell'interazione tra la struttura ed il terreno porta a definire la rigidità da assegnare all'elemento strutturale sia per limitare i cedimenti differenziali, sia per resistere alle sollecitazioni indotte dalle azioni ad esso applicate.*

# Plinti isolati

Da un punto di vista statico, i plinti possono considerarsi delle piastre caricate verso l'alto dalle pressioni di contatto che equilibrano il carico trasmesso dal pilastro.

*Un calcolo rigoroso delle sollecitazioni indotte nell'elemento strutturale e' decisamente complesso*

- *sia perchè si tratta di un problema tridimensionale*
- *sia per le incertezze riguardanti le pressioni di contatto*

⇒ Si adottano schemi di calcolo semplificati.

Si ricorda che l'esatta distribuzione delle pressioni di contatto dipende sostanzialmente dalla rigidezza relativa tra terreno e fondazione nonchè dalla intensità del carico applicato.

Nel caso di una fondazione circolare rigida poggiante su un mezzo elastico, la condizione di cedimento uniforme ⇒ una distribuzione di reazioni del terreno che va da un minimo pari a  $q_m/2$  sotto l'asse, ad un valore infinito ai bordi.

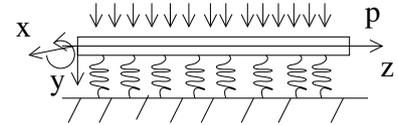
Poiche' il terreno ha una resistenza finita, l'insorgere di zone di plasticizzazione ai bordi della fondazione limita il valore di tali pressioni e ne modifica la distribuzione fino a renderla pressochè uniforme nell'istante in cui il carico applicato eguaglia il valore limite corrispondente alla capacità portante del terreno.

Nel caso di una fondazione poggiante su terreno sabbioso, la condizione di plasticizzazione ai bordi della fondazione viene raggiunta anche per carichi modesti, per cui si ha un andamento parabolico che va da un valore nullo alle estremità ad un valore massimo in corrispondenza del centro.

*Anche se, le pressioni di contatto hanno in realtà una distribuzione che è significativamente diversa da quella uniforme normalmente ipotizzata nella pratica corrente. Nella pratica progettuale, il momento massimo differisce non più di un 33% rispetto al valore calcolato nell'ipotesi di distribuzione uniforme, e la differenza si riduce al 20% qualora si tenga conto dei fenomeni di plasticizzazione*

## Travi su suolo elastico

L'analisi del comportamento di una trave di fondazione richiede lo studio dell'interazione tra la trave stessa, la struttura in elevazione ed il terreno sottostante.



Le incognite del problema non sono costituite unicamente dalle reazioni che il terreno trasmette alla trave, bensì anche dalla mutue azioni che la struttura e la trave si scambiano alla base dei piedritti. Se il cedimento del terreno in un punto di ascissa  $z$  dovuto ad una forza unitaria  $R$  applicata in  $\zeta$  vale  $\delta$ , l'abbassamento prodotto da un carico elementare vale

$$dv = \delta(z, \zeta) r(\zeta) d\zeta \quad (1)$$

e se si considera la reazione estesa all'intera trave, il cedimento in  $z$  diventa:

$$v(z) = \int_0^L \delta(z, \zeta) r(\zeta) d\zeta$$

L'ipotesi piu' semplice per quanto concerne la struttura del coefficiente  $\delta(z, \zeta)$  e' quella introdotta da Winkler (1867), che vede il suolo come un insieme distribuito di appoggi elastici indipendenti, ognuno caratterizzato da una costante di rigidezza  $k(z)$ .

