Stabilità dell'equilibrio elastico: formulazione generale

- Travi soggette a carico di punta
- Instabilità flesso-torsionale
- Effetto delle tensioni normali secondarie
- Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov
- Instabilità per avvitamento (solo torsionale)
- Instabilità di lastre piane
- Altri casi di interesse tecnico

Classificazione dei fenomeni instabilità

Per regime di sollecitazione

-Compressione (carico di punta)
-Flessione (svergolamento, instabilità laterale)

Instabilità Improvvisa

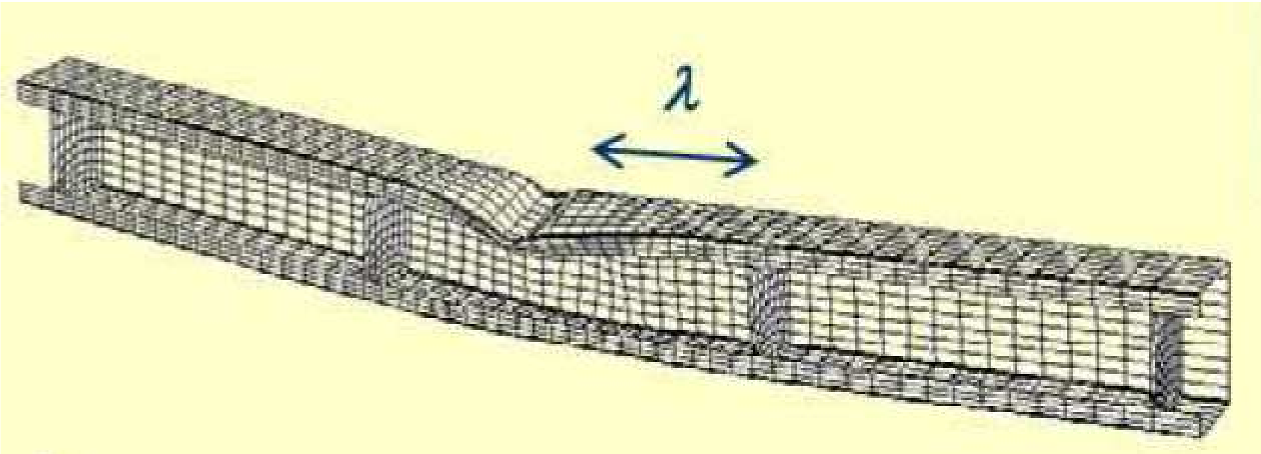
-Pressoflessione

Instab. progressiva

Classificazione dei fenomeni instabilità

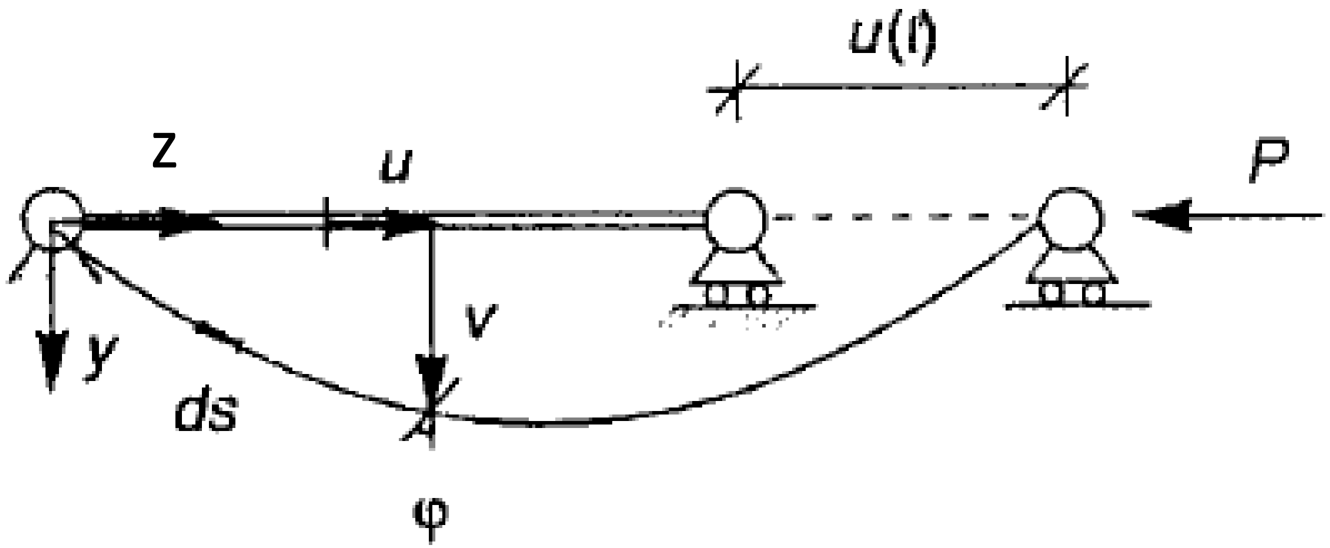
In base alla geometria del fenomeno

-**Locale ((H,B)<λ<L)**
-**Distorsionale**
-**Globale**
-**globale-locale accoppiato**

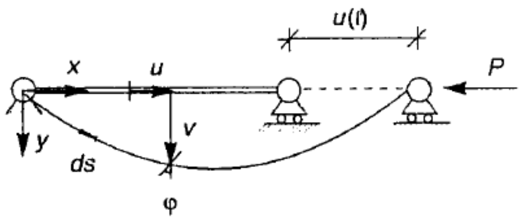


Stabilità dell'equilibrio elastico: caso della trave inflessa sotto carico di punta

Le equazioni di equilibrio sono scritte nella configurazione deformata con riferimento alla configurazione iniziale B_0



caso della trave inflessa sotto carico di punta



Sviluppando in serie di Taylor al II ordine l'Energia di deformazione si ottiene

$$\Omega(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \mathbf{EJv''^2(z)\,dz} - \frac{1}{2}\int_0^\ell \mathbf{Pv'^2(z)\,dz}$$

e, ponendo N_0=-P, si ottiene

$$\Omega(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \mathbf{EJv''^2(z)\,dz} + \frac{1}{2}\int_0^\ell \mathbf{N_0 v'^2(z)\,dz}$$

caso della trave inflessa sotto carico di punta

Quindi nel caso delle travi inflesse per discutere la stabilità dell'equilibrio ci si riferisce alla seguente espressione della energia di deformazione totale

$$\Pi(v) = \Phi(v) - L_{II_e} =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\ell} EJv''^2(z)\,dz + \frac{1}{2}\int_0^{\ell} N^0(z)v'^2(z)\,dz$$

$$\mathbf{\Phi(v) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} EJv''^2(z)\,dz}$$

potenziale elastico scritto nella configurazione iniziale

$$\mathbf{L_e^{II} = -\frac{1}{2}\int_0^{\ell} N^0(z)v'^2(z)\,dz}$$

lavoro II ordine compiuto dalle tensioni nella configurazione iniziale per le deformazioni che descrivono il passaggio dalla configurazione iniziale alla variata

caso della trave inflessa sotto carico di punta

Quindi nel caso delle travi inflesse per discutere la stabilità dell'equilibrio ci si riferisce alla seguente espressione della EPT nel caso in cui i carichi distribuiti lungo z in direzione z siano 0

$$\Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \mathbf{EJv}''^{2}(\mathbf{z})\,\mathbf{dz} + \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \mathbf{N}^{0}(\mathbf{z})\mathbf{v}'^{2}(\mathbf{z})\,\mathbf{dz}$$

La stazionarietà dell'EPT porta a scrivere l'equazione di equilibrio

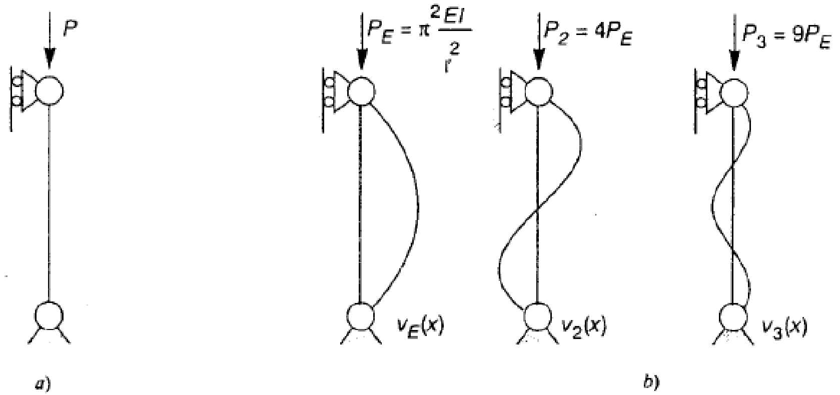
$$(\mathbf{EJv}''(\mathbf{z}))'' - (\mathbf{N}^{0}(\mathbf{z})\mathbf{v}'(\mathbf{z}))' = 0$$

+ opportune condizioni al contorno

NB: Quella sopra è la EPT oltre che l'energia di deformazione totale poiché, data la trascurabilità della deformazione assiale, si è posto il lavoro del carico di punta P u(l)=0

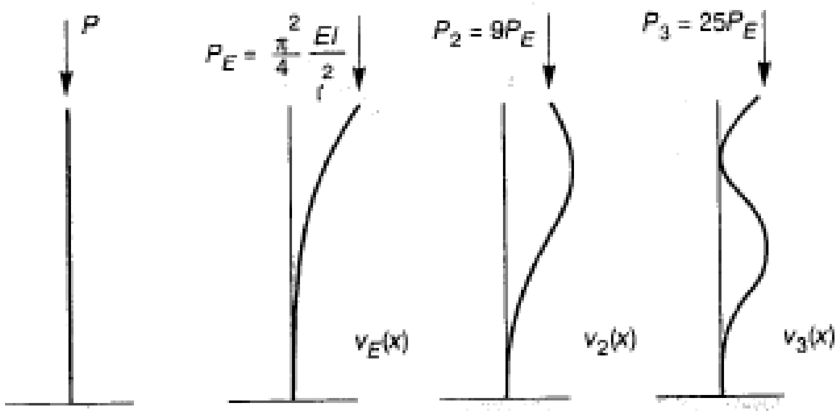
caso della trave compressa soggetta a N_0=-P costante

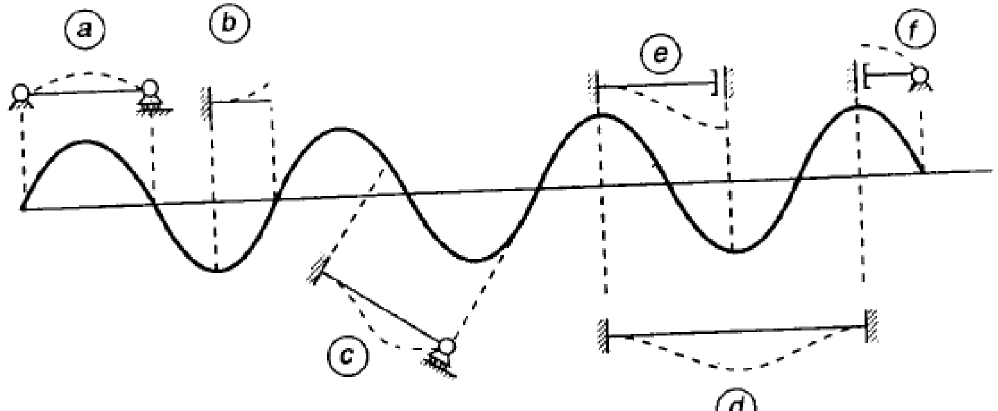
$$(\mathbf{EJv''(z)})'' + \mathbf{Pv''(z)} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}^{\mathbf{iv}}(\mathbf{z}) + \alpha^2 \mathbf{v''(z)} = 0$$



$$\alpha^2 = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{EJ}} \qquad \mathbf{P_E} = \pi^2 \frac{\mathbf{EJ}}{\ell^2_0}$$

ℓo lunghezza libera di inflessione





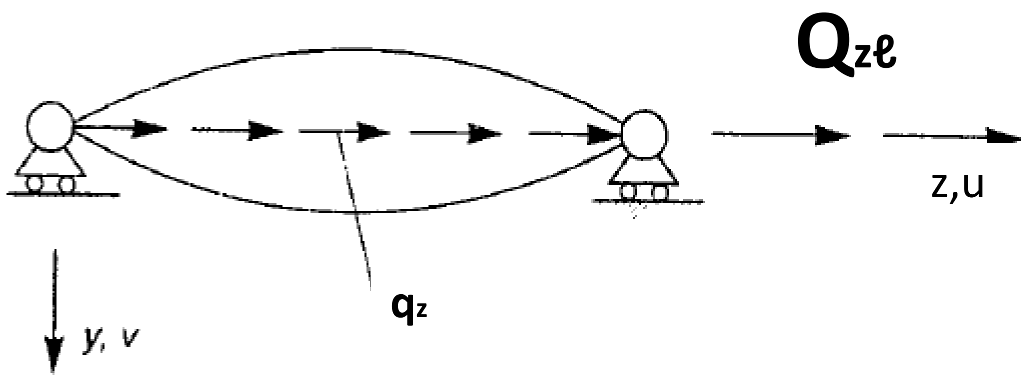
Caso della trave caricata di punta deformabile sia a flessione che assialmente

