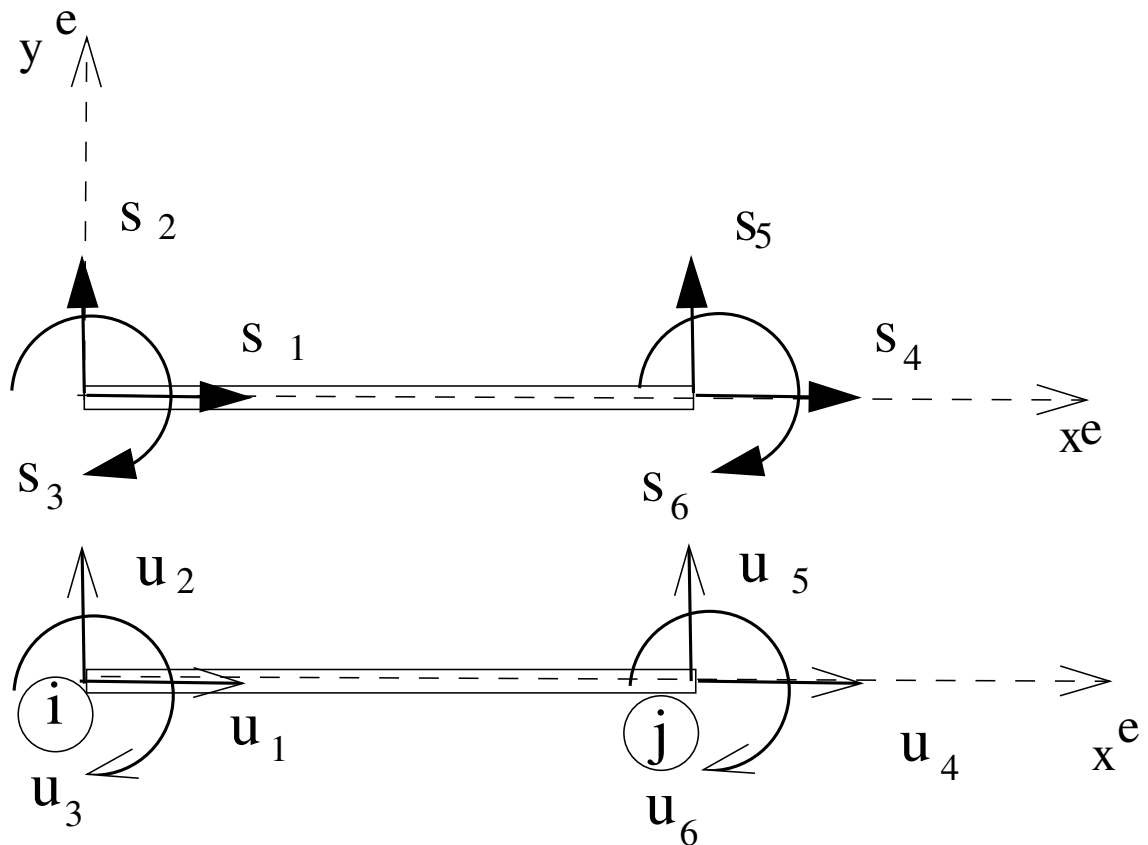


# Strutture intelaiate: l'elemento trave



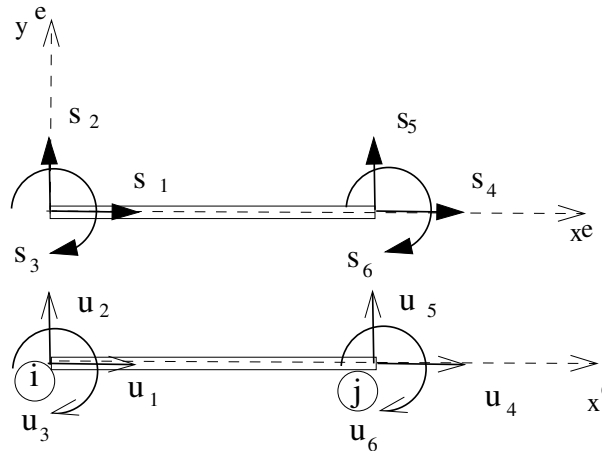
L'elemento trave (BEAM) è soggetto ad azioni flettenti e sforzo normale nel riferimento locale  $(x^e, y^e)$ , dove viene assunto positiva una rotazione oraria.