E' opportuno ricordare che l'ipotesi di suolo alla Winkler può essere utile nell'analisi della struttura ma non nell'analisi dello stato tensionale del terreno, nel qual caso è opportuno utilizzare il modello alla Boussinesq, che vede il terreno come un semispazio infinito elastico.<sup>1</sup>

L' ipotesi del suolo alla Winkler é basata su un legame costitutivo *locale*  $\Rightarrow$  il cedimento  $v(z)$  in  $z$  dipende unicamente dalla pressione  $r(z)$  (Kg/cm<sup>2</sup>) agente nello stesso punto  $z$  ed è indipendente da eventuali forze applicate in altri punti :

$$v(z) = \frac{r(z)}{k(z)} \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Altri modelli di suolo:

- Modello di Filonenko-Borodich, le molle sono collegate tra loro da una membrana elastica soggetta a trazione
- Modello di Pasternak esiste uno strato incomprimibile, resistente solo a taglio, che connette le estremita' superiori delle molle
- Modello di Winkler generalizzato, nei punti di contatto col suolo esistono sia reazioni normali che coppie reagenti

La costante  $k$  di dimensioni  $F/L^3$  viene indicata come *il modulo di reazione del terreno o costante di sottofondo del terreno o di Winkler*.

Si osservi che la costante di Winkler ha dimensioni  $[Kg/cm^3]$  mentre solitamente, i parametri geotecnici misurati dai tecnici (eg modulo edometrico  $E$ ) rappresentano la pressione che si deve applicare al terreno per avere un cedimento unitario  $[Kg/cm^2]$ . Per ottenere la costante di Winkler, esistono formule empiriche, come quella di Vesic in cui occorre dividere  $E$  per il lato minore della base della trave di fondazione.

Pertanto, la reazione  $r(z)$  del terreno nel punto  $z$  ammonta a:

$$r(z) = k(z)v(z),$$

dove  $r(z)$  è un carico per unità di superficie  $[Kg/cm^2]$ . La caratteristica fondamentale del suolo alla Winkler è che gli spostamenti si verificano esclusivamente al di sotto della zona caricata, e ciò rappresenta ovviamente solo una approssimazione. In seguito useremo una costante  $k$  di sottofondo costante

## Confronto tra suolo alla Winkler e suolo alla Boussinesq per una trave infinitamente rigida ed elastica in condizioni di carico elementari

