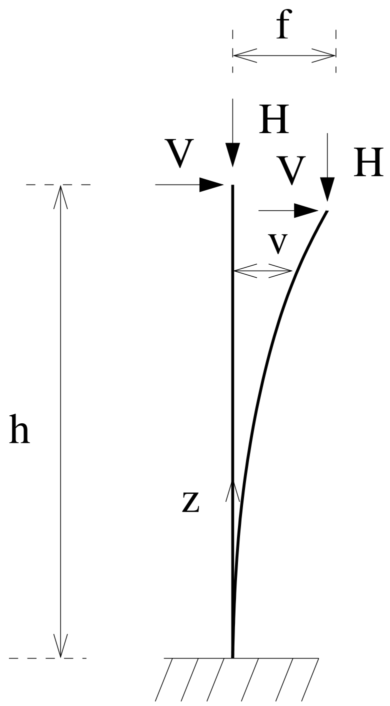
Equazione di equilibrio in grandi spostamenti

(Gambarotta, Nunziante, Tralli, Scienza delle costruzioni)
Una generalizzazione dell'equazione della linea elastica della trave inflessa al caso in cui gli spostamenti non siano piccoli, ma finiti, è necessaria nel caso in cui l'equilibrio della trave sia qualitativamente caratterizzato dalla presenza di spostamenti che non sono trascurabili.



Se lo spostamento $v(z)$ non è piccolo, il momento flettente nella generica sezione di ascissa z vale
$M(z) = H \times (v(z) - f) + V \times (z - h)$,
mentre, nelle ipotesi di piccoli spostamenti, il momento si calcola sulla struttura indeformata e vale
$M(z) = V \times (z - h)$

Equazione di equilibrio in grandi spostamenti

Quando l'ipotesi di piccoli spostamenti non e' piu' valida, l'equazione di equilibrio va scritta in configurazione variata

si tratta di **nonlinearita' geometrica**

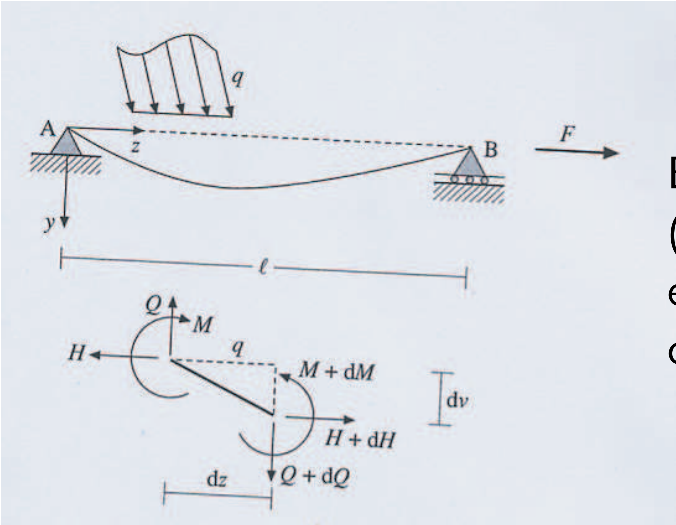
L' analisi matriciale consente di studiare anche la nonlinearita' geometrica

- si tratta di un problema non lineare $\Rightarrow$, la soluzione del problema non puo' essere ottenuta esplicitamente, occorre usare metodi iterativi

- affronteremo il problema generalizzato agli autovalori

- Prima vedremo i sistemi a deformabilità distribuita, poi i sistemi a deformabilità concentrata

Sistemi a deformabilità continua



Equazione di equilibrio (equazione della linea elastica) per trave in configurazione variata

Ipotesi sulla trave

- rigidezza flessionale EJ costante
- sforzo normale F costante
- con $\chi = -w''$ (legame linearizzato curvatura-spostamento, conservazione delle sezioni piane)

si ha

$$EJw^{iv} - Fw'' = q(x)$$

compare il contributo aggiuntivo Fw'' (contributo dello sforzo normale (di trazione).
Si osservi che, se $F = -P$ (compressione), allora l'eq. di equilibrio si scrive $EJw^{iv} + Pw'' = q(x)$

Formulazione variazionale debole del problema

Data l'equazione differenziale di equilibrio

$$EJw^{iv} - Fw'' = q(x) \quad \text{in} \quad V' \; + \text{condizioni al contorno}$$

Vogliamo ottenere la formulazione variazionale debole; sia v un campo di spostamento cinematicamente ammissibile che soddisfa le condizioni al contorno essenziali:

$$\boxed{\int_0^l \left(EJw^{iv}v - Fw''v \right) dx = \int_0^l q\,v\,dx \quad \forall \; v \text{ ammissibile}}$$

integrando per parti, ricordando che $M = -EJw''$, $T = -EJw'''$, $\varphi = -w'$

$$- \int_0^l EJw^{'''} v'\, dx + [EJw'''v]_0^l + \int_0^l Fw'v'\, dx - [Fw'v]_0^l = \int_0^l q\, v\, dx$$

$$\int_0^l EJw''v''\, dx - [EJw''v']_0^l + [EJw'''v]_0^l + \int_0^l Fw'v'\, dx - [Fw'v]_0^l = \int_0^l q\, v\, dx$$

$$\int_0^l EJw''v''\, dx + \int_0^l Fw'v'\, dx = [M\phi]_0^l + [Tv]_0^l + [Fw'v]_0^l + \int_0^l q\, v\, dx$$

