

L' analisi matriciale

L' analisi matriciale consente un'analisi accurata e rapida di strutture anche complesse sottoposte sia a carichi dinamici che statici.

Si basa sul concetto di sostituire la struttura reale con un modello equivalente fatto di elementi strutturali discreti aventi proprietà elastiche ed inerziali note ed esprimibili sotto forma di matrici.

Il calcolo in campo elastico delle strutture è generalmente riconducibile ad una sequenza di operazioni matriciali.

*Mentre, nel metodo delle forze, le incognite primarie del problema sono le **reazioni iperstatiche** di una struttura, nel metodo degli spostamenti, le incognite primarie del problema sono le **componenti di movimento (spostamenti e rotazioni) dei nodi della struttura**.*

Quando si opera per via automatica, il metodo degli spostamenti è preferibile. Esso non richiede infatti alcuna scelta delle incognite, poiché sono fissate univocamente dallo schema strutturale nel quale si opera. Il metodo dell'analisi matriciale si basa pertanto sul metodo degli spostamenti.

Il modello strutturale

Da JS Przemieniecki, Theory of matrix structural analysis, Dover, 1968

*Il passo fondamentale nel calcolo matriciale delle strutture riguarda la formulazione di un **modello matematico discreto** che idealizzi la struttura effettiva. Il modello discreto e' necessario allo scopo di avere un sistema con un **numero finito di gradi di liberta'** che si presti ad essere studiato con il metodo dell'analisi matriciale. La formulazione del modello strutturale si basa su principi di equivalenza energetica tra il sistema continuo e quello discreto. Per certi tipi di strutture, quelle costituite da elementi strutturali collegati da nodi discreti, come le strutture **reticolari ed i telai**, il modello discreto consente la soluzione **esatta** del problema.*

Quando le connessioni tra elementi strutturali non sono modellabili sotto forma di vincoli discreti allora il modello strutturale rappresenta un'approssimazione del modello reale.

Se gli elementi strutturali della struttura reale sono connessi da giunti discreti (NODI), l'interazione tra i singoli elementi viene introdotta sotto forma di forze o spostamenti nodali.

Strutture reticolari (pin-jointed truss) e telai con nodi rigidi (rigidely-connected beams) sono esempi di strutture connesse attraverso nodi. Le interazioni tra gli elementi strutturali in un telaio si rappresentano come forze nodali (taglio e sforzo normale) e momenti flettenti e torcenti. In tali casi, le teorie elementari di flessione e torsione consentono direttamente di arrivare alla formulazione matriciale.

Qualora la struttura reale non sia rappresentabile attraverso elementi strutturali collegati da giunti nodali, occorre invece utilizzare il metodo degli elementi finiti.

Analisi matriciale di telai e reticolari

La soluzione si presta ad essere organizzata secondo una sequenza di fasi logiche:

- a** Definizione delle azioni interne nelle sezioni di estremità di ogni trave per effetto dei carichi e degli spostamenti
- b** Utilizzo delle azioni interne del punto a) per la formulazione automatica del sistema di equazioni di equilibrio in termini di spostamento
- c** Determinazione delle componenti di spostamento incognite come soluzione del sistema di equazioni di equilibrio.
- d** Calcolo delle sollecitazioni di ogni trave dovuti ai carichi ed agli spostamenti.

Richiami

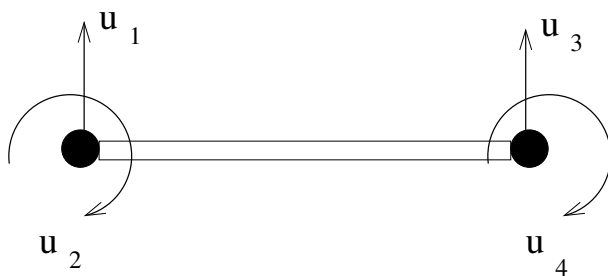
- matrice di rigidezza dell'elemento **ASTA**

$$k^e = \begin{pmatrix} u_1 & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ u_2 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{pmatrix} \quad (1)$$



- matrice di rigidezza dell'elemento **TRAVE**

$$k^e = \begin{pmatrix} u_1 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ u_2 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ u_3 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ u_4 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{pmatrix} \quad (2)$$



Strutture reticolari: l'elemento asta

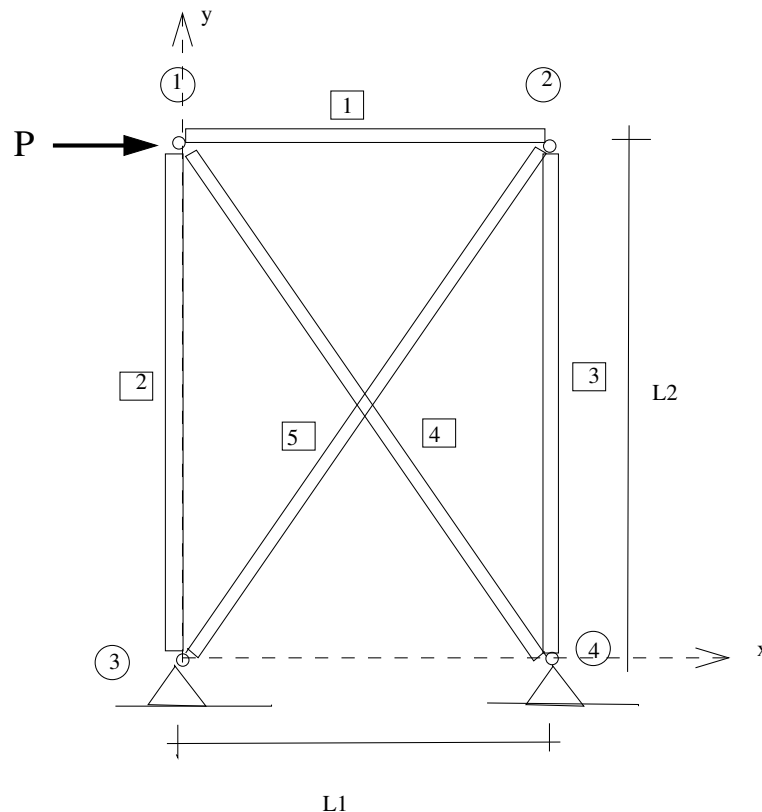


Figure 1: $L1=1.5$ m, $L2=2$ m.