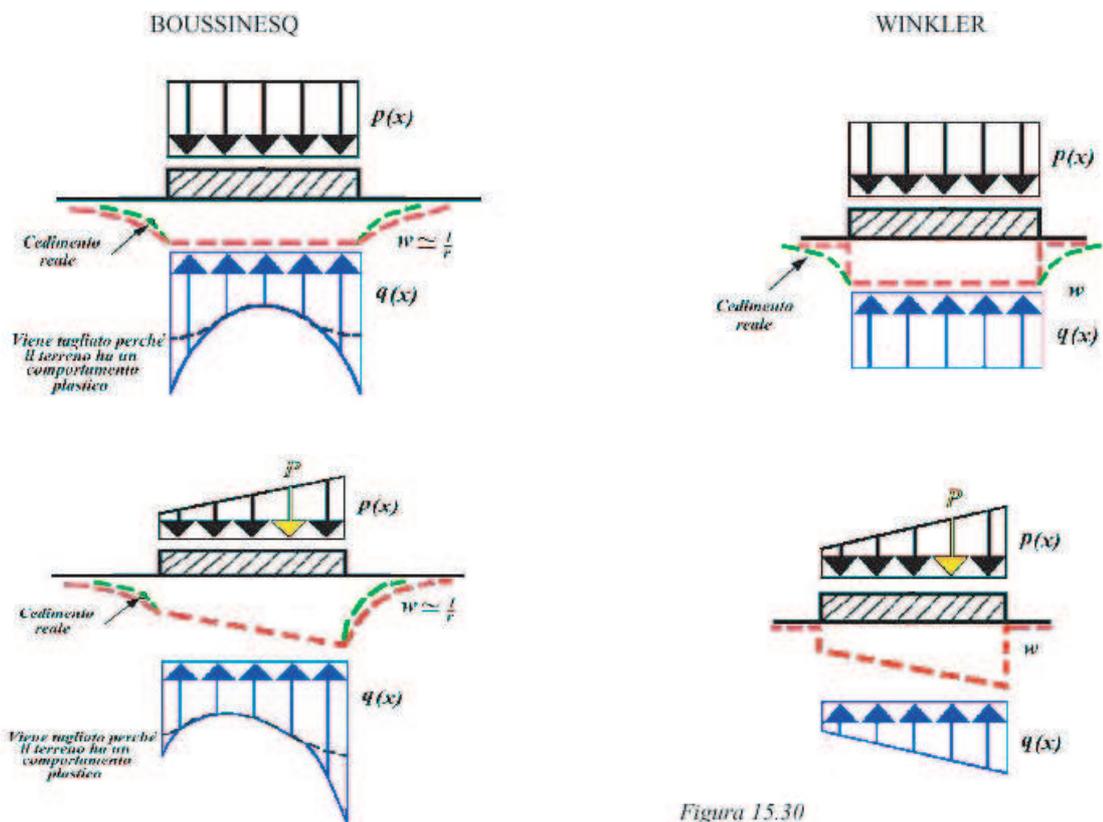
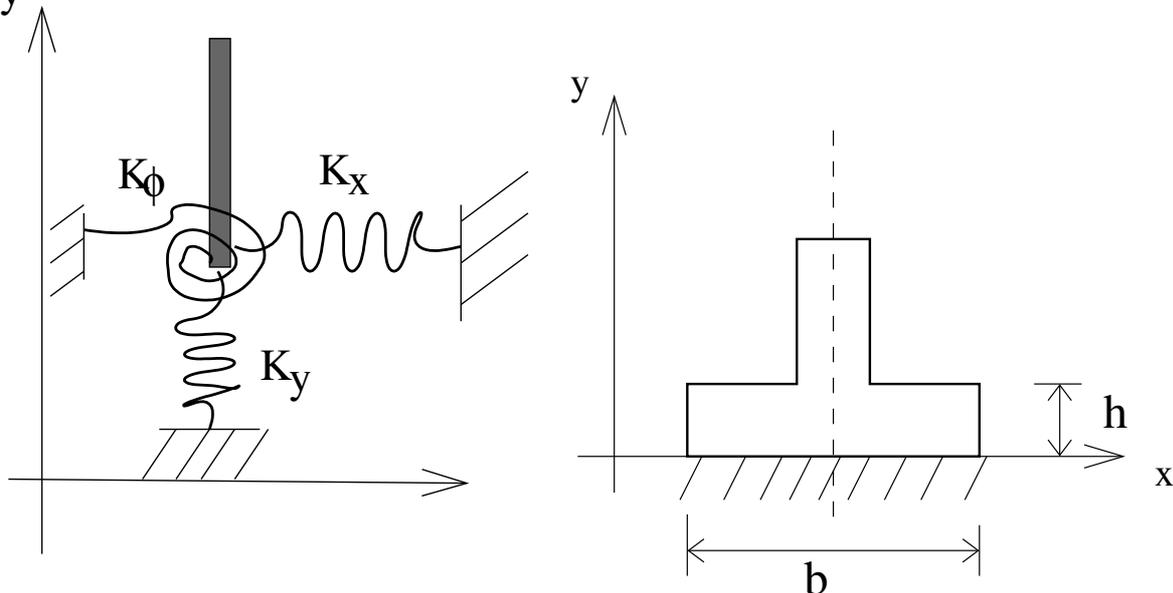


Figura 15.30

## Fondazioni su plinti

Un caso particolare di vincoli cedevoli elasticamente e' rappresentato dai plinti su suolo che reagisce elasticamente con una reazione proporzionale al cedimento

Consideriamo il problema del plinto semplicemente appoggiato su suolo di Winkler



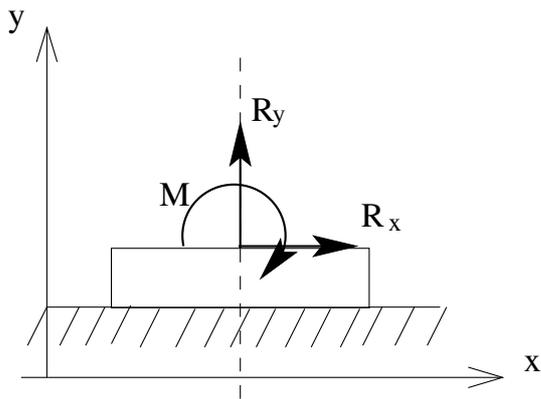
Assegnato un plinto avente area di impronta  $A$  con momento di inerzia della sezione trasversale  $J_z$ , occorre calcolare le rigidezze ad esso equivalenti:  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_\phi$