Principio dei lavori virtuali

$$a(w,v) := \int_0^l EJw''v''\,dx + \int_0^l Fw'v'\,dx$$

$$l(v) := [M\phi]_0^l + [Tv]_0^l + [Fw'v]_0^l + \int_0^l q\,v\,dx$$

FLV:

$$a(w,v) = l(v) \quad \forall \ v\text{ammissibile}$$

Cerchiamo la soluzione con il metodo degli elementi finiti
Sia N il numero dei gradi di libertà nodali, ed NE il numero degli elementi finiti in cui suddivido la trave

$$w^h = \sum_i^N \phi_i(x) U_i \quad v^h = \sum_i^N \phi_i(x) V_i$$

Supponiamo che la trave sia soggetta solo al carico F e che il lavoro esterno al bordo $x = 0, l$ si annulli, e.g. assumendo: $q(x) = 0$, $M(0) = M(l) = 0$, $v(0) = v(l) = 0$

Sostituendo la forma approssimata degli spostamenti e tenendo conto della discretizzazione del dominio

$$L_{vi} = \int_0^l EJ \sum_{i=1}^{N} \phi_i''(x) U_i \sum_{j=1}^{N} \phi_j''(x) V_j \, dx +$$

$$+ \int_0^l F \sum_{i=1}^{N} \phi_i'(x) U_i \sum_{j=1}^{N} \phi_j'(x) V_j \, dx = 0 \quad \forall \ V$$

dove $()'' = d^2()/dx^2$. Ovvero, possiamo scrivere

$$L_{vi} = \sum_{i,j=1}^{N} U_i K_{Eij}(x) V_j + \sum_{i,j=1}^{N} F U_i K_{Gij}(x) V_j \quad \forall \ V_j$$

dove

$$K_{Eij} = \int_0^l EJ \phi_i''(x) \phi_j''(x) \, dx \,, \quad K_{Gij} = \int_0^l \phi_i'(x) \phi_j'(x) \, dx$$

dove: K_E rappresenta la matrice di rigidezza elastica della trave di E-B, K_G indica la matrice di rigidezza geometrica

Il principio dei lavori virtuali puo' essere scritto in forma matriciale come:

$$\boxed{U^t K_E V + F U^t K_G V = 0 \quad \forall\ V \text{ ammissibile}}$$

ovvero

$(U^t K_E + F U^t K_G) V = 0\ \ \forall\ V \quad \Leftrightarrow \quad U^t K_E + F U^t K_G = 0$

Abbiamo così ottenuto l'equazione di equilibrio della trave in grandi spostamenti $(K_E + F K_G)\, U = 0$

$$\begin{cases} K_E U - P K_G U = 0 & \text{se } F = -P < 0, \\ K_E U + P K_G U = 0 & \text{se } F = +P > 0. \end{cases}$$

In analogia a quanto visto per gli elementi trave, le matrici di rigidezza K_E e K_G si ottengono per assemblaggio delle matrici di rigidezza elementari:

$$K_E = \bigwedge_{k=1}^{NE} K_{Ek}\,, \qquad K_G = \bigwedge_{k=1}^{NE} K_{Gk}$$

dove l'operatore $\bigwedge$ indica assemblaggio ed inoltre i generici componenti delle matrici divengono:

$K_{E}{}^k_{ij} = \int_{x_1^k}^{x_2^k} EJ \phi_i''(x) \phi_j''(x)\, dx$

$K_{G}{}^k_{ij} = \int_{x_1^k}^{x_2^k} \phi_i'(x) \phi_j'(x)\, dx$

Le Equazioni

$$(K_E + FK_G)U = 0$$

rappresentano le equazioni di equilibrio in configurazione variata, quando gli spostamenti non sono piccoli ed occorre tenere conto del lavoro flessionale dello sforzo normale F per effetto della deformazione della trave

Affinche' il sistema di equazioni di equilibrio ammetta soluzione diversa dalla banale ($U = 0$), occorre che

$$\boxed{\det(K_E + FK_G) = 0 \qquad (1)}$$

Il problema (1) rappresenta un problema agli autovalori generalizzato . I valori di F che soddisfano l'equazione (1) sono gli autovalori del sistema e rappresentano i carichi critici del sistema; gli autovettori U corrispondenti rappresentano le deformate critiche associate ai carichi critici. Il valore piu' piccolo dell'autovalore F per cui il sistema ammette soluzione diversa dalla banale e' il primo carico critico .