- Aste (elemento **rod**) di una reticolare (**truss**) soggette solo a deformazioni assiali
- (x, y) il riferimento *globale* o *esterno* generica asta (elemento e) viene riferita ad un riferimento *locale* (x^e, y^e) avente origine nel primo nodo i
- $L^e = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$ rappresenta la lunghezza dell'asta, E^e il modulo di Young ed A^e l'area della sezione trasversale

- s^e : vettore degli sforzi nodali locali
- u^e : vettore degli spostamenti nodali locali

$$s^e = \begin{pmatrix} s_1^e \\ s_2^e \end{pmatrix} = \frac{E^e A^e}{L^e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} \quad (3)$$

L'equazione (3) scritta in forma compatta diventa:

$$s^e = k^e u^e \quad (4)$$

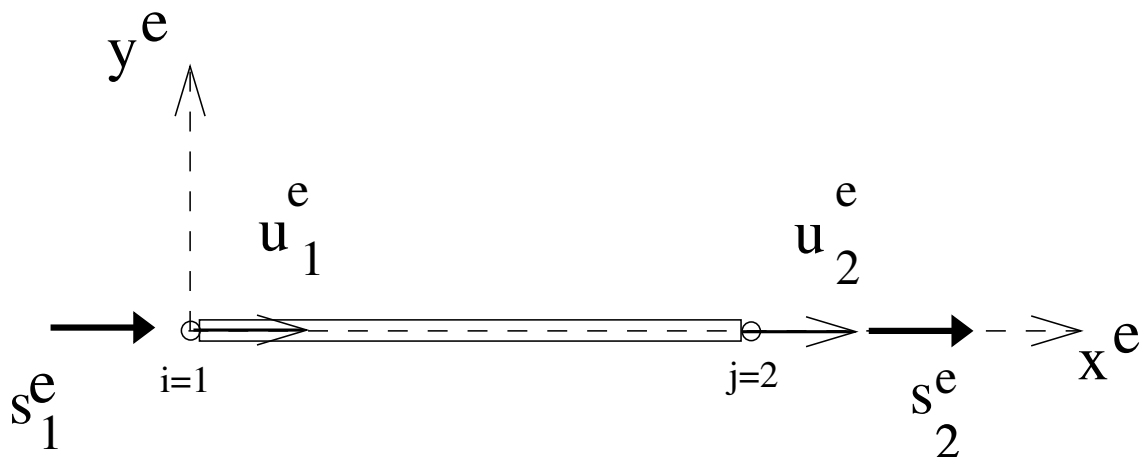


Figure 2:

NB: il generico coefficiente di rigidezza k_{ij} rappresenta lo sforzo nodale s_j^e corrispondente ad un movimento u_i unitario nel riferimento locale.

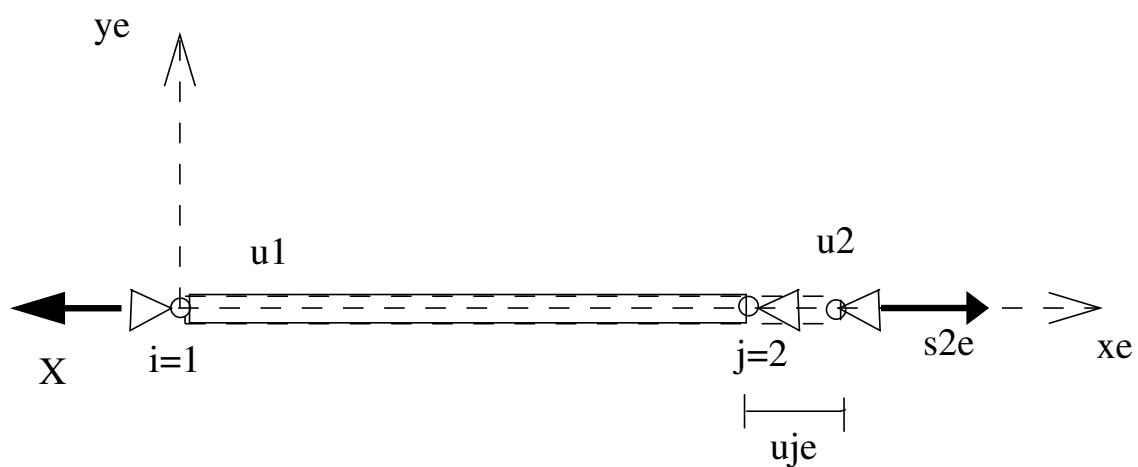


Figure 3:

$$\frac{XL^e}{E^e A^e} = 1,$$

$$s_i = k_{ij}^e = -X = -\frac{E^e A^e}{L^e}$$

$$s_j = k_{jj}^e = X = \frac{E^e A^e}{L^e}.$$

Le equazioni di equilibrio vanno scritte nel riferimento globale. Tuttavia, il riferimento globale (esterno) in generale e' distinto da quello locale.