Oss:

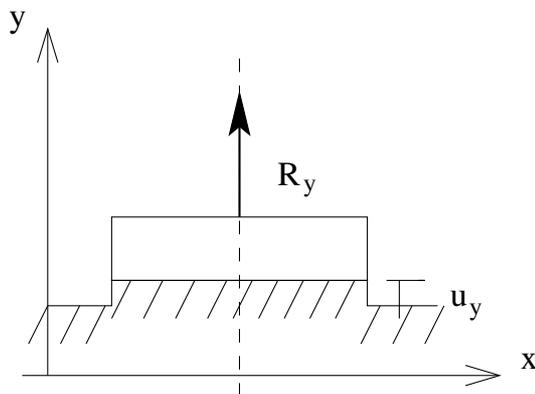
- $K_\perp$ : e' la costante normale di sottofondo,  $[\text{Kg}/\text{L}^3]$
- $K_\parallel$ : costante tangenziale di sottofondo,  $[\text{Kg}/\text{L}^3]$

Per calcolare le rigidezze nel metodo degli spostamenti occorre conoscere la matrice di rigidezza del plinto su suolo elastico

La matrice di rigidezza si ottiene invertendo la matrice di flessibilita'  $C$

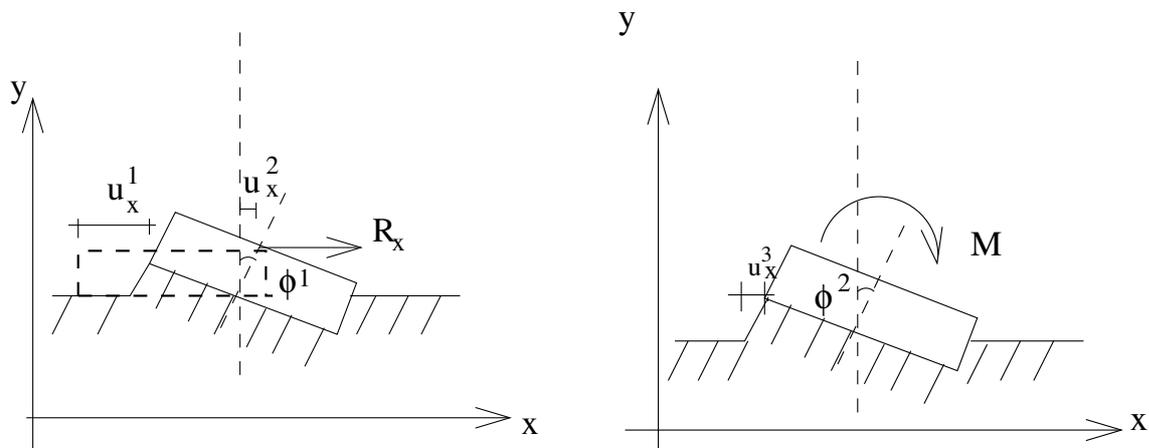


Si procede determinando la risposta del plinto alle azioni  $R_x, R_y, M$ , ovvero la matrice di flessibilita'



$$u_y = \frac{R_y}{K_{\perp} A}$$

OSS:  $R_y$  e' diretta verso l'alto per via del comportamento bilatero del suolo



La rotazione totale  $\phi$  deriva dalla somma della rotazione  $\phi^1$  indotta dal momento  $R_x h$  e della rotazione  $\phi^2$  indotta dal momento  $M$

$$\phi = \phi^1 + \phi^2 = \frac{R_x h}{K_{\perp} J_z} + \frac{M}{K_{\perp} J_z}$$

La traslazione orizzontale deriva dalla somma della traslazione  $u_1$  indotta dalla forza  $R_x$ , e della traslazione indotta dalla rotazione  $\phi$  del plinto<sup>2</sup>

$$u_x = u_x^1 + u_x^2 + u_x^3 = \frac{R_x}{K_{\parallel} A} + \frac{R_x h \cdot h}{K_{\perp} J_z} + \frac{M h}{K_{\perp} J_z}$$

<sup>2</sup>OSS: si suppone che  $K_{\perp} = E_{\perp}/b'$  dove  $b'$  é dimensione minore della base del plinto (Vesic) ed  $E_{\perp}$  rappresenta il modulo del terreno in  $[\text{Kg}/\text{cm}^2]$ .

