Complementi di Idrologia - Appello del 22 giugno 2011

**Problema N°1 (7 punti)**

1. Scrivere l'equazione della funzione di densità di probabilità e di probabilità cumulata della distribuzione esponenziale, derivandola dalla distribuzione di Poisson.
2. Il parametro $\lambda$ della distribuzione esponenziale vale 10 e $T$ indica la variabile casuale esponenziale: fare il grafico quotato di $f_T(t)$ per il seguenti punti $t$ = 0,2,4,6,8,10; quanto vale la media di $T$ e la sua varianza? Quale è la probabilità che $2 \leq T \leq 5$ e $T > 5$?
3. Un ingegnere sta costruendo un ponte su di un fiume ed è preoccupato che si possa manifestare una portata maggiore o uguale a 100 $m^3/s$ in quanto tale portata darebbe luogo ad allagamento del cantiere. Il tempo di ritorno della portata di 100 $m^3/s$ è pari a 5 anni. I lavori del cantiere durano 14 mesi. Quale è la probabilità che l'evento con tempo di ritorno 5 anni si manifesti in quei 14 mesi?

**Problema N°2 (7 punti)**

1. Derivare la distribuzione di Poisson partendo da una distribuzione di Binomiale
2. Se $p_X(x) = \dfrac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$ e $\lambda$=5, quale è la media e la varianza di $X$ su un periodo di $t$ = 3 anni?
3. Il seguente conteggio è fatto sul numero di veicoli che passano da un punto di osservazione ogni 10 minuti:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Veicoli osservati | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Frequenza assoluta | 220 | 94 | 23 | 11 | 4 | 2 | 1 |

Le osservazioni sono fatte per una durata complessiva di un ora (sei intervalli da 10 minuti ciascuno). Si ipotizzi di utilizzare una distribuzione di Poisson per rappresentare i veicoli che passano nell'intervallo di 10 minuti. Sulla base dei dati a disposizione, quale è la probabilità di osservare 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 veicoli in un intervallo di 10 minuti? Quale è il conteggio atteso di veicoli in un ora, sulla base della tabella sopra riportata?

**Domanda N°1 (9 punti)**

1. Partendo dal valore medio di una distribuzione geometrica, dare la definizione di tempo di ritorno di una portata espresso in anni.
2. Se $X$ rappresenta il massimo bi-annuale delle portate osservate in una certa sezione di un fiume e $F_X(x)$ è la sua funzione di probabilità cumulata, quale è il tempo di ritorno in anni di $X$=100 $m^3/s$ se $F_X(x=100) = 0.999$?
3. Se $Z_2$ ha una distribuzione di probabilità *EV2* (scriverne l'equazione, il dominio di esistenza dei parametri e della variabile $Z_2$), quale è la sua media, la sua varianza e il suo coefficiente di asimmetria?

**Domanda N°2 (9 punti)**

Posto $Z_3 = \max\{X_1, .....X_n\}$

1. Sotto quale ipotesti la variabile $Z_3$ è distribuita secondo la legge *EV3*?
2. Scrivere la distribuzione di probabilità cumulata di *EV3* specificando il dominio di validità dei parametri di forma e di scala oltre che il dominio di definizione della variabile $Z_3$.
3. Definire la variabile $Y_2 = (1 - k(Z_3-u)/\alpha)$ e mostrare la sua distribuzione di probabilità. Introdurre la variabile $Y_1 = -1/k \ln Y_2$ e mostrare che questa variabile è proprio la variabile ridotta di Gumbel.
4. Dimostrare che la *EV3* nel piano di Gumbel ha una concavità rivolta verso il basso.

