

# **Richiami sull'uso del metodo degli elementi finiti per il calcolo del carico critico di aste presso-inflesse**

**Ci poniamo la seguente domanda:**

**Qual è l'errore che si commette nel considerare 1 o 2 elementi finiti Hermitiani cubici (esatti per l'analisi statica della trave caricata ai nodi)?**

# Richiami sull'uso del metodo degli elementi finiti per il calcolo del carico critico di aste presso-inflesse

**Tabella 15.4**

| Caso   | Coeff.vincolo esatto $x$ | Coeff.vincolo 1 EF $x_1$ | Coeff.vincolo 2 EF $x_2$ | Errore 1EF $(x_1 - x)/x$ | Errore 2EF $(x_2 - x)/x$ |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a)    | 1.0                      | 1.216                    | 1.008                    | 21.6%                    | 0.8%                     |
| b)    | 0.250                    | 0.252                    | ---                      | 0.8%                     | ---                      |
| c)    | 2.046                    | 3.040                    | 2.098                    | 48.6%                    | 2.6%                     |
| d)   | 4.0                      | $\infty$                 | 4.053                    | $\infty$                 | 1.3%                     |
| e)  | 1.0                      | 1.013                    | ---                      | 1.3%                     | ---                      |
| f)  | 0.250                    | 0.252                    | ---                      | 0.8%                     | ---                      |

## **Richiami sull'uso del metodo degli elementi finiti per il calcolo del carico critico di aste presso-inflesse**

**L'errore che si commette con 1 EF è inaccettabile quando il grado di libertà traslazionale in direzione ortogonale all'asse della trave dei nodi risulta nullo per via dei vincoli**

**Lo schema EF per funzionare bene necessita di avere come incognite nodali almeno 1 grado di libertà traslazionale**

**Inoltre, occorre attenzione anche in caso di molle traslazionali che limitano lo spostamento**

# Richiami sull'uso del metodo degli elementi finiti per il calcolo del carico critico di aste presso-inflesse

**Infatti la soluzione esatta in termini del campo di spostamento del problema della stabilità dell'asta presso-inflessa**

$$\mathbf{v}^{\text{iv}}(\mathbf{x}) + \alpha^2 \mathbf{v}^{\text{ii}}(\mathbf{x}) = 0$$

**Sotto le condizioni al contorno**

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{U}_1, \quad \mathbf{v}'(0) = \mathbf{U}_2, \quad \mathbf{v}(\ell) = \mathbf{U}_3, \quad \mathbf{v}'(\ell) = \mathbf{U}_4$$

**Risulta**

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \Phi_1(\mathbf{x})\mathbf{U}_1 + \Phi_2(\mathbf{x})\mathbf{U}_2 + \Phi_3(\mathbf{x})\mathbf{U}_3 + \Phi_4(\mathbf{x})\mathbf{U}_4$$

# Richiami sull'uso del metodo degli elementi finiti per il calcolo del carico critico di aste presso-inflesse

## Risulta

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \Phi_1(\mathbf{x})\mathbf{U}_1 + \Phi_2(\mathbf{x})\mathbf{U}_2 + \Phi_3(\mathbf{x})\mathbf{U}_3 + \Phi_4(\mathbf{x})\mathbf{U}_4$$

## Dove

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = 1 - \Phi_3(\mathbf{x}), \quad \Phi_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \Phi_4(\mathbf{x}) - \ell\Phi_3(\mathbf{x})$$

$$\Phi_3(\mathbf{x}) = \frac{\sin \alpha \ell (\alpha \mathbf{x} - \sin \alpha \mathbf{x}) - (1 - \cos \alpha \ell)(1 - \cos \alpha \mathbf{x})}{\alpha \ell \sin \alpha \ell - 2(1 - \cos \alpha \ell)}$$

$$\Phi_4(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{(\alpha \ell - \sin \alpha \ell)(1 - \cos \alpha \mathbf{x}) - (1 - \cos \alpha \ell)(\alpha \mathbf{x} - \sin \alpha \mathbf{x})}{\alpha \ell \sin \alpha \ell - 2(1 - \cos \alpha \ell)} \right]$$

**Pertanto è evidente che una soluzione cubica polinomiale non rappresenta in nessun modo la soluzione esatta del problema**

# Stabilità di telai elasto-plastici

**Le aste presso-inflesse hanno un comportamento non lineare in quanto la rigidezza flessionale diminuisce a causa della compressione**

**Tuttavia è possibile affrontarne lo studio mediante equazioni lineari negli spostamenti**

**Infatti l'energia si approssima al II ordine e la sua stazionarietà fornisce le equazioni di equilibrio**

# Stabilità di telai elasto-plastici

**Inoltre, lo sforzo normale risulta sempre staticamente determinato sin dall'inizio ed è possibile disaccoppiare la rigidezza flessionale da quella geometrica**

**Il contributo dovuto al cambio di geometria risulta poi proporzionale solo all'azione assiale**

**In sostanza, nelle aste presso-inflesse eseguiamo un calcolo linearizzato**

# Stabilità di telai elasto-plastici

**I telai sono invece sistemi iperstatici di aste presso-inflesse**

**Le azioni assiali in genere non sono staticamente determinate ma dipendono in modo non lineare dagli spostamenti**

**Pertanto, in generale, occorrerebbe un'analisi non lineare per poter stabilire l'entità delle azioni interne nei telai**

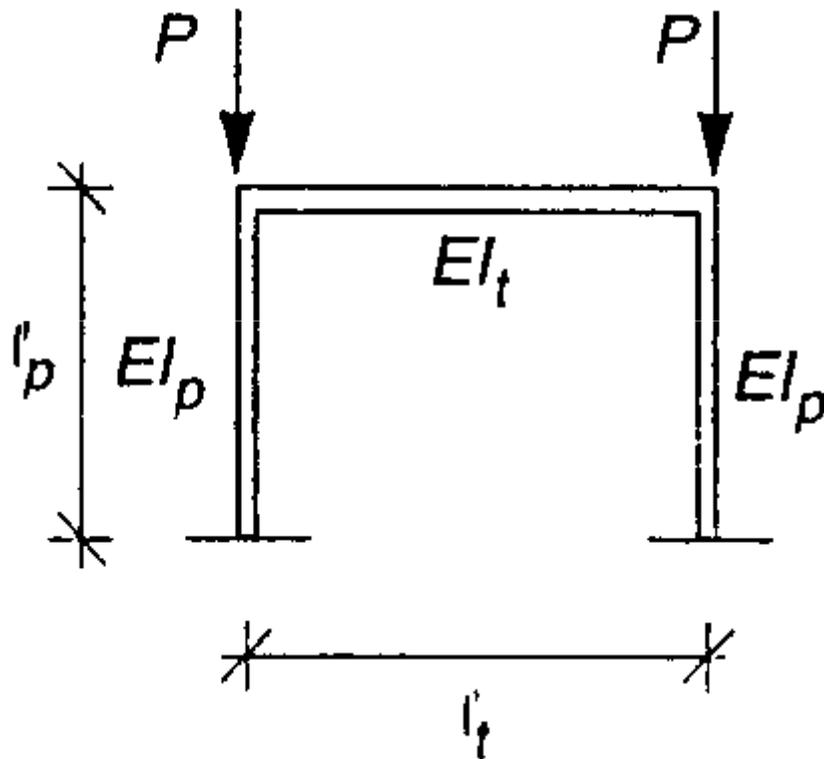
# Stabilità di telai elasto-plastici

**Spesso, a valle di un'analisi non-lineare, si constata che è tuttavia ancora possibile eseguire un'analisi linearizzata senza compromettere la validità dei risultati**

**Vediamo dapprima esempi semplici che configurano problemi di instabilità Euleriani**

**Solo in seguito considereremo casi caratterizzati da non-linearità pre-critica**

# 1° caso elementare: telaio simmetrico caricato simmetricamente non controventato

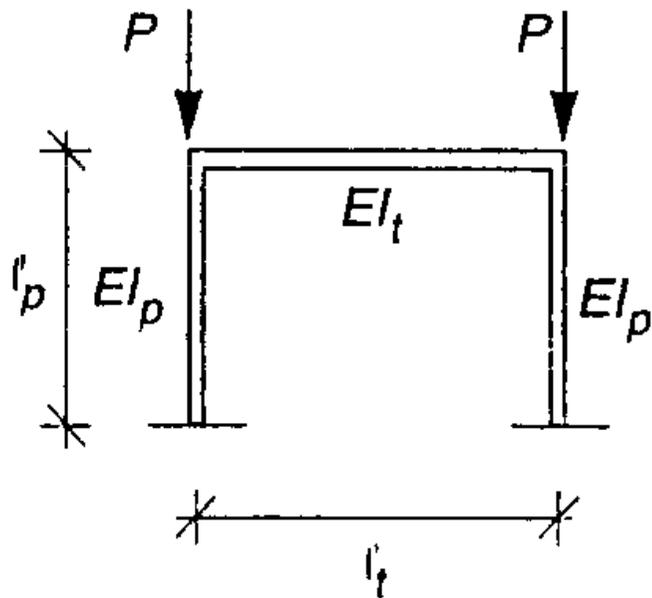


Per il telaio in figura si dimostra che sono possibili percorsi diramati a partire dalla configurazione fondamentale di tipo

- 1) **antisimmetrico**
- 2) **simmetrico**

# 1° caso elementare: telaio simmetrico caricato simmetricamente incastrato alla base

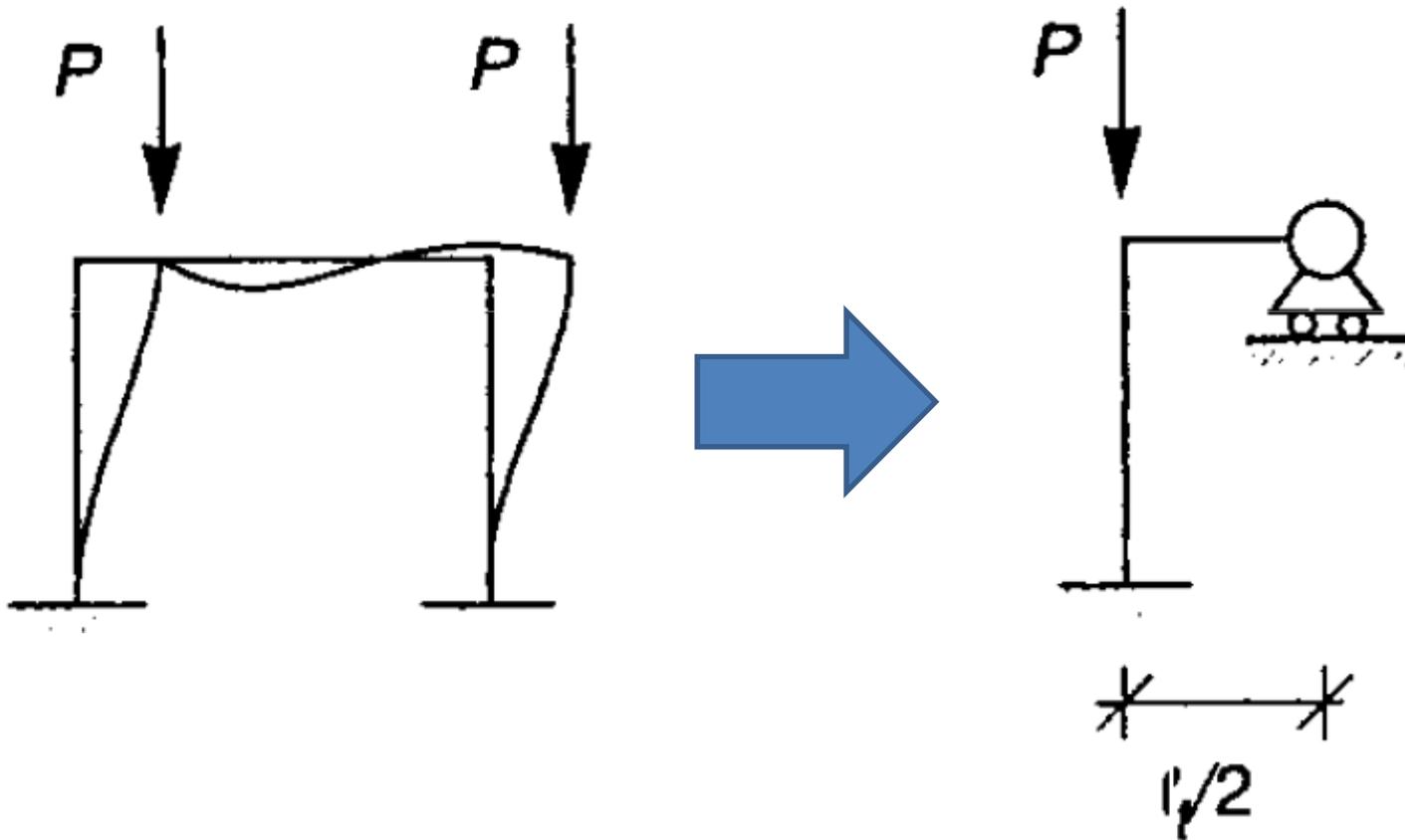
Prima di tutto definiamo i seguenti parametri adimensionali (t: trave, p: pilastro)



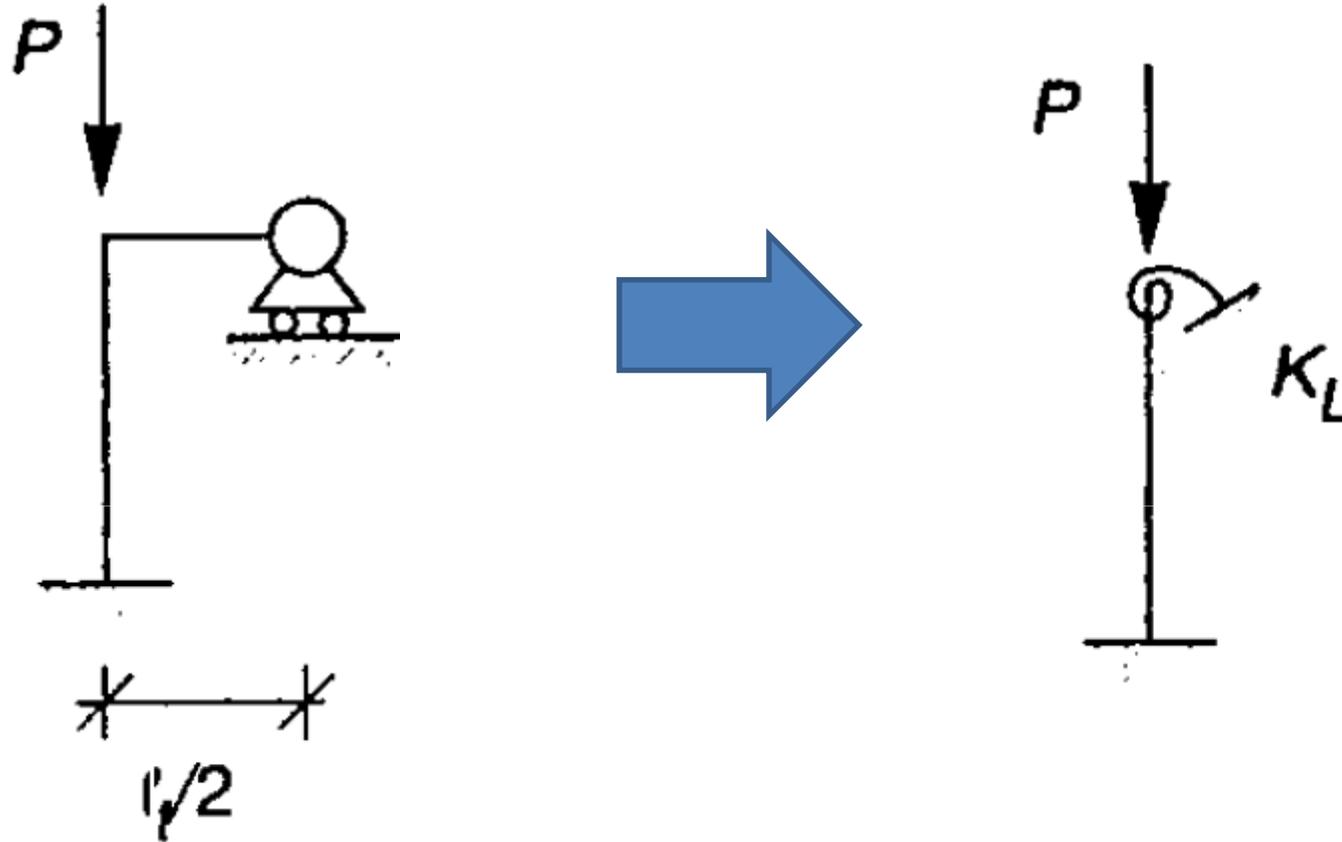
$$\mathbf{p} = \mathbf{P} \frac{l_p^2}{EI_p}$$

$$\Psi = \frac{EI_t}{EI_p} \frac{l_t}{l_p} = \frac{EI_t}{l_t} \frac{l_p}{EI_p}$$

# Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata antisimmetrica



# Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata antisimmetrica

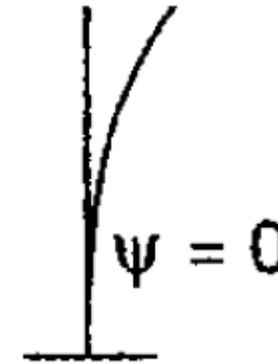


Dove 
$$\mathbf{K}_L = \frac{3\mathbf{EI}_t}{\frac{l_t}{2}} = \frac{6\mathbf{EI}_t}{l_t} = 6\psi \frac{\mathbf{EI}_p}{l_p}$$