Strutture a deformabilita' concentrata

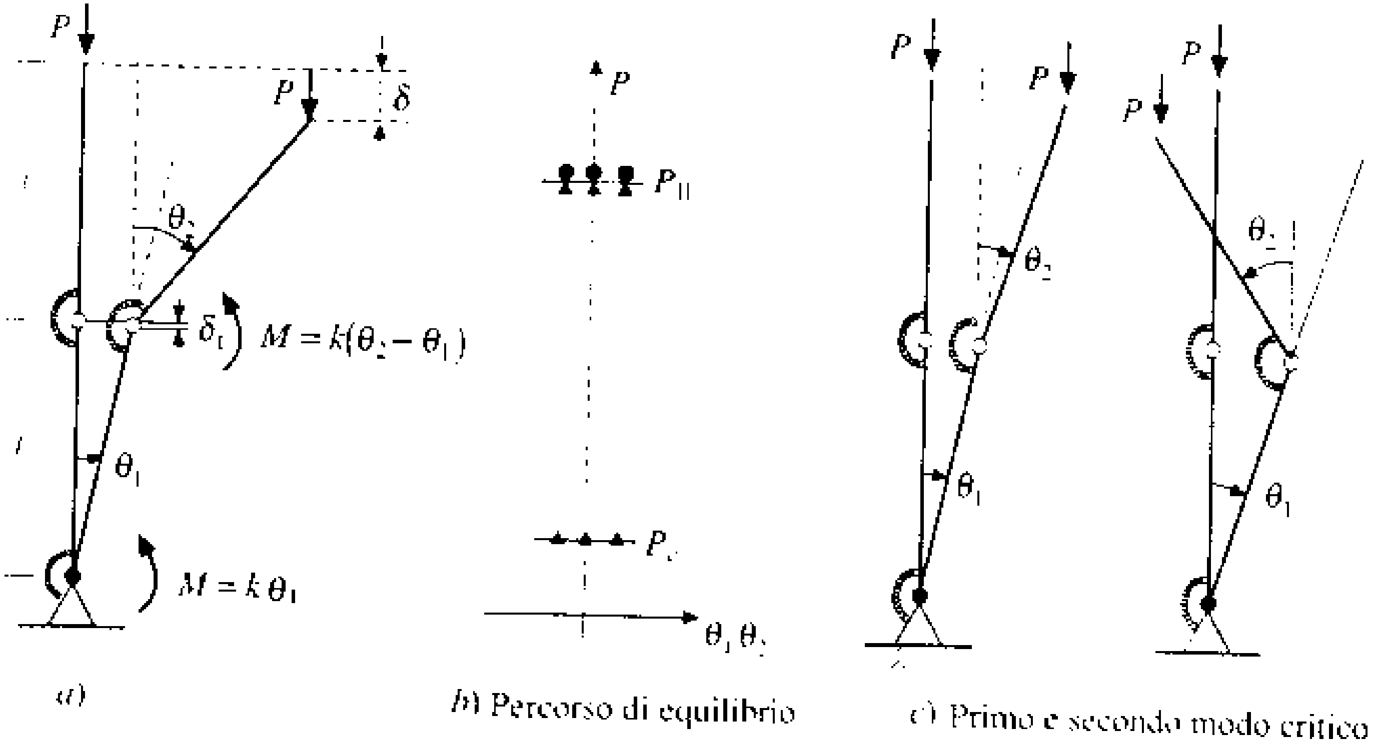


Figura 7.42 Analisi linearizzata per un sistema a due gradi di libertà.

EPT risulta

$$\Pi(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}k\big(\theta_1^2 + (\theta_2 - \theta_1)^2\big)$$

$$-Pl\big((1 - \cos\theta_1) + (1 - \cos\theta_2)\big)$$

Approssimiamo fino ai termini del II ordine

$$\Pi^*(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}k\big(\theta_1^2 + (\theta_2 - \theta_1)^2\big) - Pl\big(\frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2}\big)$$

$$\Pi^*(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\theta_1 & \theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2k - Pl & -k \\ -k & k - Pl\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{pmatrix}$$

$$\Pi^*(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\theta_1 & \theta_2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}2k & -k \\ -k & k\end{pmatrix} - P\begin{pmatrix}l & 0 \\ 0 & l\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{pmatrix}$$

stazionarieta'

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial\Pi^*}{\partial\theta_1} \\ \frac{\partial\Pi^*}{\partial\theta_2}\end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix}2k & -k \\ -k & k\end{pmatrix} - P\begin{pmatrix}l & 0 \\ 0 & l\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}$$

$$K := \begin{pmatrix} 2k - Pl & -k \\ -k & k - Pl \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$K = K_E - PK_G$$

dove

$$K_E := \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \quad K_G := \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}$$