La sezione trasversale dell'asta è assunta costante. Con  $s_i$  e  $i = 1, \dots, 6$  si indicano gli sforzi nodali agenti e con  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , gli spostamenti nodali nel riferimento locale.

$$k^e = \frac{EJ}{l} \begin{pmatrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1/\rho^2 & 0 & 0 & -1/\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12/l^2 & -6/l & 0 & -12/l^2 & -6/l \\ 0 & -6/l & 4 & 0 & 6/l & 2 \\ -1/\rho^2 & 0 & 0 & 1/\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12/l^2 & 6/l & 0 & 12/l^2 & 6/l \\ 0 & -6/l & 2 & 0 & 6/l & 4 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

**K elementare**

$\rho = \sqrt{J/A}$  (raggio  
 di inerzia della sezione  
 trasversale)



## Riferimento globale

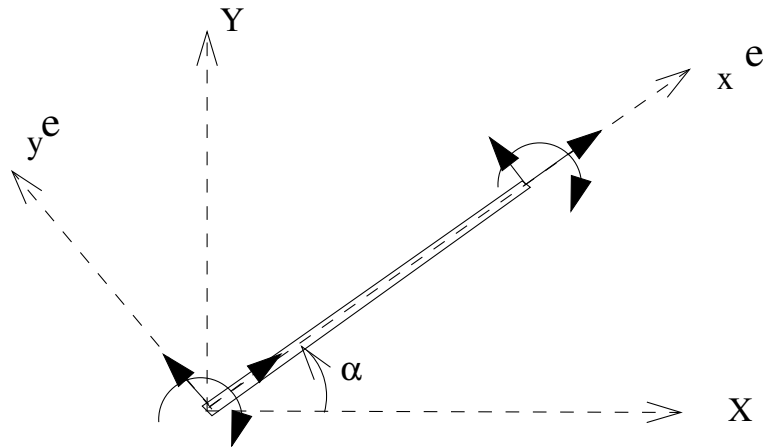


Figure 1: Sforzi e spostamenti nell'elemento trave soggetto a momento flettente e sforzo normale nel riferimento globale; l'asta e' supposta di sezione costante

matrice di rotazione  $R^e$ :

$$R^e = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ u_1 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ u_5 & 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \\ u_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K^e = R^{eT} k^e R^e \quad (1)$$

## trave puramente inflessa

$$K^e = \frac{EJ}{l} \begin{pmatrix} 12 \sin^2 \alpha / l^2 & K_{21}^e & K_{31}^e & K_{41}^e & K_{51}^e & K_{61}^e \\ -12 \sin \alpha \cos \alpha / l^2 & 12 \cos^2 \alpha / l^2 & K_{32}^e & K_{42}^e & K_{52}^e & K_{62}^e \\ 6 \sin \alpha / l & -6 \sin \alpha / l & 4 & K_{43}^e & K_{53}^e & K_{63}^e \\ -12 \sin^2 \alpha / l^2 & 12 \sin \alpha \cos \alpha / l^2 & -6 \sin \alpha / l & 12 \sin^2 \alpha / l^2 & K_{54}^e & K_{64}^e \\ 12 \sin \alpha \cos \alpha / l^2 & -12 \cos^2 \alpha / l^2 & 6 \cos \alpha / l & -12 \sin \alpha \cos \alpha / l^2 & 12 \cos^2 \alpha / l^2 & K_{65}^e \\ 6 \sin \alpha / l & -6 \cos \alpha / l & 2 & -6 \sin \alpha / l & 6 \cos \alpha / l & 4 \end{pmatrix}$$