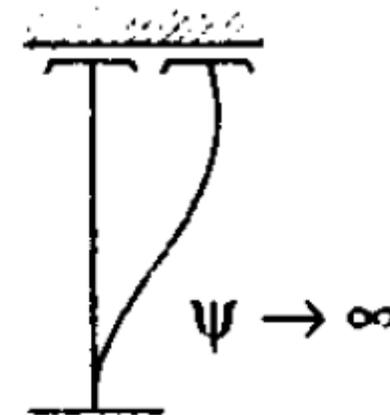
# Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata antisimmetrica



I° caso limite  
Trave molto  
flessibile  
 $\psi = 0$



II° caso limite  
Trave  
infinitamente  
rigida  
 $\psi = \infty$



$$K_L = 6\psi \frac{EI_p}{l_p}$$

# Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata antisimmetrica

I° caso limite-Trave molto flessibile

$$P_{EA} = \frac{\pi^2 EI_p}{(2l_p)^2} = \frac{\pi^2 EI_p}{4l_p^2}$$

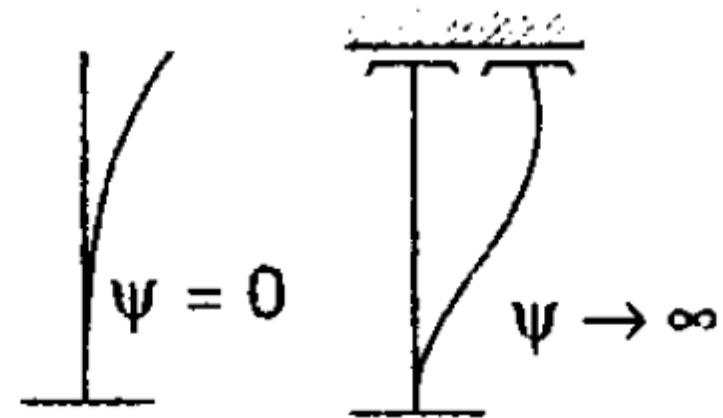
II° caso limite-

Trave infinitamente rigida

$$P_{EA} = \frac{\pi^2 EI_p}{l_p^2}$$

$$\frac{\pi^2}{4} \frac{EI_p}{l_p^2} \leq P = p_A \frac{EI_p}{l_p^2} \leq \pi^2 \frac{EI_p}{l_p^2} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\pi^2}{4} \leq p_A \leq \pi^2$$



# Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata antisimmetrica

**La stima**

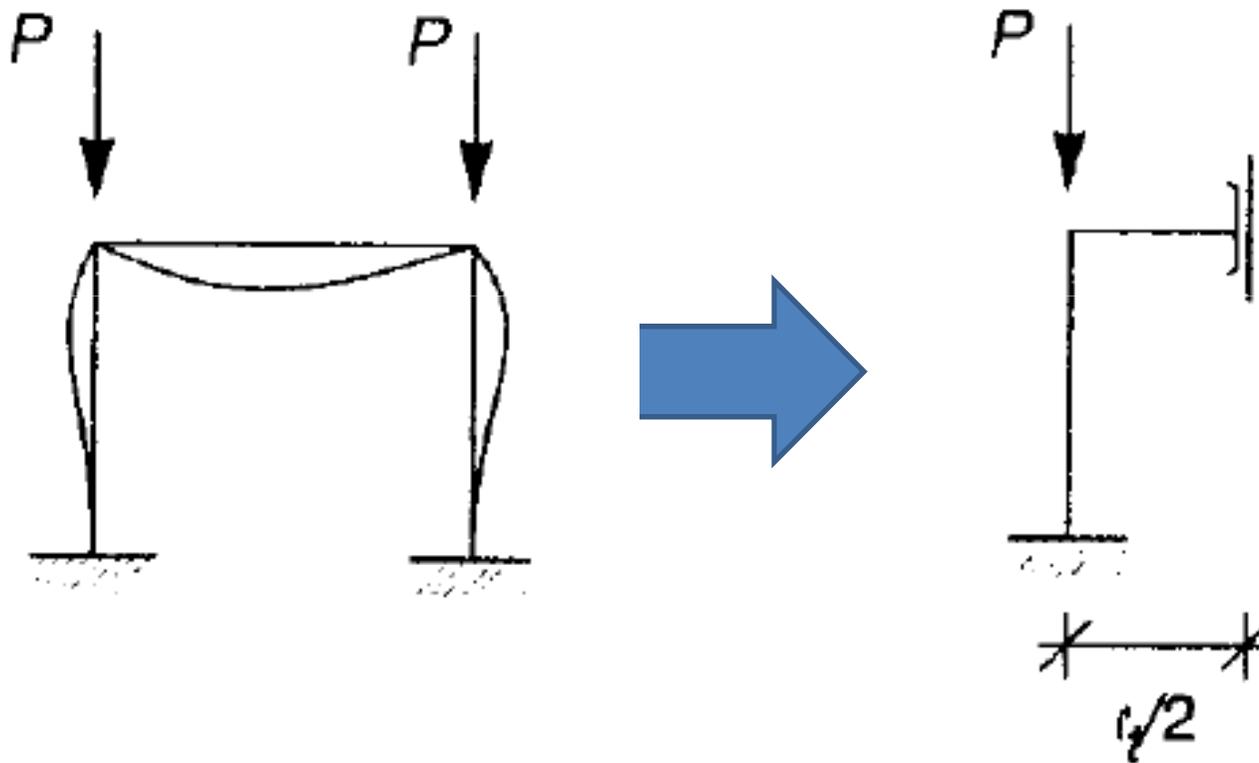
$$\frac{\pi^2}{4} \leq \mathbf{p}_A \leq \pi^2$$

**comporta un errore  $\leq 1.3\%$  rispetto ad un calcolo con 1EF hermitiano cubico con cui si ha**

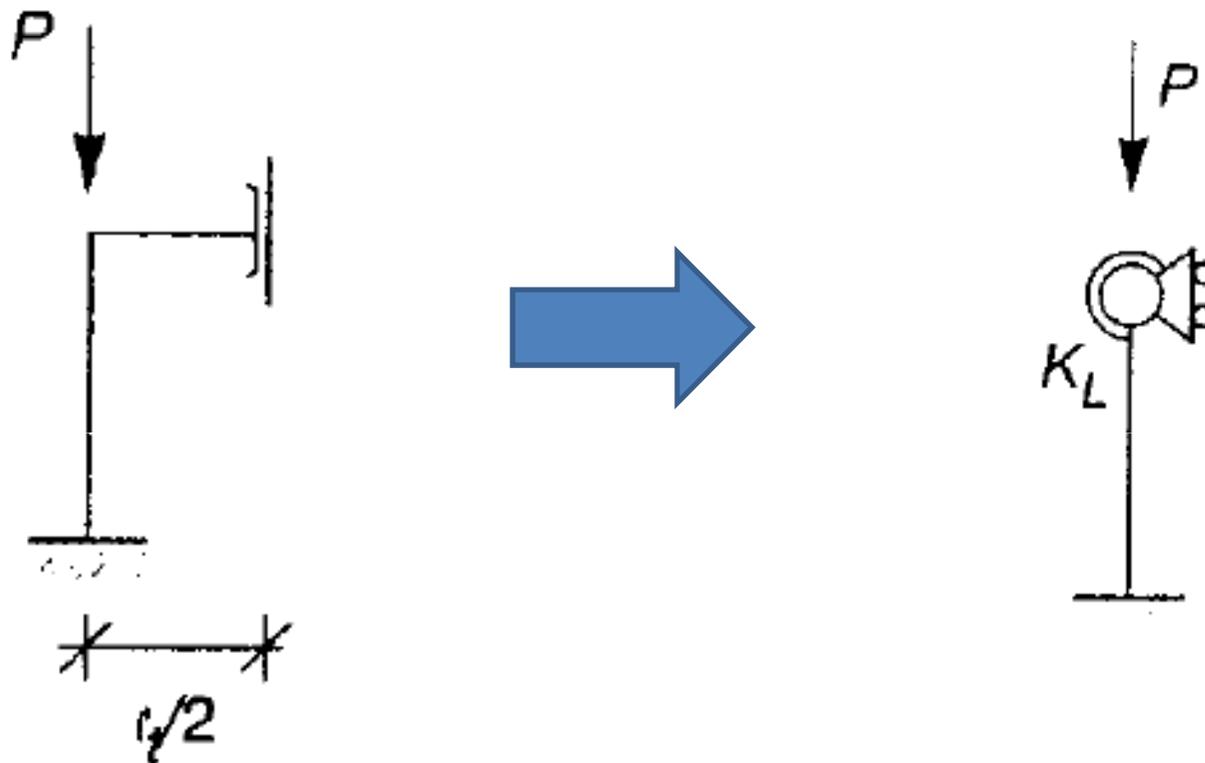
$$\mathbf{p}^{\text{EF}}_A = 10 \frac{2 + 15\psi + 18\psi^2}{8 + 21\psi + 18\psi^2}$$

**ed è massimo per le due situazioni limite  $\psi = 0, \infty$**

# Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata simmetrica



# Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata simmetrica

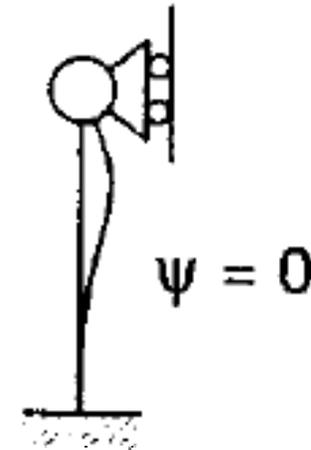


$$K_L = \frac{EI_t}{\frac{l_t}{2}} = \frac{2EI_t}{l_t} = 2\psi \frac{EI_p}{l_p}$$

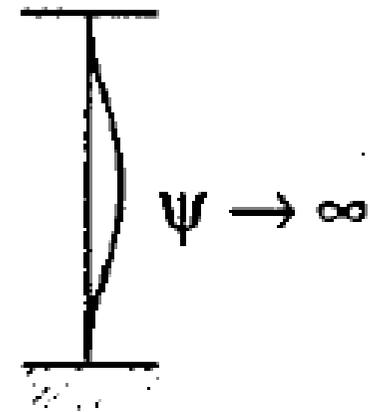
# Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata simmetrica



I° caso limite  
Trave molto  
flessibile



II° caso limite  
Trave  
infinitamente  
rigida



# Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata simmetrica

I° caso limite-Trave molto flessibile

$$P_S = \frac{\pi^2 EI_p}{(0.699\ell_p)^2} = \frac{\pi^2 EI_p}{0.699^2 \ell_p^2} = 2.046\pi^2 \frac{EI_p}{\ell_p^2}$$

II° caso limite- Trave infinitamente rigida

$$P_S = \frac{\pi^2 EI_p}{\frac{\ell_p^2}{4}} = 4\pi^2 \frac{EI_p}{\ell_p^2}$$

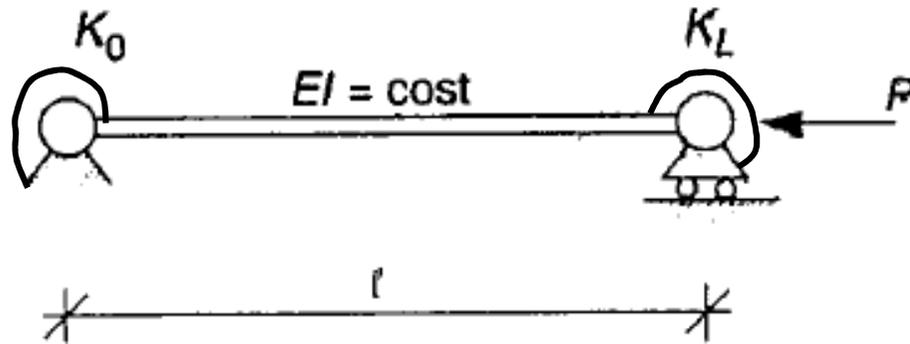
**Pertanto**

$$2.046\pi^2 \leq p_S \leq 4\pi^2$$

# Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata simmetrica

Possiamo utilizzare il metodo di Newmark per trovare il carico critico Euleriano nei casi intermedi di  $\psi$

$$P_E = \chi \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$



$$\chi = \frac{(0.4 + \mu_0)(0.4 + \mu_L)}{(0.2 + \mu_0)(0.2 + \mu_L)} \quad \text{con} \quad \mu_0 = \frac{EI_p}{K_0 l_p}, \quad \mu_L = \frac{EI_p}{K_L l_p}$$

Nel caso in esame  $\mu_0=0$  perché  $K_0=\infty$  e  $\mu_L=1/(2\psi)$

$$P_s^{Nk} = \chi \pi^2 = 2\pi^2 \frac{1 + 0.8\psi}{1 + 0.4\psi}$$

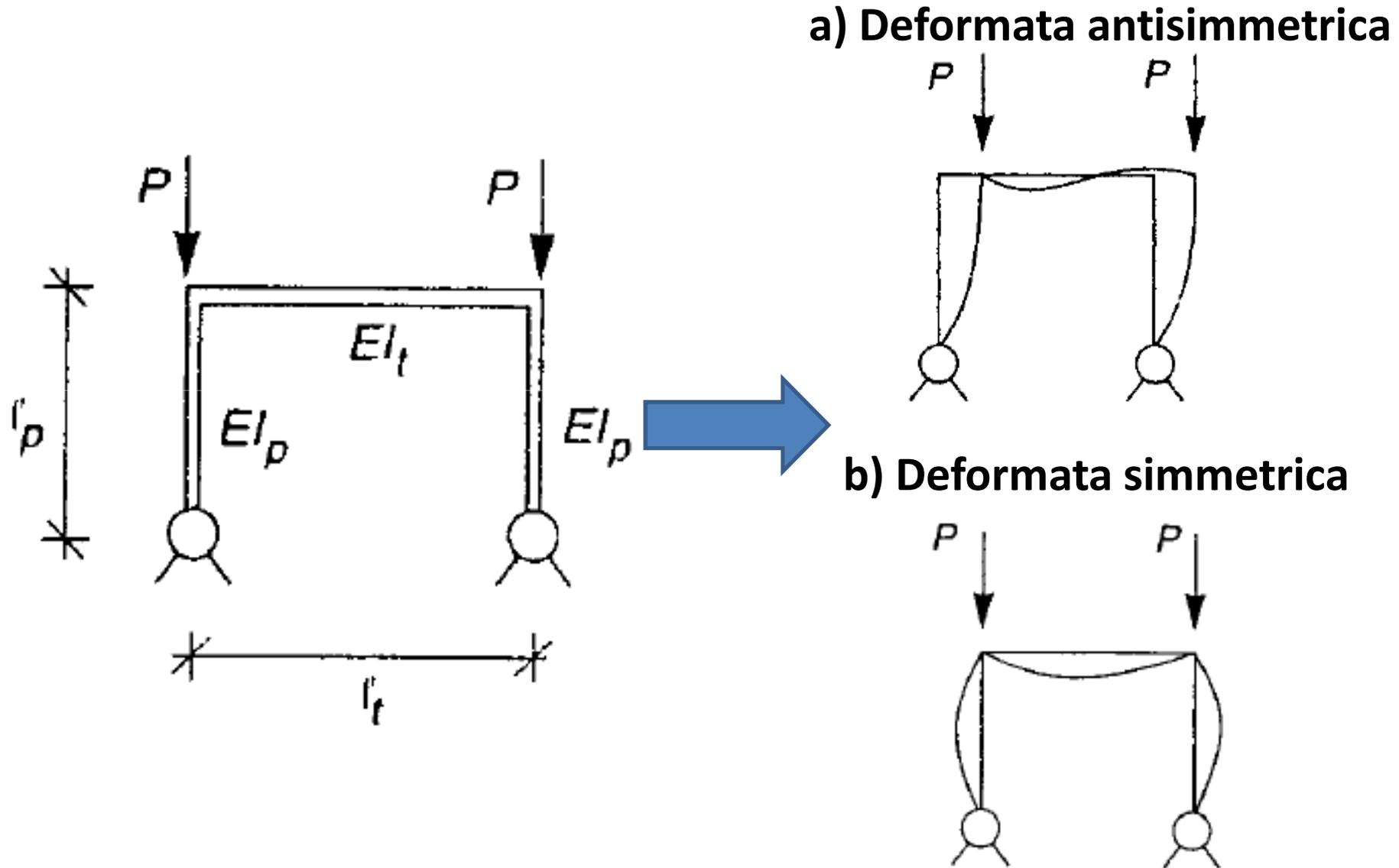
# Telaio simmetrico incastrato alla base