Se la deformabilità assiale viene considerata, ci si riferisce alla seguente espressione della EPT

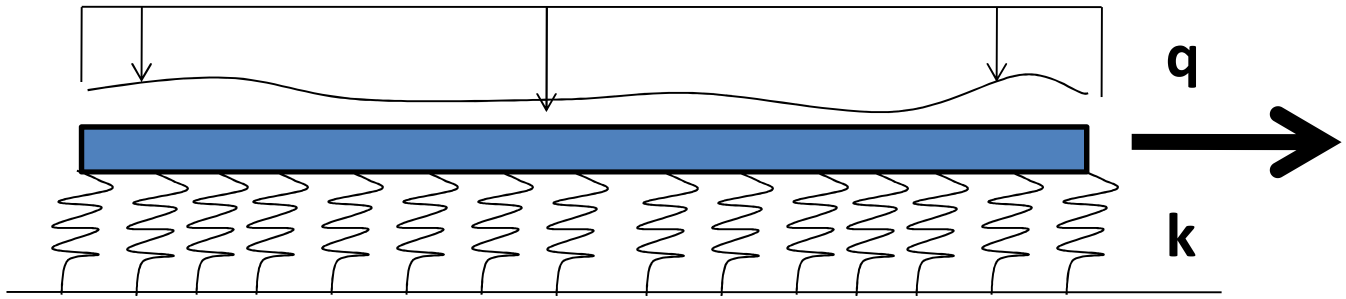
$$\Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \mathbf{EJv''^2(z)\,dz} + \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \mathbf{N^0(z)v'^2(z)\,dz} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\ell} \mathbf{EAu'^2(z) - q_z(z)u(z)dz - Q_{z\ell}u(\ell)}$$

Dove q_z rappresenta un carico assiale e $Q_{z\ell}$ il valore del carico assiale in ℓ



Trave caricata assialmente su suolo elastico deformabile a flessione



$$\Pi(v) = \frac{1}{2}\int_0^L \left((EJv''(z))'' - Pv'^2(z) + kv^2(z) - qv(z) \right) dz$$

$$\Rightarrow EJv^{iv}(z) + Pv''(z) + kv(z) - q(z) = 0$$

k: costante di Winkler

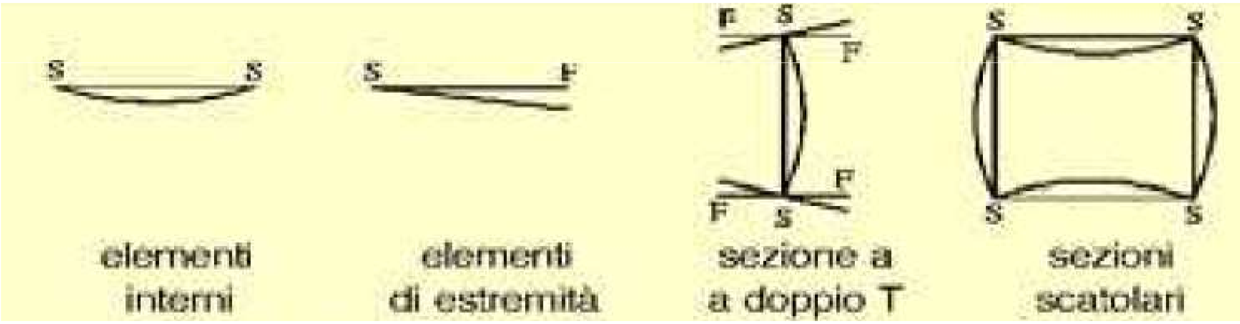
Instabilità globale

Fenomeni di instabilità globale comprendono casi in cui la sezione trasla o ruota senza deformarsi

avvitamento

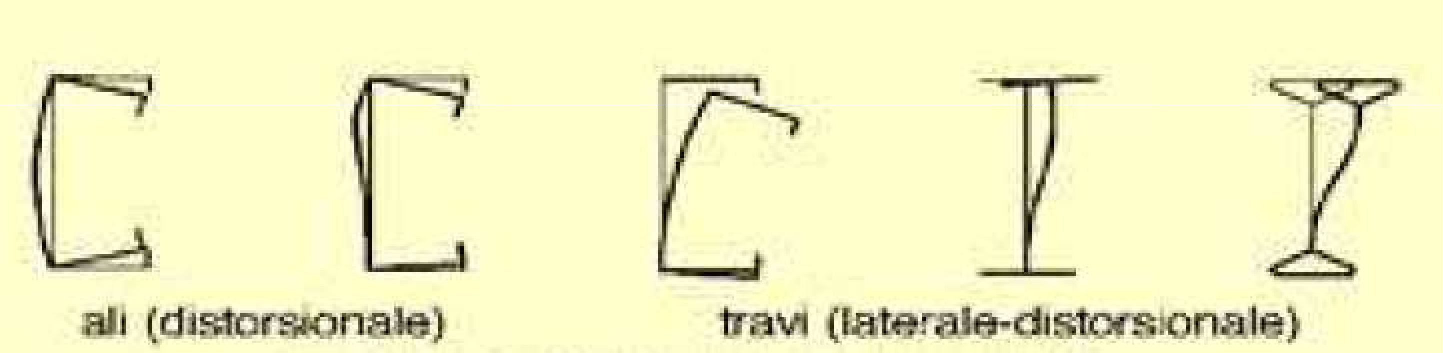
Instabilità locale

Fenomeni di instabilità locale per elementi uniformemente compressi



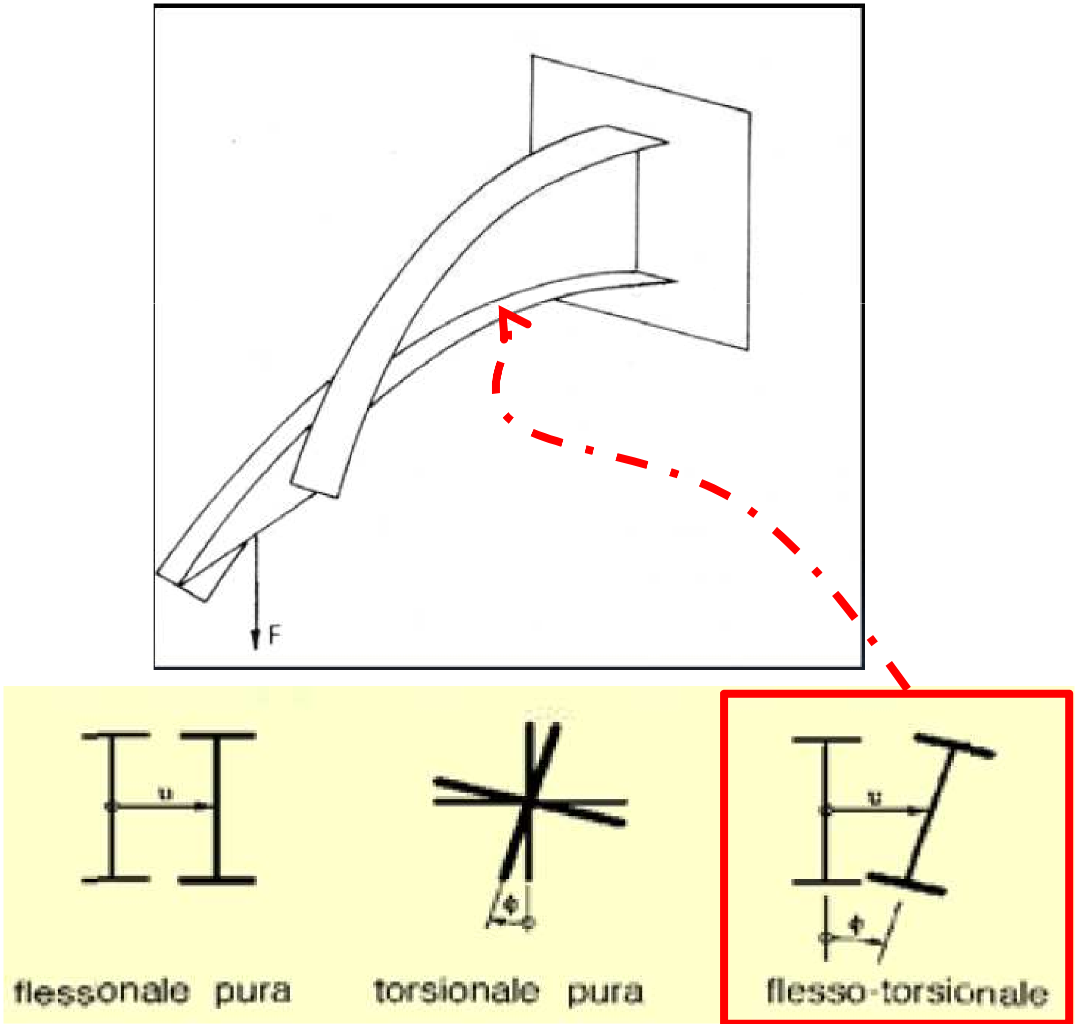
Instabilità distorsionale

Fenomeni di instabilità distorsionale: cambio di forma della sezione trasversale

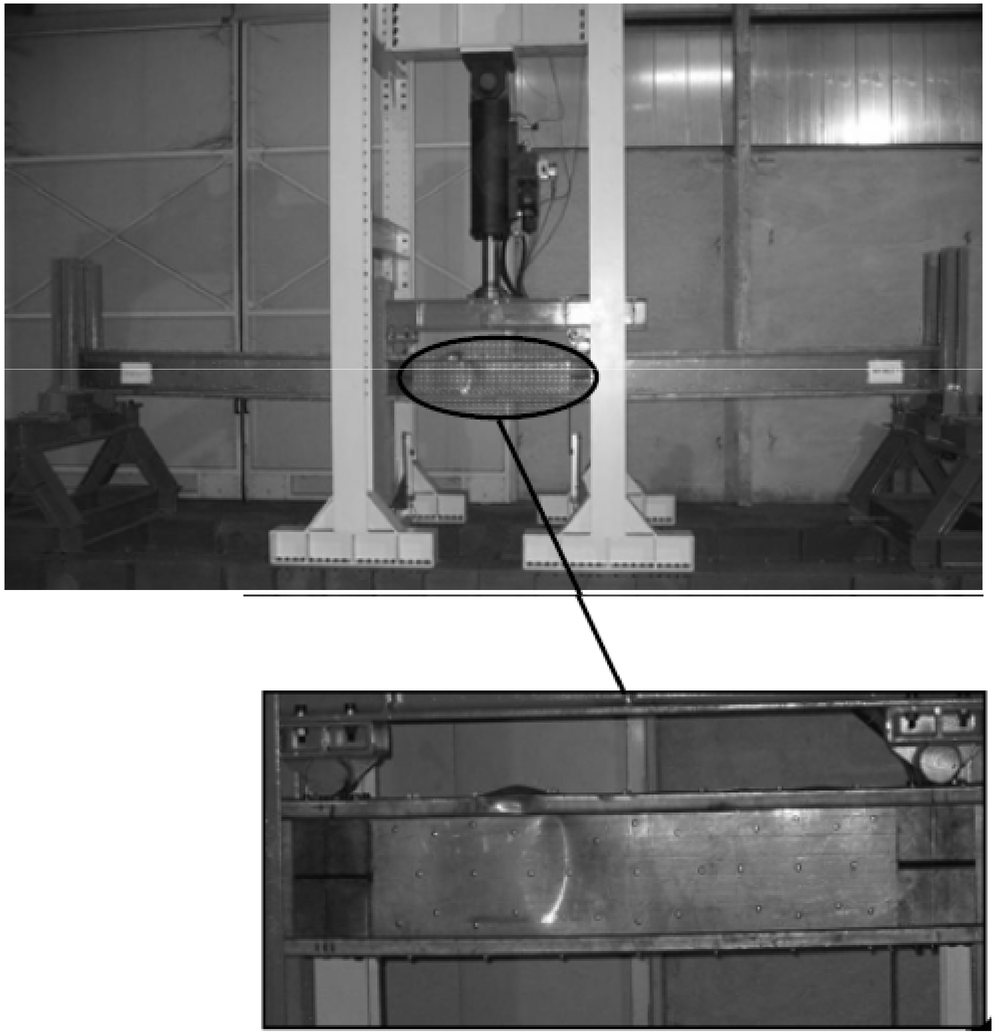


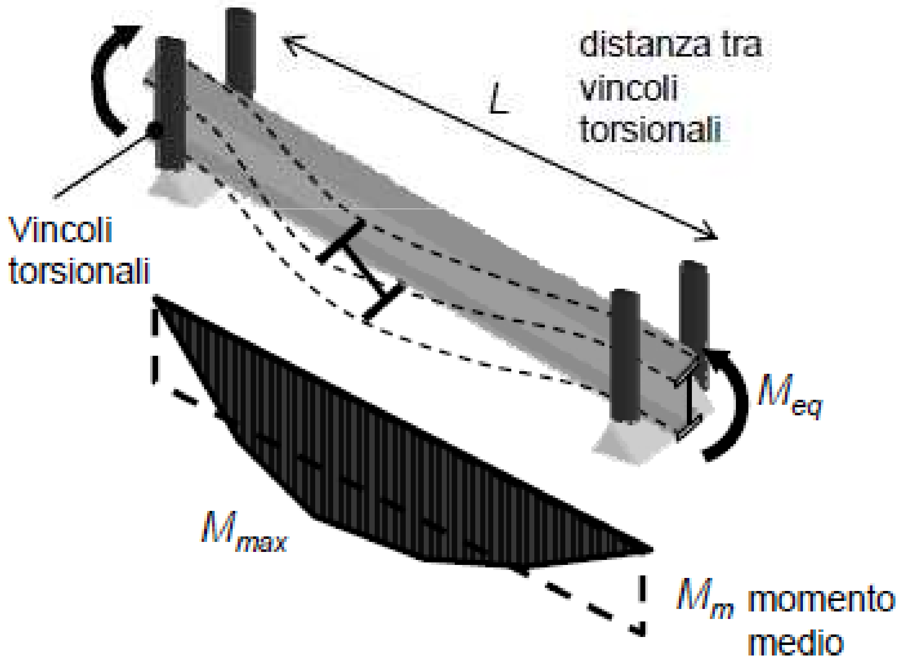
Instabilità globale

Fenomeno di instabilità globale: caso della torsione non uniforme instabilità flesso-torsionale