- K: matrice di rigidezza della struttura, matrice Hessiana della EPT
- K_E:matrice di rigidezza elastica, matrice Hessiana della Energia elastica
- K_G: matrice geometrica,matrice Hessiana del lavoro del II ordine dei carichi esterni

$$(K_E - PK_G) \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le equazioni di stazionarieta' costituiscono un sistema omogeneo in 2 incognite, che ammette soluzione diversa dalla banale $(\theta_1 = \theta_2 = 0)$ sse

$$\det K = 0\,, \quad \Rightarrow \quad \det(K_E - PK_G) = 0$$

Il carico critico rappresenta il piu' piccolo degli autovalori del polinomio caratteristico

e' il piu' piccolo valore del carico per cui il sistema delle equazioni di equilibrio ammette soluzione diversa da quella banale, ovvero per cui sono possibili configurazioni diverse da quella rettilinea

> il carico critico rappresenta il piu' piccolo degli autovalori del problema. Gli autovettori corrispondenti a tali autovalori vengono anche denominati deformate critiche o modi critici

$$\det K = \det(K_E - PK_G) = P^2l^2 - 3klP + k^2 = 0$$

e gli autovalori sono:

$$P_C = (3 - \sqrt{(5)})\frac{k}{2l} \qquad P_{II} = (3 + \sqrt{(5)})\frac{k}{2l}$$

I corrispondenti modi critici sono:

$$v_c = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.618 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_{II} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.618 \\ 1 \end{pmatrix}$$

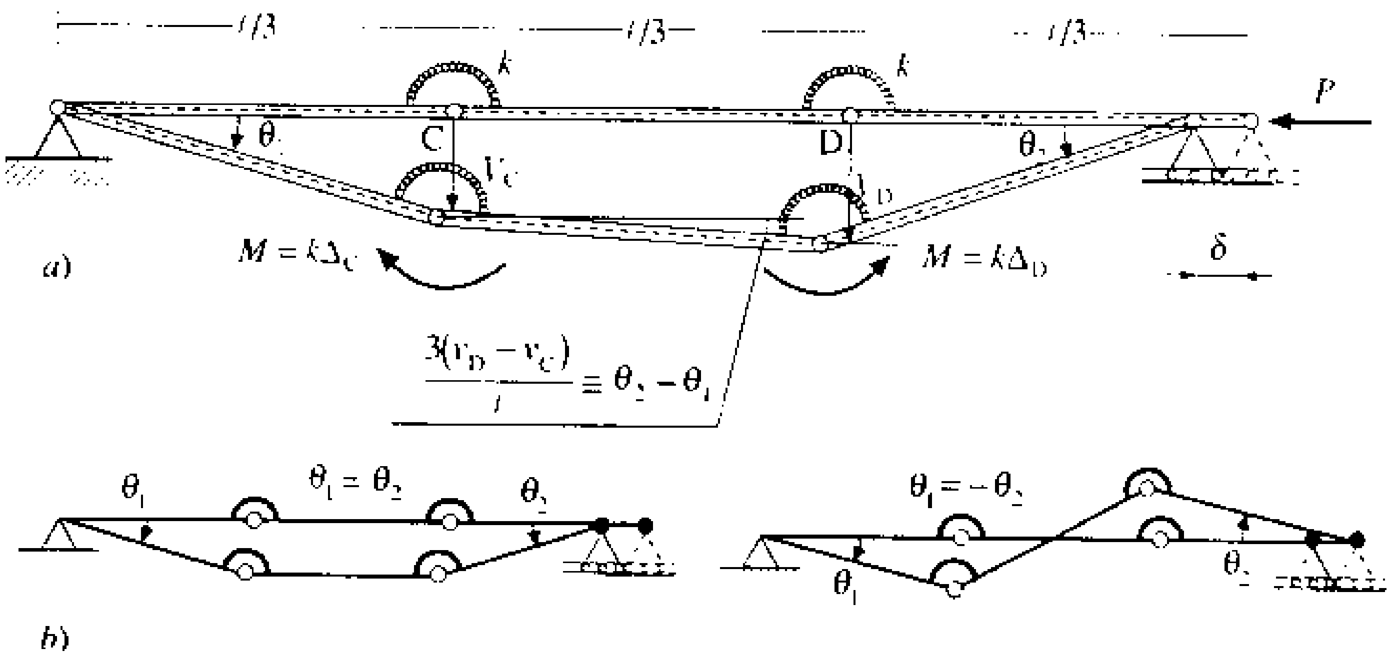


Figura 7.43 Analisi linearizzata per un sistema a due gradi di libertà.

