Complementi di Idrologia - Appello del 25 luglio 2012

Problema N°1 (7.5 punti)

Si consideri la distribuzione di probabilità di massa (variabile discreta) sotto riportata:

X =	0	1	2	3	4	5	6	….	(X=0,1,2,….,∞)
$p_X(x)$ =	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1	0	0	

1. Definire l'evento certo e la sua probabilità.
2. Quale è la probabilità che X sia minore o uguale a 3? Quale la probabilità che X sia maggiore o uguale a 3?
3. Quale la probabilità dell'evento $A[1 \le X \le 4]$?
4. Quale la probabilità dell'evento $A[X=3|1 \le X \le 4]$?

Risposte

1. L'evento certo è $A[(X=0) \cup (X=1) \cup \ldots]$ e la sua probabilità è pari a 1.
2. $P[X \le 3]=0.1+0.2+0.3+0.2=0.8$; $P[X \ge 3]=0.2+0.1+0.1=0.4$.
3. $P[1 \le X \le 4]=0.2+0.3+0.2+0.1=0.8$
4. $P[X=3|1 \le X \le 4]=P[X=3]/ P[1 \le X \le 4]=0.2/0.8=0.25$

Problema N°2 (7.5 punti)

1. Si consideri una variabile casuale $X \sim N(\mu=150, \sigma^2=1000)$. Sia A l'evento $X \ge 200$ e B l'evento $X \le 100$. Calcolare $P[A \cup B]$ e $P[A \cap B]$.
2. Sia A l'evento $[150 \le X \le 200]$ e B l'evento $[180 \le X \le 230]$. Calcolare $P[A \cup B]$.
3. Enunciare e commentare il teorema del limite centrale.

Risposte

1. $P[A]=P[Z \ge (200-150)/sqr(1000)]=1-0.943=0.057$. $P[B]= P[Z \le (100-150)/sqr(1000)]=0.057$. $P[A \cup B] = 0.057+0.057 = 0.114$. $P[A \cap B] = 0$.
2. $P[150 \le X \le 200]=0.4429$; $P[180 \le X \le 230]=0.1654$; $P[180 \le X \le 200]=0.114$. $P[A \cup B]=0.4429+0.1645-0.114=0.4934$.
3. Sotto **condizioni molto generali**, man mano che il numero delle variabili presenti nella sommatoria diventa **grande**, la distribuzione della variabile somma **si avvicina** sempre più alla distribuzione normale".
   Commento. Il teorema vale in "condizioni molto generali" ovvero se (1) le variabili considerate nella sommatoria sono indipendenti e ugualmente distribuite, (2) se le variabili sono indipendenti e diversamente distribuite. Il termine "si avvicina" non va inteso nel senso matematico di limite ma è più opportuno leggerlo come "viene approssimata da". Infine, il termine "grande" dipende dalla bontà dell'approssimazione richiesta e dalla natura delle distribuzioni delle variabili presenti nella somma.

Problema N°3 (7.5 punti)

1. Un ingegnere nel progetto di un opera idraulica assume un tempo di ritorno di 100 anni. Calcolare la probabilità che la portata di progetto non sia superata durante un periodo di 100 anni.
2. Calcolare la probabilità che la portata di progetto sia superata il 21° anno quando nei primi 20 anni non è stata superata.
3. Calcolare la probabilità di avere due eventi centennali in un periodo di 50 anni.

Risposte

1. p=0.01; $p_X\left(X=0\right)=\binom{100}{0}0.01^0\left(1-0.01\right)^{100}=0.366$
2. La probabilità richiesta è $\left(1-0.01\right)^{20}0.01=8.2\ 10^{-3}$ (distribuzione geometrica)
3. $p_X\left(X=2;n=50,p=0.01\right)=\binom{50}{2}0.01^2\left(1-0.01\right)^{50-2}=0.0756$

Problema N°4 (7.5 punti)

Si ha a disposizione un campione di portate massime annue Q con media pari a 1000 m3/s e deviazione standard 300 m3/s. Si ipotizzi di adottare il modello *EV1*.

1. Calcolare i parametri della distribuzione *EV1*.
2. Calcolare le portate con tempi di ritorno 100 e 200 anni.
3. Disegnare nel piano di Gumbel la distribuzione considerata.

Risposte

1. $\begin{cases} m_Q=u+0.5772\alpha \\ \sigma_Q^2=\dfrac{\pi^2\alpha^2}{6}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=m_Q-0.5772\dfrac{\sqrt{6\sigma_Q^2}}{\pi} \\ \alpha=\dfrac{\sqrt{6\sigma_Q^2}}{\pi}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\hat{u}=865 \\ \hat{\alpha}=234\end{cases}$
2. $\begin{matrix} Q\left(T\right)=\alpha y\left(T\right)+u \\ y\left(T\right)=-\ln\left(-\ln\left(1-1/T\right)\right)\end{matrix}$ $\Rightarrow$ Q(T=100)=1941 m^3/s; Q(T=200)= 2104 m^3/s
3. Nel piano di Gumbel si disegna la retta $Q\left(T\right)=\alpha y+u$ con $y=-\ln\left(-\ln\left(1-1/T\right)\right)$