Sistema risolvete:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{K_{\parallel}A} + \frac{h^2}{K_{\perp}J_z} & 0 & \frac{h}{K_{\perp}J_z} \\ 0 & \frac{1}{K_{\perp}A} & 0 \\ \frac{h}{K_{\perp}J} & 0 & \frac{1}{K_{\perp}J_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ M \end{pmatrix} \quad (3)$$

ovvero

$$U = CR \quad (4)$$

La matrice di rigidezza  $K_p$  si ottiene invertendo la matrice di flessibilita'  $C$

$$\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\parallel}A & 0 & -K_{\parallel}Ah \\ 0 & K_{\perp}A & 0 \\ -K_{\parallel}Ah & 0 & K_{\perp}J_z + K_{\parallel}Ah^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \phi \end{pmatrix}$$

ovvero

$$R = K_p u \quad (5)$$

La matrice

$$K_p = \begin{pmatrix} K_{\parallel}A & 0 & -K_{\parallel}Ah \\ 0 & K_{\perp}A & 0 \\ -K_{\parallel}Ah & 0 & K_{\perp}J_z + K_{\parallel}Ah^2 \end{pmatrix}$$

va aggiunta ai coefficienti di rigidezza relativi all'estremo vincolato del pilastro

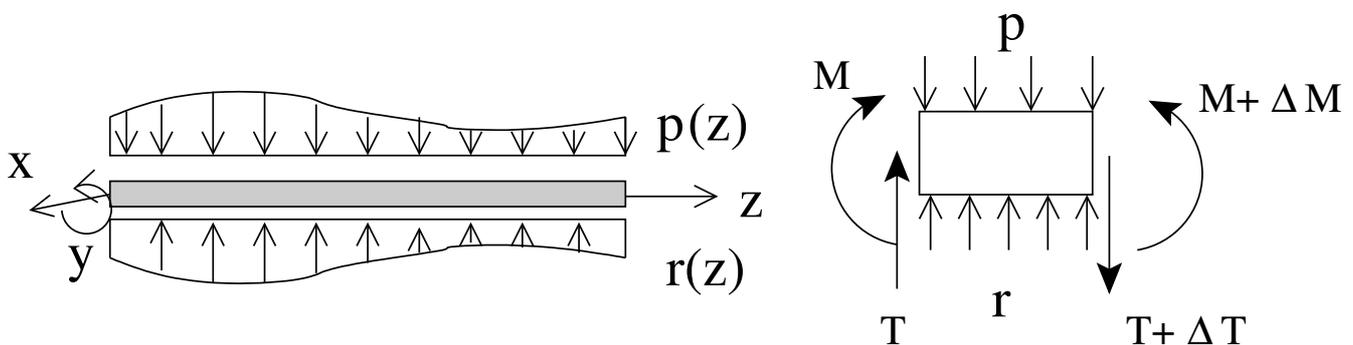
- la matrice  $K_p$  non è diagonale, dunque il suolo **non è equivalente a 3 molle elastiche indipendenti**
- non è possibile assegnare indipendentemente  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_{\phi}$  in modo rigoroso, ma solo la matrice  $K_p$
- tuttavia, poichè, in genere, per effetto dell'attrito, si ha che  $u_x = 0$ , e quindi  $K_{\parallel}A \rightarrow \infty \Rightarrow$  la riga e colonna corrispondente di  $K_p$  si possono eliminare, ovvero si può porre

$$K_y = K_{\perp}A \quad (6)$$

$$K_{\phi} = K_{\perp}J \quad (7)$$

## Trave elastica inflessa

Data una trave su suolo elastico caricata con una distribuzione di carico  $p(z)$  e da una reazione del terreno  $r(z)$ , studiamo l'equilibrio di un concio di trave