## Forze nodali equivalenti

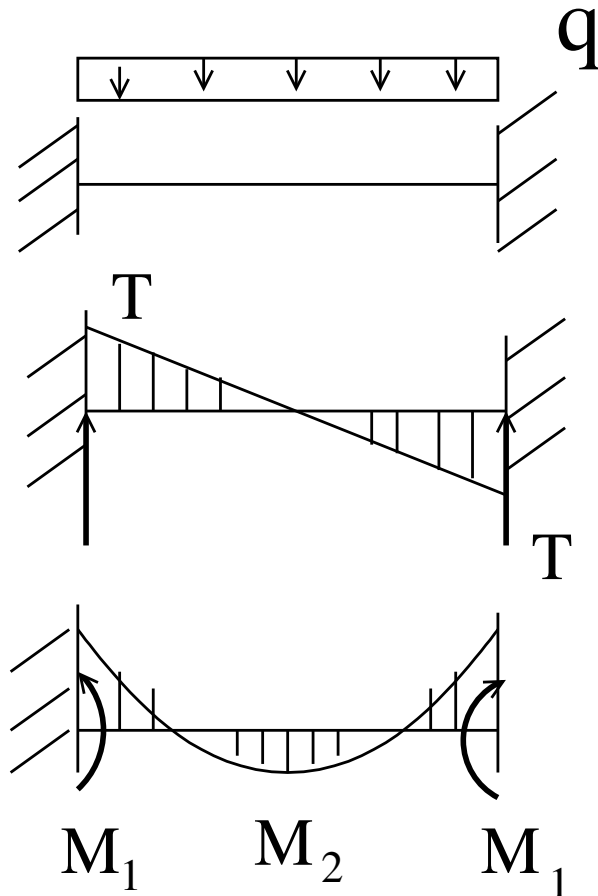


Figure 2:  $T = ql/2$ ,  $M_1 = ql^2/12$ ,  $M_2 = ql^2/24$

Le forze nodali equivalenti rappresentano le reazioni di incastro perfetto cambiate di segno

- $S_0^e$ : vettore reazioni di incastro perfetto  
 $S_0^{eT} = (ql/2 \quad -ql^2/12 \quad ql/2 \quad ql^2/12)$

- il vettore dei carichi equivalenti

$$S_{eq}^e = -S_0^e \Rightarrow$$

$$S_{eq}^{eT} = (-ql/2 \quad ql^2/12 \quad -ql/2 \quad -ql^2/12)$$

# Principio di sovrapposizione degli effetti

Sovrapponiamo gli effetti indotti dalle:

- azioni elastiche indotte dai movimenti  $U$  dei nodi ( $KU$ )
- reazioni dei vincoli perfetti indotte dal solo carico ( $S_0 = -S_{eq}$ )

Dopo l'assemblaggio:

$$S - S_0 = KU \quad \Leftrightarrow S = KU + S_0$$

ovvero

$$S + S_{eq} = KU \quad \Leftrightarrow S = KU - S_{eq}$$

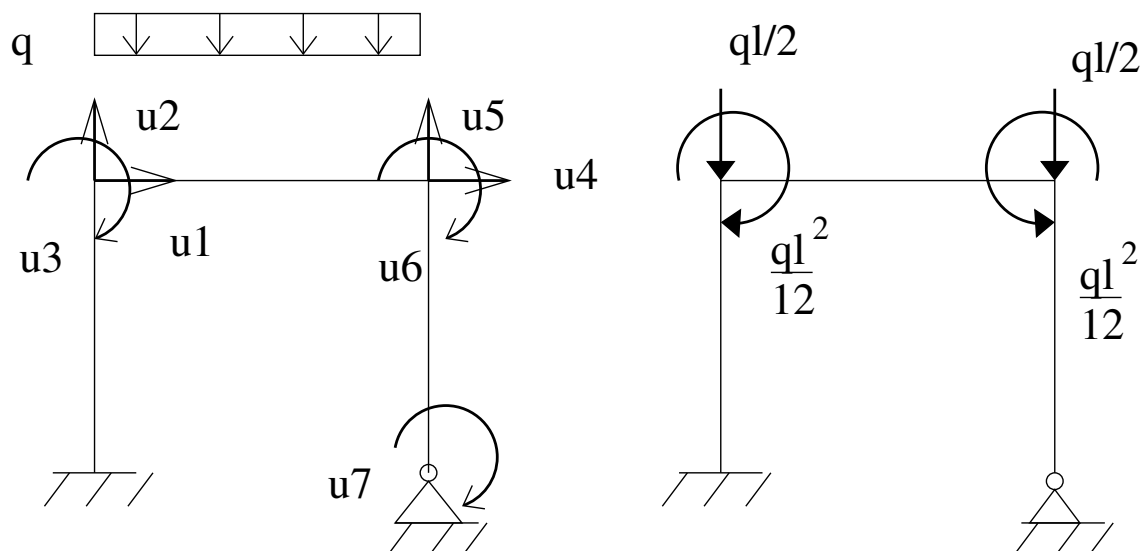
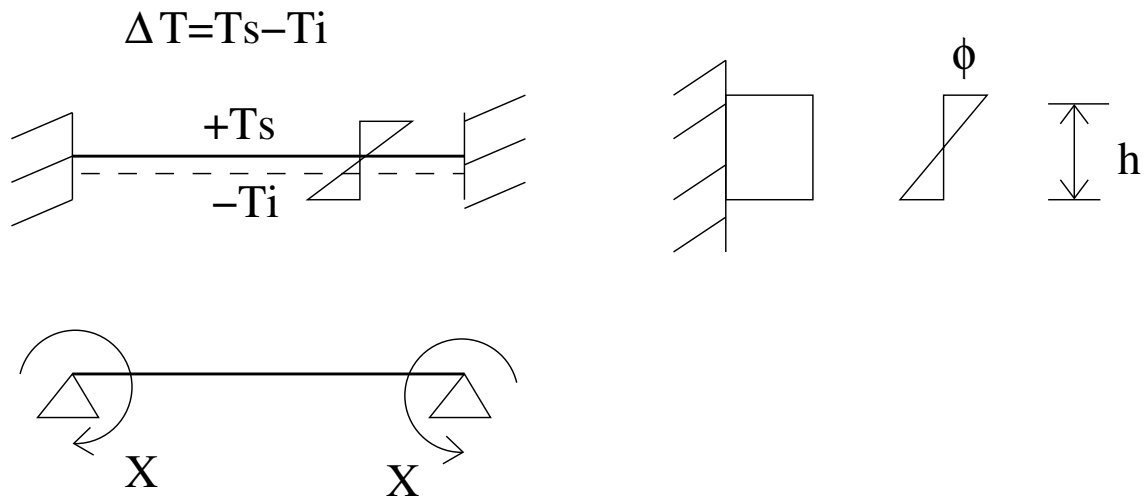


Figure 3: dove i movimenti  $U^t = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots]$  si ottengono risolvendo lo schema di destra.

# Carichi nodali da distorsioni termiche



Equazione di congruenza

$$\varphi = \frac{2\alpha\Delta t}{h} = \frac{X}{EJ} \Rightarrow X = \frac{2\alpha\Delta TEJ}{h} \quad (2)$$

Le reazioni di incastro perfetto  $S_0$  e le forze nodali equivalenti  $S_{eq}$ :

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\alpha\Delta TEJ}{h} \\ 0 \\ -\frac{2\alpha\Delta TEJ}{h} \end{pmatrix}, \quad S_{eq} = -S_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2\alpha\Delta TEJ}{h} \\ 0 \\ \frac{2\alpha\Delta TEJ}{h} \end{pmatrix}$$

## Calcolo degli sforzi nodali $S$

La risoluzione del sistema di equazioni di equilibrio della struttura vincolata

$$K_{LL}U_L = F_L \quad \Rightarrow \quad U_L = K_{LL}^{-1}F_L \quad (3)$$

fornisce le componenti di movimento dei nodi liberi nel sistema di riferimento globale.