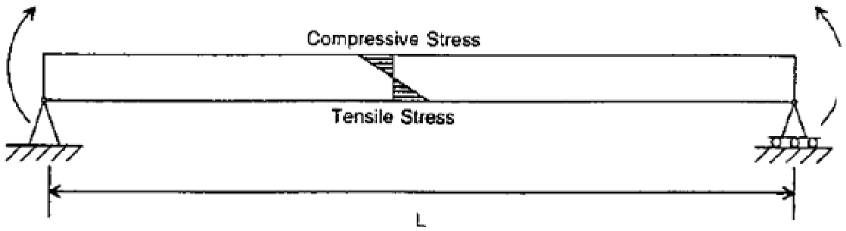


Esempi di prove a flessione su travi vincolate torsionalmente

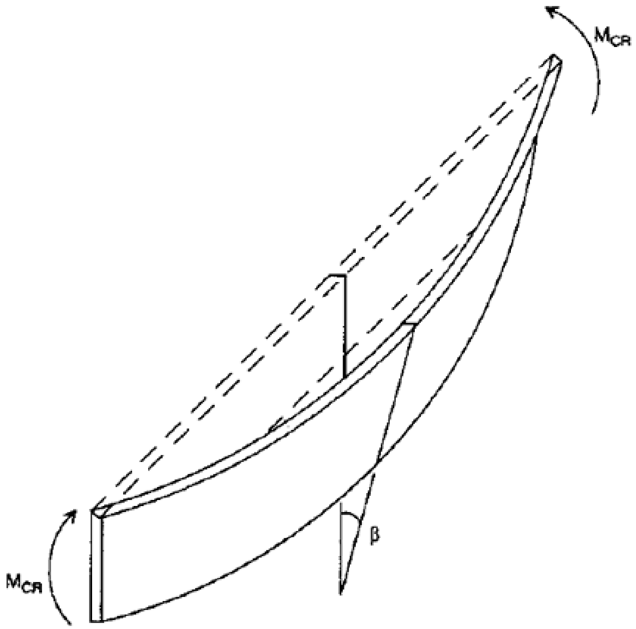




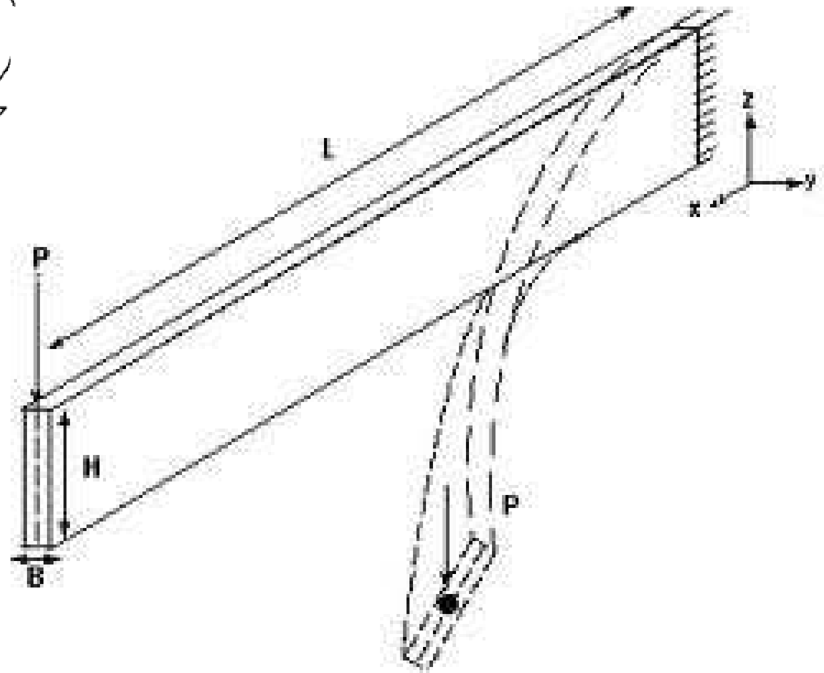
Instabilità flesso-torsionale



(a)



(b)



Instabilità flesso-torsionale

This cantilever beam has no lateral support. It was excessively loaded and experienced lateral torsional buckling. Part of the failure mechanism included local buckling of the compression flange

Instabilità flesso-torsionale

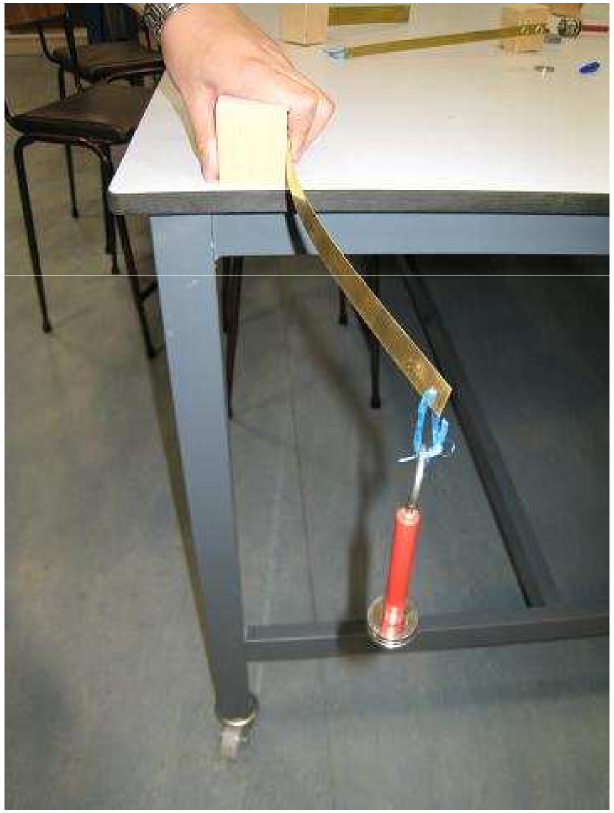
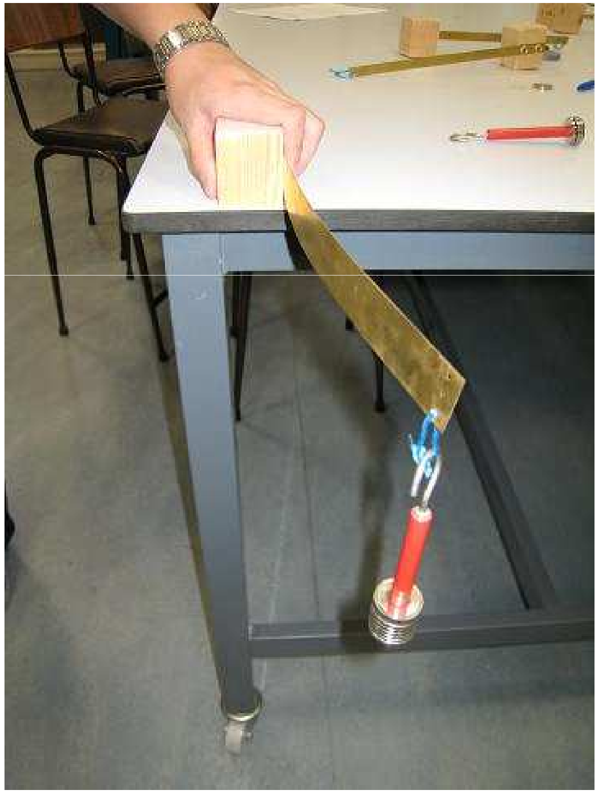
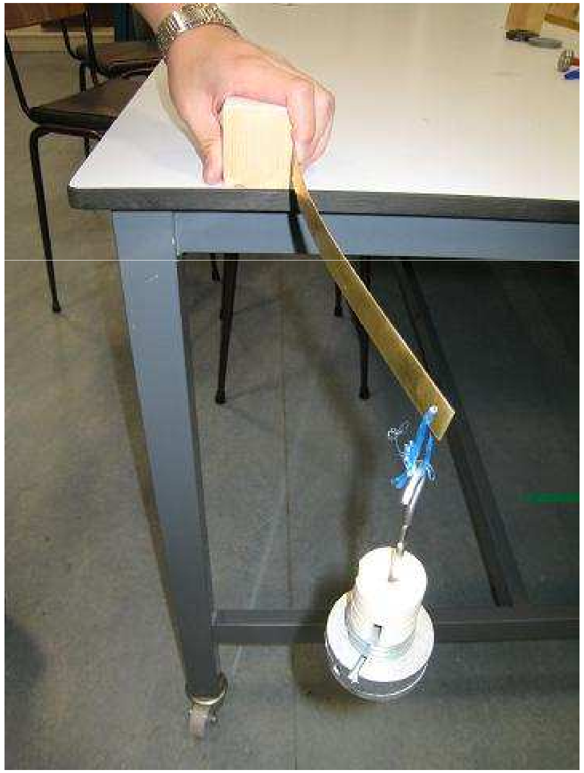
The following photo shows local buckling of the compression flange

Instabilità flesso-torsionale

Lateral buckling of a cantilever

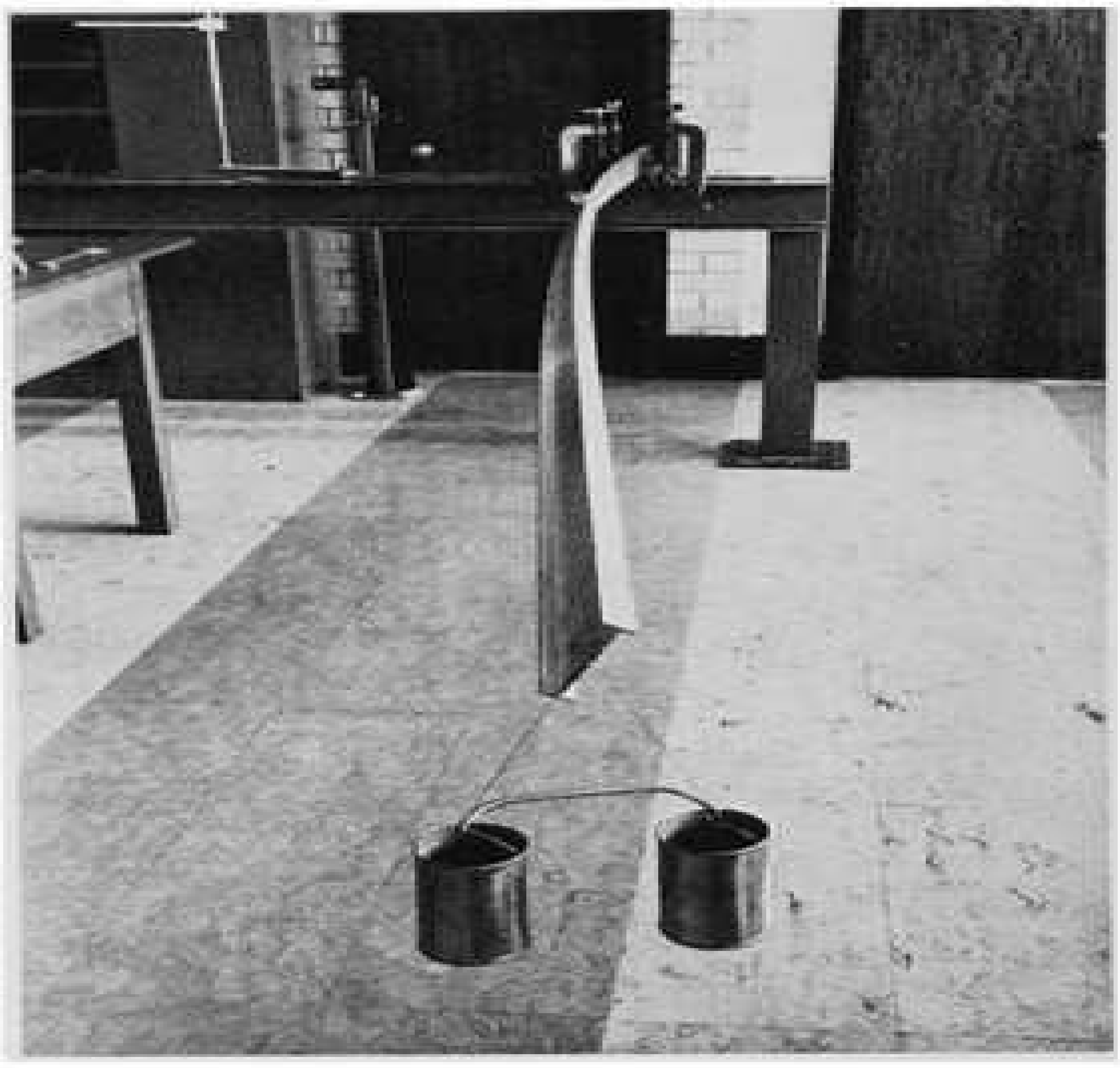
Instabilità flesso-torsionale

This set of models demonstrates *the behaviour of lateral buckling of a narrow rectangular beam with different sizes of section*