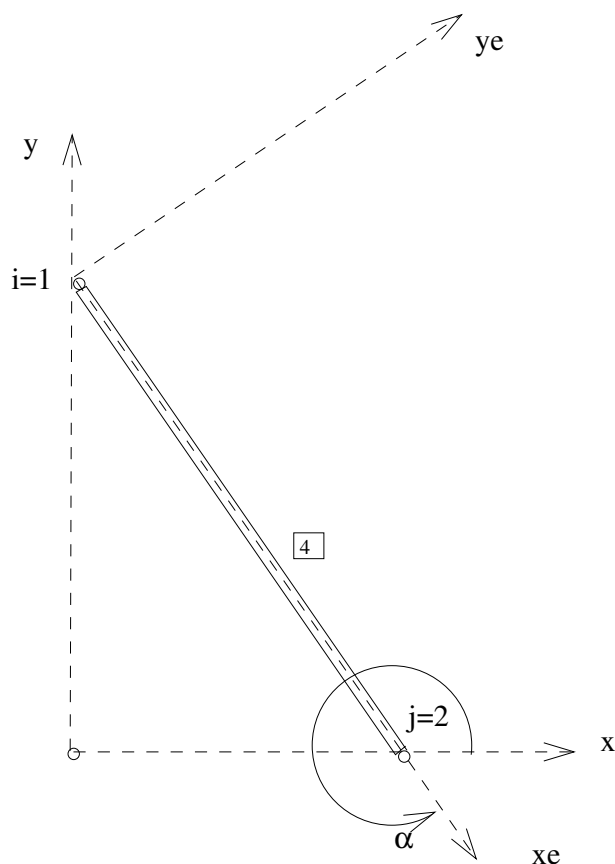


Figure 4:

Per l'asta 4 si ha:

- nodo $i = 1$, $x_1 = 0$, $y_1 = 2$,
- nodo $j = 4$, $x_4 = 1.5$, $y_4 = 0$,
- lunghezza $L^4 = \sqrt{6.25} = 2.5$ m
- $\cos \alpha = \frac{x_j - x_i}{L^e} = \frac{1.5}{2.5}$; $\sin \alpha = \frac{y_j - y_i}{L^e} = -\frac{2}{2.5}$;

Dal riferimento locale a quello globale

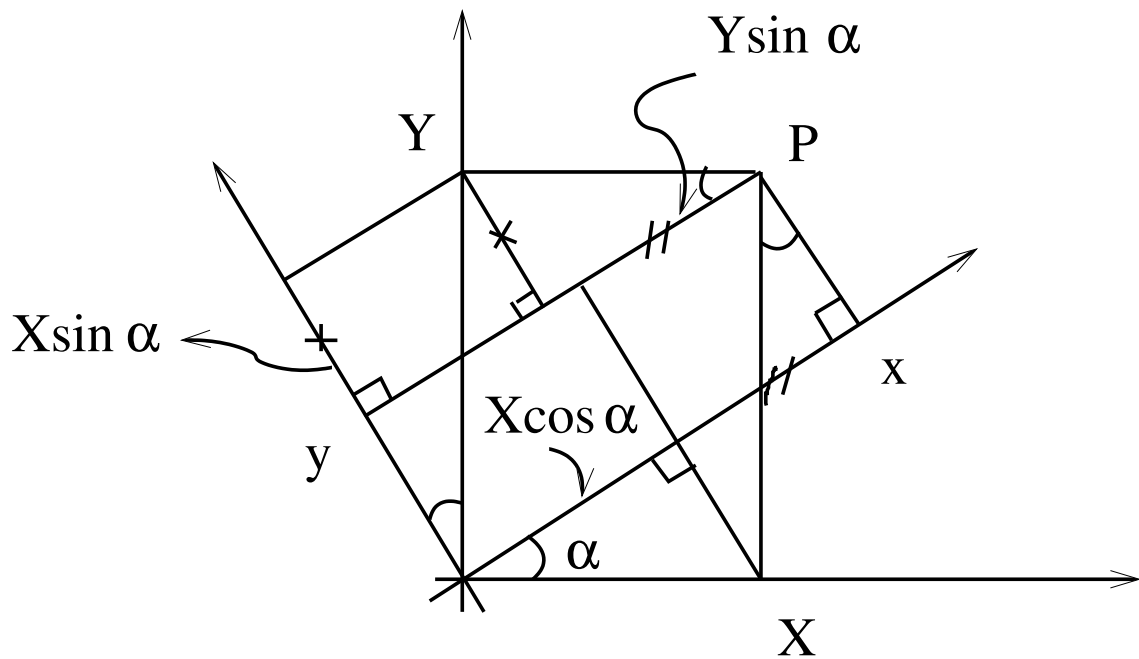


Figure 5:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \rightsquigarrow x = RX \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow X = R^t x \quad (6)$$

Dal riferimento locale a quello globale

Matrice di rotazione R^e dell'elemento e

$$R^e = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (7)$$

dove:

$$s^e = R^e S^e, \quad u^e = R^e U^e \quad (8)$$

- U^e ed S^e : vettore degli spostamenti e degli sforzi nel riferimento globale
- R^e è **ortonormale** (rotazione propria) tale che $R^e R^{eT} = I$, $R^{eT} = R^{e-1}$, $\det R^e = 1$ e quindi

$$S^e = R^{eT} s^e, \quad U^e = R^{eT} u^e \quad (9)$$

Sostituendo $s^e = k^e u^e$ si ottiene

$$S^e = R^{eT} s^e = R^{eT} k^e u^e = R^{eT} k^e R^e U^e \quad (10)$$

$\Rightarrow S^e = K^e U^e$ dove $K^e = R^{eT} k^e R^e$ è la matrice di rigidezza nel riferimento globale.