Tabella 17.1

Telaio incastrato al piede (Figura 17.11)

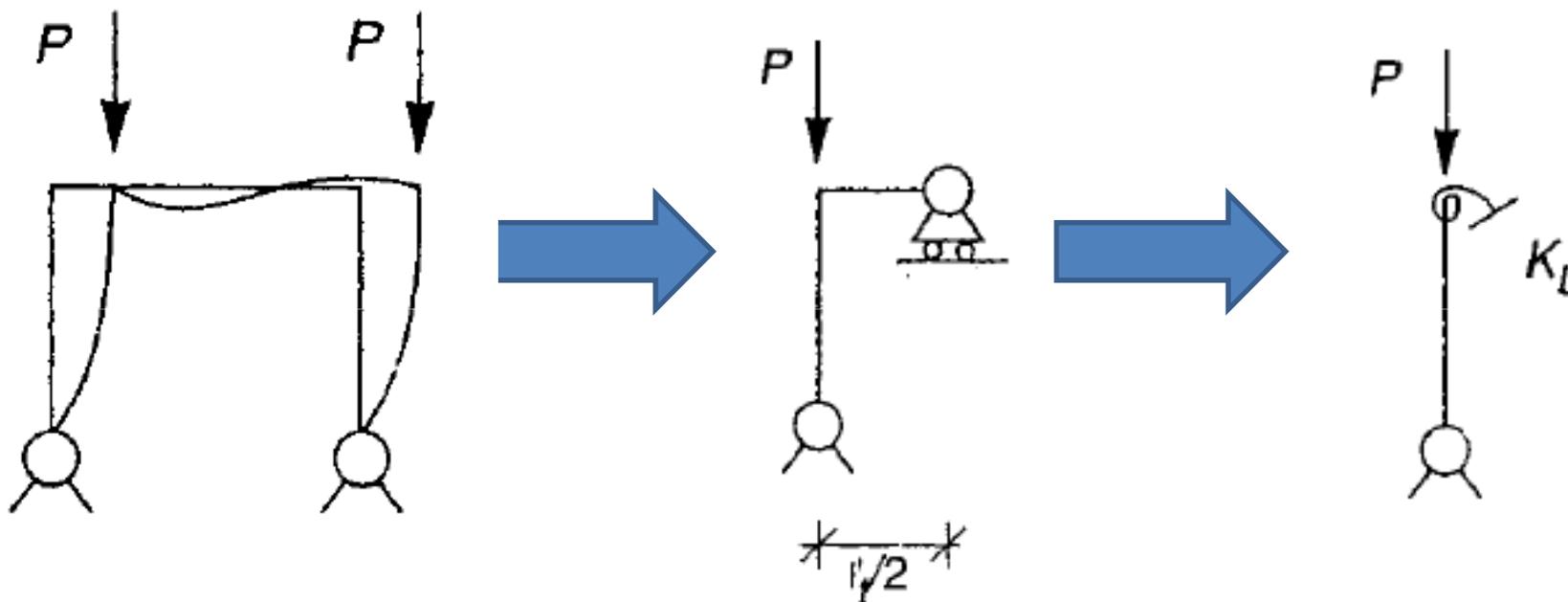
| $\psi$   | Deformata antisimmetrica |        |                            | Deformata simmetrica |            |                            |
|----------|--------------------------|--------|----------------------------|----------------------|------------|----------------------------|
|          | $\rho_A$                 |        | $\frac{\ell_{0A}}{\ell_p}$ | $\rho_S$             |            | $\frac{\ell_{0S}}{\ell_p}$ |
|          | Esatto [9]               | PA EF  |                            | Esatto [9]           | Ps Newmark |                            |
| 0.0      | 2.467                    | 2.500  | 2.0                        | 20.191               | 19.739     | .699                       |
| 0.2      | 4.382                    | 4.427  | 1.501                      | 21.328               | 21.201     | .680                       |
| 1.       | 7.382                    | 7.447  | 1.156                      | 25.167               | 25.379     | .626                       |
| 2.       | 8.429                    | 8.525  | 1.082                      | 28.385               | 28.512     | .590                       |
| 5.       | 9.287                    | 9.361  | 1.031                      | 33.122               | 32.899     | .545                       |
| 10.      | 9.554                    | 9.673  | 1.016                      | 35.925               | 35.531     | .524                       |
| $\infty$ | 9.870                    | 10.000 | 1.0                        | 39.478               | 39.478     | .5                         |

# Telaio simmetrico incernierato alla base



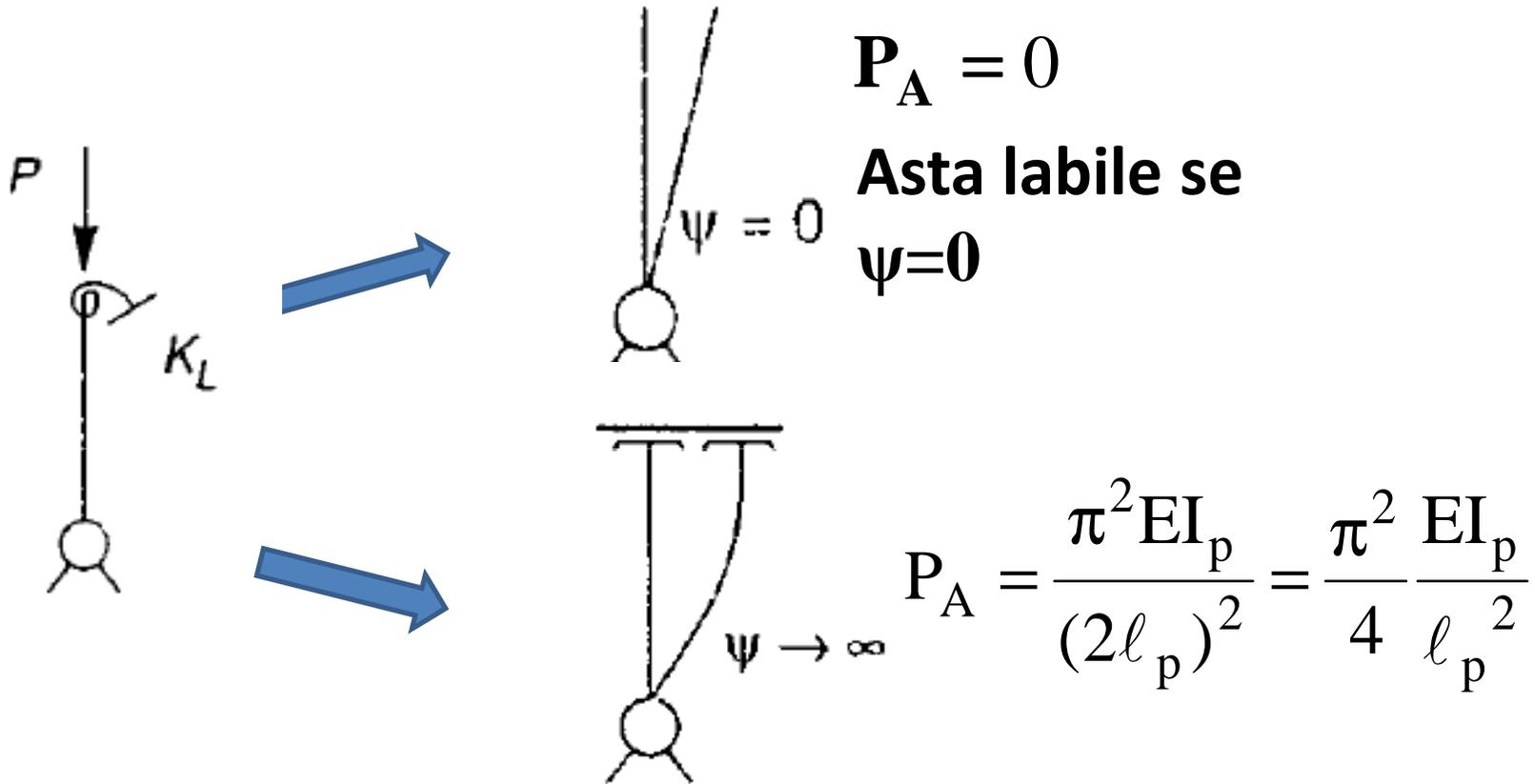
# Telaio simmetrico incernierato alla base: deformata antisimmetrica

Ne risolviamo metà



$$\mathbf{K}_L = \frac{3\mathbf{E}I_t}{\frac{l_t}{2}} = \frac{6\mathbf{E}I_t}{l_t} = 6\psi \frac{\mathbf{E}I_p}{l_p}$$

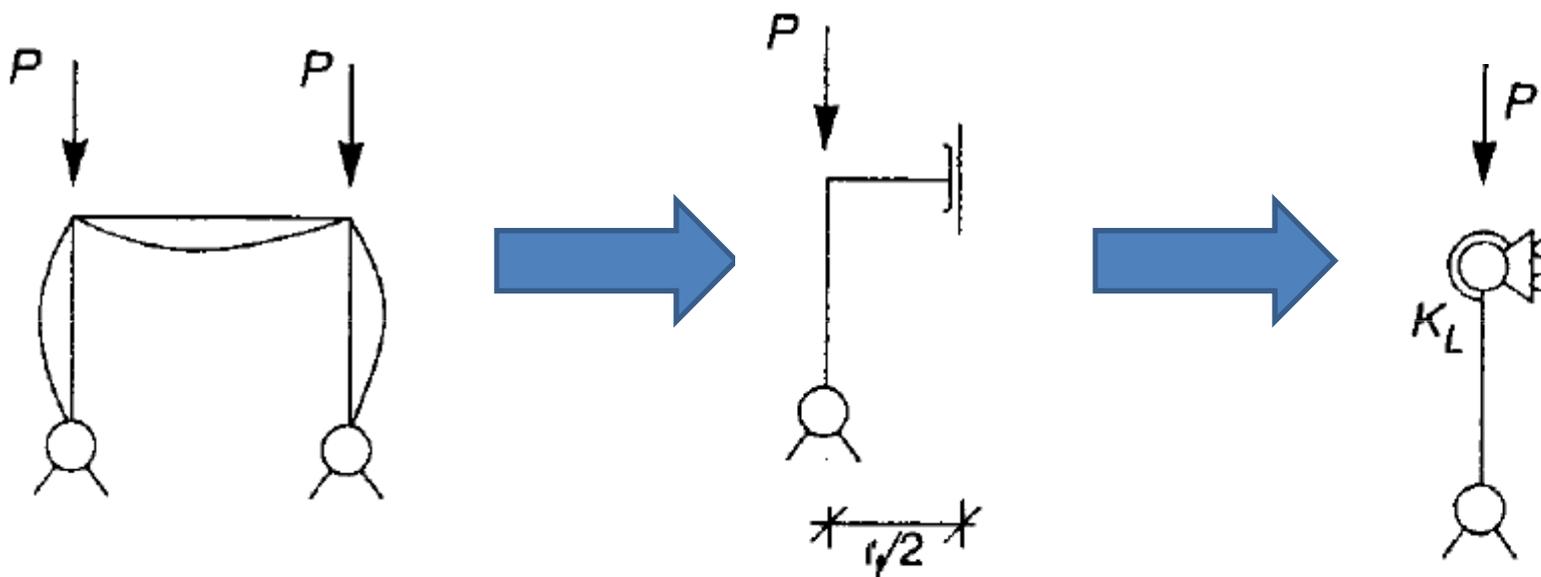
# Telaio simmetrico incernierato alla base: deformata antisimmetrica



$$0 \leq \mathbf{p}_A \leq \frac{\pi^2}{4}$$

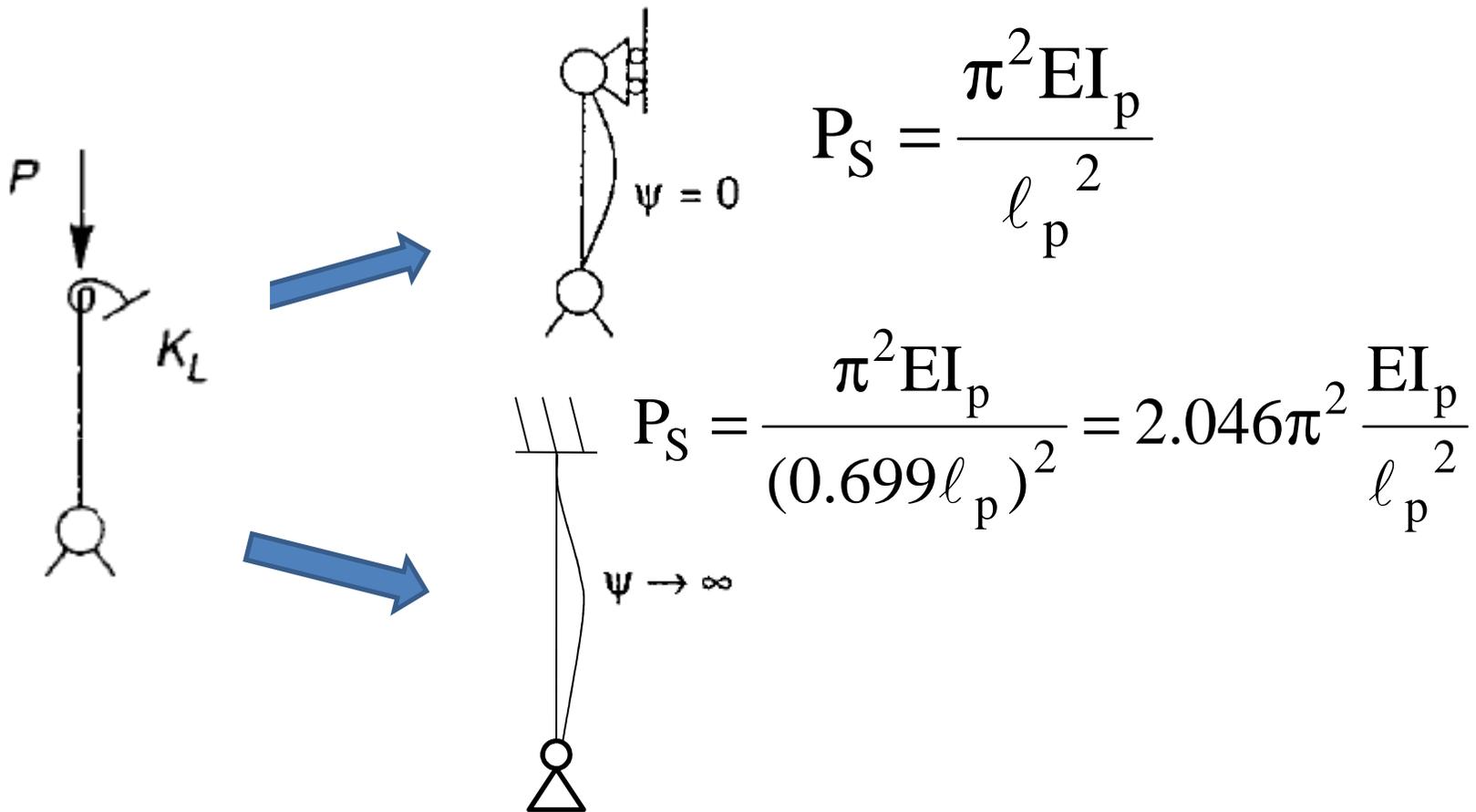
# Telaio simmetrico incernierato alla base: deformata simmetrica