Instabilità flesso-torsionale

Lateral buckling of a cantilever



Instabilità flesso-torsionale

La trave da ponte collassa in fase di costruzione a causa della mancanza della soletta di cls di copertura che le conferisce rigidità torsionale in fase di esercizio

Instabilità flesso-torsionale

Lateral buckling of a cantilever

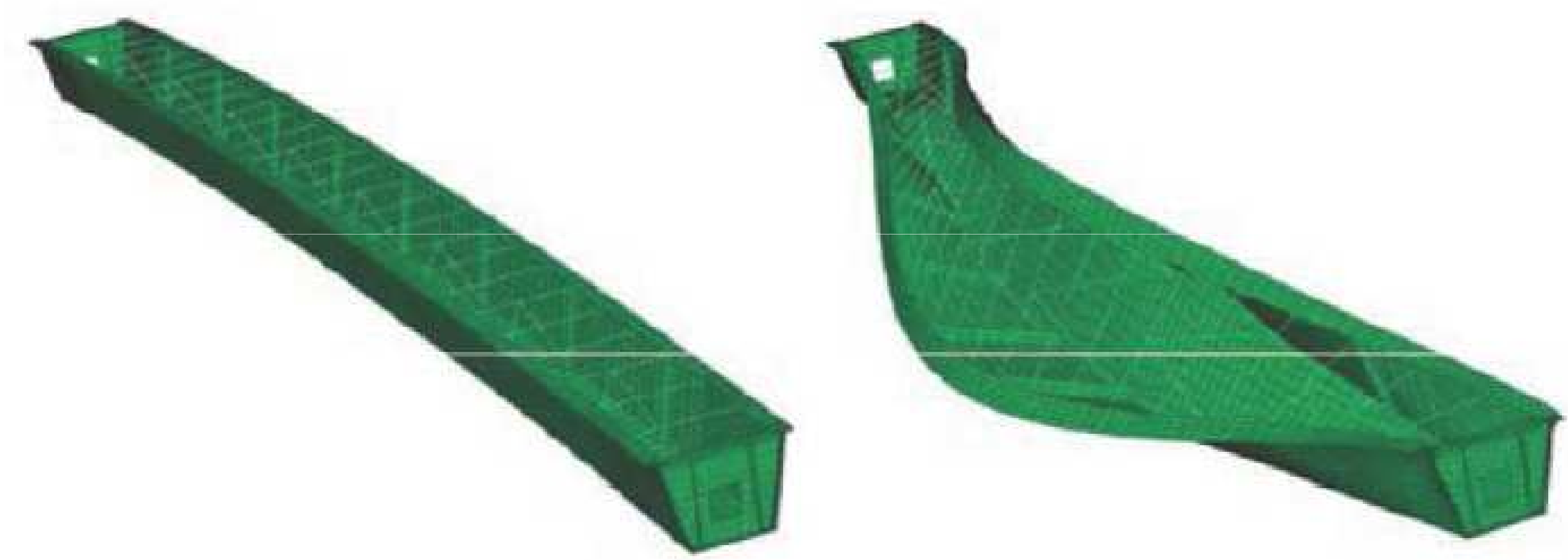


Figure 5: Finite element model of the Marcy Pedestrian Bridge showing the undeformed shape and the global lateral-torsional buckling mode.

Instabilità flesso-torsionale

Lateral buckling of a cantilever

Additional supports provided to prevent lateral torsional buckling through reducing the beam length

Instabilità flesso-torsionale

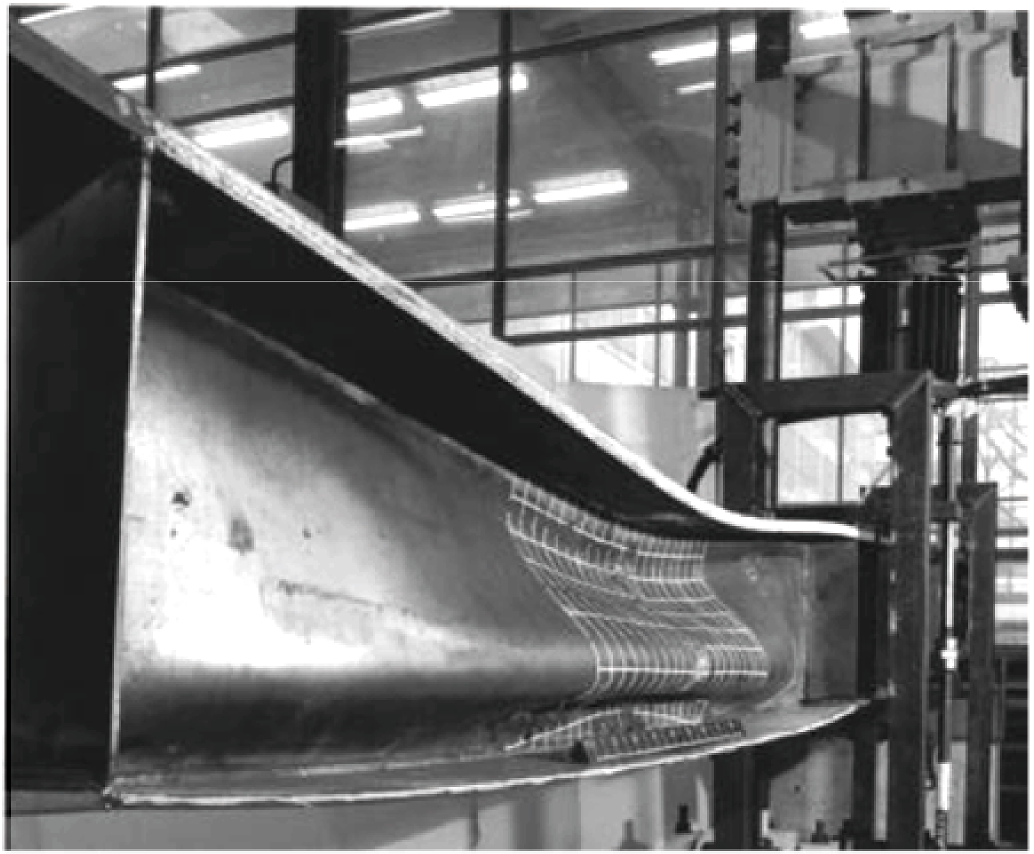
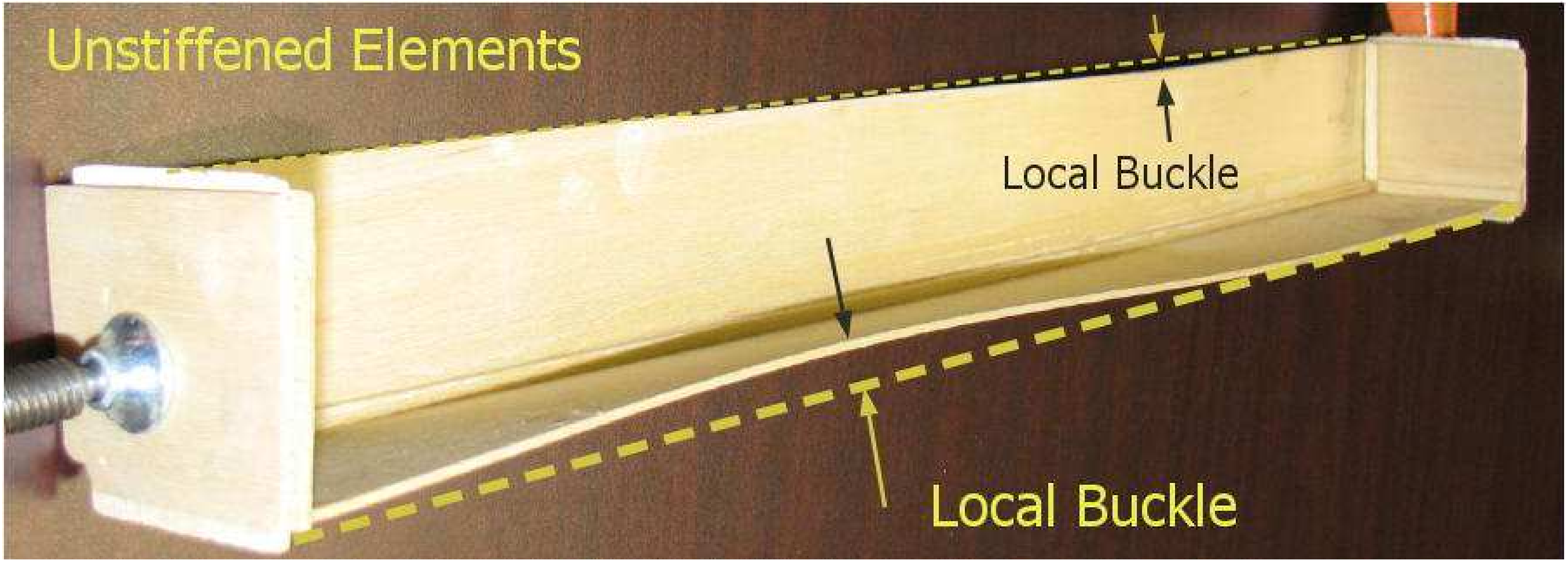


Figure 2. Vertical web buckling.

Instabilità flesso-torsionale

Lateral buckling of a cantilever



Instabilità flesso-torsionale

Lateral buckling of a cantilever

Instabilità flesso-torsionale

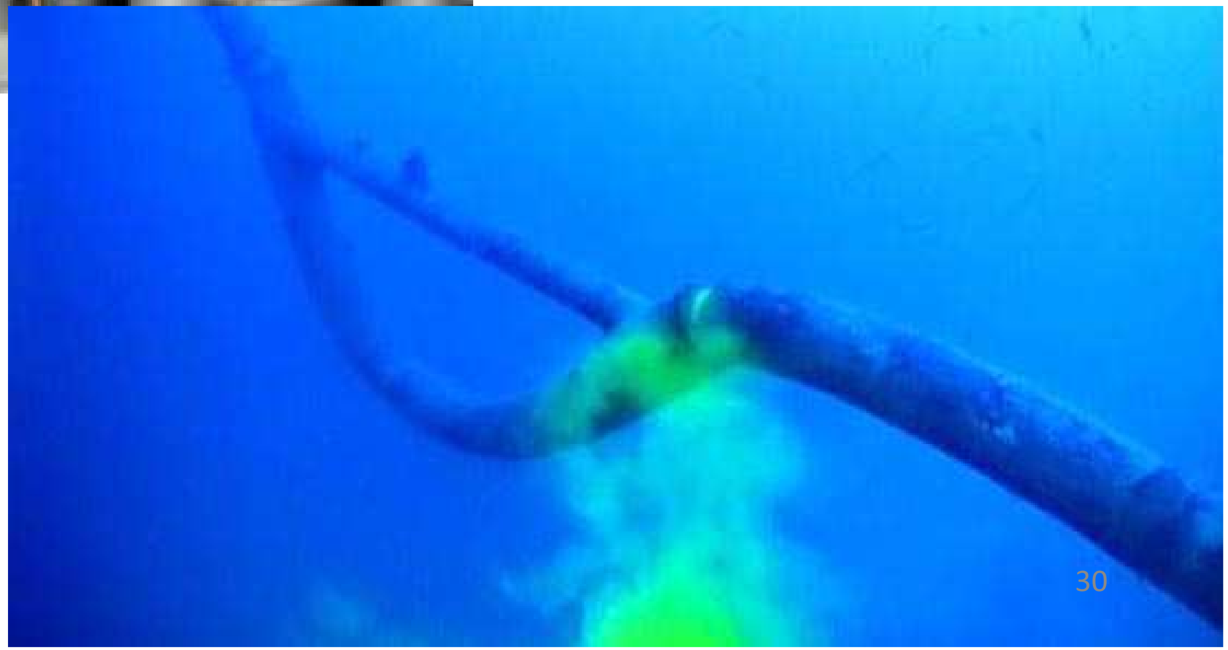
Initial post-buckling deflection pattern of cylindrical shell