Matrice di rigidezza nel riferimento globale

$$K^e = R^{eT} k^e R^e$$

dove

$$R^e = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1^e \\ 0 \\ u_2^e \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ U_3^e \\ U_4^e \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_1^e \\ 0 \\ s_2^e \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^e \\ S_2^e \\ S_3^e \\ S_4^e \end{pmatrix}$$

$$K^e = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & k & -k \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

ovvero:

$$K^e = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

dove $k = \frac{EA}{l_e}$

Assemblaggio

Proprietà di *sommabilità* delle matrici di rigidezza:
La matrice di rigidezza dell'intera struttura K può essere ottenuta per addizione diretta di coefficienti di rigidezza omologhi delle singole aste calcolati nel riferimento globale.

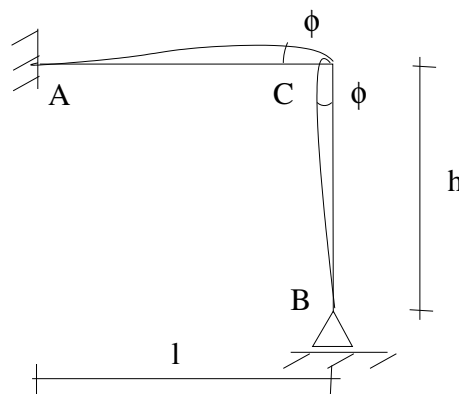


Figure 6: Ad es., la rigidezza alla rotazione del nodo C della struttura in figura 5 e' data dalla somma della rigidezza delle aste concorrenti nel nodo. EJ e' assunto costante

In particolare, la rigidezza alla rotazione ρ_C^R diventa

$$\rho_C^R = \rho_{CA}^R + \rho_{CB}^R = \frac{4EJ}{l} + \frac{3EJ}{h} \quad (11)$$

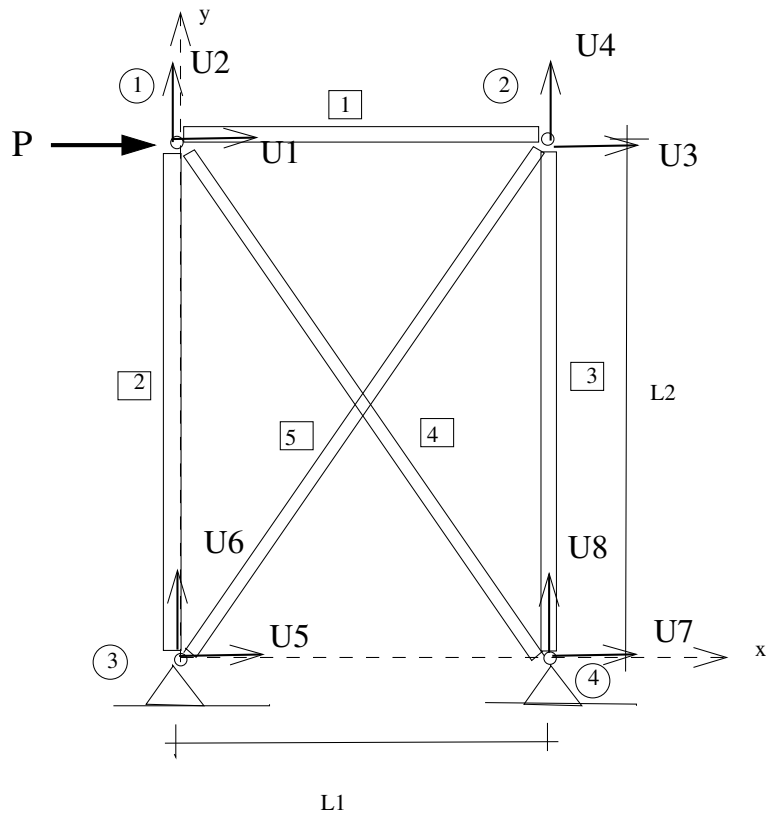


Figure 7: Figura 6, EA e' assunto costante

U il vettore degli spostamenti generalizzati

$$U^t = [U_1 U_2 U_3 \dots U_7 U_8] \quad (12)$$

numerati secondo il sistema globale.

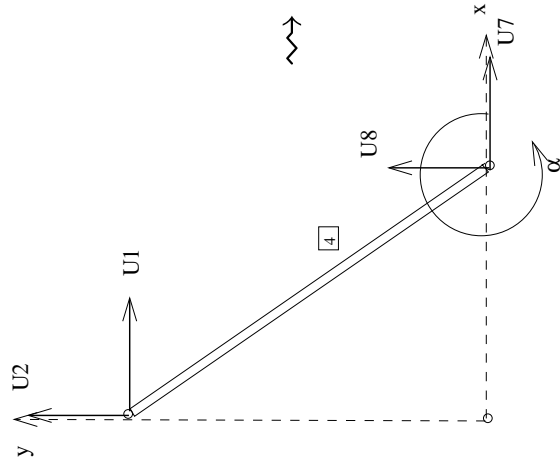
Un esempio di matrice topologica: CALFEM

- 1 viene fissata una numerazione di nodo e di elemento;
- 2 Si scrivono per ogni elemento i gradi di liberta' ad esso afferenti:

<i>elemento</i>	u_x^i	u_y^i	u_x^j	u_y^j	(13)
1	1	2	3	4	
2	5	6	1	2	
3	3	4	7	8	
4	1	2	7	8	
5	3	4	5	6	

- 3 Si ripercorre la struttura elemento per elemento generando la matrice di rigidezza nel riferimento globale.