Complementi di Idrologia
Appello del 22 giugno 2011

**Problema N°1 (7 punti)**

1. Scrivere l'equazione della funzione di densità di probabilità e di probabilità cumulata della distribuzione esponenziale, derivandola dalla distribuzione di Poisson.
2. Il parametro $\lambda$ della distribuzione esponenziale vale 10 e $T$ indica la variabile casuale esponenziale: fare il grafico quotato di $f_T(t)$ per il seguenti punti $t$ = 0,2,4,6,8,10; quanto vale la media di $T$ e la sua varianza? Quale è la probabilità che $2 \le T \le 5$ e $T > 5$?
3. Un ingegnere sta costruendo un ponte su di un fiume ed è preoccupato che si possa manifestare una portata maggiore o uguale a 100 $m^3/s$ in quanto tale portata darebbe luogo ad allagamento del cantiere. Il tempo di ritorno della portata di 100 $m^3/s$ è pari a 5 anni. I lavori del cantiere durano 14 mesi. Quale è la probabilità che l'evento con tempo di ritorno 5 anni si manifesti in quei 14 mesi?

Risposte

1. $f_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t);\ F_T(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$

   Derivazione dalla distribuzione di Poisson.

   Indichiamo con $T$ il tempo intercorrente fra due eventi successivi. La probabilità che $T$ ecceda un assegnato valore $t$ equivale alla probabilità che nessuno evento si manifesti in tale intervallo. Quindi:

   $$1 - F_T(t) = \frac{(\lambda t)^0 e^{(-\lambda t)}}{0!} = e^{(-\lambda t)} \qquad t \ge 0$$

   $$F_T(t) = 1 - \exp(-\lambda t);$$

   $$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \lambda \exp(-\lambda t);$$

2. $m_T = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10} = 0{,}10;$

   $\sigma_T^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01;$

   $P[2 \le T \le 5]$= $F_T(t) = [1 - \exp(-10 \cdot 5)] - [1 - \exp(-10 \cdot 2)] = 2 \cdot 10^{-9}$

   $P[T>5]$ = $1 - F_T(t=5) = \exp(-10 \cdot 5) = 1{,}93 \cdot 10^{-22};$

3. L'evento $Q \ge 100$ $m^3/s$ si presenta mediamente ogni 5 anni, ovvero la durata dell'intervallo fra un evento e l'altro è di 5 anni. Allora la stima del parametro $\lambda$ è $\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{m}_T} = \frac{1}{5}$. Ne segue che la probabilità che nel periodo di 14 mesi non ci sia l'evento quinquennale risulta:

   $P\left[T \ge \frac{14}{12}\right] = \exp\left(-\frac{1}{5} \cdot \frac{14}{12}\right) = 0{,}79$. Pertanto il rischio che si presenti l'evento quinquennale nel periodo di lavoro di 14 mesi è pari a 1 – 0,79 = 0,21.

**Problema N°2 (7 punti)**

1. Derivare la distribuzione di Poisson partendo da una distribuzione di Binomiale
2. Se $p_X(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$ e $\lambda$=5, quale è la media e la varianza di $X$ su un periodo di $t$ = 3 anni?

3. Il seguente conteggio è fatto sul numero di veicoli che passano da un punto di osservazione ogni 10 minuti:

| Veicoli osservati | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequenza assoluta | 220 | 94 | 23 | 11 | 4 | 2 | 1 |

   Le osservazioni sono fatte per una durata complessiva di un ora (sei intervalli da 10 minuti ciascuno). Si ipotizzi di utilizzare una distribuzione di Poisson per rappresentare i veicoli che passano nell'intervallo di 10 minuti. Sulla base dei dati a disposizione, quale è la probabilità di osservare 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 veicoli in un intervallo di 10 minuti? Quale è il conteggio atteso di veicoli in un ora, sulla base della tabella sopra riportata?

Risposte

1. Si consideri la distribuzione Binomiale dove *n* rappresenta il numero di esperimenti, *p* la probabilità di avere successo nel generico esperimento e con *X* il numero di successi su n esperimenti:

   $$p_X = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}; \qquad x=0,1,2,3,...,n$$