Per determinare il valore delle caratteristiche delle sollecitazione alle estremità' delle aste, si procede come segue:

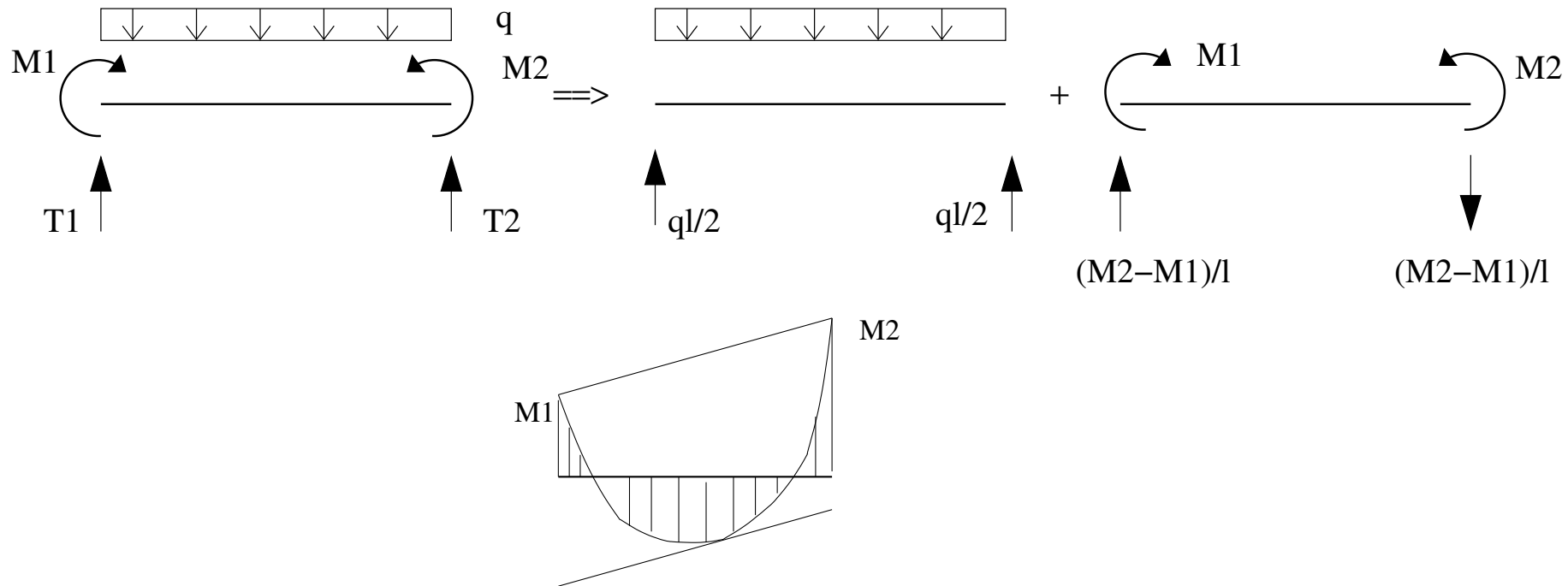
- mediante la matrice di identificazione (topologica), si estraggono dal vettore soluzione  $U_L$  le componenti di movimento relative all'asta  $e$ :  $U^e$
- si riportano le componenti di movimento nel sistema di riferimento locale:

$$u^e = R^e U^e$$

$$\begin{aligned} s^e &= R^e S^e = R^e (K^e U^e + S_0^e) = R^e K^e R^{eT} u^e + R^e S_0^e \\ &= k^e u^e + R^e S_0^e = k^e R^e U^e + R^e S_0^e \end{aligned}$$



Per calcolare le componenti di sforzo in campata si applica il **principio di sovrapposizione degli effetti**



NB: Valutazione sollecitazioni massime, calcolo armature, ...