Instabilità flesso-torsionale

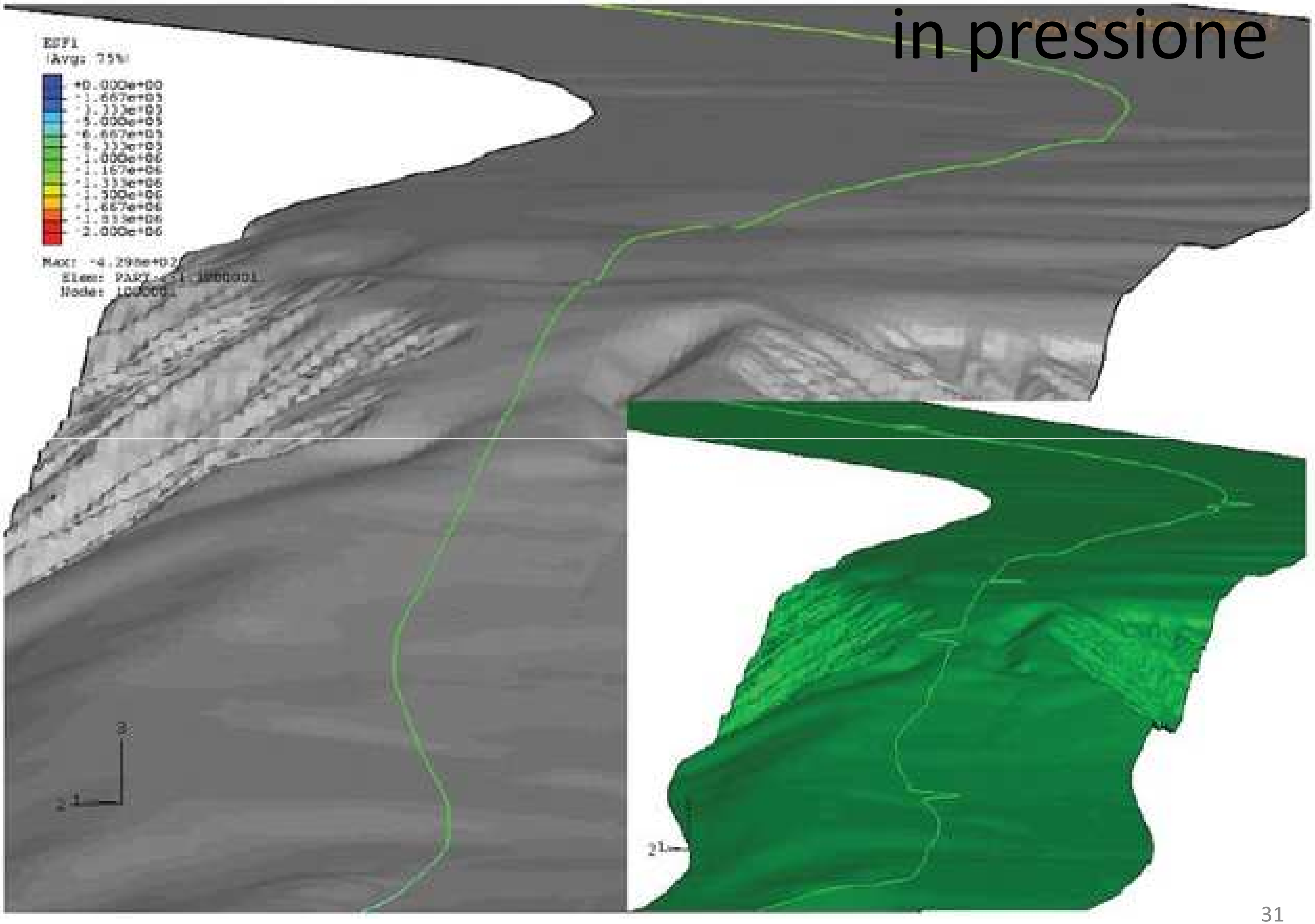
Lateral buckling of a cantilever

Additional supports provided to prevent lateral torsional buckling through reducing the beam length

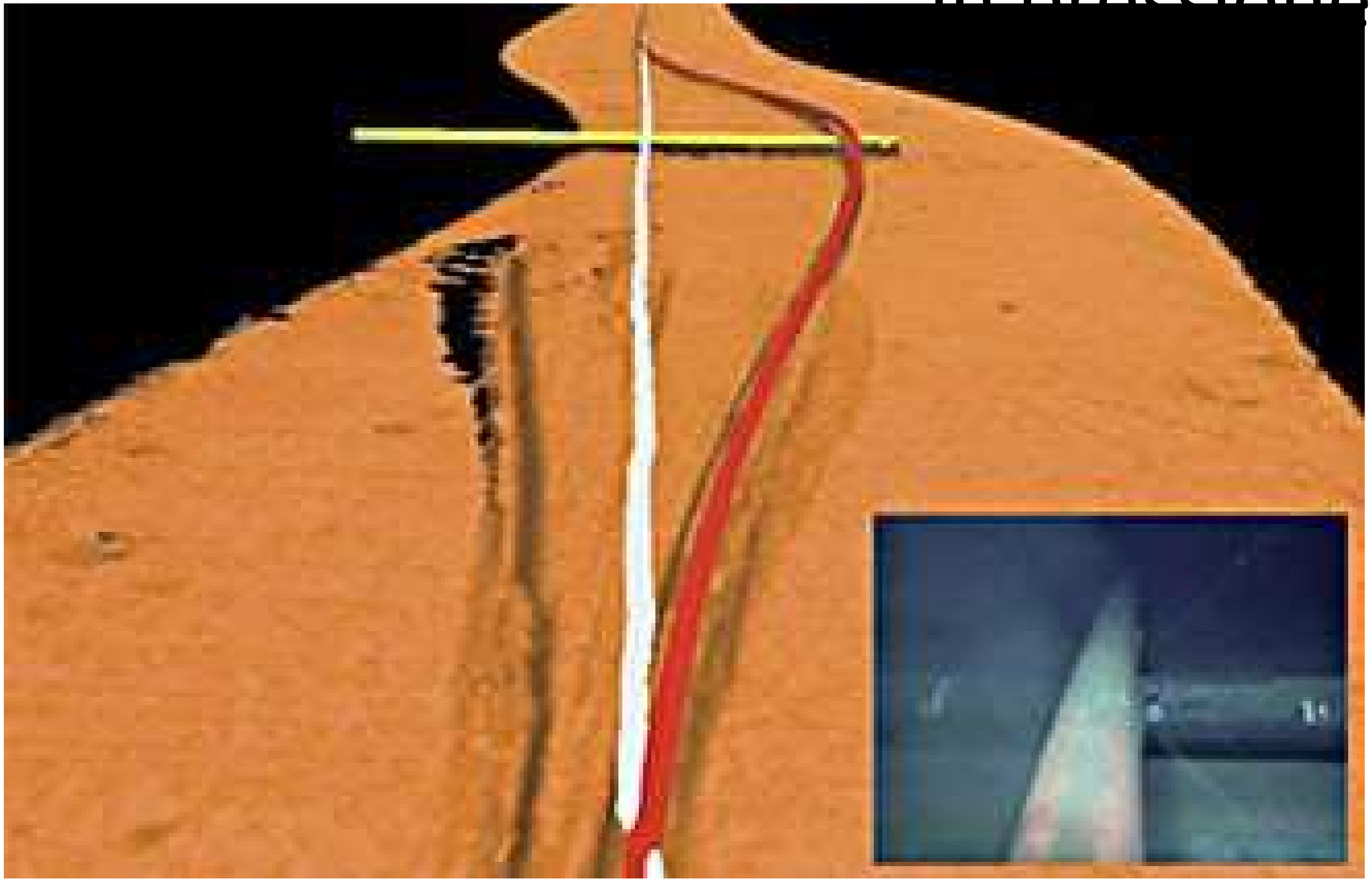
Buckling di tubi in pressione



Buckling di tubi in pressione



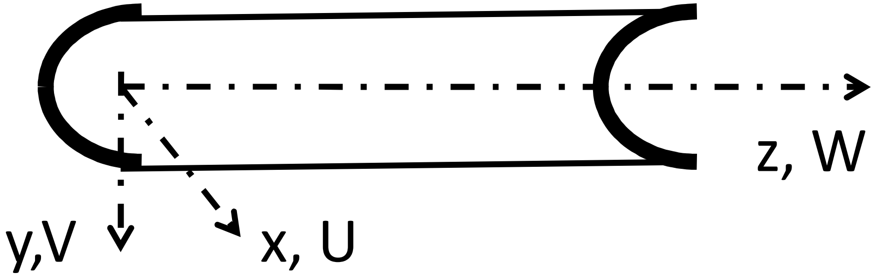
Buckling di tubi in pressione



Instabilità flesso-torsionale di travi di sezione aperta in parete sottile

1) **Ricaviamo la Energia Potenziale Totale per il caso generale**
2) **Le equazioni di stazionarietà sono equazioni differenziali che rappresentano le equazioni del problema della stabilità della trave**
3) **A seconda della geometria della sezione trasversale (simmetria, posizione del centro di taglio) si avranno o meno dei problemi semplificati e sarà eventualmente possibile disaccoppiare le equazioni differenziali ottenute dalla stazionarietà**

Instabilità flesso-torsionale di travi di sezione aperta in parete sottile

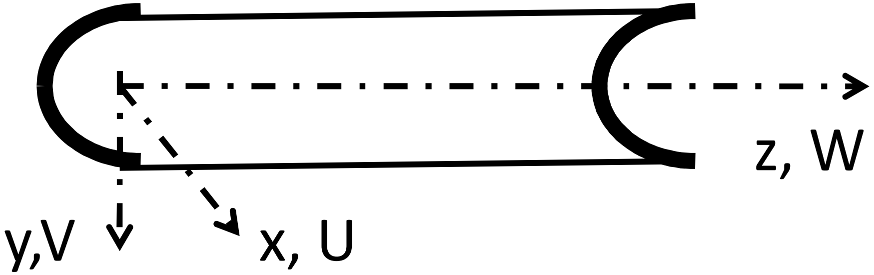


Precedentemente abbiamo visto come l'instabilità di un'asta compressa si verifichi per pura inflessione in un piano

Tuttavia, se la sezione ha modeste rigidezza torsionale, il modo nei cui confronti la trave perde più rapidamente di rigidezza può configurare una deformazione flesso-torsionale

Di fatto, solo travi di sezione aperta e parete sottile rientrano in quest'ultimo caso

Instabilità flesso-torsionale di travi di sezione aperta in parete sottile



Per determinare la EPT della trave soggetta a fenomeni di instabilità flesso-torsionale occorre:

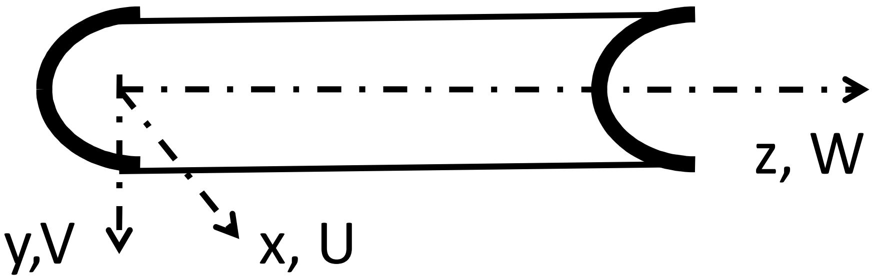
1) considerare la trave nella configurazione variata

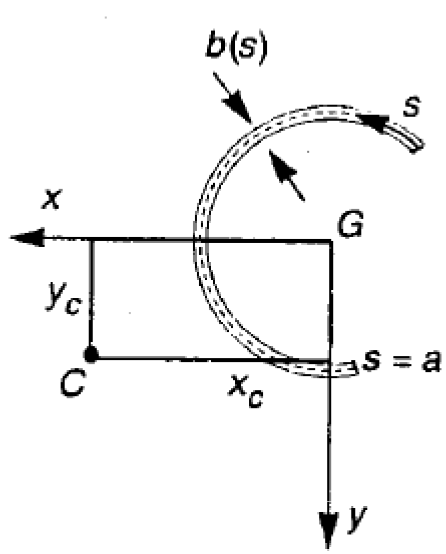
2) utilizzare il tensore di deformazione di

Green-Lagrange $$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} - \mathbf{I}$$

ottenuto a partire dal gradiente di deformazione F

Instabilità flesso-torsionale: cinematica





Cinematica della trave

$$\mathbf{U}(s,z) = \mathbf{u}(z) - \vartheta(z)(y(s) - y_c)$$

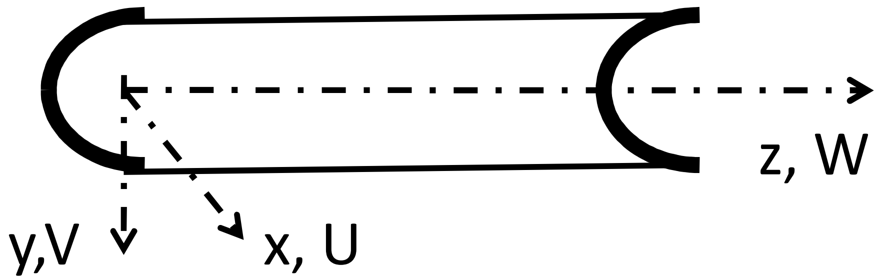
$$\mathbf{V}(s,z) = \mathbf{v}(z) - \vartheta(z)(x(s) - x_c)$$

$$\mathbf{W}(s,z) = \mathbf{w}(z) - y(s)v'(z) - x(s)u'(z) + \psi(s)\vartheta'(z)$$