La conoscenza del grado di liberta' mediante l'identificatore consente di conoscere in quale posizione della matrice di rigidezza globale K sommare i singoli coefficienti K_{ij}^e



$$\rightsquigarrow K =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline K_{11}^4 & K_{12}^4 & & & & & K_{13}^4 & K_{14}^4 \\ K_{21}^4 & K_{22}^4 & & & & & K_{23}^4 & K_{24}^4 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & K_{33}^4 & K_{34}^4 \\ & & & & & & K_{43}^4 & K_{44}^4 \end{bmatrix}$$

$$K^4 = R^{4T} k^4 R^{4T} \quad (14)$$

U_1	U_2	U_3	U_4
U_1	$K_{11}^4 + K_{11}^1 + K_{33}^2$	K_{13}^1	K_{14}^1
U_2	$K_{12}^4 + K_{12}^1 + K_{34}^2$	K_{23}^1	K_{11}^1
U_3	K_{13}^1	$K_{33}^1 + K_{11}^3 + K_{12}^5$	$K_{12}^3 + K_{12}^5 + K_{22}^5 + K_{22}^5$
U_4	K_{14}^1	$K_{12}^3 + K_{12}^5$	$K_{44}^1 + K_{22}^5 + K_{22}^5$
U_5	K_{12}^2	K_{13}^5	K_{23}^5
U_6	K_{13}^2	K_{14}^5	K_{24}^5
U_7	K_{23}^2	K_{13}^3	K_{23}^3
U_8	K_{31}^4	K_{14}^3	K_{23}^3
	K_{41}^4	K_{14}^4	K_{24}^3
U_7			
U_8			
U_1	K_{13}^2	K_{13}^4	K_{14}^4
U_2	K_{14}^2	K_{23}^4	K_{24}^4
U_3	K_{15}^5	K_{13}^3	K_{14}^3
U_4	K_{23}^5	K_{23}^3	K_{24}^3
U_5	$K_{11}^2 + K_{33}^5$	0	0
U_6	$K_{12}^2 + K_{34}^5$	0	0
U_7	0	$K_{33}^4 + K_{33}^3$	$K_{34}^4 + K_{34}^3$
U_8	0	K_{43}^4	$K_{44}^4 + K_{44}^3$

Carichi applicati sui nodi

In fase di input, vengono assegnate per ogni nodo le forze esterne direttamente secondo il riferimento globale. Mediante la matrice di identificazione ID, i carichi vengono poi associati al grado di libert . Poich  i carichi concentrati possono generalmente sia essere applicati sui nodi che in punti diversi dai nodi, occorre trasformarli in carichi nodali equivalenti. Analogamente, i carichi distribuiti devono essere trasformati in carichi nodali equivalenti.

- i carichi vengono trasformati in *carichi nodali equivalenti* S_{eq}
- NB: S_{eq} possono anche essere visti come reazioni di vincolo perfetto cambiate di segno
In tal caso, per il principio di sovrapposizione degli effetti, per il singolo elemento e lo sforzo **globale** agente   dato da

$$S^e = K^e U^e - S_{eq}^e. \quad (15)$$

- In alternativa, si osservi che il vettore $-S_{eq}^e$ rappresenta proprio le reazioni di incastro perfetto