Ne risolviamo metà



$$\mathbf{K}_L = \frac{\mathbf{EI}_t}{\frac{l_t}{2}} = \frac{2\mathbf{EI}_t}{l_t} = 2\psi \frac{\mathbf{EI}_p}{l_p}$$

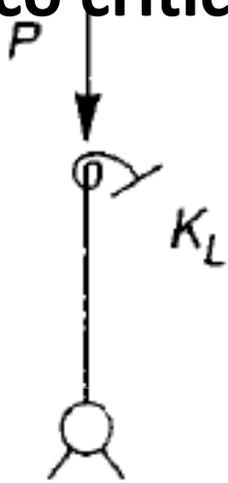
# Telaio simmetrico incernierato alla base: deformata simmetrica



$$\pi^2 \leq p_S \leq 2.046 \pi^2$$

# Telaio simmetrico incernierato alla base: deformata simmetrica

Possiamo utilizzare il metodo di Newmark per trovare il carico critico Euleriano nei casi intermedi di  $\psi$



$$\chi = \frac{(0.4 + \mu_0)(0.4 + \mu_L)}{(0.2 + \mu_0)(0.2 + \mu_L)}$$

$$\text{con } \mu_0 = \infty, \quad \mu_L = \frac{EI_p}{K_L l_p}$$

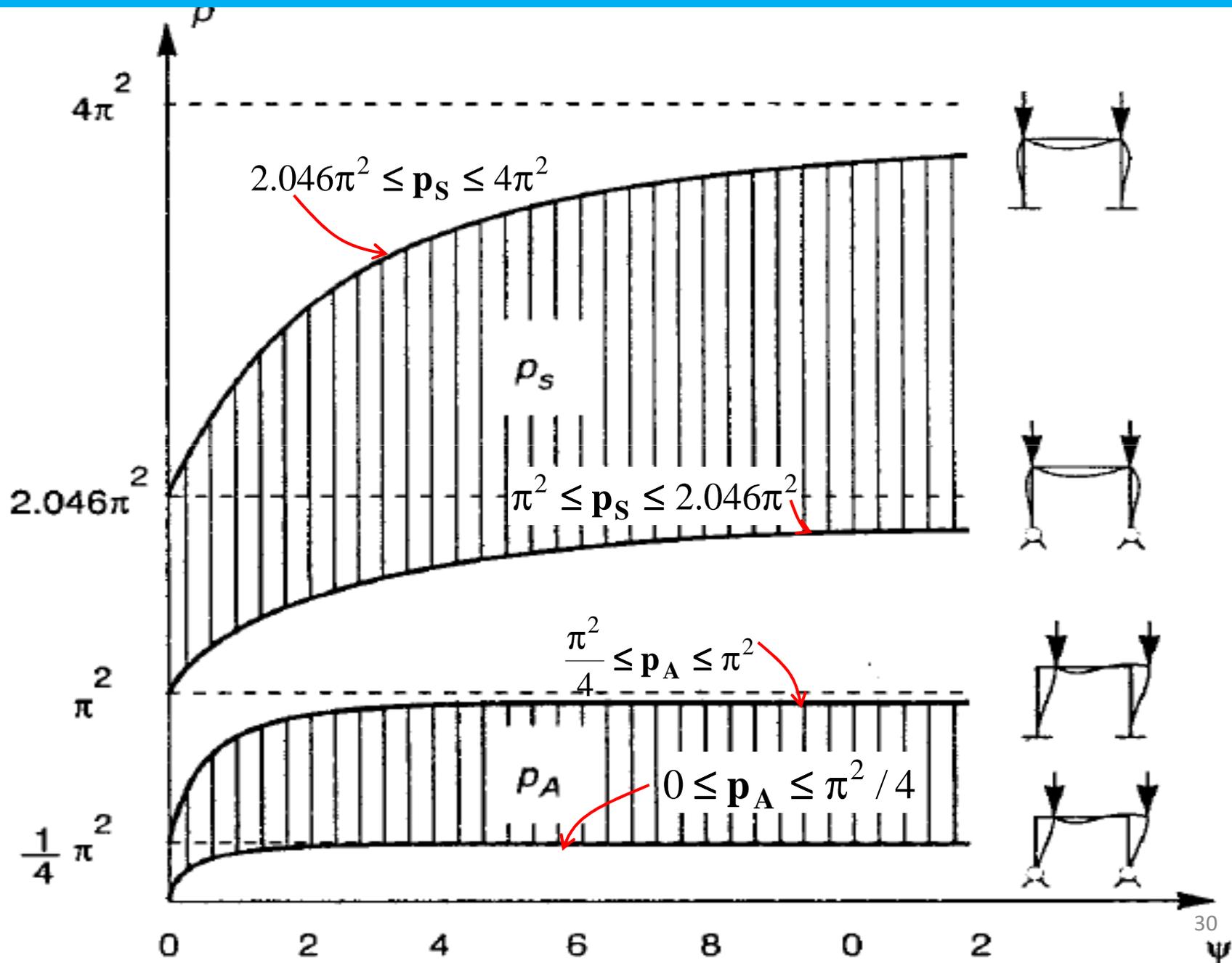
$$p_S = \pi^2 \frac{1 + 0.8\psi}{1 + 0.4\psi}$$

# Telaio simmetrico incernierato alla base

Telaio incernierato al piede (Figura 17.14)

| $\psi$   | Deformata antisimmetrica |                   |                            | Deformata simmetrica |                        |                            |
|----------|--------------------------|-------------------|----------------------------|----------------------|------------------------|----------------------------|
|          | Esatto [9]               | $\rho_A$<br>Pa EF | $\frac{\ell_{0A}}{\ell_p}$ | Esatto [9]           | $\rho_S$<br>Ps Newmark | $\frac{\ell_{0S}}{\ell_p}$ |
| 0.0      | 0.0                      | 0.0               | $\infty$                   | 9.870                | 9.870                  | 1.0                        |
| 0.2      | 0.819                    | 0.843             | 3.371                      | 10.630               | 10.601                 | .963                       |
| 1.       | 1.826                    | 1.837             | 2.325                      | 12.890               | 12.689                 | .875                       |
| 2.       | 2.102                    | 2.128             | 2.167                      | 14.666               | 14.256                 | .814                       |
| 5.       | 2.300                    | 2.340             | 2.071                      | 17.074               | 16.449                 | .761                       |
| 10.      | 2.388                    | 2.418             | 2.033                      | 18.417               | 17.765                 | .733                       |
| $\infty$ | 2.467                    | 2.500             | 2.0                        | 20.191               | 19.739                 | .699                       |

# Telaio simmetrico incernierato alla base



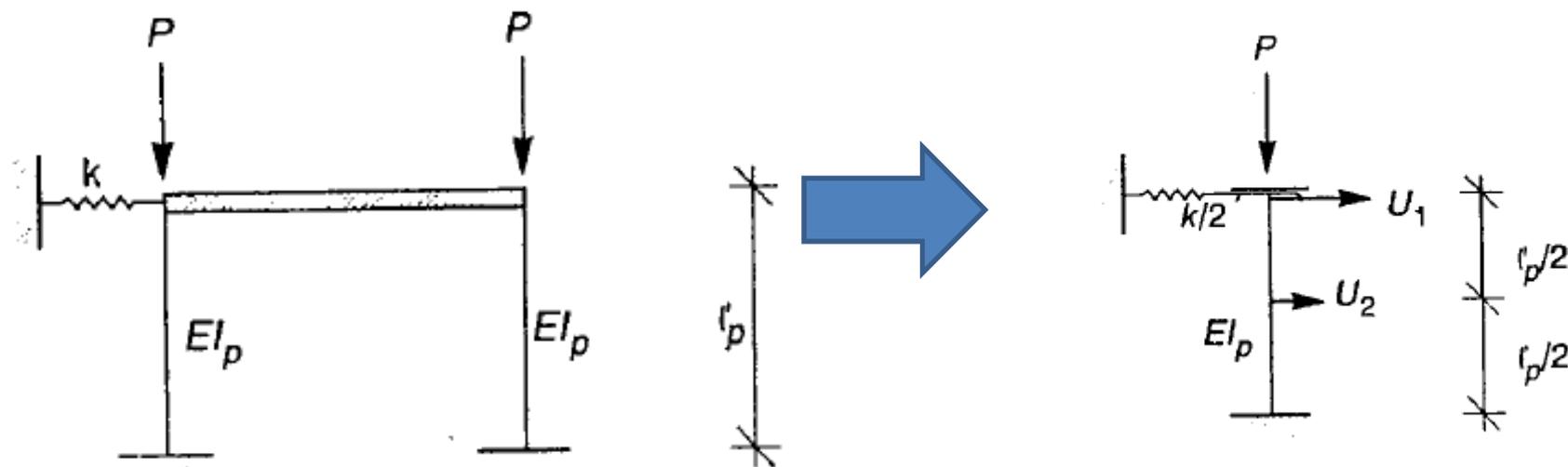
# Telaio simmetrico incernierato od incastrato alla base: osservazioni

- 1) Con riferimento al grafico precedente, le zone tratteggiate devono essere interpretate come l'insieme dei punti che definiscono i carichi critici di telai simmetrici vincolati da cerniere elastiche alla base dotate di molle elastiche**
- 2) Si ha sempre  $p_A < p_S$  : infatti l'instabilità corrisponde ad uno sbandamento secondo un modo antisimmetrico: la trave non contrasta lo spostamento orizzontale dei pilastri fungendo da semplice elemento distanziatore**

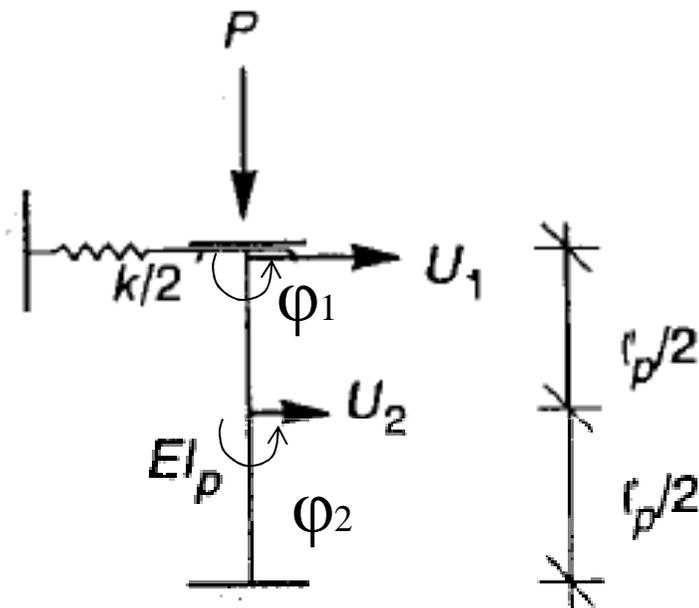
# Telaio controventato

Possono essere presenti dei controventi che forniscono un'ulteriore rigidità atta a contrastare lo spostamento orizzontale

Si suppone che il traverso sia molto più rigido del pilastro ovvero  $\psi=0$



# Telaio controventato

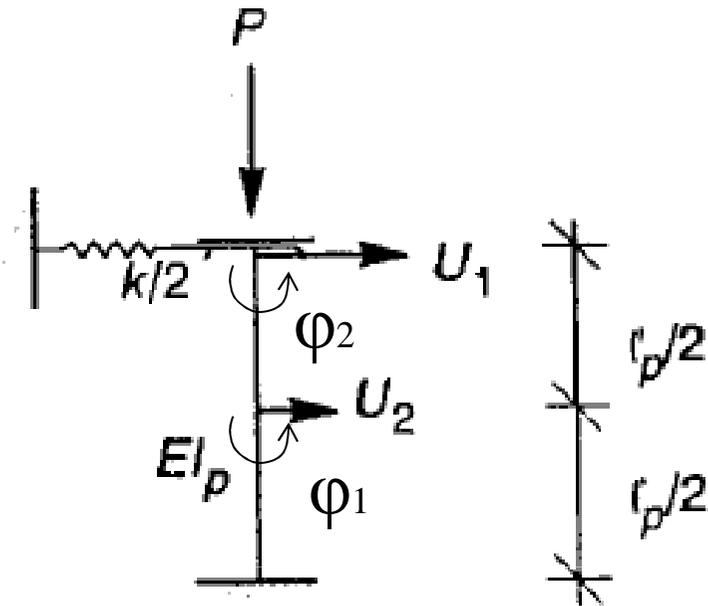


La presenza della molla impone che occorranza almeno 2 elementi finiti per approssimare numericamente il carico critico del pilastro in quanto il solo grado di libertà del nodo superiore non garantisce l'adeguatezza del modello

Con rif. alla figura, i gradi di libertà sono:

$$U_1, \varphi_1, U_2, \varphi_2$$

# Telaio controventato



È possibile ricondurre il problema discreto ad una matrice di rigidezza relativa ai soli gradi di libertà traslazionali

$$\mathbf{K}^* = \frac{8EI_p}{l_p^3} \begin{bmatrix} 24 - 36\mathbf{p} & -12 + 18\mathbf{p} \\ -12 + 18\mathbf{p} & 7.5 + \beta - 18\mathbf{p} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{P}l_p^2}{60EI_p}, \quad \beta = \frac{\mathbf{k}l_p^3}{16EI_p}$$

# Telaio controventato

$$\text{Det}(K^*)=0 \text{ per } p_A = \frac{3+2\beta}{18}, \quad p_S = \frac{2}{3}$$

Cui corrispondono i carichi critici

$$P_A = \left(10 + \frac{5 k l_p^3}{12 EI_p}\right) \frac{EI_p}{l_p^2}, \quad P_S = 40 \frac{EI_p}{l_p^2}$$

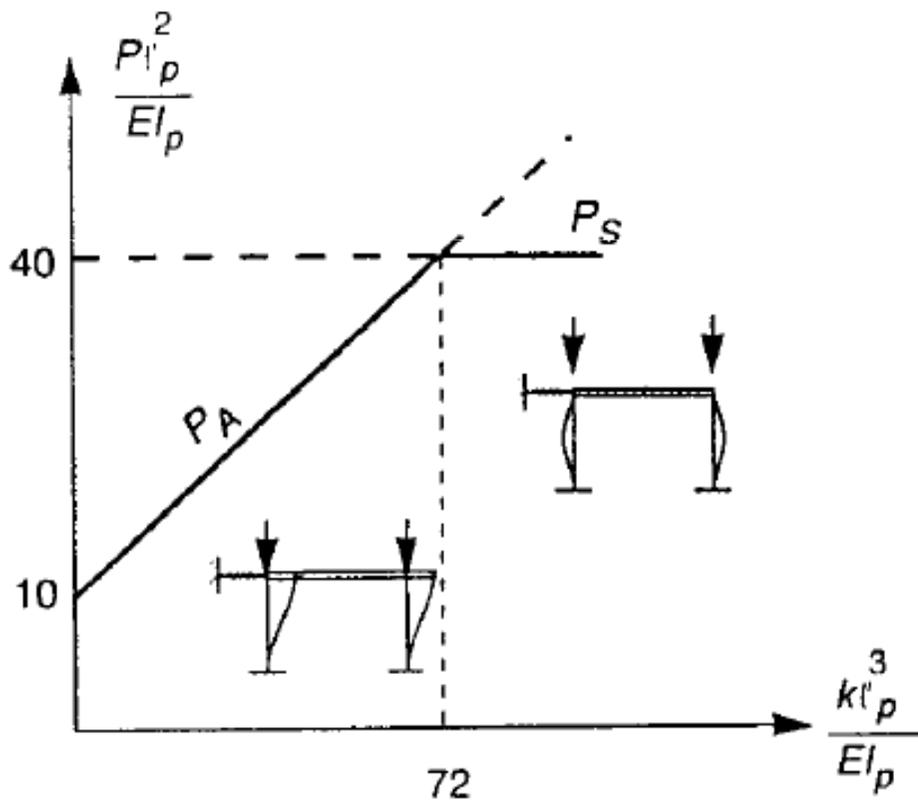
$P_A$  si riferisce ad una deformata antisimmetrica