Gli spostamenti verticali di C e D valgono

$$v_C = \frac{l \sin \theta_1}{3} \approx \frac{l\theta_1}{3} \quad v_D = \frac{l \sin \theta_2}{3} \approx \frac{l\theta_2}{3}$$

Le rotazioni relative sono

$$\Delta_C = \theta_1 - \mathsf{ctg}\frac{3(v_D - v_C)}{l} \approx 2\theta_1 - \theta_2\,,$$

$$\Delta_D = \theta_2 - \mathsf{ctg}\frac{3(v_D - v_C)}{l} \approx 2\theta_2 - \theta_1$$

Lo spostamento orizzontale del punto di applicazione del carico P risulta:

$$\delta = \frac{l}{3}((1 - \cos \theta_1) + (1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)) + (1 - \cos \theta_2)) \approx$$

$$\frac{l}{3}(\frac{\theta_1^2}{2} + \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2})$$

L EPT del sistema si scrive come:

$$\Pi(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}k(\Delta_C^2 + \Delta_D^2) - P\delta$$

La forma quadratica approssimata e'

$$
\begin{aligned}
\Pi^*(\theta_1,\theta_2) =& \frac{1}{2}k(5\theta_1^2+5\theta_2^2-8\theta_1\theta_2) \\
&- P\frac{l}{3}(\theta_1^2+\theta_2^2-\theta_1\theta_2)
\end{aligned}
$$

Le condizioni di stazionarieta' rispetto a θ_1 e θ_2 sono:

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5k-\frac{2}{3}Pl & -4k+\frac{Pl}{3} \\ -4k+\frac{Pl}{3} & 5k-\frac{2}{3}Pl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

ovvero, ponendo

$$
K_E = \begin{pmatrix} 5k & -4k \\ -4k & 5k \end{pmatrix} \quad K_G = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}l & -\frac{l}{3} \\ -\frac{l}{3} & +\frac{2}{3}l \end{pmatrix}
$$

Ammette soluzioni diversa dalla banale sse

$$
\det(K_E - PK_G) = 3(\frac{P^2l^2}{9} - \frac{4kPl}{3} + 3k^2) = 0
$$

Autovalori: $P_c = 3k/l \rightsquigarrow$ deformata simmetrica, $P_{II} = 9k/l \rightsquigarrow$ deformata antisimmetrica

Osservazioni

- Sia nel caso di sistemi a deformabilita' distribuita che concentrata, si deve risolvere un problema generalizzato agli autovalori

- Nel caso di sistemi a deformabilita' concentrata abbiamo proceduto per via energetica: stazionarieta' della energia potenziale EPT

- Nel caso di sistemi a deformabilita' distribuita, abbiamo utilizzato un approccio variazionale di tipo integrale basato sulla formulazione del PLV

- La matrice di rigidezza K diventa:
$$K = \begin{cases} K_E + |P|K_G & \text{se } P > 0, \\ K_E - |P|K_G & \text{se } P < 0. \end{cases}$$

- La soluzione esatta dell'equazione differenziale di equilibrio $EJw^{iv} + Pw'' = 0$ e' del tipo ($\alpha = P/EJ$)

$$w(z) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 x + C_4$$

Osservazioni

Il PLV e' piu' generale dell'approccio energetico via EPT. In elasticita' **lineare**, il PLV e l'approccio energetico via EPT sono equivalenti. In elasticita' non lineare come nel caso di grandi spostamenti, tali approcci non sono equivalenti.

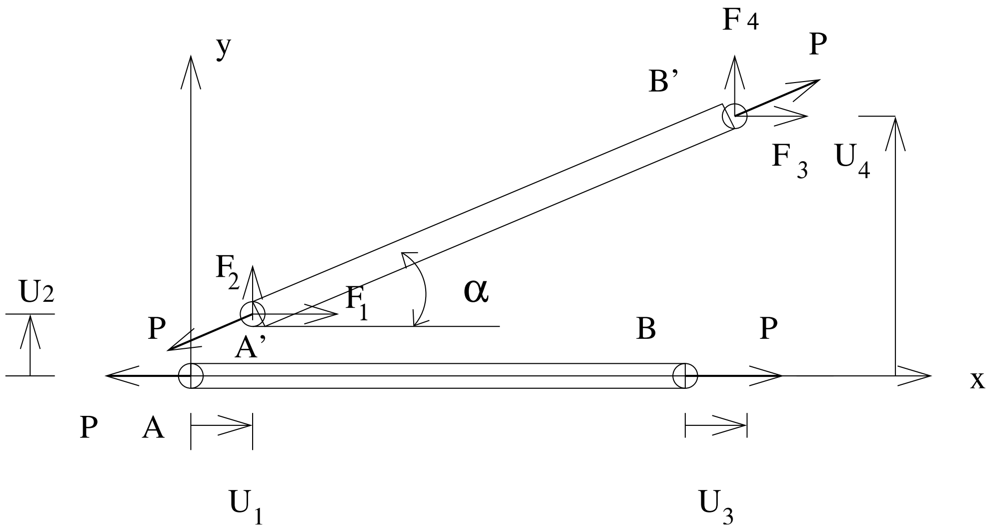
Il problema della non linearita' geometrica andrebbe affrontato in forma piu' generale scrivendo l'energia di deformazione $U = \frac{1}{2}\int_V \epsilon^2\, dx\, dy\, dz$ dove la deformazione non viene valutata mediante il tensore di deformazione di elasticita' lineare ma attraverso altre misure di deformazione