Carichi applicati sui nodi

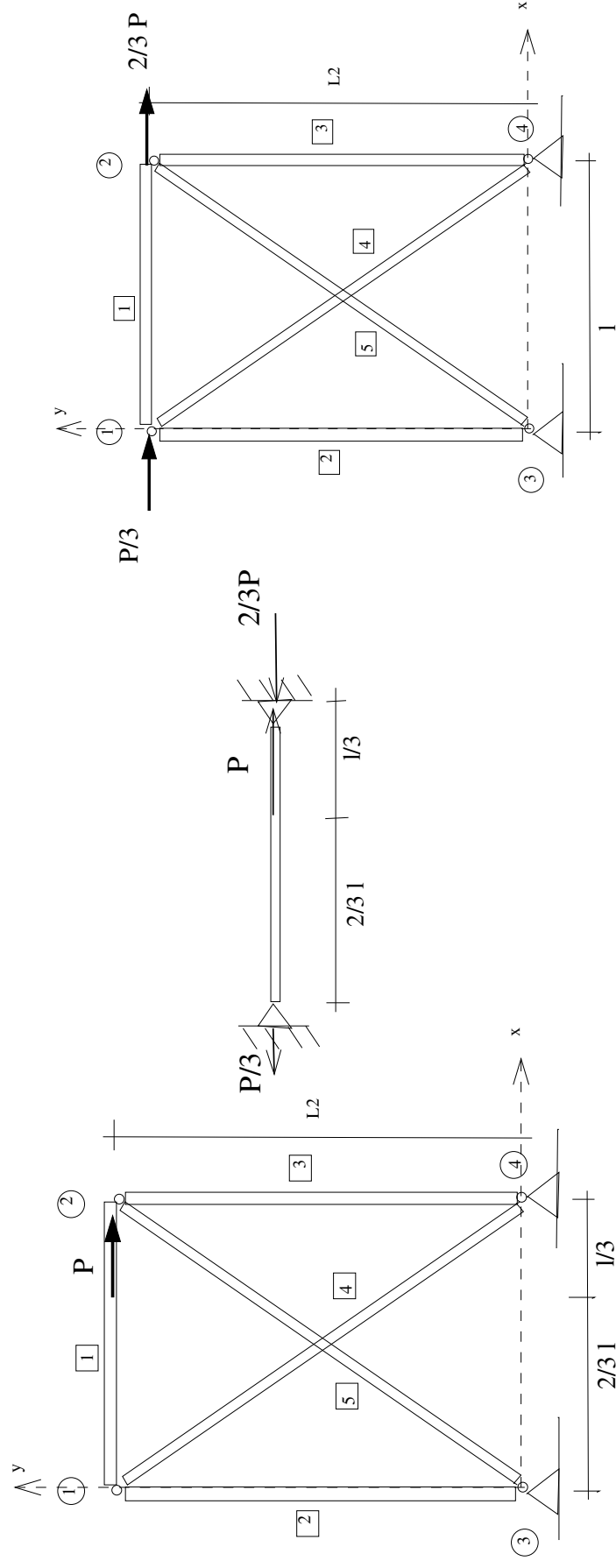


Figure 8: Esempio 1

Carichi o distorsioni applicati sull'elemento

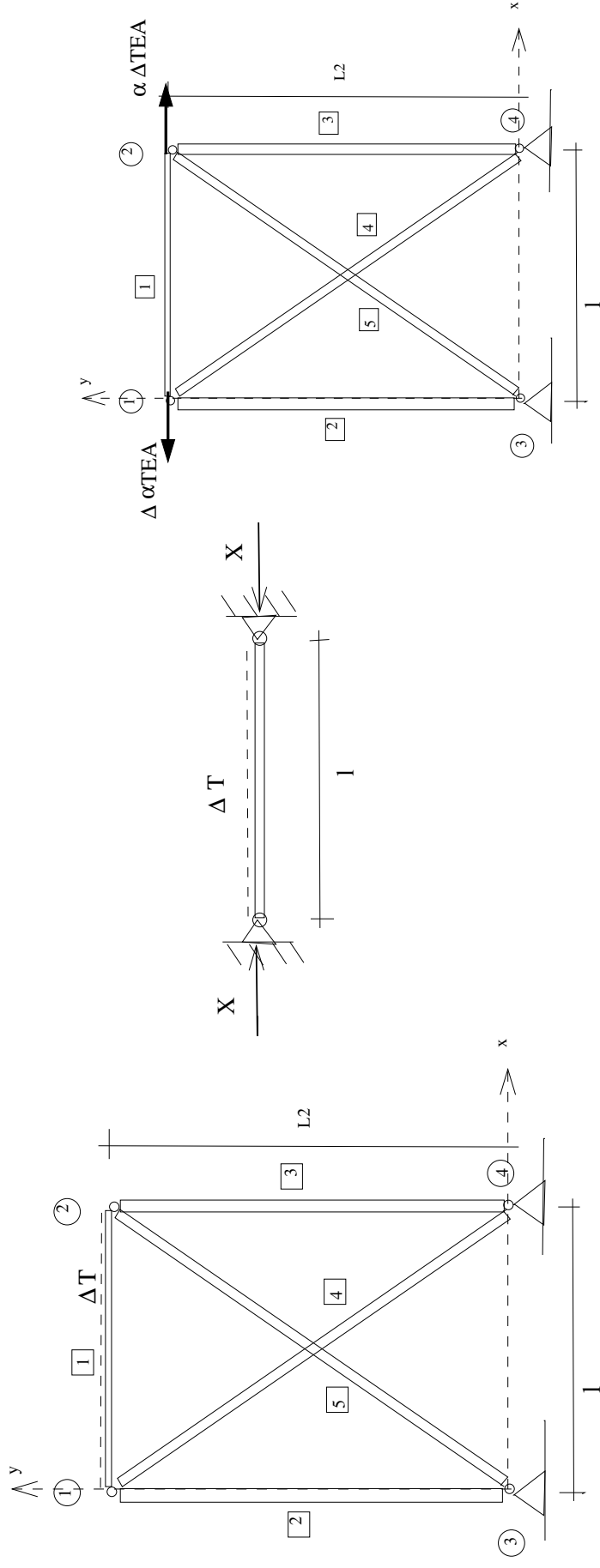


Figure 9: $\alpha \Delta T l = \frac{Xl}{EA}$, $X = \alpha \Delta T EA$. L'assemblaggio del vettore dei carichi nodali consiste nel sommare equazione per equazione i contributi dei carichi direttamente applicati ai nodi e dei carichi nodali equivalenti.

Imposizione delle condizioni di vincolo

- vincoli vengono supposti perfetti, ovvero lisci e bilateri.
- gradi di liberta' U (*spostamenti generalizzati*) dell'intera struttura

$$U^T = [U_l^T \quad U_0^T] \quad (16)$$

U_L : vettore dei gradi di liberta' liberi (incogniti)

U_o indica il vettore dei gradi di liberta' assegnati.

- vettore dei carichi F

$$F^T = [\bar{F}^T \quad R^T] \quad (17)$$

\bar{F} : vettore dei carichi assegnati;

R : vettore delle reazioni vincolari.

L'assemblaggio delle matrici di rigidezza elementari e del vettore dei carichi nodali fornisce il modello algebrico del comportamento di una struttura in campo lineare.