$P_S$  ad una deformata simmetrica

OSS: la molla compare solo in  $P_A$  ma non in  $P_S$

# Telaio controventato

Diagramma di  $P_A = \left(10 + \frac{5 k l_p^3}{12 EI_p}\right) \frac{EI_p}{l_p^2}$ ,  $P_S = 40 \frac{EI_p}{l_p^2}$



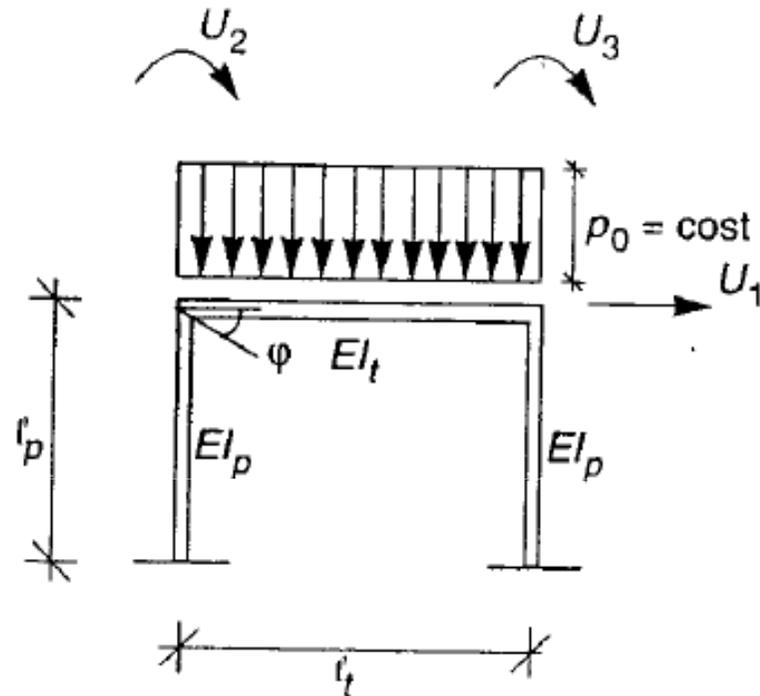
La linea piena indica il carico critico  $P_c = \min\{P_A, P_S\}$

Se la molla è cedevole la deformata critica è antisimmetrica

$P_c$  aumenta con  $k$  fino a  $k=72$ , dopo non aumenta anche se la molla diventa sempre più rigida

Per  $k \rightarrow \infty$  modo simmetrico (telaio nodi fissi)

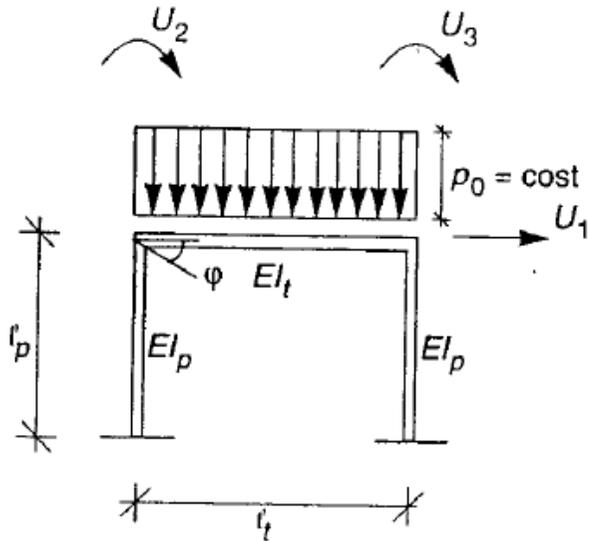
# Analisi non-lineare di Telai simmetrici inflessi nella configurazione fondamentale



In genere la configurazione fondamentale di un telaio è inflessa e non indeformata

Nel caso in figura la deformata fondamentale sarà simmetrica

# Analisi non-lineare di Telai simmetrici

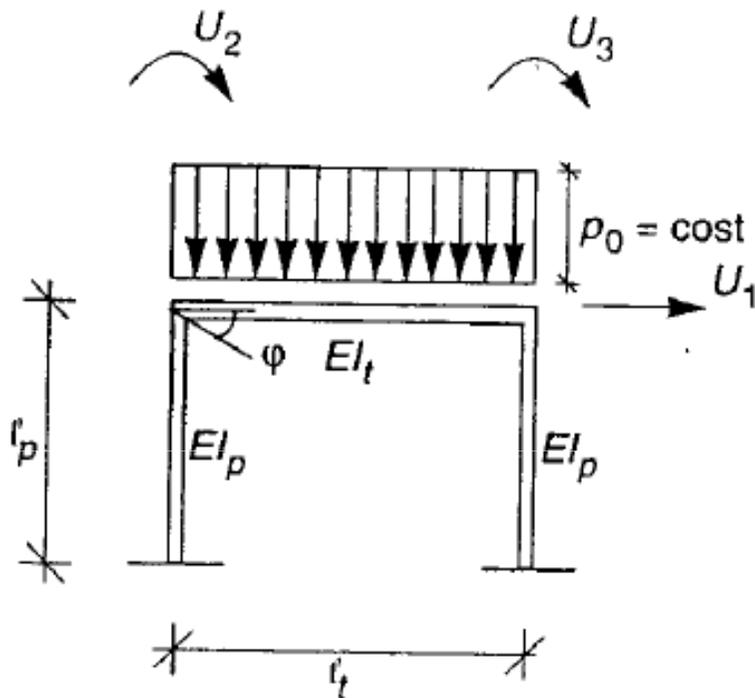


È noto lo sforzo normale  $N_p$  nei pilastri

$$N_p = -\frac{1}{2} p_0 l_t = -Q$$

Mentre lo sforzo normale  $N_t$  nella trave è a rigore incognito in quanto azione iperstatica che dipende dalla deformabilità della struttura in modo non-lineare → il problema che ne deriva è non-Euleriano nel senso che le azioni interne sono funzioni non-lineari dei carichi

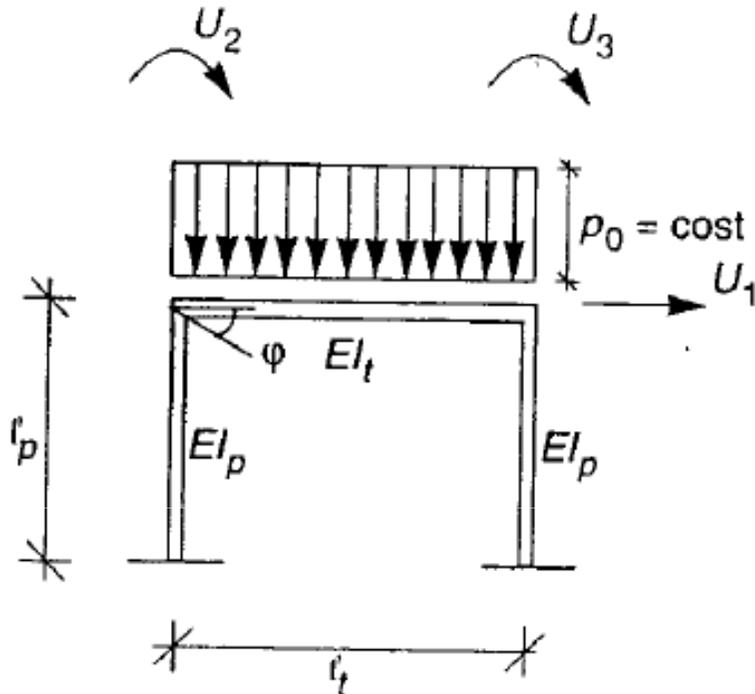
# Analisi non-lineare di Telai inflessi simmetrici



Per semplificare il problema assumiamo che  $N_t$  abbia il valore corrispondente all'ipotesi di piccoli spostamenti ovvero sia proporzionale a  $Q$  (NB: è un'ipotesi da verificare)

$$N_t = -Q \frac{\eta^2}{4\eta + 2\rho} \quad \rho = \frac{EI_t}{EI_p}, \quad \eta = \frac{l_t}{l_p}$$

# Analisi non-lineare di Telai inflessi nella configurazione fondamentale



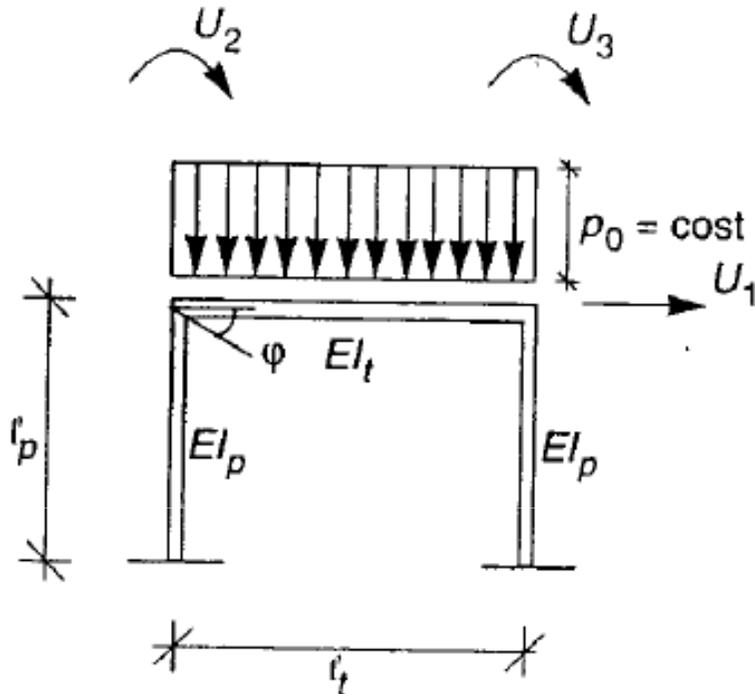
Il problema della stabilità dell'equilibrio si può approssimare al II ordine e, per es. con il metodo degli elementi finiti, si può ricondurre alla forma discreta

$$(\mathbf{K}_E - \mathbf{QK}_G)U = \mathbf{QP}_0$$

$\mathbf{P}_0$  Carico base unitario

$\mathbf{P} = \mathbf{QP}_0$  Vettore delle forze nodali equivalenti al carico distribuito sulla trave

# Analisi non lineare approssimata



Poniamo

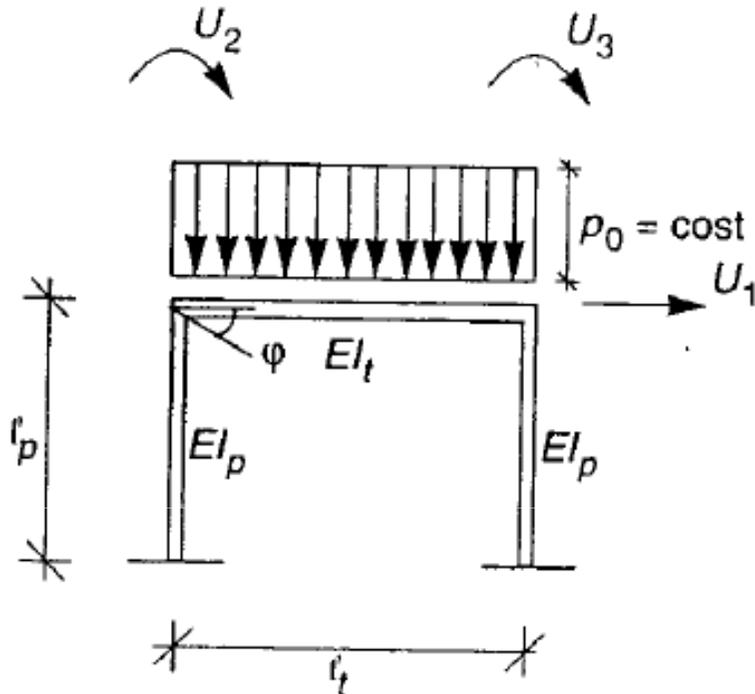
$$EI_t = 10EI, \quad EI_p = EI$$

$$l_t = 2l, \quad l_p = l$$

$$q = \frac{Ql^2}{EI}$$

Se trascuriamo la deformabilità assiale, e consideriamo per esempio 3 elementi finiti hermitiani, uno per elemento strutturale, i gradi di libertà sono  $U_1, U_2, U_3$ ;

# Analisi non lineare approssimata



$$(\mathbf{K}_E - \mathbf{QK}_G) \mathbf{U} = \mathbf{QP}_0$$

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{Q}l^2}{\mathbf{EI}}$$

il Sistema ammette soluzione per un determinato vettore dei gradi di libertà  $[U_1, U_2, U_3]$  dove  $U_2$  ed  $U_3$  sono le rotazioni dei nodi. In pratica si ottiene che  $[U_1, U_2, U_3]$  sono funzioni **non lineari** del carico adimensionalizzato  $\mathbf{q}$

# Analisi non lineare approssimata

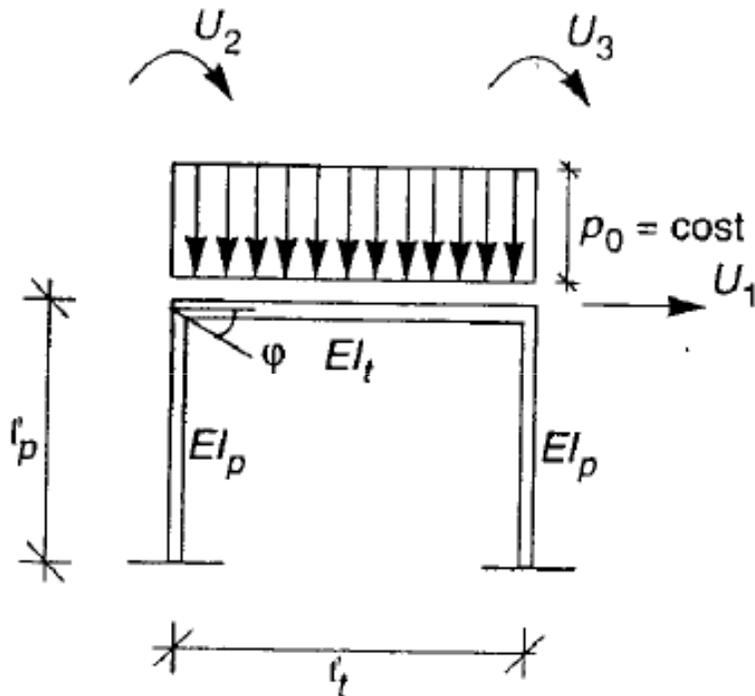
Per esempio se si trascura la deformabilità assiale della trave si ha che la soluzione del problema dell'equilibrio

$$(\mathbf{K}_E - \mathbf{QK}_G) \mathbf{U} = \mathbf{QP}_0$$

implica che

$$1) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 = 0 \\ \mathbf{U}_3 = \varphi \\ \mathbf{U}_2 = -\varphi \end{bmatrix}$$

2)  $\varphi$  funzione non lineare di  $q$



# Analisi non lineare approssimata

Tuttavia il risultato ottenuto usando 3 EF non è attendibile → **Occorre considerarne almeno 2 per pilastro e 4 per la trave**

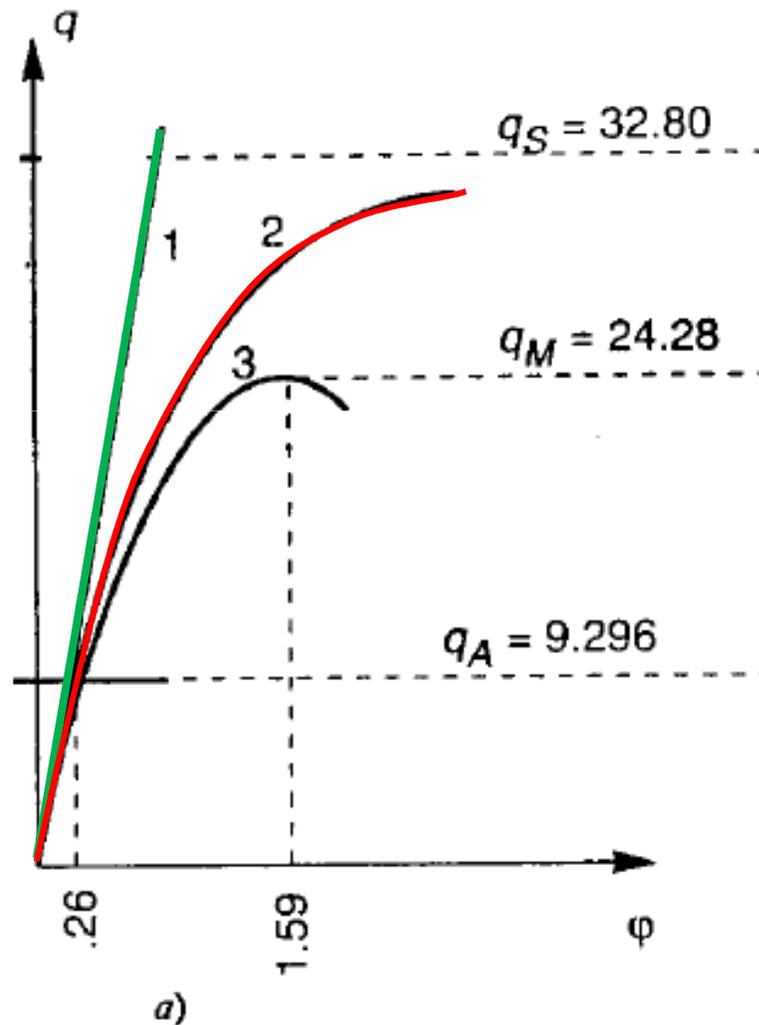
Si ha che la configurazione fondamentale è maggiormente inflessa rispetto al caso con 3 soli EF