- engineering strain: $\epsilon_E = \frac{l_n - l_0}{l_0}$
- Green's strain: $\epsilon_G = \frac{l_n^2 - l_0^2}{2l_0^2}$
- Almansi strain: $\epsilon_A = \frac{l_n^2 - l_0^2}{2l_n^2}$

con l_0 lunghezza iniziale ed l_n lunghezza corrente

Matrice K_G dell'elemento asta

Si consideri un'asta con sezione trasversale A, modulo di Young E, deformabile solo assiale, avente lunghezza l. Sotto l'azione del carico P di trazione, a partire dalla configurazione di riferimento AB , l'asta raggiunge la posizione $A'B'$. Gli spostamenti nodali in direzione x ed y siano rispettivamente (U_1, U_3) e (U_2, U_4).



Equilibrio dell'asta in configurazione deformata $A'B'$

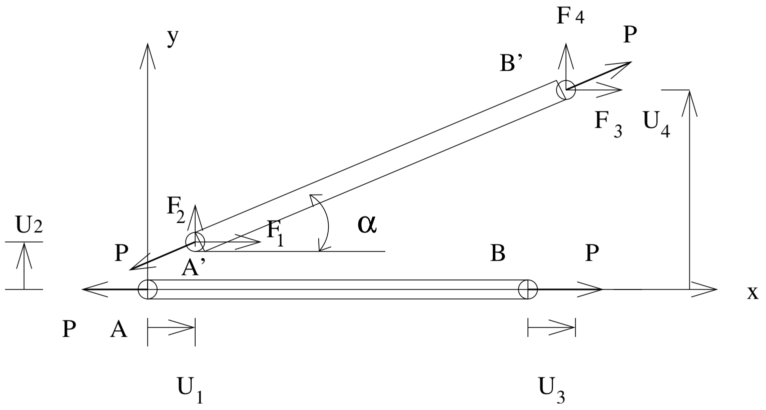
$$F_1 = -P\cos\alpha\,,\; F_2 = -P\sin\alpha$$

$$F_3 = P\cos\alpha\,,\; F_4 = P\sin\alpha$$

dove

$\sin\alpha = \frac{U_4 - U_2}{l}\,,\quad \cos\alpha = \frac{1}{l}(l_0 + U_3 - U_1) \approx 1$

$l' = l + \frac{Pl}{EA} \approx l$



Sostituendo $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ nelle equazioni di equilibrio si ha:
$F_1 = -P\,, \quad F_2 = -P\frac{U_4-U_2}{l}$
$F_3 = P\,, \quad F_4 = P\frac{U_4-U_2}{l}$

Osserviamo che anche per spostamenti relativamente grandi la quantità $EA\frac{U_3-U_1}{l} = P$, si può supporre costante; si sostituisca tale relazione nelle equazioni di equilibrio alla traslazione relative ai gradi di libertà $1, 3$, $F_1 = -EA\frac{U_3-U_1}{l}\,, \quad F_3 = EA\frac{U_3-U_1}{l}$
Pertanto le equazioni di equilibrio diventano:

$$F_1 = -EA\frac{U_3 - U_1}{l}\,, \quad F_2 = -P\frac{U_4 - U_2}{l}$$
$$F_3 = -EA\frac{U_3 - U_1}{l}\,, \quad F_4 = P\frac{U_4 - U_2}{l}$$

ovvero, scritto in forma matriciale si ha:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \left(\frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{P}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix}$$

In forma compatta:

$$F^{ext} = (K_E + PK_G)U$$

dove $F^{ext} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{pmatrix}^t$, $U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \end{pmatrix}^t$
La matrice di rigidezza elastica è

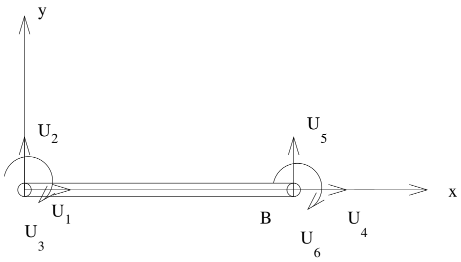
$$K_E = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice geometrica approssimata K_G^e dell'asta diventa [1]

$$\boxed{K_G = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

[1] la matrice geometrica sopra indicata si può anche ottenere assumendo che gli spostamenti varino linearmente lungo l'asta, ovvero siano interpolati attraverso le funzioni di interpolazione degli elementi finiti Lagrangiani lineari, ovvero, in coordinate intrinseche $\xi \in [-1, 1]$: $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\xi}{2} & 0 & \frac{1+\xi}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\xi}{2} & 0 & \frac{1+\xi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix}$