Il sistema di equazione che si ottiene rappresenta le equazioni di equilibrio di tutti i nodi

$$KU = F \rightsquigarrow \begin{pmatrix} K_{LL} & K_{L0} \\ K_{0L} & K_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_L \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F} \\ R \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{cases} K_{LL}U_L + K_{L0}U_0 = \bar{F} \\ K_{0L}U_L + K_{00}U_0 = R \end{cases} \quad (19)$$

da cui

$$U_L = K_{LL}^{-1}(\bar{F} - K_{L0}U_0) \quad (20)$$

OSS: Si mette da parte la riga corrispondente ai gradi di libert  vincolati U_0 , si risolve il sistema di equazioni che corrispondono ai gradi di libert  U_L

OSS: *Se i vincoli sono rigidi: $U_0 = 0$ e quindi le incognite nodali si calcolano come:*

$$U_L = K_{LL}^{-1}\bar{F} \quad (21)$$

K_{LL} : *matrice di rigidezza della struttura dopo avere tenuto conto dei vincoli.*

Proprietà di K_{LL}

- 1 Posto che la struttura non sia labile, la soluzione del sistema (19) esiste ed è unica (teorema di Kirchhoff). Pertanto la matrice K_{LL} deve essere non singolare ($\det K_{LL} \neq 0$)
- 2 La matrice di rigidezza K_{LL} è simmetrica (Teorema di Betti-Maxwell); si memorizza e/o costruisce solo metà di essa.
- 3 La simmetria di K o di K_{LL} comporta che $\delta U^T(KU - F) = \delta \Pi(U)$ sia un differenziale esatto e $\delta \Pi(U) = 0$ rappresenti la condizione di stazionarietà dell'Energia Potenziale Totale della struttura:

$$\Pi(U) = \frac{1}{2}U^T KU - U^T F \quad (22)$$

Tra tutti i campi di spostamento cinematicamente ammissibili (congruenti e che verificano le condizioni di vincolo), rappresentati dai parametri Lagrangiani U , quello che verifica le equazioni di equilibrio rende minima l'Energia Potenziale Totale (22). Si noti che in assenza di vincoli l'EPT risulta solo debolmente convessa e K_{LL} semi-definita positiva.

4 matrice K_{LL} , matrice Hessiana della EPT della struttura vincolata, risulta pertanto definita positiva. Quindi, condizione necessaria e sufficiente affinché K_{LL} sia definita positiva e' che:

- tutti gli autovalori di K_{LL} siano positivi (si ricordi che $\det K_{LL} = \prod_i^n \lambda_i > 0$)
- tutti i minori principali e quindi anche tutti i termini sulla diagonale principale sono positivi
- inoltre, risulta che $U^T K_{LL} U \geq 0$, per ogni U_L e $U^T K_{LL} U = 0$ sse $U_L = 0$.

Se sono possibili moti rigidi la matrice K_{LL} risulta semidefinita positiva ed ha determinate nullo; inoltre ad ogni atto di moto rigido corrisponde un autovalore nullo.

5 La matrice K_{LL} e' sparsa; in particolare, i termini diversi da zero sono addensati in prossimita' della diagonale principale (matrice *a banda*), e la dimensione della banda dipende dalla numerazione dei nodi. Cio' riduce di molto l'onere di calcolo del sistema e lo spazio di memoria necessario.

Esercizi

La soluzione di un esercizio si articola nelle seguenti fasi:

- Assemblaggio matrice di rigidezza
- Imposizione delle condizioni al contorno
- Soluzione sistema $KU = F$
- Calcolo delle reazioni vincolari

Aste in serie

La matrice topologica (connectivity matrix) assegna un numero di nodo globale ad ogni nodo dell'elemento. Per esempio, nel caso di aste in serie, la matrice topologica diventa

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \\ I_{31} & I_{32} \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (23)$$

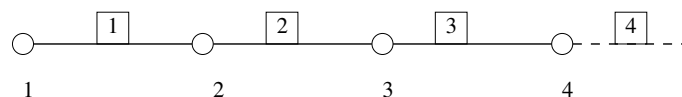


Figure 10: Aste in serie

Aste in parallelo ed in serie

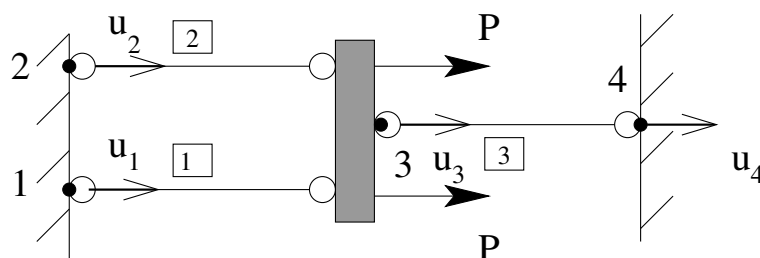


Figure 11:

DATI: E_i , area della sezione trasversale A_i ,
lunghezza l_i , con $i = 1, 2, 3$

matrice topologica: $ID = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

matrice di rigidezza

$$K = \begin{pmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 & -\frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 \\ 0 & \frac{E_2 A_2}{l_2} & -\frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{l_1} & -\frac{E_2 A_2}{l_2} & \sum_i^3 \frac{E_i A_i}{l_i} & -\frac{E_3 A_3}{l_3} \\ 0 & 0 & -\frac{E_3 A_3}{l_3} & \frac{E_3 A_3}{l_3} \end{pmatrix}$$

sistema risolvente

$$\begin{pmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 & \frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 \\ 0 & \frac{E_2 A_2}{l_2} & \frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{l_1} & \frac{E_2 A_2}{l_2} & -\frac{E_1 A_1}{l_1} & \frac{E_2 A_2}{l_2} \\ 0 & 0 & \frac{E_3 A_3}{l_3} & \frac{E_3 A_3}{l_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 2P \\ R_4 \end{pmatrix} \quad (24)$$

- Si impongono le condizioni al contorno:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_4 = 0$$

Nella soluzione manuale, si tralasciano le equazioni di equilibrio relative ad u_1, u_2, u_4 : verranno usate alla fine per il calcolo delle reazioni vincolari.