Esistono dei valori per cui la matrice dei coefficienti associata al sistema omogeneo diviene singolare  
I primi 2 valori sono i seguenti

$$q_S = 32.80, \quad q_A = 9.296$$

Dove  $q_S$  configura un modo simmetrico mentre  $q_A$  un modo antisimmetrico

# Telaio inflesso confronto tra tipi di analisi



**1: Piccoli spostamenti**

**2: 4EF trave+2EFpilastro**

$$q_S = 32.80, \quad q_A = 9.296$$

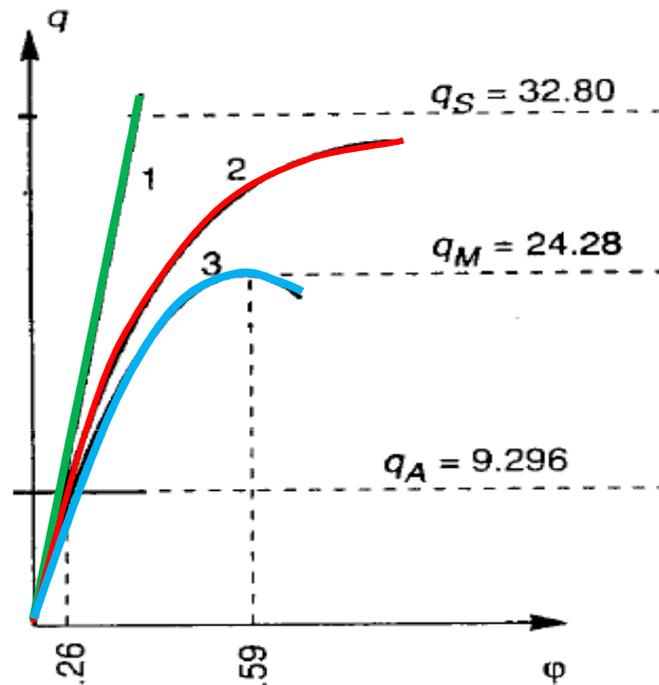
L'ampiezza della  
configurazione fondamentale  
simmetrica cresce e diviene  
illimitata per  $q_S=32.80$

Ma ben prima si perde  
l'unicità della risposta dato  
che ho un punto di

biforcazione per  $q_A=9.296$

Per  $q=q_A$  il telaio ha perso  
rigidezza nei confronti dello  
sbandamento laterale

# Telaio inflesso confronto tra tipi di analisi

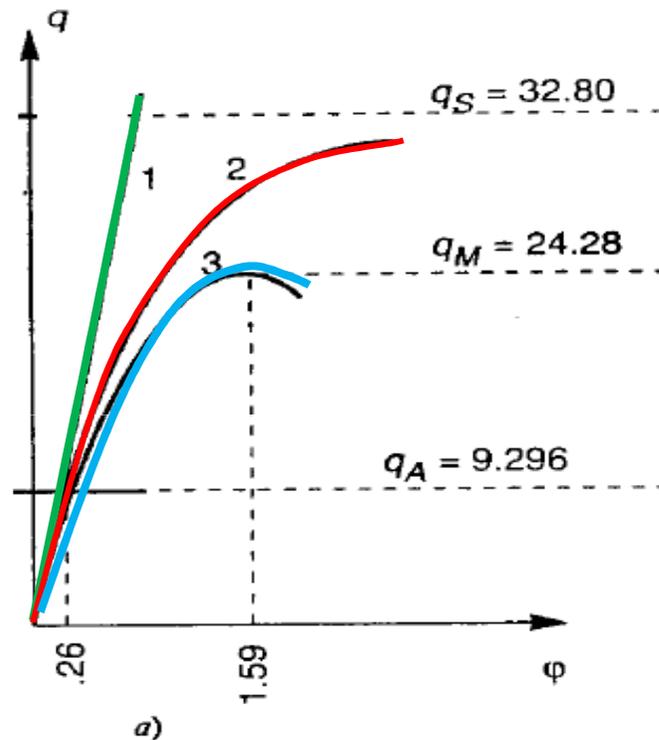


- 1: Piccoli spostamenti**
- 2: analisi non lineare approssimata  $4EF$  trave+ $2EF$  pilastro**
- 3: calcolo non lineare**

**Un calcolo non lineare rigoroso conduce invece alla risposta 3 in figura, che vede un picco  $q_M=24.28$  inferiore al valore  $q_S = 32.80$**

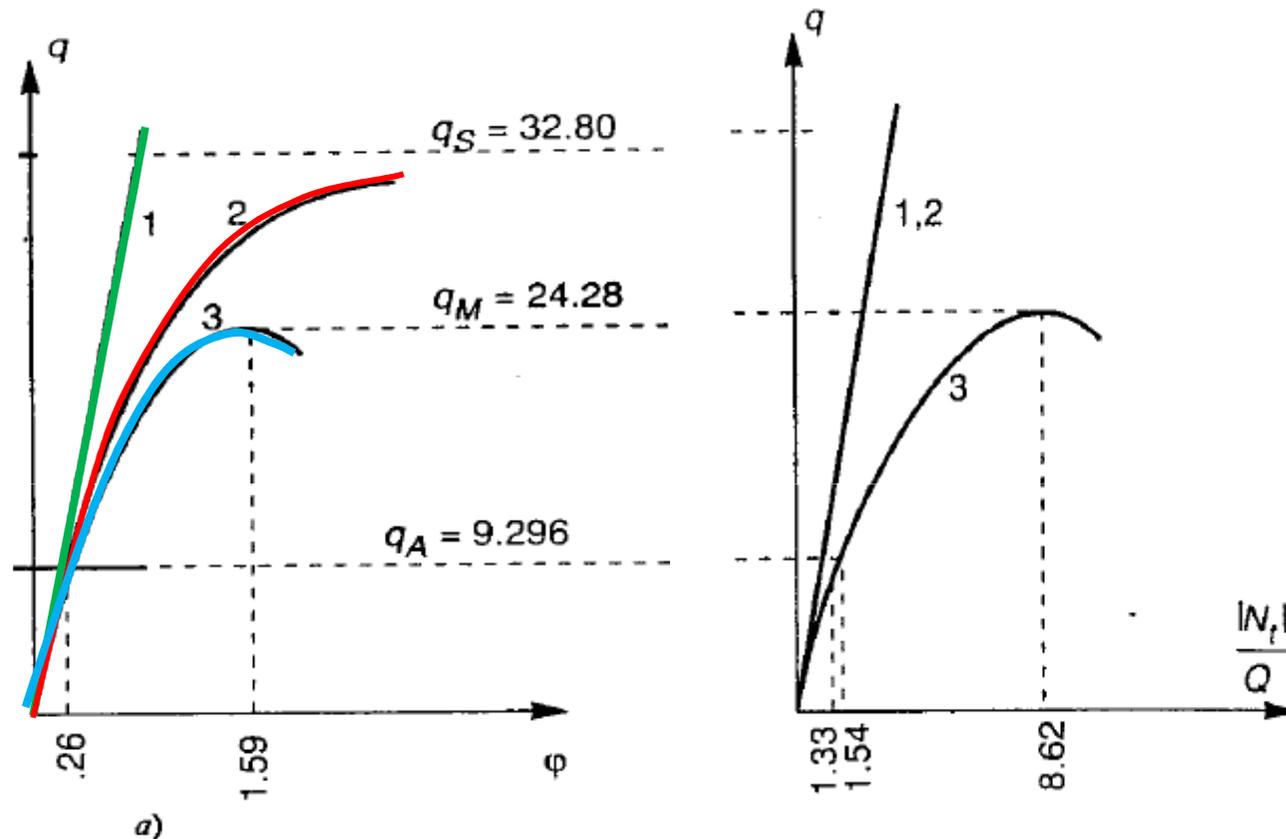
**Per  $q=q_S$  la rigidità della configurazione fondamentale svanisce e si ha instabilità a scatto**

# Telaio inflesso confronto tra tipi di analisi



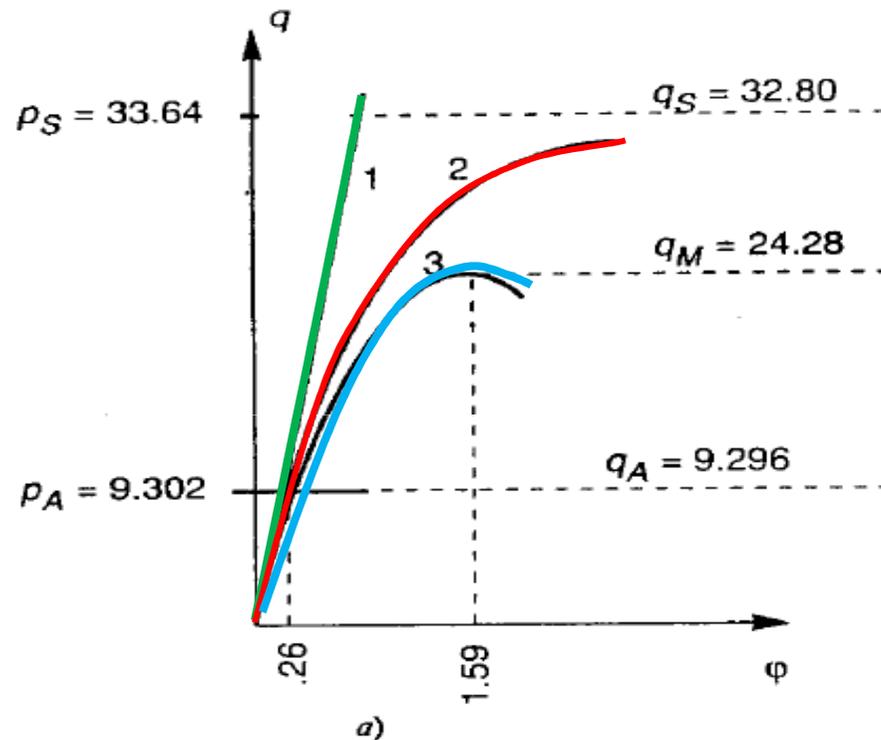
Tuttavia in questo caso specifico, la perdita di rigidità nei confronti dello sbandamento laterale si perde ben prima del picco. Ed in questo ambito la non linearità non ha grandi implicazioni → non abbiamo commesso un errore elevato nel considerare  $N_t$  funzione lineare del carico.

# Telaio inflesso confronto tra tipi di analisi



**Errore commesso sul calcolo di  $N_t$  in corrispondenza del carico di biforcazione  $P_A$  considerando  $N_t$  funzione lineare di  $Q$  rispetto al caso in cui  $N_t$  è funzione non-lineare di  $Q$  è di circa il  $14\% = |1.33 - 1.54| / 1.54$**

# Telaio inflesso confronto tra tipi di analisi



**Se avessi trascurato del tutto la deformabilità assiale di trave e pilastri avrei fatto un'analisi come quella vista per il telaio incastrato ed incernierato alla base ed avrei trovato**

$$q_S = 33.64 \quad q_A = 9.302$$

**che comportano un errore trascurabile dell'ordine del 0,1 %**

# Considerazioni sul calcolo del carico critico di telai simmetrici non controventati

Quindi nel caso del telaio esaminato possiamo osservare che l'evento critico è lo sbandamento laterale

- 1) Il problema è, a rigore, non lineare in quanto la deformabilità assiale e la non trascurabilità degli spostamenti rende  $N_t$  funzione non lineare dei carichi ( $N_p$  è lineare in  $Q$  per equilibrio verticale)
- 2) Se si suppone che  $N_t$  sia una funzione lineare dei carichi il calcolo è ancora non lineare ma risulta semplificato e si commette un errore sul valore di  $N_t$  di circa il 14%
- 3) Se si trascura del tutto la deformabilità assiale si considera solo  $N_p$  e non  $N_t$  e si studia il telaio in cui riporto i carichi ai nodi dei pilastri; commetto un errore del 0.1% nel valutare  $q_A$

# Considerazioni sul calcolo del carico critico di telai simmetrici non controventati

Per esempio, nel telaio in esame un'analisi agli autovalori che consideri solo i pilastri e trascuri lo sforzo normale nelle travi porta ai valori del rapporto tra il carico critico  $p_A$  e quello  $q_A$  calcolato con un'analisi non lineare semplificata che assume  $N_t$  proporzionale ai carichi illustrati in tabella al variare dei rapporti tra la rigidezza della trave e quella dei pilastri

| Rapporto $q_A/p_A$ per telai incastrati al piede |           |      |      |       |       |                      |
|--|-----------|------|------|-------|-------|----------------------|
|  | $l_t/l_p$ | 1    | 2    | 3     | 4     | 5                    |
| $EI_t/EI_p$                                      |           |      |      |       |       |                      |
| 20.  |           | 1.   | 1.   | .999  | .998  | .993                 |
| 10.  |           | 1.   | .999 | .996  | .986  | .957                 |
| 5.   |           | 1.   | .997 | .981  | .930  | .638*                |
| 2.   |           | .998 | .978 | .899  | .654* | .380*                |
| 1.   |           | .996 | .941 | .790  | .462* | .263*                |
| 0.5  |           | .986 | .892 | .650* | .309* | .171 <sub>51</sub> * |

# Considerazioni sul calcolo del carico critico di telai simmetrici non controventati

**Quindi in conclusione l'errore che si commette nel considerare il problema della stabilità di telai non controventati come Euleriano è trascurabile rispetto ad un'analisi non lineare a condizione che il ruolo della compressione nelle travi sia trascurabile. Occorre che la rigidezza flessionale della trave sia maggiore od almeno comparabile con quella dei pilastri.**

**Tale approssimazione non vale quando le travi sono molto deformabili e diventano gli elementi strutturali deboli nei confronti della perdita di stabilità.**

# Capacità portante di telai elasto-plastici

**Un telaio simmetrico non controventato soggetto a soli carichi verticali si comporta in modo simile ad un'asta compressa : la deformata simmetrica svolge il ruolo di configurazione fondamentale**

**Il telaio mantiene integra la rigidità fino a che si raggiunge il primo punto di biforcazione , quando un modo di sbandamento diventa possibile**

# Capacità portante di telai elasto-plastici

**Se compaiono anche carichi trasversali allora il telaio si comporta come un'asta presso-inflessa**

**La configurazione di equilibrio presenta fin dall'inizio uno spostamento orizzontale e partecipa del modo critico**

**Gli spostamenti crescono più che linearmente col carico fino a diventare teoricamente illimitati in corrispondenza del primo carico critico**

**Ma questo valore dello spostamento non può essere avvicinato dato che si esauriscono ben prima le risorse elastiche del materiale**