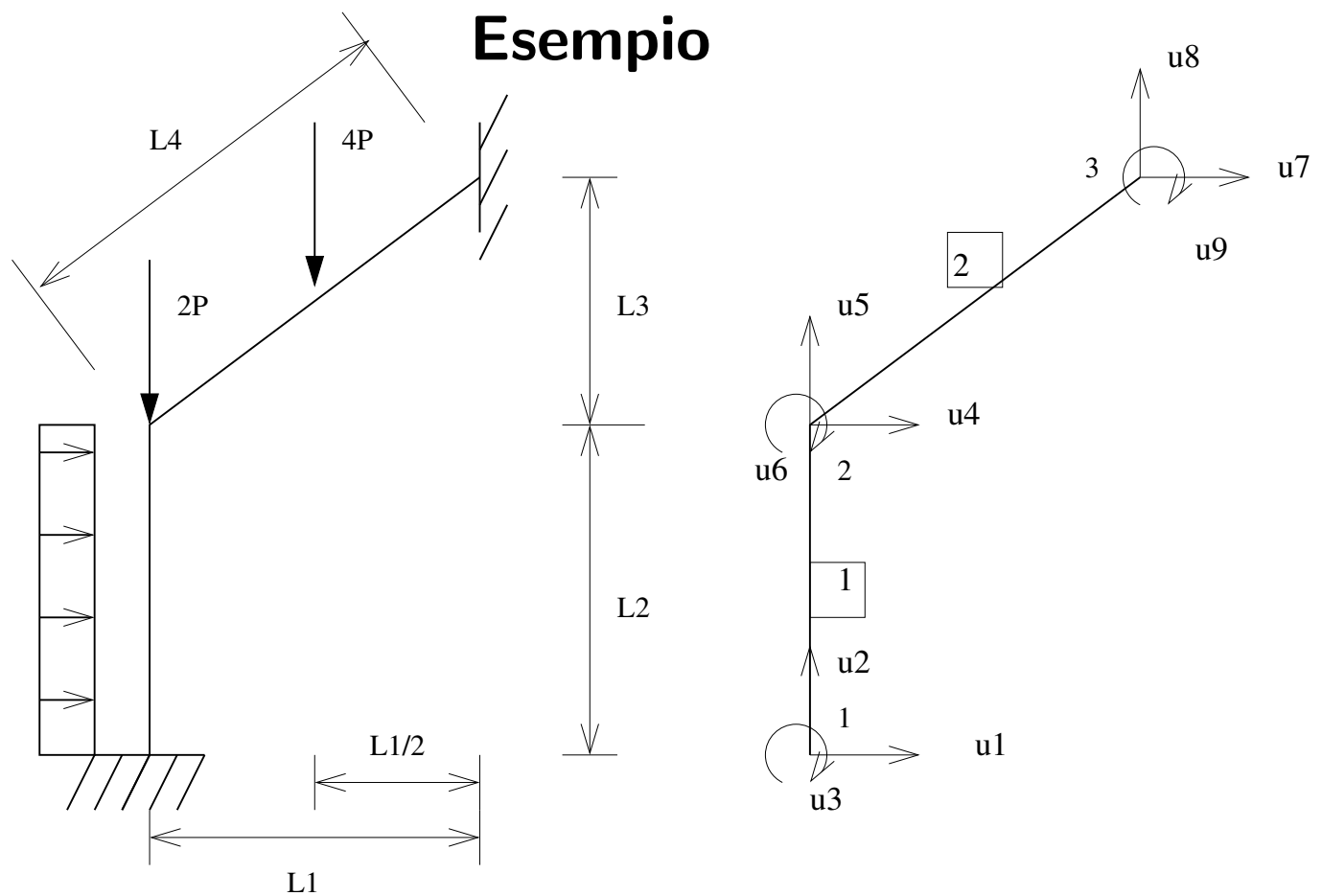


Figure 4:  $L_1=12ft=39.36m$ ;  $L_2 = L_1$ ;  $L_3 = 9ft = 29.52m$ ;  
 $\cos \alpha = 0.8$ ;  $\sin \alpha = 0.6$ ;  $q=P/72$