Equazioni indefinite di equilibrio:

$$\frac{dT}{dz} + p - r = 0 \quad (8)$$

$$-\frac{dM}{dz} + T = 0 \quad (9)$$

da cui derivando la Eq. (9) e sostituendovi Eq. (8) si ha

$$-\frac{d^2 M}{dz^2} = p - r \quad (10)$$

Sostituendo le equazioni costitutive

- suolo:  $r(z) = kv(z)$ , dove  $k$  e' la pressione indotta su un tratto unitario da uno spostamento unitario
- trave:  $M(z) = -EJ \frac{d^2v}{dz^2}(z)$

nella equazione di equilibrio (10), si ottiene l'equazione di equilibrio della trave inflessa su suolo elastico

$$EJ \frac{d^4v(z)}{dz^4} + kv(z) = p(z)$$

che si trova anche scritta come

$$\frac{d^4v(z)}{dz^4} + 4\alpha^4 v(z) = \frac{p(z)}{EJ}$$

dove si è posto  $\alpha^4 = k/4EJ$

## Matrice di rigidezza

Per ricavare la matrice di rigidezza dell'elemento di trave su suolo elastico basta osservare che l'energia potenziale totale  $\Pi$  della trave e' costituita dalla somma di due termini:

- l'energia di deformazione della trave  $\int_0^l \frac{1}{2} E J \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz$
- l'energia di deformazione del suolo alla Winkler  $\int_0^l \frac{1}{2} k v^2 dz$

$$\begin{aligned} \Pi(v) &= \int_0^l \frac{1}{2} E J \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz + \int_0^l \frac{1}{2} k v^2 dz - L_e = \\ &= \frac{1}{2} U^T K U + \frac{1}{2} U^t M U - U^T F = \\ &= \frac{1}{2} U^T (K + M) U - U^T F \end{aligned} \tag{11}$$

La matrice di rigidezza di trave su suolo elastico diventa:

$$\hat{K} = K + M \tag{12}$$

dove

$$K = \frac{EJ}{l} \begin{pmatrix} 12/l^2 & & & \\ -6/l & 4 & & \\ -12/l^2 & 6/l & 12/l^2 & \\ -6/l & 2 & 6/l & 4 \end{pmatrix}$$

## Matrice $M$

Esaminiamo alcuni metodi per approssimare la matrice dei contributi del suolo alla Winkler  $M$

**Metodo via elementi finiti** in pratica si prende la soluzione  $v$  dell'equazione di equilibrio della trave inflessa e non della trave su suolo elastico  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  un errore, perciò la matrice che si trova è approssimata

Si prendono come funzioni di forma i polinomi interpolanti degli elementi finiti trave (hermitiani)

$$v(z) = \sum_{i=1}^4 \Phi_i(z) U_i$$

dove:  $\Phi_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3,$

$$\Phi_2(\xi) = -l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$$

$$\Phi_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad \Phi_4(\xi) = -l(\xi^3 - \xi^2)$$

Si ottiene che

$$M = \frac{l}{420} \begin{pmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ & & 156 & 22l \\ & & & 4l^2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

**metodo “esatto”** Si usa un elemento finito speciale di trave su suolo elastico basato sulla soluzione dell'equazione omogenea associata alla equazione differenziale del quart'ordine di equilibrio

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + 4\alpha^4 v(z) = 0 \quad (14)$$

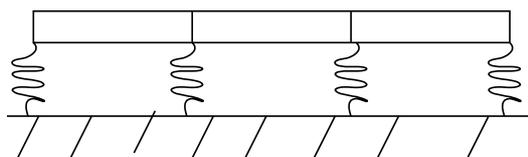
che ha come integrale generale

$$v(z) = \frac{p(z)}{k} + C_1 e^{-\alpha z} \sin \alpha z + C_2 e^{-\alpha z} \cos \alpha z + C_3 e^{-\alpha(l-z)} \sin \alpha(l-z) + C_4 e^{-\alpha(l-z)} \cos \alpha(l-z)$$

dove si impongono le condizioni al contorno cinematiche *essenziali*

$$\text{e.g.: } v(0) = v'(0) = v(l) = v'(l) = 0$$

**metodo lumped** Si suddivide la trave in uno o piu' elementi di trave ordinaria con nodi elasticamente cedevoli (lumped stiffness)