# Capacità portante di telai elasto-plastici

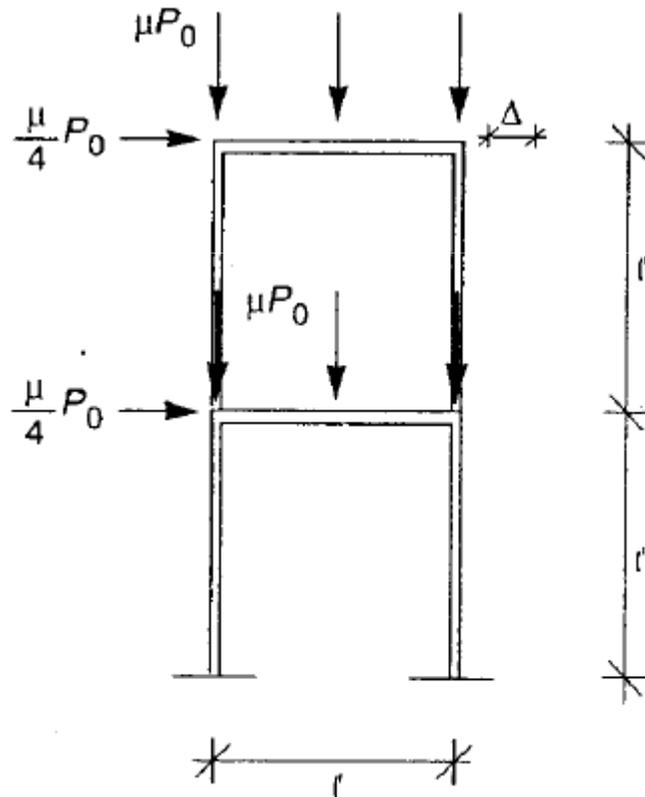
**Nei telai elasto-plastici l'instabilità deriva da un'interazione tra stabilità e plasticità :**

**Alla perdita di rigidezza indotta dalla presenza di spostamento non trascurabili si aggiunge la perdita di rigidezza dovuta al diffondersi della plasticizzazione**

**La struttura collassa sotto carichi inferiori a quelli previsti da un'analisi limite condotta nell'ipotesi di piccoli spostamenti**

# Esempio

Con riferimento al telaio in figura è possibile eseguire un'analisi elasto-plastica in piccoli spostamenti

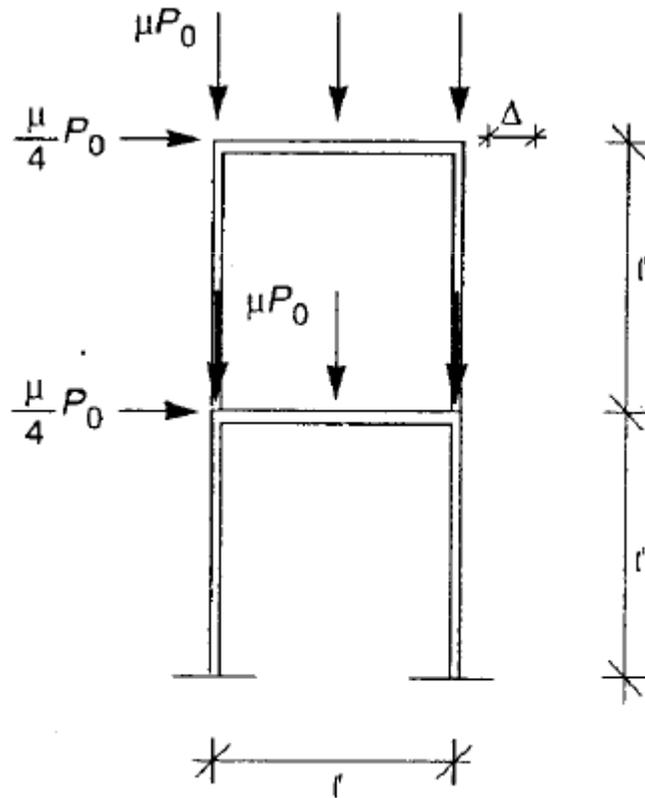


Gli elementi strutturali hanno tutti egual lunghezza, rigidezza e momento limite  $M_0$   
In particolare si assuma che

$$M_0 = \frac{7}{60} \frac{EI}{l}$$

Si trascura inoltre l'interazione tra  $M$  ed  $N$  ai fini del calcolo

# Esempio

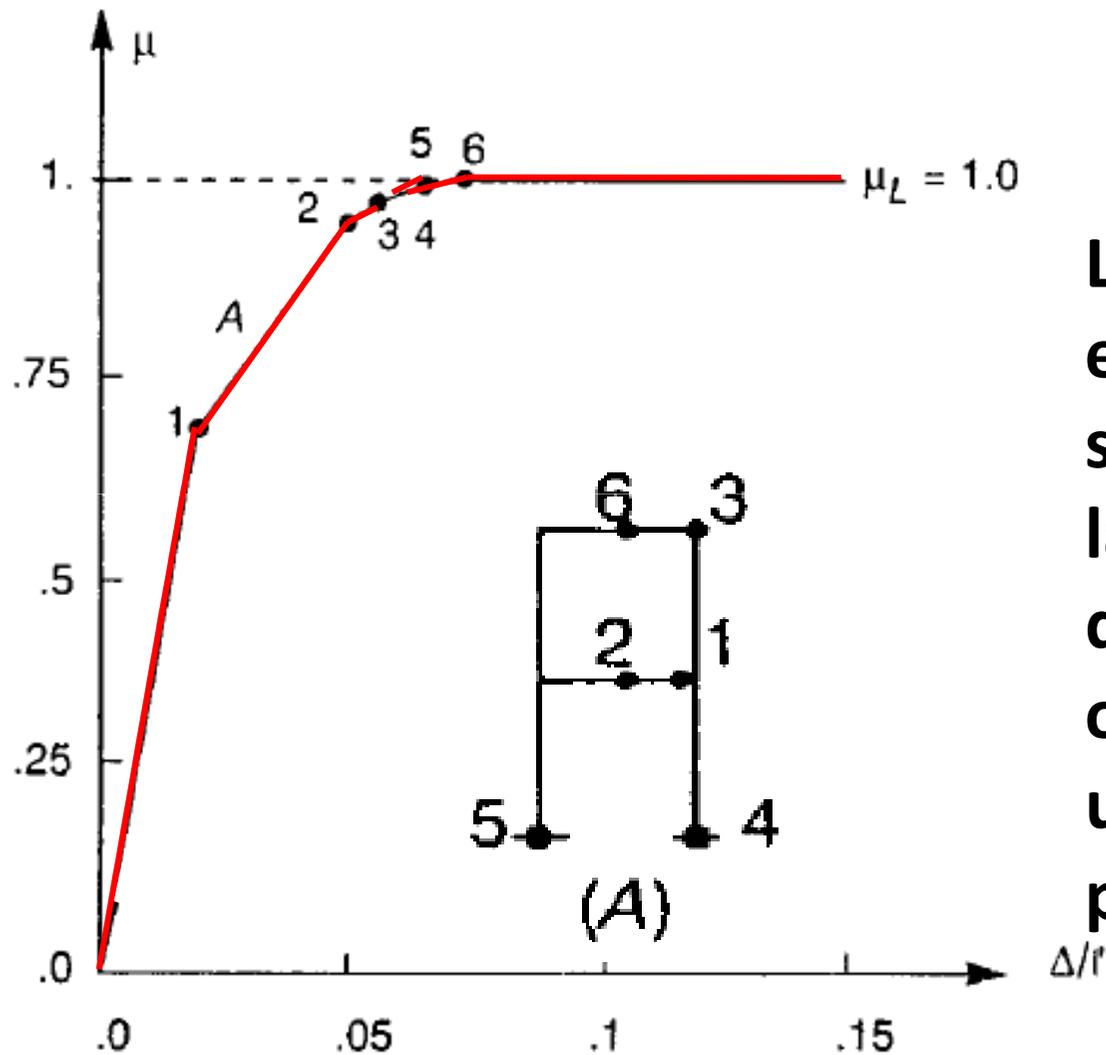


Come valore del carico base assumiamo

$$P_0 = \frac{2 EI}{3 l^2} = \frac{40 M_0}{7 l}$$

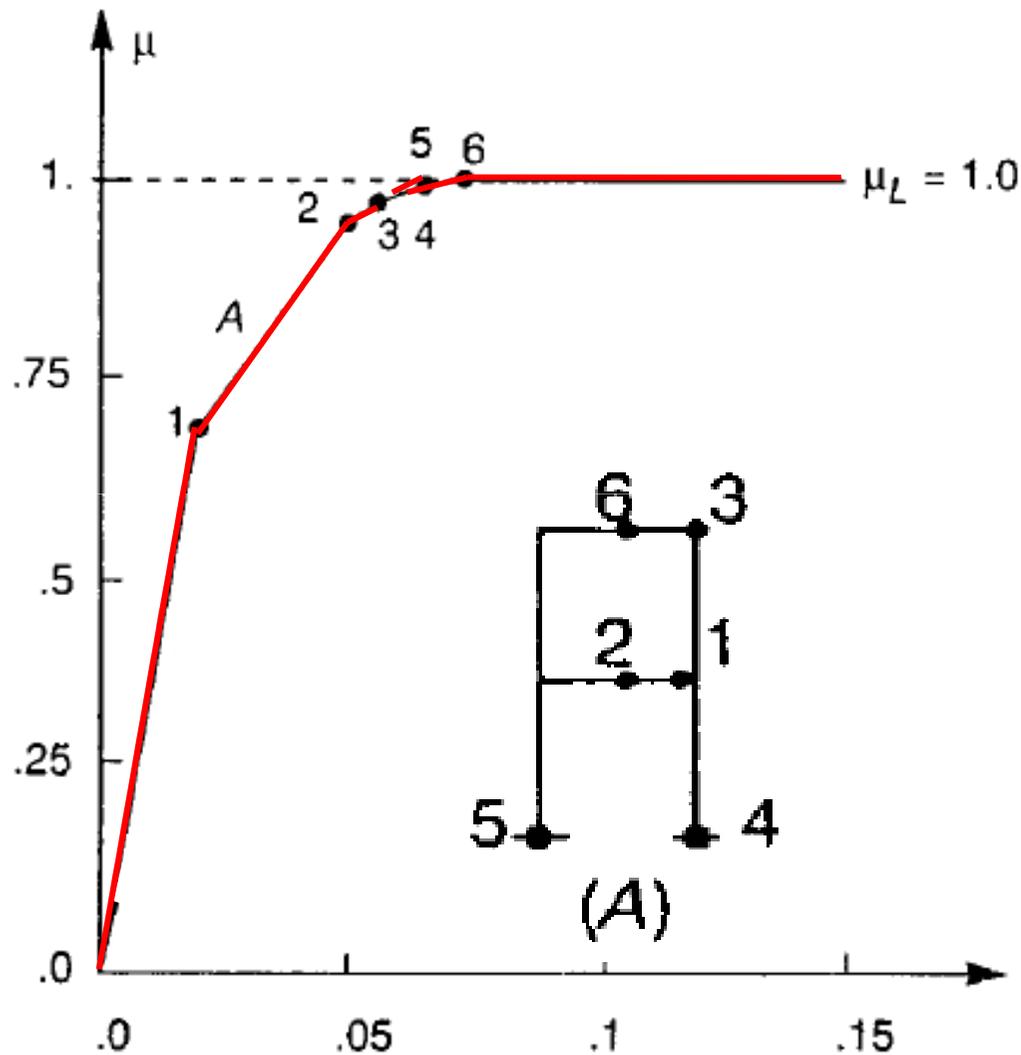
Il moltiplicatore del carico si indica con  $\mu$

# Esempio



La relazione tra il carico e lo spostamento in sommità è una spezzata, la cui pendenza diminuisce bruscamente ogni volta che introduco una nuova cerniera plastica

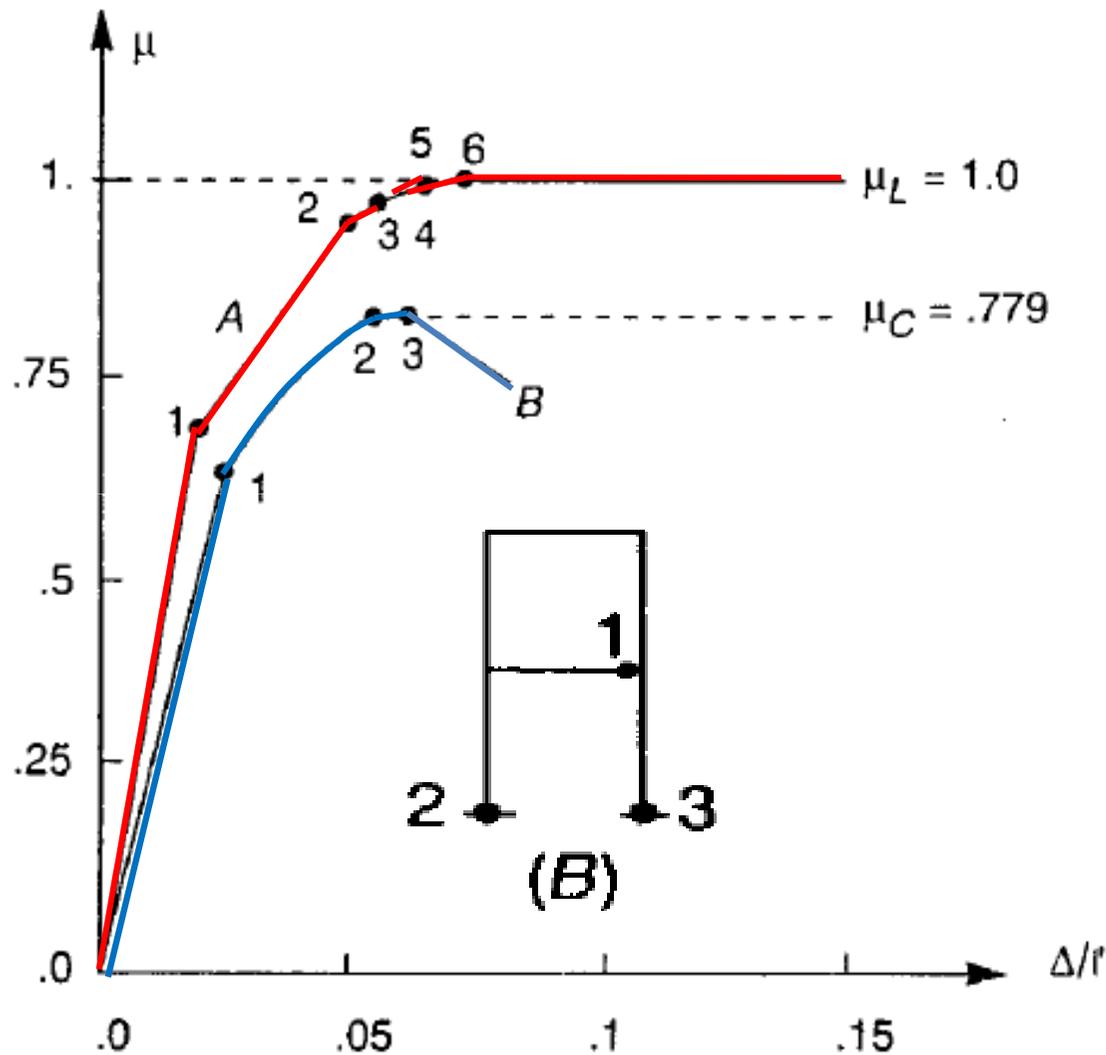
# Esempio



Nell'intervallo tra l'attivazione di una cerniera plastica e quella successiva il diagramma è lineare in quanto viene ignorato l'effetto della compressione sulla rigidezza delle membrature

Quando  $\mu=1$  si raggiunge il carico di collasso  
Si forma il cinematismo A in figura

# Esempio



Si ripeta ora l'analisi considerando l'effetto della compressione sulla rigidezza delle membrature

Il moltiplicatore di collasso è ora  $\mu_c=0.779$  in corrispondenza della configurazione B con 3 cerniere plastiche (oss: non è un cinematismo)