   Immaginiamo adesso che ogni esperimento sia cadenzato nel tempo (ad esempio ogni secondo). Dunque con *n* esperimenti si copre un determinato intervallo di tempo. Se, fermo l'intervallo di tempo complessivo, eseguiamo gli esperimenti con maggior frequenza, *n* tende ad aumentare e *p* a diminuire ma il loro prodotto, che rappresenta il valore atteso dei successi sull'intervallo di tempo complessivo, resta invariato.
   Posto $\nu = pn$ possiamo scrivere:

   $$p_X = \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\nu}{n}\right)^x \left(1-\frac{\nu}{n}\right)^{n-x} = \frac{\nu^x}{x!}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^n \frac{n!}{(n-x)!} \frac{1}{n^x\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^x}$$

   $$= \frac{\nu^x}{x!}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^n \left[\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)....(n-x+1)}{\left[n\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\right]^x}\right]$$

   Per *n* -> ∞ risulta:

   $$p_X = \frac{\nu^x}{x!}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^n \left[\frac{n^x}{\left[n\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\right]^x}\right] = \frac{\nu^x}{x!}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^n = \frac{\nu^x}{x!}\exp(-\nu)$$

   Posto $\nu = \lambda t$ si ha:

   $$p_X(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

2. $m_X = \sigma_X^2 = \lambda x = 5 \cdot 3 = 15$
3. Totale di passaggi di auto: 355

   Poiché $m_X = \nu = \sum_{x=0}^{\infty} x p_X(x)$, la stima di $\nu$ è:

$$\hat{\nu} = \frac{0\cdot 220 + 1\cdot 94 + 2\cdot 23 + 3\cdot 11 + 4\cdot 4 + 5\cdot 2 + 6\cdot 1}{355} = 0,5775$$

$$p_X(x) = \frac{(0,5775)^x e^{-0,5775}}{x!} = 0,561\ 0,324\ 0,093\ 0,017\ 0,003\ 0,0003\ 0,00003$$

$$np_X(x) = 199\ 115\ 33\ 6\ 1\ 0\ 0$$

**Domanda N°1 (9 punti)**

1. Partendo dal valore medio di una distribuzione geometrica, dare la definizione di tempo di ritorno di una portata espresso in anni.
2. Se $X$ rappresenta il massimo bi-annuale delle portate osservate in una certa sezione di un fiume e $F_X(x)$ è la sua funzione di probabilità cumulata, quale è il tempo di ritorno in anni di $X$=100 $m^3/s$ se $F_X(x=100)$ = 0.999?
3. Se $Z_2$ ha una distribuzione di probabilità *EV2* (scriverne l'equazione, il dominio di esistenza dei parametri e della variabile $Z_2$), quale è la sua media, la sua varianza e il suo coefficiente di asimmetria?

Risposte

1. $E[N] = \frac{1}{p}$ dove $N$ rappresenta il numero di esperimenti che intercorrono fra un successo e il successivo mentre $p$ è la probabilità di successo nel generico esperimento. Supponiamo di eseguire il seguente esperimento. Si consideri la portata $q$ e si valuti anno dopo anno se la portata massima annua è maggiore o uguale a q. Sia $p = (1 - F_Q(q))$ la probabilità di avere successo nel generico esperimento (fatto una volta l'anno). Pertanto il numero medio di esperimenti che intercorre fra un successo e l'altro è $E[N] = 1/(1 - F_Q(q))$. Poiché gli esperimento sono fatti una volta l'anno $E[N]$ rappresenta il numero medio di anni che intercorre fra un successo e l'altro, ovvero il numero medio di anni cui la portata q massima annua viene uguagliato o superata. Dunque E[$N$]=$T$ dove $T$ è il tempo di ritorno in anni della portata q.
2. $T = \frac{1}{1 - F_X(x=100)} = \frac{1}{1 - 0,999} = 1000$ . Poiché $F_X(x)$ è la distribuzione dei massimi ogni due anni, $T$ rappresenta 1000 "esperimenti" che si tengono ogni due anni ciascuno,quindi il tempo di ritorno è di 2000 anni.
3. $F_{Z_2}(z_2) = \exp\left[-\left(1 - k\frac{(z_2 - u)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}\right]$; $k$<0; α>0; $u + \frac{\alpha}{k} \le z_2 \le \infty$