Dove
u,v,w : spostamenti del centro di taglio C
θ: rotazione attorno a C
ψ: funzione di ingobbamento
x,y assi centrali di inerzia (baricentrici e principali)

Instabilità flesso-torsionale

Calcoliamo le componenti del tensore di deformazione di Green-Lagrange E



Nel problema di de Saint Venant le deformazioni

$$\mathbf{E}_{xx} = \mathbf{E}_{yy} = \mathbf{E}_{xy} = 0$$

$$\mathbf{E}_{zz} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{z}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{z}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{z}}\right)^2\right]$$

$$2\mathbf{E}_{xz} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{z}} + \left[\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{z}}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{z}}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{x}}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{z}}\right)\right]$$

$$2\mathbf{E}_{yz} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{z}} + \left[\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{y}}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{z}}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{y}}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{z}}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{y}}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{z}}\right)\right]$$

Instabilità flesso-torsionale

Ulteriori ipotesi sul tensore delle deformazioni

L.Corradi III p 232

Indeformabilità della sezione trasversale

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \cong 0$$

Rigidezza assiale

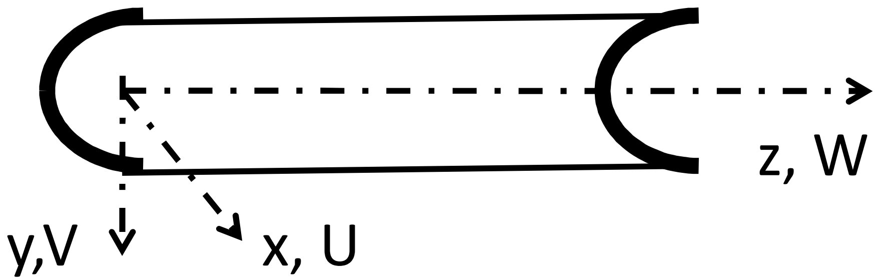
$$\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 << \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial z} \cong 0$$

Trascurabilità deformazioni da taglio da effetti del I ordine

$$\gamma^{(1)}{}_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \cong 0, \quad \gamma^{(1)}{}_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \cong 0$$

Instabilità flesso-torsionale

Pertanto in base alle ipotesi fatte



$$\mathbf{E}_{\mathbf{zz}} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{z}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{z}}\right)^2\right] = \varepsilon^{(1)}{}_{\mathbf{z}} + \varepsilon^{(2)}{}_{\mathbf{z}}$$

$$2\mathbf{E}_{\mathbf{xz}} = \gamma^{(2)}{}_{\mathbf{xz}} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{z}}\right)\right]$$

$$2\mathbf{E}_{\mathbf{yz}} = \gamma^{(2)}{}_{\mathbf{yz}} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{y}}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{z}}\right)\right]$$

Instabilità flesso-torsionale

Pertanto in base alle ipotesi fatte le componenti di deformazioni diventano (LC III p 233)

$$\varepsilon^{(1)}{}_{z} = -\mathbf{y}\mathbf{v}'' - \mathbf{x}\mathbf{u}'' + \psi\vartheta''$$

$$\varepsilon^{(2)}{}_{z} = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{u}' - \vartheta'(\mathbf{y} - \mathbf{y}_C))^2 + (\mathbf{v}' - \vartheta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_C))^2\right]$$

$$\gamma^{(2)}{}_{xz} = \mathbf{v}'\vartheta + \vartheta\vartheta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_C)$$

$$\gamma^{(2)}{}_{yz} = -\mathbf{u}'\vartheta + \vartheta\vartheta'(\mathbf{y} - \mathbf{y}_C)$$

Instabilità flesso-torsionale

L'energia di deformazione nel caso generale di spostamenti non trascurabili diventa

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_0^{\mathbf{L}} \int_{\mathbf{A}} \mathbf{E}\left(\varepsilon_{\mathbf{z}}^{(1)}\right)^2 \mathbf{dAdz} +$$

$$\int_0^{\mathbf{L}} \int_{\mathbf{A}} (\sigma^0{}_{\mathbf{z}}\varepsilon_{\mathbf{z}}^{(2)} + \tau^0{}_{\mathbf{xz}}\gamma_{\mathbf{xz}}^{(2)} + \tau^0{}_{\mathbf{yz}}\gamma_{\mathbf{yz}}^{(2)})\mathbf{dzdA}$$

Dove σ_{ij}^0 è il tensore di stress di Piola-Kirchhoff valutato nella configurazione iniziale B_0

Instabilità flesso-torsionale

In particolare, si ha che

$$\frac{1}{2}\int_0^L \int_A E\left(\varepsilon_z^{(1)}\right)^2 dAdz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L (EI_x v''^2 + EI_y u''^2 + E\Gamma\vartheta''^2)dz$$

Dove

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA, \quad \Gamma = \int_A \psi^2 dA$$

Sono i momenti principali di inerzia e la rigidità di ingobbamento

Instabilità flesso-torsionale

Tuttavia il modello cinematico finora utilizzato non tiene conto della torsione primaria, associata alle deformazioni tangenziali che insorgono nella soluzione del Saint Venant.

Tali tensioni si annullano sulla linea media ma variano lungo lo spessore.

Occorre pertanto aggiungere il termine energetico

$$\Delta\Omega = \frac{1}{2}\int_0^L GJ\vartheta'^2 dz$$

Dove (essendo a lo sviluppo totale della linea media) la rigidità torsionale primaria per i profili sottili aperti si scrive

$$J = \frac{1}{3}\int_0^a b^3(s)ds$$

Energia di deformazione di trave con sezione aperta sottile

Tenendo conto della deformabilità flessionale e della rigidezza torsionale la energia di deformazione totale della trave di sezione aperta in parete sottile diventa

$$\Omega(\mathbf{u},\mathbf{v},\vartheta)=\frac{1}{2}\int_0^{\mathbf{L}}(\mathbf{EI}_{\mathbf{x}}\mathbf{v}''^{2}+\mathbf{EI}_{\mathbf{y}}\mathbf{u}''^{2}+\mathbf{E}\Gamma\vartheta''^{2}+\mathbf{GJ}\vartheta'^{2})\mathbf{dz}+$$

$$+\int_0^{\mathbf{L}}\int_{\mathbf{A}}(\sigma^0{}_{\mathbf{z}}\varepsilon_{\mathbf{z}}{}^{(2)}+\tau^0{}_{\mathbf{xz}}\gamma_{\mathbf{xz}}{}^{(2)}+\tau^0{}_{\mathbf{yz}}\gamma_{\mathbf{yz}}{}^{(2)})\mathbf{dzdA}$$

Tale energia rappresenta l'approssimazione al II ordine dell'energia di deformazione flesso-torsionale

Oss: Π=Ω-Le (occorre sottrarre il lavoro dei carichi esterni se presente)

Istabilità flesso-torsionale trave con sezione aperta

Con riferimento alla Energia di Deformazione

$$\Omega(\mathbf{u},\mathbf{v},\vartheta)=\frac{1}{2}\int_0^{\mathbf{L}}(\mathbf{EI_x v''^2}+\mathbf{EI_y u''^2}+\mathbf{E\Gamma}\vartheta''^2+\mathbf{GJ}\vartheta'^2)\mathbf{dz}+$$

$$+\int_0^{\mathbf{L}}\int_{\mathbf{A}}(\sigma^0{}_{\mathbf{z}}\varepsilon_{\mathbf{z}}{}^{(2)}+\tau^0{}_{\mathbf{xz}}\gamma_{\mathbf{xz}}{}^{(2)}+\tau^0{}_{\mathbf{yz}}\gamma_{\mathbf{yz}}{}^{(2)})\mathbf{dzdA}$$

Discuteremo la stabilità con riferimento a 2 sotto casi semplificati

a) Aste compresse soggette a solo sforzo normale baricentrico, dove le tensioni tg =0 e con deformazione assiale trascurabile

b) travi inflesse in un piano di simmetria in presenza di Momento e Taglio ma con ascissa x del centro di taglio=0

Instabilità flesso-torsionale di aste compresse

Si consideri un'asta compressa soggetta solo a P baricentrico

Inoltre si trascurano le deformazioni assiali

➔La configurazione fondamentale è quella indeformata in cui u=v=θ=0

In essa gli sforzi valgono

$$\sigma_z^0 = -\frac{P}{A} \qquad \tau_{zx}^0 = \tau_{zy}^0 = 0$$

Quindi il termine che ci interessa è

$$\int_A \sigma_z^0 \varepsilon_z^{(2)} dz = \int_A -\frac{P}{A} \varepsilon_z^{(2)} dz$$

Instabilità flesso-torsionale di aste compresse

Sapevamo che le deformazioni valgono

$$\varepsilon^{(2)}{}_{z} = \frac{1}{2}\left[(u' - \vartheta'(y - y_C))^2 + (v' - \vartheta'(x - x_C))^2\right]$$

E quindi

$$\int_A \sigma_z^0 \varepsilon_z^{(2)} dz = -\frac{1}{2}\frac{P}{A}\int_A \left[(u' - \vartheta'(y - y_C))^2 + (v' - \vartheta'(x - x_C))^2\right] dA =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{P}{A}\left[A\left(u'^2 + v'^2 + 2y_C u'\vartheta' - 2x_C v'\vartheta'\right) + I_C \vartheta'^2\right]$$

Dove il momento polare di inerzia rispetto a C è

$$I_C = \int_A (x^2 + y^2) dA$$

Instabilità flesso-torsionale di aste compresse

L'energia Potenziale Totale si scrive

$$\Pi(\mathbf{u},\mathbf{v},\vartheta)=\frac{1}{2}\int_0^L(\mathbf{EI_x v''^2}+\mathbf{EI_y u''^2}+\mathbf{E\Gamma}\vartheta''^2+\mathbf{GJ}\vartheta'^2)\mathbf{dz}$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{P}[\int_0^L\left(\mathbf{u'^2}+\mathbf{v'^2}+2\mathbf{y_C u'}\vartheta'-2\mathbf{x_C v'}\vartheta'\right)+\frac{\mathbf{I_C}}{\mathbf{A}}\vartheta'^2]\mathbf{dz}$$

Le equazioni di stazionarietà sono 3: rispetto ad u, v e θ

$$\begin{cases}\mathbf{EI_y u''''}+\mathbf{Pu''}+\mathbf{Py_C}\vartheta''=0\\ \mathbf{EI_x v''''}+\mathbf{Pv''}-\mathbf{Px_C}\vartheta''=0\\ \mathbf{E\Gamma}\vartheta''''+\left(\mathbf{P}\frac{\mathbf{I_C}}{\mathbf{A}}-\mathbf{GJ}\right)\vartheta''+\mathbf{Py_C u''}-\mathbf{Px_C v''}=0\end{cases}$$

+ Condizioni al contorno

Instabilità flesso-torsionale di aste compresse

1° CASO

Sezioni con 2 assi di simmetria: il centro di taglio coincide col baricentro,

Le equazioni di stazionarietà sono disaccoppiate

I problemi della stabilità flessionale e torsionale si risolvono indipendentemente

il carico critico Euleriano sarà il minimo di quelli calcolati → $P_E = \min\{ P_x, P_y, P_\theta \}$

Instabilità flesso-torsionale di aste compresse

2° CASO

Sezioni con 1 solo asse di simmetria: il centro di taglio non coincide col baricentro: stabilità flessionale e stabilità torsionale sono problemi accoppiati, il carico critico di punta risulta inferiore a quello che si avrebbe considerando solo il comportamento flessionale

il problema è retto da 3 equazioni differenziali accoppiate, non risolubili indipendentemente l'uno dall'altra

Sezioni doppiamente simmetriche

Sezioni con 2 assi di simmetria: il centro di taglio coincide col baricentro➔ $x_c=y_c=0$
Le equazioni di stazionarietà sono disaccoppiate

$$\mathbf{EI_y u'''' + Pu''} = 0$$

$$\mathbf{EI_x v'''' + Pv''} = 0$$

$$\mathbf{E\Gamma}\vartheta'''' + \left(\mathbf{P}\frac{\mathbf{I_C}}{\mathbf{A}} - \mathbf{GJ} \right)\vartheta'' = 0$$

+ condizioni al contorno

Sezioni doppiamente simmetriche

$$\mathbf{P_x} = \pi^2 \frac{\mathbf{EI_y}}{\ell^2_{0\mathbf{x}}}, \quad \mathbf{P_y} = \pi^2 \frac{\mathbf{EI_x}}{\ell^2_{0\mathbf{y}}}$$

Carico critico instabilità flessionale

$$\mathbf{P}_\vartheta = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I_C}} \mathbf{GJ}(1 + \chi_\vartheta \pi^2 \frac{\mathbf{E\Gamma}}{\mathbf{GJL}^2})$$

Carico critico instabilità torsionale-avvitamento

Si osservi che è stato indicato P_x il valore relativo all'inflessione nel piano (z,x) cui la trave oppone il momento di inerzia I_y