## Proprieta' geometriche e del materiale

elemento	L[cm]	A[cm <sup>2</sup> ]	I [cm <sup>4</sup> ]	cos $\alpha$	sin $\alpha$	E[Kg/cm <sup>2</sup> ]
1	365	64.51	416.23	0	1	14.2 10 <sup>6</sup>
2	457	64.51	416.23	0.8	0.6	14.2 10 <sup>6</sup>

## matrice topologica

aste	$u_x^i$	$u_y^i$	$\phi^i$	$u_x^j$	$u_y^j$	$\phi^j$
1	1	2	3	4	5	6
2	4	5	6	7	8	9

- condizioni al contorno:

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_7 = U_8 = U_9 = 0 \quad (4)$$

- carichi nodali

$$S^{eq} = - \begin{pmatrix} -qL_2/2 \\ 0 \\ -qL_2^2/12 \\ -qL_2/2 \\ 2P + 2P \\ qL_1^2/12 - 4P \cos \alpha L_4/8 \\ 0 \\ 2P \\ 4P \cos \alpha L_4/8 \end{pmatrix} \quad (5)$$

sistema risolvante  $K_{LL}U_L = S_{eq}$

$$\begin{pmatrix} K_{44}^1 + K_{11}^2 & K_{45}^1 + K_{12}^2 & K_{46}^1 + K_{13}^2 \\ K_{45}^1 + K_{12}^2 & K_{55}^1 + K_{22}^2 & K_{56}^1 + K_{23}^2 \\ K_{46}^1 + K_{13}^2 & K_{56}^1 + K_{23}^2 & K_{66}^1 + K_{33}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ -4P \\ 48P \end{pmatrix}$$

$$K^e = \frac{EJ}{l} \begin{pmatrix} 12 \sin^2 \alpha / l^2 & K_{21}^e & K_{31}^e & K_{41}^e & K_{51}^e & K_{61}^e \\ -12 \sin \alpha \cos \alpha / l^2 & 12 \cos^2 \alpha / l^2 & K_{32}^e & K_{42}^e & K_{52}^e & K_{62}^e \\ 6 \sin \alpha / l & -6 \sin \alpha / l & 4 & K_{43}^e & K_{53}^e & K_{63}^e \\ -12 \sin^2 \alpha / l^2 & 12 \sin \alpha \cos \alpha / l^2 & -6 \sin \alpha / l & 12 \sin^2 \alpha / l^2 & K_{54}^e & K_{64}^e \\ 12 \sin \alpha \cos \alpha / l^2 & -12 \cos^2 \alpha / l^2 & 6 \cos \alpha / l & -12 \sin \alpha \cos \alpha / l^2 & 12 \cos^2 \alpha / l^2 & K_{65}^e \\ 6 \sin \alpha / l & -6 \cos \alpha / l & 2 & -6 \sin \alpha / l & 6 \cos \alpha / l & 4 \end{pmatrix}$$

dove  $l = L^e$  essendo  $e$  l'elemento beam in esame.

- calcolo dei gradi di liberta' globali (Processing)

$$U_4 = 2.13 \times 10^{-4} P \text{ cm}$$

$$U_5 = -1.7297 \times 10^{-4} P \text{ cm ,}$$

$$U_6 = 0.961 \times 10^{-4} P \text{ rad}$$

- Calcolo degli sforzi nodali e delle reazioni vincolari in ogni elemento (Post-processing)

$$S^e = K^e U^e - S_{eq}^e \Rightarrow s^e = R^e S^e$$