- dalla equazione che governa l'equilibrio lungo u_3 si ha

$$u_3 = \frac{2P}{\frac{E_1 A_1}{l_1} + \frac{E_2 A_2}{l_2} + \frac{E_3 A_3}{l_3}} \quad (25)$$

- Le reazioni vincolari si calcolano attraverso le equazioni di equilibrio relative ai gradi di libert  vincolati ([post-processing](#)):

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 & -\frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 \\ 0 & \frac{E_2 A_2}{l_2} & -\frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E_3 A_3}{l_3} & \frac{E_3 A_3}{l_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

dove $u_1 = 0, u_2 = 0, u_4 = 0$ e $u_3 \neq 0$

Un esempio di struttura reticolare

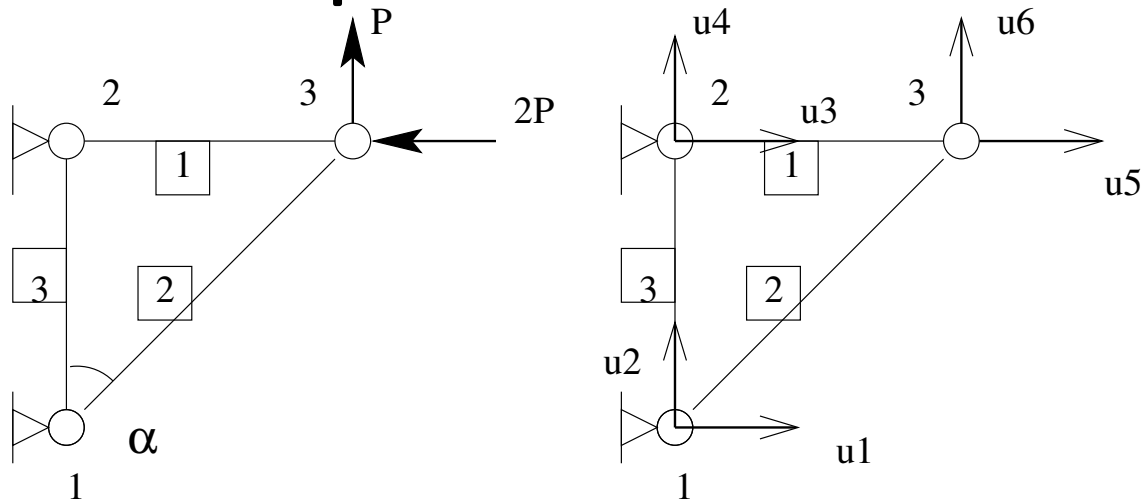


Figure 12: Reticolare

Vogliamo determinare gli spostamenti orizzontali e verticali del nodo 3 della struttura reticolare di figura 12.

nr. el.	nodì	Geom	Mat.	α
1	2 3	$A, l_1 = l$	E	0°
2	1 3	$A, l_2 = l\sqrt{2}$	E	45°
3	1 2	$A, l_3 = l$	E	90°

matrice topologica

$$ID = \begin{array}{c|cc|cc} \text{elemento} & u_x^i & u_y^i & u_x^j & u_y^j \\ \hline 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \quad (26)$$

matrice di rigidezza globale

$$K = \begin{pmatrix} K_{11}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^2 + K_{12}^3 & K_{13}^3 & K_{14}^3 & K_{13}^2 & K_{14}^2 & K_{14}^3 \\ K_{22}^2 + K_{22}^3 & & K_{23}^3 & K_{24}^3 & K_{23}^2 & K_{24}^2 & K_{24}^3 \\ & K_{11}^1 + K_{33}^3 & & K_{34}^3 + K_{12}^1 & K_{13}^1 & & K_{14}^1 \\ & & K_{44}^3 + K_{22}^1 & & K_{23}^1 & & K_{24}^1 \\ & & & & K_{33}^1 + K_{33}^2 & & K_{34}^1 + K_{34}^2 \\ & & & & & & K_{44}^1 + K_{44}^2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

vettore delle forze nodali :

$$F = \begin{pmatrix} F_1^3 + F_1^2 \\ F_2^3 + F_2^2 \\ F_3^3 + F_1^1 \\ F_4^3 + F_2^1 \\ -2P \\ P \end{pmatrix} \quad (28)$$

- Si impongono le condizioni al contorno:

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$$

Nella soluzione manuale, si “tralasciano” le equazioni di equilibrio relative ad u_1, u_2, u_3, u_4 ; verranno recuperate alla fine per il calcolo delle reazioni vincolari

- Dalle equazioni relative ad u_5 ed u_6 , si ha:

$$\frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1.3536 & 0.3536 \\ 0.3536 & 0.3536 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2P \\ P \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_5 = -\frac{3Pl}{EA}, \quad u_6 = (3 + 2\sqrt{2})\frac{Pl}{EA} = 5.828\frac{Pl}{EA}$$

- Dalle equazioni relative ad u_1, u_2, u_3, u_4 , si calcolano le reazioni vincolari:

$$F = \begin{pmatrix} F_1^3 + F_1^2 \\ F_2^3 + F_2^2 \\ F_3^3 + F_1^1 \\ F_4^3 + F_2^1 \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} -0.3536 & -0.3536 \\ -0.3536 & -0.3536 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}$$

dove si e' gia' sostituito $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$.