Sezioni doppiamente simmetriche

Il carico critico Euleriano $P_E=\min\{ P_x,P_y,P_\theta \}$

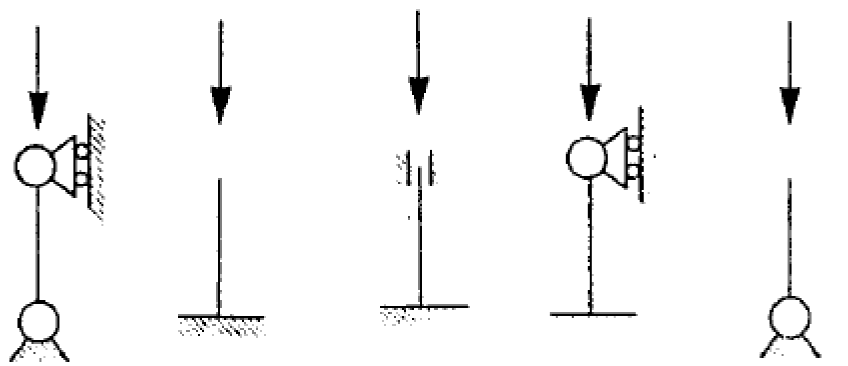
$$P_x = \pi^2 \frac{EI_y}{\ell^2_{0x}}, \quad P_y = \pi^2 \frac{EI_x}{\ell^2_{0y}}$$

Carico critico instabilità flessionale

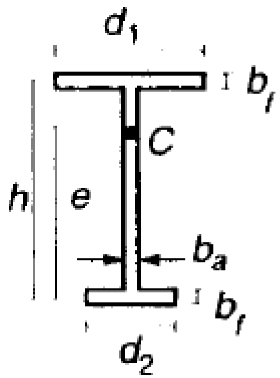
$$P_\vartheta = \frac{A}{I_C} GJ\left(1+\chi_\vartheta \pi^2 \frac{E\Gamma}{GJL^2}\right)$$

Carico critico instabilità torsionale-avvitamento

Tabella 15.2

condizioni di congruenza						
	$z=0$	$\vartheta=0$	$\vartheta=\vartheta'=0$	$\vartheta=\vartheta'=0$	$\vartheta=\vartheta'=0$	$\vartheta=0$
	$z=\ell$	$\vartheta=0$	--	$\vartheta=\vartheta'=0$	$\vartheta=0$	--
problema flessionale equivalente						
χ_ϑ		1.0	0.25	4.0	2.046	0.0

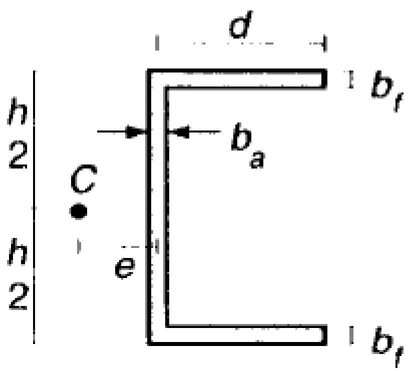
Sezioni doppiamente simmetriche



$$e = h\,\frac{d_1^3}{d_1^3 + d_2^3}$$

$$J = \frac{1}{3}\left[h b_a^3 + (d_1 + d_2) b_f^3\right]$$

$$\Gamma = \frac{b_f h^2}{12}\;\frac{d_1^3 d_2^3}{d_1^3 + d_2^3}$$

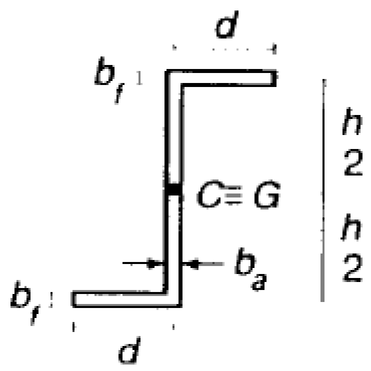


$$e = \frac{3 b_f d^2}{6 b_f d + h b_a}$$

$$J = \frac{1}{3}\left(h b_a^3 + 2 d b_f^3\right)$$

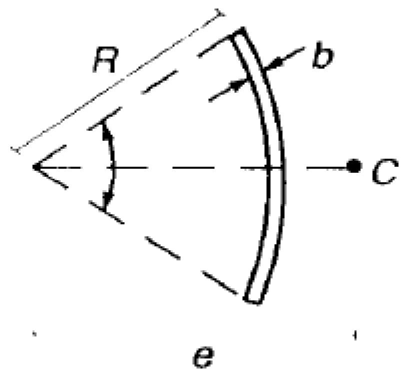
$$\Gamma = \frac{b_f d^3 h^2}{12}\;\frac{3 d b_f + 2 h b_a}{6 d b_f + h b_a}$$

Sezioni doppiamente simmetriche



$$J = \frac{1}{3}(hb_a^3 + 2db_f^3)$$

$$\Gamma = \frac{d^3h^2}{12(2d+h)^2}\left[2b_f(d^2 + hd + h^2) + 3b_a dh\right]$$



$$e = 2R\,\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$$

$$J = \frac{2}{3}\alpha R b^3$$

$$\Gamma = \frac{2}{3} b R^5 \left(\alpha^3 - \frac{6(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)^2}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}\right)$$

Sezioni doppiamente simmetriche

ESEMPIO 15.10 Un pilastro compresso in acciaio (E = 206000 MPa, G = 80000 MPa) ha lunghezza ℓ = 8 m e la sezione in Figura 15.32*a*. Esso è vincolato al piede da un incastro che impedisce spostamenti, rotazioni e ingobbamento. In sommità è collegato a travi abbastanza rigide da far ritenere nulle le rotazioni; il collegamento tuttavia non contrasta efficacemente anche l'ingobbamento, che viene conservativamente considerato libero. Il pilastro è parte di un telaio controventato nel piano (z, x). Tali vincoli si schematizzano come illustrato in Figura 15.32*b* e comportano i coefficienti

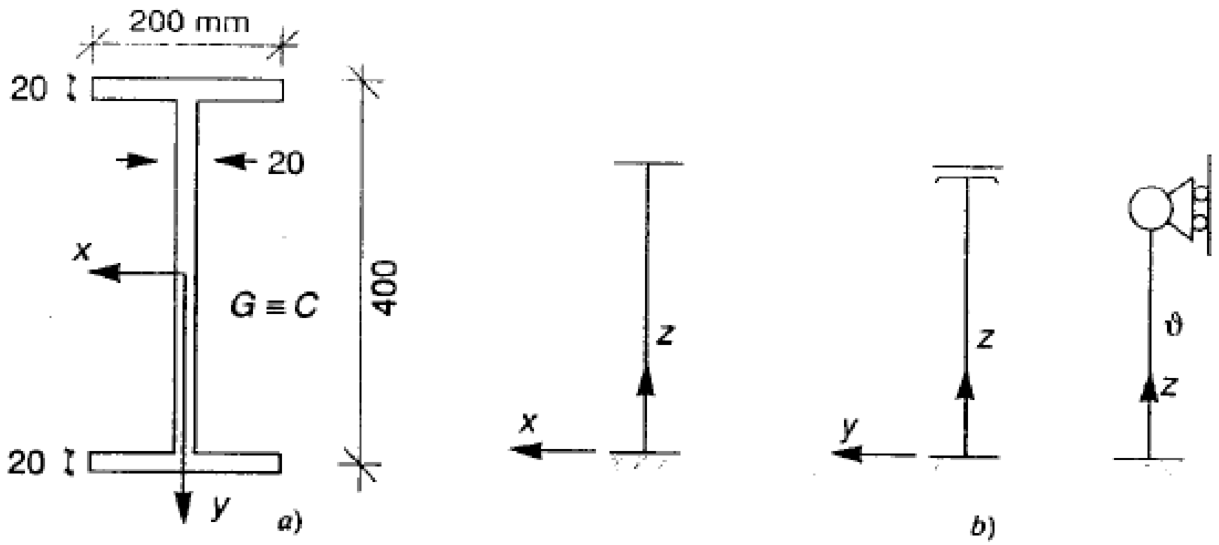


Figura 15.32

$I_x = 411.7 \times 10^6$ mm^4 $\quad I_y = 26.92 \times 10^6$ mm^4 $\quad I_c = 438.6 \times 10^6$ mm^4

$A = 15.60 \times 10^3$ mm^2 $\quad J = 2.133 \times 10^6$ mm^4 $\quad \Gamma = 1.067 \times 10^{12}$ mm^6

Sezioni doppiamente simmetriche

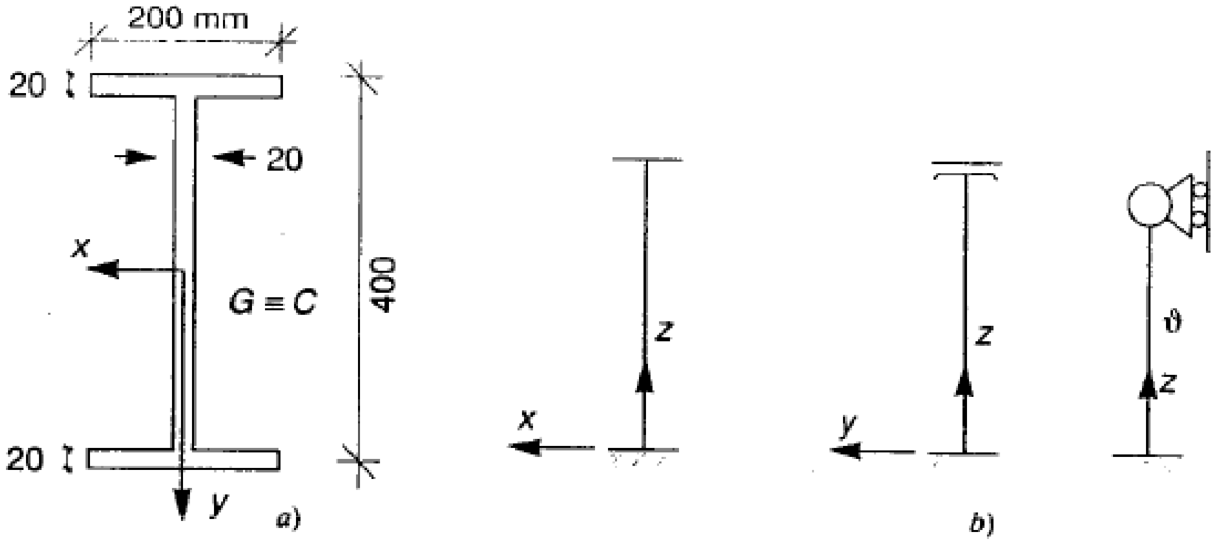


Figura 15.32

$$P_E = P_x = 3.420 \times 10^6 \text{ N} \qquad P_y = 13.08 \times 10^6 \text{ N} \qquad P_\vartheta = 8.537 \times 10^6 \text{ N} \qquad (\ell)$$

Il più piccolo di questi valori rappresenta il carico critico Euleriano dell'asta, motivo per cui è stato indicato con P_E. L'instabilità si verifica per inflessione nel piano debole: il più elevato coefficiente di vincolo non compensa infatti il ridotto momento d'inerzia.

Sezione con 1 solo asse di simmetria

Il carico critico Euleriano è minore di quello corrispondente ai carichi critici relativi a modi di instabilità valutati come se fossero disaccoppiati

$$P_E <= P^* = \min\{ P_x, P_y, P\theta \}$$

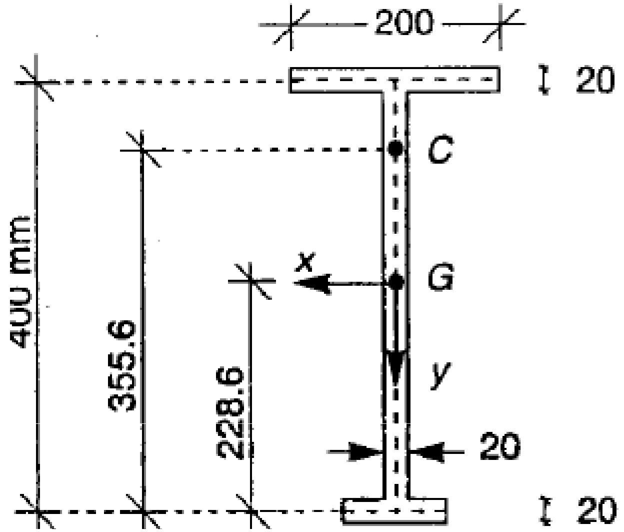
dove

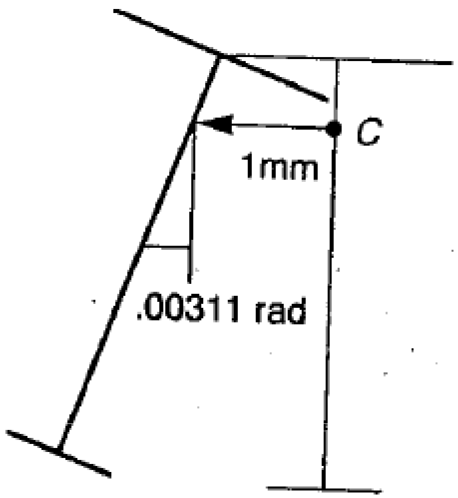
$$\mathbf{P_x} = \chi\pi^2 \frac{\mathbf{EI_y}}{\mathbf{L}^2}, \quad \mathbf{P_y} = \chi\pi^2 \frac{\mathbf{EI_x}}{\mathbf{L}^2}$$

$$\mathbf{P}_\vartheta = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I_C}} \mathbf{GJ}\left(1 + \chi\pi^2 \frac{\mathbf{E\Gamma}}{\mathbf{GJL}^2}\right)$$