K_G approssimata dell'elemento trave



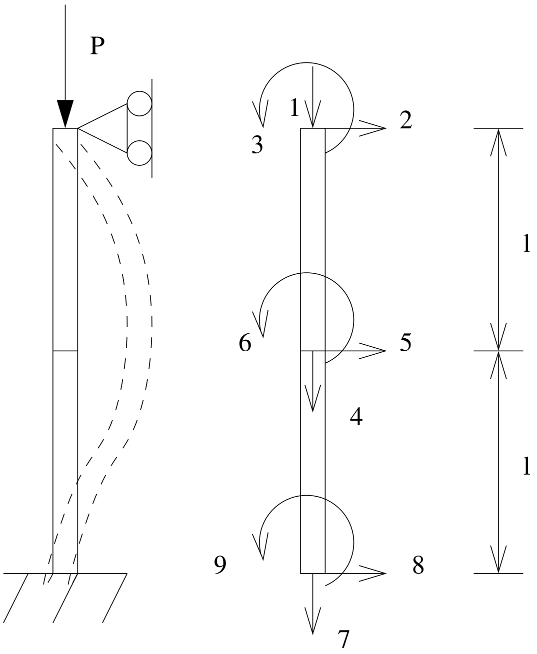
(Przemieniecki, “Theory of matrix structural ‘analysis”)

$$K_G^e = \frac{1}{l}\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 6/5 & & & & \\ 0 & l/10 & 2/15l^2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -6/5 & -l/10 & 0 & 6/5 & \\ 0 & l/10 & -l^2/30 & 0 & -l/10 & 2/15l^2 \end{pmatrix}$$

Se si assume che la trave sia snella, ovvero che le dimensioni trasversali siano piccole rispetto alla lunghezza dell'elemento, e che $P \approx EA(u_4 - u_1)/l$, si ottiene una matrice K_G^e ulteriormente semplificata detta *string stiffness*

$$K_G^e = \frac{1}{l}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un esempio di analisi di stabilita' (buckling)



$EJ =$ costante,
A:area
2 elementi trave

$$K_E^{(1),(2)} = \frac{EJ}{l^3}\begin{pmatrix} \phi & & & & & \\ 0 & 12 & \text{Sym} & & & \\ 0 & 6l & 4l^2 & & & \\ -\phi & 0 & 0 & \phi & & \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix}, \ \phi = \frac{Al^2}{J}$$

$$K_G^{(1),(2)} = -\frac{P}{l}\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 6/5 & \text{Sym} & & & \\ 0 & l/10 & 2l^2/15 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -6/5 & -l/10 & 0 & 6/5 & \\ 0 & l/10 & -l^2/30 & 0 & -l/10 & 2l^2/15 \end{pmatrix}$$

Assumiamo un moltiplicatore di carico di buckling λ ed un carico unitario $P^* = 1$ tali che

$$P = \lambda P^* \quad P^* = 1$$

Dopo avere assemblato ed avere imposto le condizioni al contorno

$$K_E - \lambda K_G = \begin{pmatrix} \phi & -\phi & 0 & 0 & 0 \\ -\phi & 2\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4l^2 - \frac{2\lambda}{15}\frac{l^4}{EJ} & -6l + \frac{l}{10}\frac{\lambda l^3}{EJ} & 2l^2 + \frac{1}{30}\frac{\lambda l^4}{EJ} \\ 0 & 0 & -6l + \frac{l}{10}\frac{\lambda l^3}{EJ} & 24 - \frac{12}{5}\frac{\lambda l^2}{EJ} & 0 \\ 0 & 0 & 2l^2 + \frac{1}{30}\frac{\lambda l^4}{EJ} & 0 & 8l^2 - \frac{4}{15}\frac{\lambda l^4}{EJ} \end{pmatrix}$$

Si risolve il pb generalizzato agli autovalori

$$\det(K_E - \lambda K_G) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$3\mu^3 - 220\mu^2 + 3.84\mu - 14.4 = 0 \ \text{ dove } \mu = \frac{\lambda l^2}{EJ}$$

La piu' piccola radice del polinomio caratteristico e'

$$\lambda = 5.1772\frac{EJ}{l^2}$$

Osservazioni:

- Il valore esatto e' $(l_0 = 0.699 \times 2l)$

$$\lambda_{ex} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} = 5.0475\frac{EJ}{l^2}$$

- il valore calcolato assumendo come matrice di rigidezza quella approssimata e con 2 elementi trave introduce un errore del 2.6%