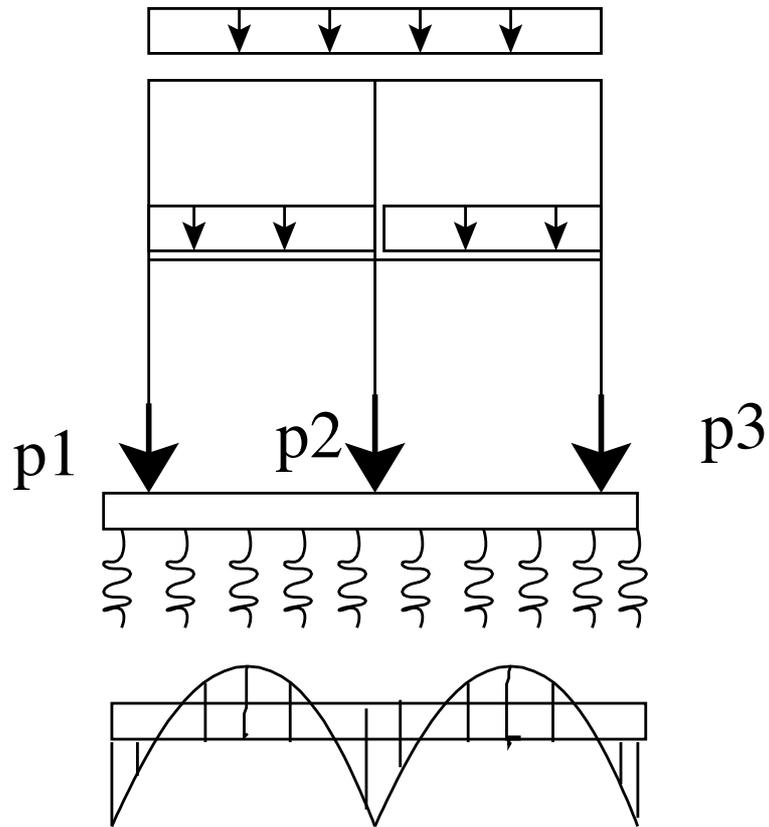
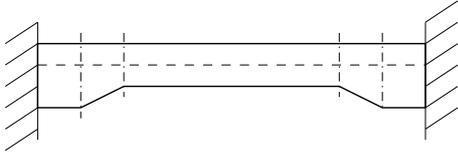


Figure 1: nelle fondazioni, le fibre tese sono sopra e quelle compresse sotto

## Travi a sezione variabile



Alternative:

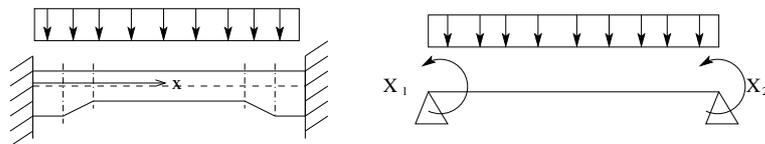
- Si suddivide la trave in elementi finiti di trave ad inerzia  $J$  costante.
- Si considerano le usuali funzioni di forma  $\psi_i$  e si considera  $J(z)$

$$K = \int_0^l B^T(x) E J(x) B(x) dz$$

L'integrale viene calcolato numericamente (Integrazione di Gauss Legendre) e la rigidezza risulta approssimata per eccesso.

- Si introduce un elemento speciale che valuti esattamente i coefficienti di rigidezza attraverso il metodo delle forze Si valutano i coefficienti

$\eta_{ij} = \int_0^l \frac{M_i(x) M_j(x)}{E J(x)} dz$ . Si ottiene per via numerica la matrice di rigidezza.