Sezione con 1 solo asse di simmetria

Esempio





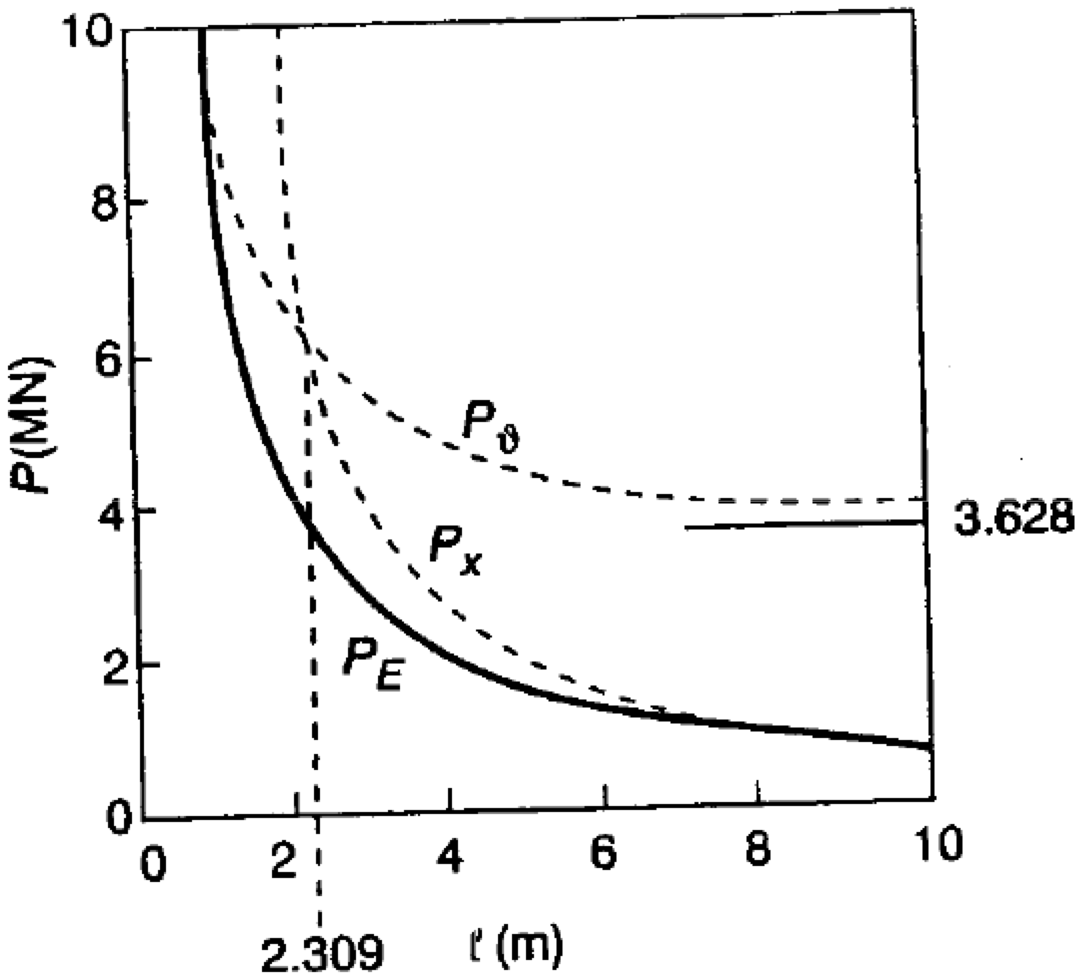
ESEMPIO 15.11 Si esamina un'asta semplicemente compressa e vincolata con appoggi flesso-torsionali a entrambi gli estremi. Le proprietà della sezione, illustrata in Figura 15.35*a*, risultano

$y_c = -127.0$ mm $\quad A = 14.00 \times 10^3$ mm^2 $\quad I_x = 335.5 \times 10^6$ mm^4 $\quad$ (*q*1-3)

$I_y = 15.27 \times 10^6$ mm^4 $\quad J = 1.867 \times 10^6$ mm^4 $\quad \Gamma = 237.0 \times 10^9$ mm^6 $\quad$ (*q*4-6)

$I_G = I_x + I_y = 350.8 \times 10^6$ mm^4 $\quad I_c = I_G + Ay_c^2 = 576.3 \times 10^6$ mm^4 $\quad$ (*q*7, 8)

Sezione con 1 solo asse di simmetria

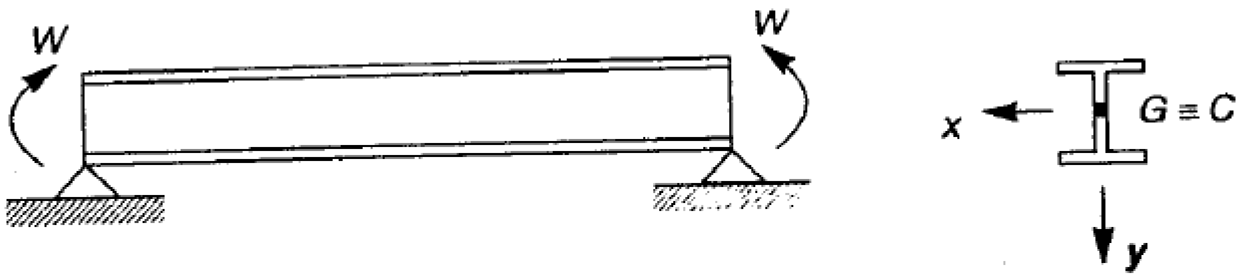


Per aste molto lunghe P_E=Px

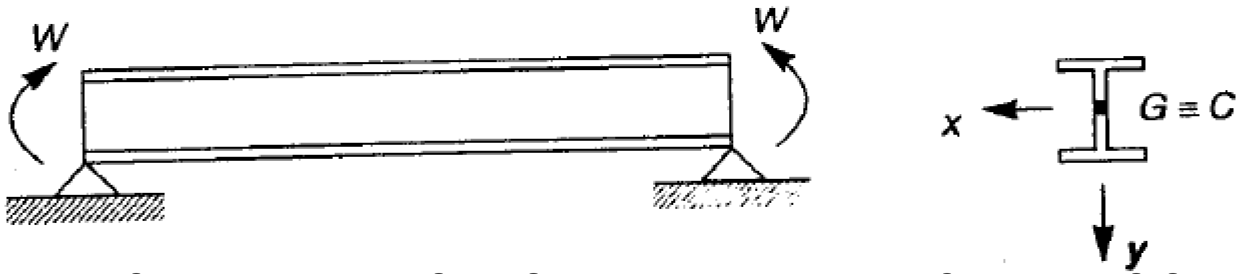
Instabilità flesso-torsionale in travi soggette a solo momento flettente

Consideriamo per semplicità solo il caso delle sezioni doppiamente simmetriche (LC III p249)

Esaminiamo il caso di una trave appoggiata su appoggi flesso-torsionali soggetta a momento costante M_x=W



Instabilità flesso-torsionale in travi soggette a solo momento flettente

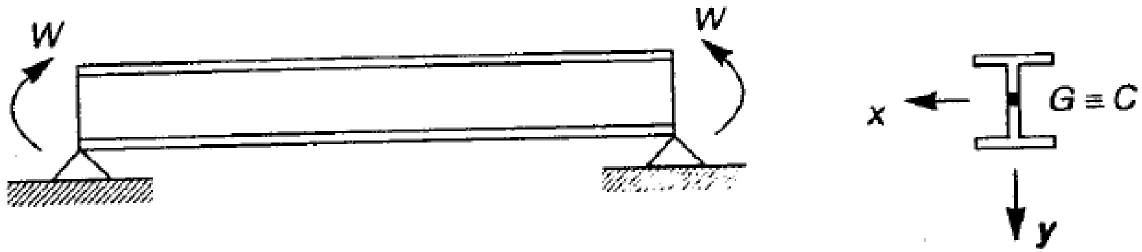


Si dimostra che le equazioni di equilibrio consiste nelle seguenti equazioni differenziali a coefficienti costanti con relative condizioni al contorno

$$\mathbf{EI_y u''''} + \mathbf{W}\vartheta'' = 0 \quad \begin{cases} \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(\ell) = 0 \\ \vartheta(0) = \vartheta(\ell) = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{E\Gamma}\vartheta'''' - \mathbf{GJ}\vartheta'' + \mathbf{W}\vartheta'' = 0 \begin{cases} \mathbf{u}''(0) = \mathbf{u}''(\ell) = 0 \\ \vartheta''(0) = \vartheta''(\ell) = 0 \end{cases}$$

Instabilità flesso-torsionale in travi soggette a solo momento flettente



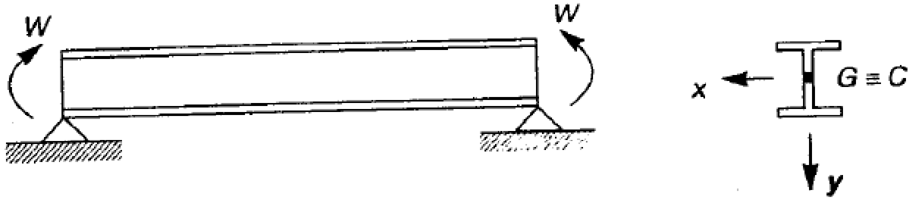
Le condizioni al contorno consentono di assumere la soluzione nella forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{z}) = \mathbf{U}\sin\frac{\pi \mathbf{z}}{\ell}, \quad \vartheta(\mathbf{z}) = \Theta \sin\frac{\pi \mathbf{z}}{\ell}$$

che sostituite nelle equazioni di equilibrio conducono al seguente sistema algebrico

$$\begin{bmatrix} \pi^2 \dfrac{\mathbf{EI_y}}{\ell^2} & -\mathbf{W} \\ -\mathbf{W} & \mathbf{GJ} + \pi^2 \dfrac{\mathbf{E\Gamma}}{\ell^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Instabilità flesso-torsionale in travi soggette a solo momento flettente



Il sistema ammette soluzioni non banali quando

$$\mathbf{W_E} = \pm\mu\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\mathbf{EI_y GJ}}, \qquad \mu = \sqrt{1+\pi^2\frac{\mathbf{E\Gamma}}{\mathbf{GJ}\ell^2}}$$

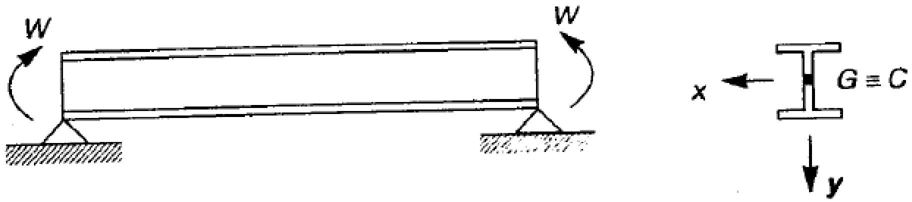
W_E rappresenta il momento critico della trave

OSS:

1) il carico critico aumenta con la rigidità flessionale in direzione trasversale EI_y e con la rigidità torsionale GJ

2)La rigidità torsionale secondaria compare sotto forma di rapporto $E\Gamma/GJ\ell^2$

Instabilità flesso-torsionale in travi soggette a solo momento flettente



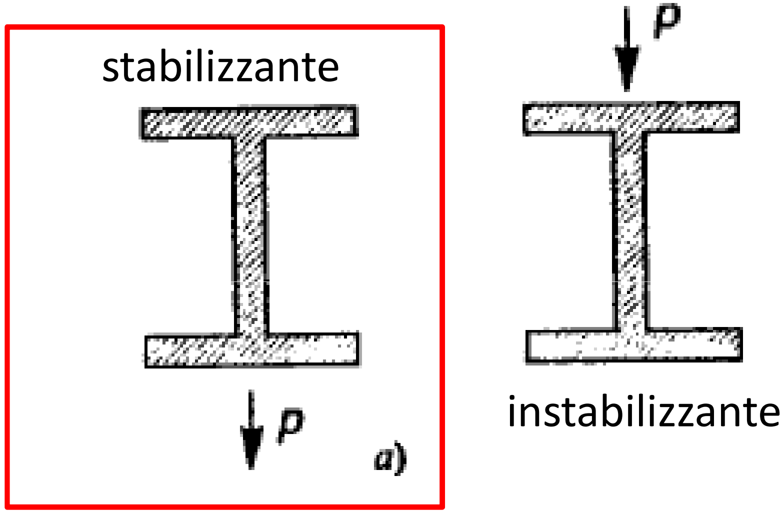
Possiamo osservare che

-Considerare solo la resistenza a flessione porterebbe a dimensionare la trave scegliendo un profilo con elevato I_x ovvero una trave alta

-Le travi alte non necessariamente si oppongono con efficacia allo svergolamento, che, anzi nelle travi alte, è sentito particolarmente

Instabilità flesso-torsionale in travi soggette a solo momento flettente

Importanza del punto di applicazione dei carichi



Si dimostra che il carico critico aumenta al diminuire della distanza del punto di applicazione del carico dal Centro di Taglio, inoltre aumenta se il carico è applicato al di sotto del Centro di Taglio