- raffittendo la mesh l'errore si riduce

Trave appoggiata:Carichi critici e deformate critiche

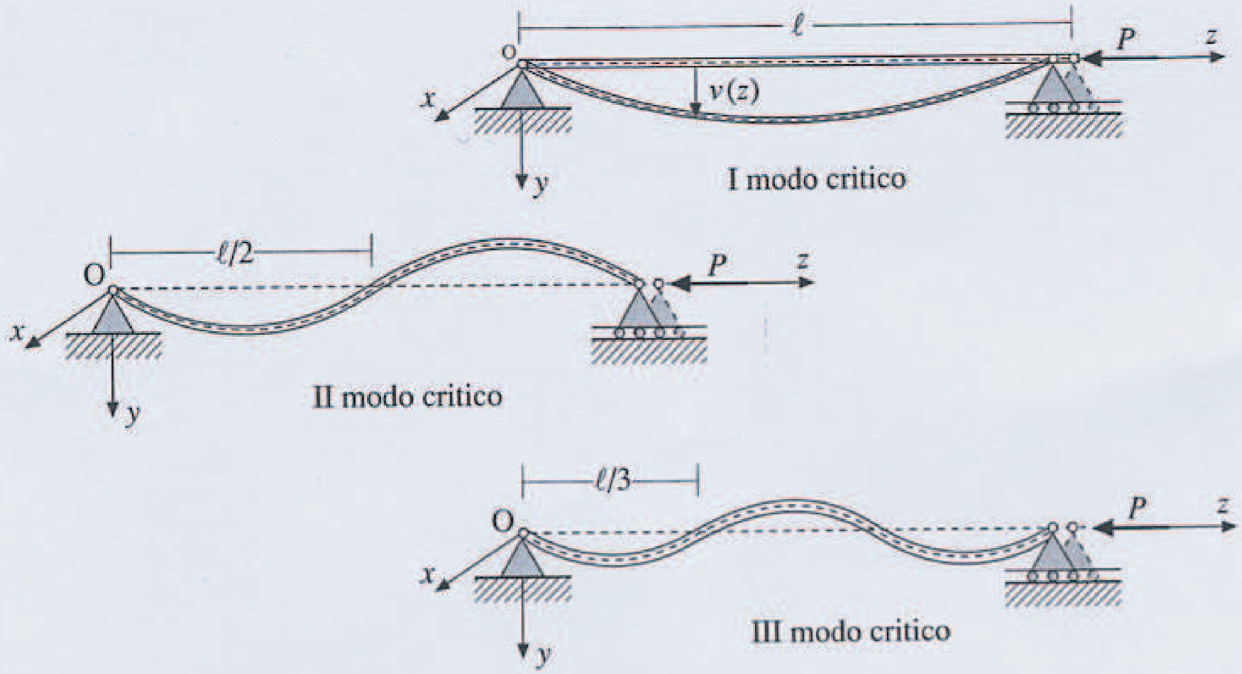


Figura 7.45 Modi critici di un asta semplicemente appoggiata.

Metodi non lineari per la soluzione di problemi in grandi spostamenti

- L'utilizzo della matrice geometrica K_G studiata nel corso e' limitato al solo calcolo del carico di buckling, ovvero per la determinazione del carico critico

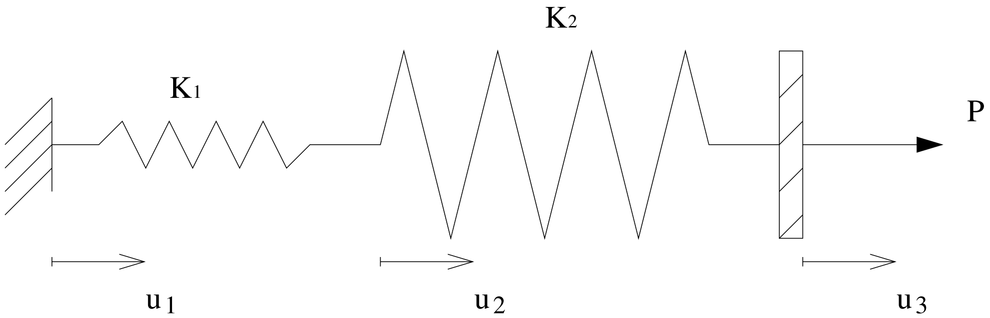
- per seguire la curva carico-spostamento (risposta strutturale) oltre il carico critico, occorre utilizzare un metodo iterativo basato sulla linearizzazione della equazione di equilibrio. In tal caso, si lavora con una matrice di rigidezza tangente K_t del tipo:

$$K_t = K_E + P\,K_G + K_D$$

  dove:

  - K_E indica la matrice di rigidezza elastica, che dipende solo dalla geometria iniziale
  - K_G la matrice di rigidezza geometrica, detta anche *initial stress matrix*
  - K_D viene chiamata *initial displacement* o *initial slope matrix*

Problemi malcondizionati



sia $K_1 = 0.1$, $K_2 = 100000$

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.1 & 0 \\ -0.1 & 100000.1 & -100000 \\ 0 & -100000 & 100000 \end{pmatrix}$$

condizioni al contorno: $u_1 = 0$

$$K_{LL} = \begin{pmatrix} 100000.1 & -100000 \\ -100000 & 100000 \end{pmatrix}$$

autovalori: $\lambda_1 = 200000.05, \lambda_2 \approx 0.05 \Rightarrow$ matrice malcondizionata

$$\text{cond} = \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} \tag{2}$$

se cond$\approx 1 \Rightarrow$ la matrice di rigidezza e' ben condizionata
se cond≈ 0 la matrice di rigidezza e' mal condizionata