# Capacità portante di telai elasto-plastici sotto carichi verticali

**Consideriamo un'analisi di stabilità dapprima Euleriana per cui riportiamo tutti i carichi ai nodi**

**Ai fini del calcolo del carico critico, si possono considerare solo i carichi verticali**

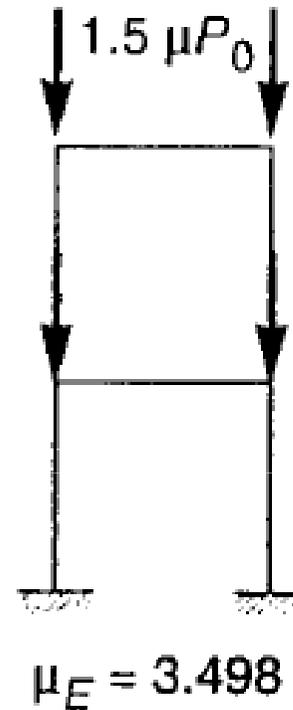
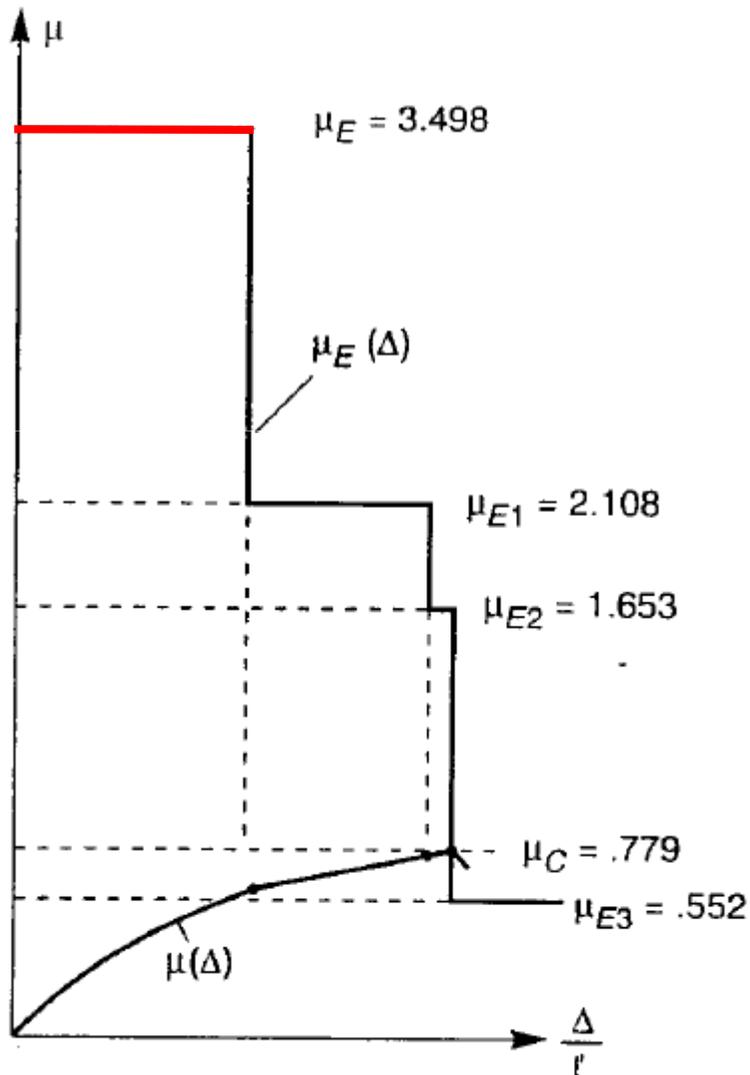
**Per esempio, schematizzando ogni membratura con un unico EF Hermitiano si ottiene come carico critico Euleriano**

**Il valore**

$$\mu_E = 3.498$$

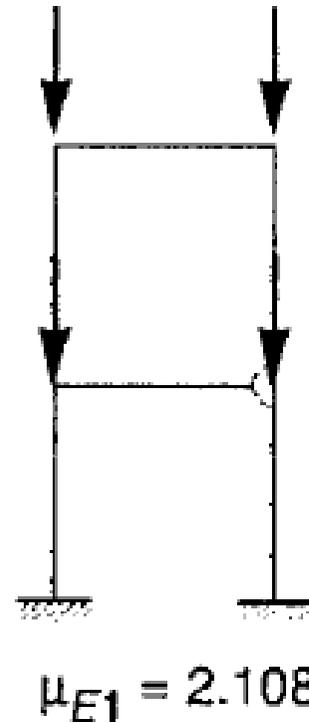
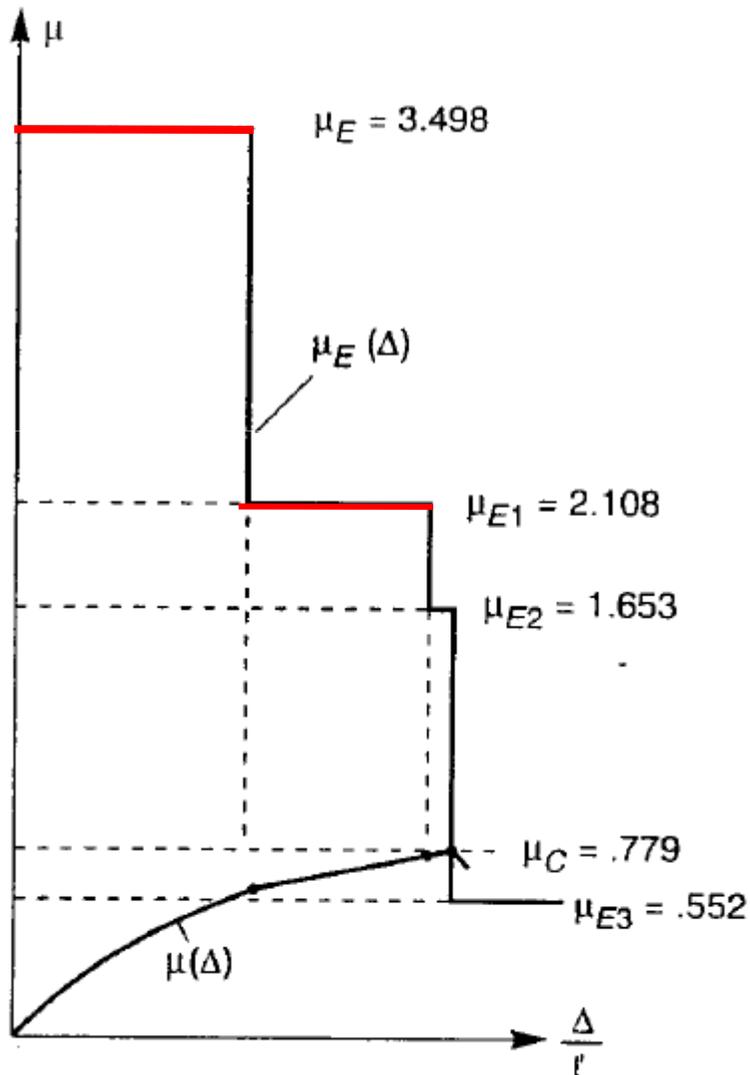
**Che si mantiene costante finché non si esauriscono le risorse elastiche del telaio**

# Se considerassimo solo i carichi verticali



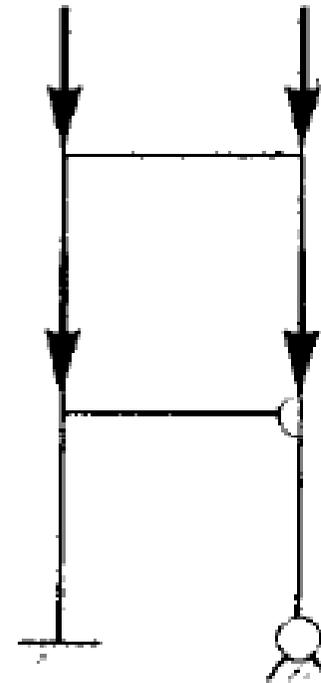
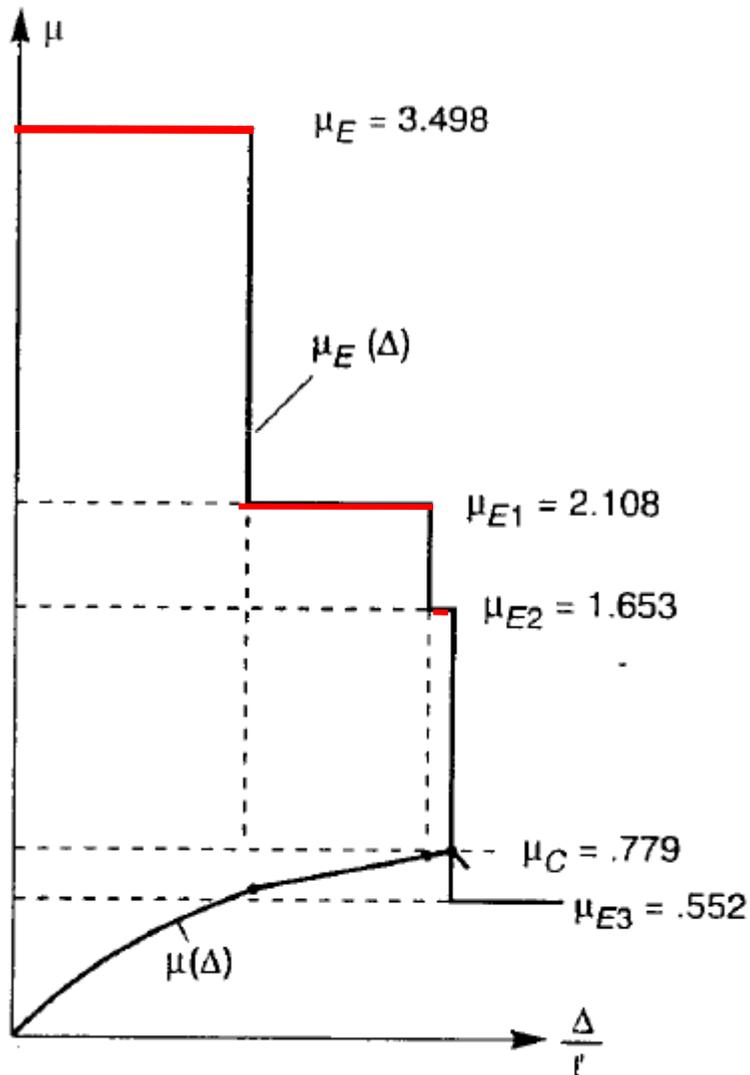
**Le cerniere plastiche riducono tuttavia la rigidezza nei confronti del modo di sbandamento laterale diminuendo il carico critico**

# Se considerassimo solo i carichi verticali



**Si forma quindi la prima  
cerniera plastica  
Il carico critico euleriano si  
abbassa**

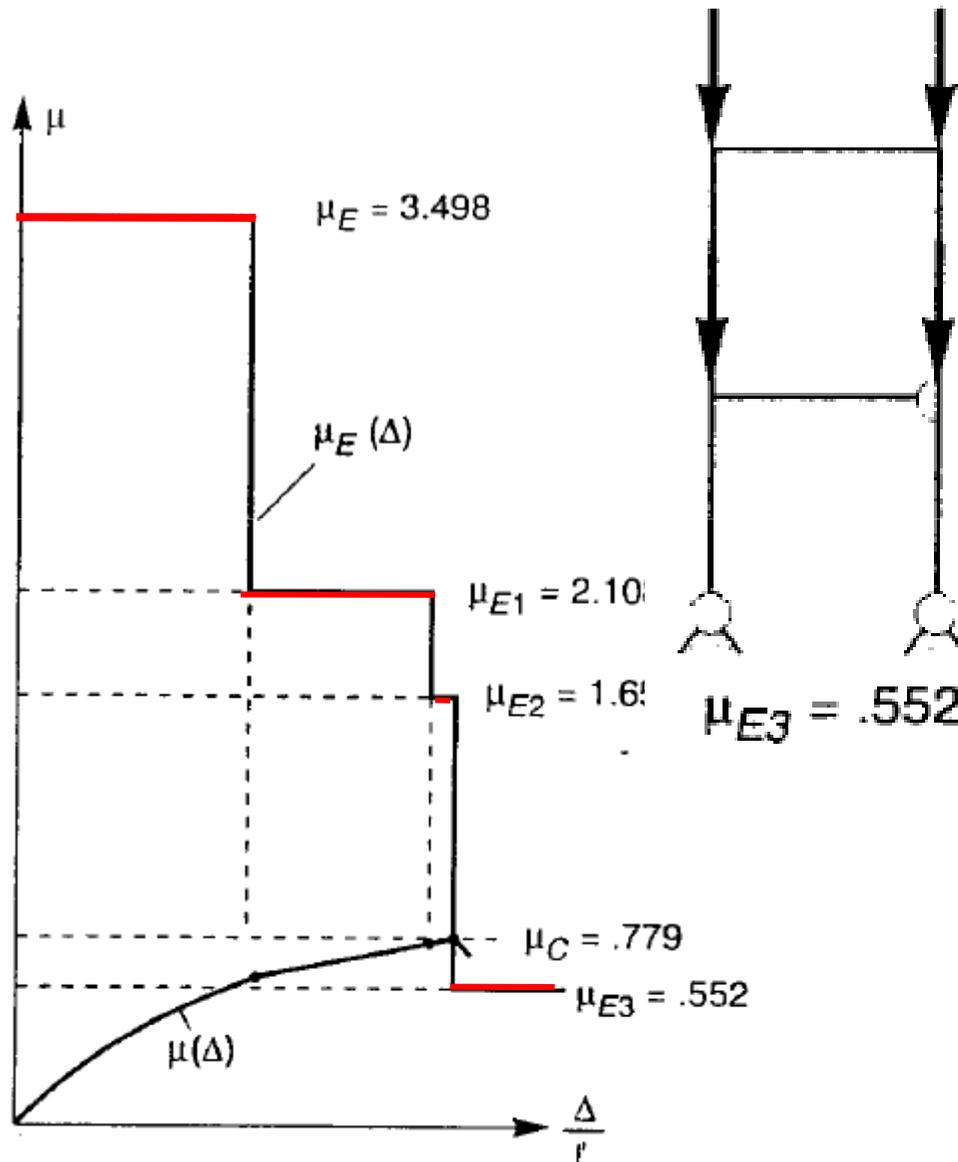
# Se considerassimo solo i carichi verticali



$$\mu_{E2} = 1.653$$

**seconda cerniera plastica**

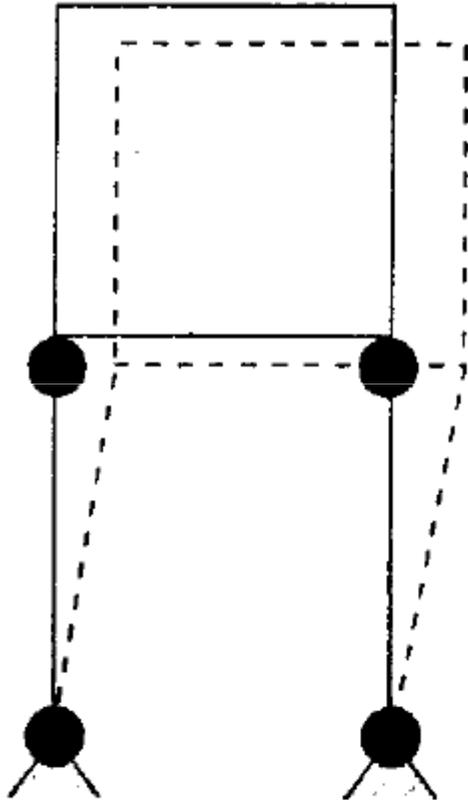
# Se considerassimo solo i carichi verticali



**terza  
cerniera  
plastica**

**Si osservi che  $\mu_{E3}=0.552$  è molto < di  $\mu=0.779$  che si raggiunge subito prima della terza cerniera plastica : quando questa si attiva il carico critico si porta bruscamente al di sotto di tale del valore corrente ed il telaio collassa per instabilità**

# Capacità portante di telai elasto-plastici



**Nella realtà un cinematismo vero e proprio si forma in fase post-collasso (vedi figura) ma non coincide con quello previsto dal calcolo a rottura**

**Ciò è indicativo dei limiti delle analisi limite**

**Vuol dire che occorre fare un'analisi che combini la non linearità geometrica e quella materiale**

# Metodo approssimato per il calcolo del carico di collasso di telai elastoplastici

**Formula di Rankine-Merchant per la stima del carico di collasso dei telai come**

$$\mu_R = \mu_L \frac{1}{1 + \frac{\mu_L}{\mu_E}}$$

**Dove**

$\mu_L$  **carico di collasso rigido-plastico**

$\mu_E$  **carico critico Euleriano del telaio**

**La formula di R-M penalizza il carico di collasso dell'analisi limite tramite un coefficiente riduttivo <1**

# Metodo approssimato per il calcolo del carico di collasso di telai elastoplastici

Nel telaio del caso precedente, la formula di RM fornisce un valore  $\mu_R=0.778$  molto vicino al valore ottenuto dal calcolo non lineare

Tuttavia la formula fornisce una ragionevole stima del carico ultimo solo quando l'atto di moto rigido-plastico è abbastanza simile alla deformata critica (ergo antisimmetrica )

Funziona bene quando il meccanismo prevede cerniere plastiche ai piedi di pilastri e nelle travi come in figura