## Esempio

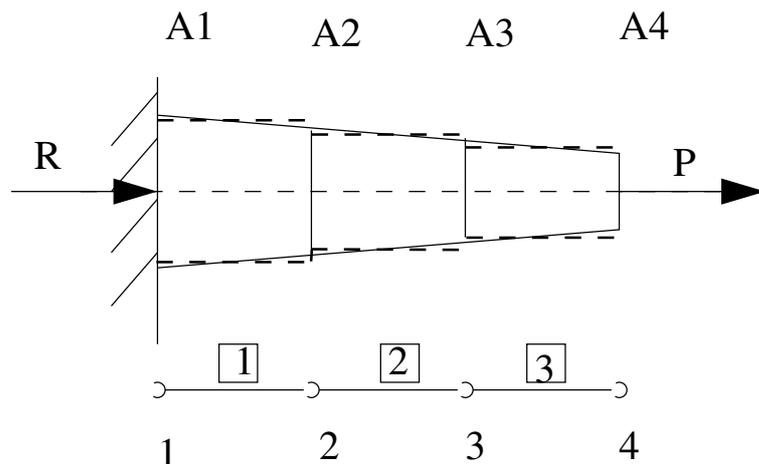


Figure 2: Calcolare gli spostamenti e le tensioni nella barra di lunghezza  $l = 90$  cm con sezione variabile da  $A_1 = 12$  cm<sup>2</sup>, ad  $A_4 = A_1/2$ , soggetta a sforzo normale  $P = 69000$  N e variazioni termiche  $\Delta T = 10$  °C,  $E = 6.7 \cdot 10^6$  N/cm<sup>2</sup>,  $\alpha = 2.3 \cdot 10^{-5}$  C<sup>-1</sup>

$$A^1 = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{12 + 10}{2} = 11 \text{ cm}^2 \quad (15)$$

$$A^2 = \frac{A_2 + A_3}{2} = \frac{10 + 8}{2} = 9 \text{ cm}^2 \quad (16)$$

$$A^3 = \frac{A_3 + A_4}{2} = \frac{8 + 6}{2} = 7 \text{ cm}^2 \quad (17)$$

$$K^e = \frac{E^e A^e}{l^e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad e = 1, 2, 3 \quad (18)$$

$$F_{\Delta T}^e = E^e A^e \alpha \Delta T \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e = 1, 2, 3 \quad (19)$$

Assemblando si ottiene:

$$10^6 \begin{pmatrix} 2.46 & -2.46 & 0 & 0 \\ -2.46 & 4.47 & 2.01 & 0 \\ 0 & -2.01 & 3.57 & -1.56 \\ 0 & 0 & -1.56 & 1.56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R - F_{\Delta T}^1 \\ F_{\Delta T}^1 - F_{\Delta T}^2 \\ F_{\Delta T}^2 - F_{\Delta T}^3 \\ P + F_{\Delta T}^3 \end{pmatrix} \quad (20)$$

valori calcolati:

$$u_2 = 0.0349 \text{ cm}, \quad u_3 = 0.0761 \text{ cm}, \quad u_4 = 0.1270 \text{ cm}$$

valori esatti:

$$u_2 = 0.0350 \text{ cm}, \quad u_3 = 0.0756 \text{ cm}, \quad u_4 = 0.1237 \text{ cm}$$

deformazioni:

$$\epsilon^1 = \frac{u_2 - u_1}{l^1} = 1.13 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon^2 = \frac{u_3 - u_2}{l^2} = 1.33 \cdot 10^{-3},$$

$$\epsilon^3 = \frac{u_4 - u_3}{l^3} = 1.66 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{aligned}\sigma^1 &= E\epsilon^1 - \alpha E\Delta T \\ \sigma^2 &= E\epsilon^2 - \alpha E\Delta T, \\ \sigma^3 &= E\epsilon^3 - \alpha E\Delta T\end{aligned}$$

Mediando i valori nodali si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 = 6030 \text{ N/cm}^2 \\ \sigma_2 = 6700 \text{ N/cm}^2 \\ \sigma_3 = 8476 \text{ N/cm}^2 \\ \sigma_4 = 9581 \text{ N/cm}^2 \end{pmatrix}$$

Soluzione esatta

$$\begin{pmatrix} P/A^1 = 5750 \text{ N/cm}^2 \\ P/A^2 = 6900 \text{ N/cm}^2 \\ P/A^3 = 8625 \text{ N/cm}^2 \\ P/A^4 = 11500 \text{ N/cm}^2 \end{pmatrix}$$