$$Y_2 = \left(1 - k\frac{(Z_2 - u)}{\alpha}\right)$$

$$Z_2 = u + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k} Y_2$$

$$E\left[Y_2^{\,n}\right] = \Gamma(1 + nk)$$

Pertanto:

$$E[Y_2] = \Gamma(1 + k)$$

$$\operatorname{var}[Y_2] = E[Y_2^{\,2}] - E^2[Y_2] = \Gamma(1+2k) - \Gamma^2(1+k)$$

$$E\left[\left(Y_2 - E[Y_2]\right)^3\right] = E[Y_2^{\,3}] - 3E[Y_2^{\,2}]E[Y_2] + 2E^3[Y_2]$$

$$\gamma_{Y_2} = \frac{E[Y_2^{\,3}] - 3E[Y_2^{\,2}]E[Y_2] + 2E^3[Y_2]}{\left\{\Gamma(1+2k) - \Gamma^2(1+k)\right\}^{3/2}}$$

$$E[Z_2] = u + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k}E[Y_2] = u + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k}\Gamma(1+k)$$

$$\operatorname{var}[Z_2] = \frac{\alpha^2}{k^2}\operatorname{var}[Y_2] = \frac{\alpha^2}{k^2}\left\{\Gamma(1+2k) - \Gamma^2(1+k)\right\}$$

$$\gamma_{Z_2} = \gamma_{Y_2}\,.$$

**Domanda N°2 (9 punti)**

Posto $Z_3 = \max\{X_1, .....X_n\}$

1. Sotto quale ipotesti la variabile $Z_3$ è distribuita secondo la legge *EV3*?
2. Scrivere la distribuzione di probabilità cumulata di *EV3* specificando il dominio di validità dei parametri di forma e di scala oltre che il dominio di definizione della variabile $Z_3$.
3. Definire la variabile $Y_2 = (1 - k(Z_3 - u)/\alpha)$ e mostrare la sua distribuzione di probabilità. Introdurre la variabile $Y_1 = -1/k \ln Y_2$ e mostrare che questa variabile è proprio la variabile ridotta di Gumbel.
4. Dimostrare che la *EV3* nel piano di Gumbel ha una concavità rivolta verso il basso

Risposte

1. Le variabili $X_i$ sono
   (a) indipendenti fra di loro
   (b) ugualmente distribuite
   (c) la coda della distribuzione di probabilità cumulata della generica $X_i$ può essere approssimata dalla seguente legge: $F_X(x) = 1 - c(x - x_0)^{\frac{1}{k}}; \quad k > 0, \quad x \le x_0$
   (d) $n$ tende all'infinito
2. $F_{Z_3}(z_3) = \exp\left[-\left(1 - k\dfrac{(z_3 - u)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}\right]$; $k>0$; $\alpha>0$; $-\infty \le z_3 \le u + \dfrac{\alpha}{k}$
3. $Y_2 = 1 - k\dfrac{(Z_3 - u)}{\alpha} = g(Z_3)$

$$Z_3 = u + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k}Y_2 = g^{-1}(Y_2)$$

$$F_{Y_2}(y_2) = F_{Z_3}\left(g^{-1}(y_2)\right) = \exp\left[-y_2^{\frac{1}{k}}\right]$$

$$Y_1 = -\frac{1}{k}\ln Y_2 = g(Y_2)$$

$$Y_2 = e^{-kY_1} = g^{-1}(Y_1)$$

$F_{Y_1}\left(y_1\right)=F_{Y_2}\left(g^{-1}\left(y_1\right)\right)=e^{-e^{-y_1}}$ ; dunque $Y_1$ è effettivamente la variabile ridotta di Gumbel.

4. Il piano di Gumbel ha per ascissa $Y_1$ e per ordinata $Z_3$. Poiché $k>0$ l'equazione $Z_3=u+\frac{\alpha}{k}-\frac{\alpha}{k}Y_2=u+\frac{\alpha}{k}-\frac{\alpha}{k}e^{-kY_1}=u+\frac{\alpha}{k}\left(1-e^{-kY_1}\right)$ indica che la curva $Z_3=f(Y_1)$ ha una concavità rivolta verso il basso e andamento esponenziale.