Complementi di Idrologia
Appello del 21 settembre 2011

Problema n° 1 (6 punti)

1. Derivare l'equazione della distribuzione Binomiale Negativa mostrando il suo legame con la distribuzione Binomiale.
2. Si consideri la seguente distribuzione Binomiale Negativa:
   $p_{W_k}(w)=\binom{w-1}{k-1}(1-p)^{w-k}\ p^k \qquad w=k,k+1,k+2,\dots$
   $p_{W_k}(w)=\binom{w-1}{5-1}(1-0,4)^{w-5}\,0,4^5$
   Calcolare $P[W_k \le 6]$.
3. Si consideri un impianto di sollevamento dove si devono inserire 5 pompe. Si vuole risparmiare sull'acquisto e le pompe di interesse hanno una probabilità di essere difettose del 10 %. Quante pompe devo acquistare per avere la probabilità del 95% che ve ne siano 5 non fallate?

Risposte al problema n°1

1. Il k-esimo successo si manifesta al w-esimo esperimento se in w-1 esperimenti ci sono stati k-1 successi. In base alla distribuzione binomiale la probabilità di avere k-1 successi su w-1 esperimenti, quando la probabilità di successo in ogni esperimento è pari a p, è data da $\binom{w-1}{k-1}(1-p)^{w-k}\ p^{k-1}$. Pertanto la probabilità dell'evento composto [k-1 successi in w-1 esperimenti $\cap$ k-esimo successo al w-esimo esperimento] è data da:
   $\binom{w-1}{k-1}(1-p)^{w-k}\ p^{k-1}\cdot p=\binom{w-1}{k-1}(1-p)^{w-k}\ p^k=p_{W_k}(w)$
2. $P[W_k \le 6]=F_{W_k}(6)=\sum_{w=5}^{6}\binom{w-1}{5-1}(1-0,4)^{w-5}\,0,4^5=$
   $=\binom{5-1}{5-1}(1-0,4)^{5-5}\,0,4^5+\binom{6-1}{5-1}(1-0,4)^{6-5}\,0,4^5=0,4^5+5(1-0,4)0,4^5=0,041$
3. La probabilità che la generica pompa funzioni è $\underline{p}$=1-0,10=0,9.
   Se ne acquisto 5 la probabilità che tutte e 5 siano funzionanti è:
   $p_{W_k}(5)=\binom{5-1}{5-1}(1-0,9)^{5-5}\,0,9^5=0,590$
   Se ne compro 6 la probabilità di averne 5 funzionanti è:
   $F_{W_k}(6)=p_{W_k}(5)+p_{W_k}(6)=\binom{5-1}{5-1}(1-0,9)^{5-5}\,0,9^5+\binom{6-1}{5-1}(1-0,9)^{6-5}\,0,9^5=0,590+0,295=0,885$
   Se ne compro 7 la probabilità di averne 5 funzionanti è:

$$F_{W_k}(7) = p_{W_k}(5) + p_{W_k}(6) + p_{W_k}(7) =$$
$$= \binom{5-1}{5-1}(1-0,9)^{5-5}\,0,9^5 + \binom{6-1}{5-1}(1-0,9)^{6-5}\,0,9^5 + \binom{7-1}{5-1}(1-0,9)^{7-5}\,0,9^5 =$$
$$= 0,590 + 0,295 + 0,088 = 0,974$$

Pertanto il numero di pompe da acquistare è 7.

Problema n°2 (6 punti)

1. Si derivi il modello probabilistico di tipo esponenziale partendo dalla distribuzione di Poisson.
2. Il parametro λ della distribuzione esponenziale vale 2 e T rappresenta la variabile casuale. Calcolare $P[T \le 1 \cup T \ge 2]$
3. In un corso d'acqua sono state trovate tracce di una sostanza tossica. Attraverso analisi di laboratorio fatte su diversi campioni, si è osservato che la concentrazione media di questa sostanza tossica è di 1 mg/L. Quale è la probabilità che la concentrazione di questa sostanza sia compresa nel range 0,5 e 2 mg/L assumendo una distribuzione esponenziale?

Risposte al Problema n°2

1. $f_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t);\; F_T(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$

   Derivazione dalla distribuzione di Poisson.

   Indichiamo con T il tempo intercorrente fra due eventi successivi. La probabilità che T ecceda un assegnato valore t equivale alla probabilità che nessuno evento si manifesti in tale intervallo. Quindi:

   $$1 - F_T(t) = \frac{(\lambda t)^0 e^{(-\lambda t)}}{0!} = e^{(-\lambda t)} \qquad t \ge 0$$
   $$F_T(t) = 1 - \exp(-\lambda t);$$
   $$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \lambda \exp(-\lambda t);$$
2. $P[T \le 1 \cup T \ge 2] = F_T(1) + (1 - F_T(2)) = 1 - e^{-2\cdot 1} + (1 - 1 + e^{-2\cdot 2}) = 0,883$
3. Sia X la concentrazione della sostanza tossica. $F_X(0,5) = 1 - e^{-0,5/1} = 0,393$; $F_X(2,0) = 1 - e^{-2,0/1} = 0,864$. Pertanto la probabilità che la concentrazione di questa sostanza sia compresa nel range 0,5 e 2 mg/L è pari a 0,864-0,393= 0,471.

Domanda n°1 (9 punti)

1. Scrivere l'equazione del modello Binomiale spiegando il significato di tutti i simboli.
2. Sia P la probabilità di avere successo in *almeno* un esperimento su n. Quale è la probabilità p di avere successo nel singolo esperimento?
3. Appoggiandosi alla distribuzione geometrica, dimostrare che $1/(1 - F_X(x_0))$ è il numero medio di esperimenti che intercorre fra un esperimento in cui $X > x_0$ (successo) e il successivo poste che $F_X(x_0) = P[X \le x_0]$.
4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a. In riferimento alla distribuzione Binomiale gli output degli *n* esperimenti successivi sono fra loro correlati
b. La distribuzione di Poisson esprime la probabilità di un assegnato numero di successi in un determinato lasso di tempo.
c. La distribuzione esponenziale descrive il tempo necessario per arrivare al *k*-mo successo.

Risposte alla Domanda n°1

1. $p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$. *X* è la variabile Binomiale e rappresenta il numero di successi. $p_X(x)$ rappresenta la probabilità di avere *x* successi su *n* esperimenti indipendenti in ciascuno dei quali la probabilità di successo è *p*.
2. Poiché $P = 1-(1-p)^n$ ne segue che la probabilità di avere successo nel singolo esperimento è $p = 1-(1-P)^{1/n}$.
3. La distribuzione geometrica descrive in senso probabilistico il numero di esperimenti per arrivare al primo successo ovvero, (essendo gli esperimenti indipendenti gli uni dagli altri) il numero di esperimenti che intercorre fra un successo e l'altro. Posto che *p* sia la probabilità di avere successo nel singolo esperimento, allora il numero medio di esperimenti che intercorre fra un successo e l'altro è $E[N] = m_N = 1/p$. Se per successo si intende che l'output del proprio esperimento sia maggiore di un assegnato valore x_0 allora p=1- $F_X(x_0)$ e quindi $E[N] = m_N = 1/p = 1/(1-F_X(x_0))$.
4. a: falso; b: vero; c: falso

Domanda n°2 (9 punti)

1. Che cosa rappresenta la curva di riduzione dei volumi $\rho_{D,T}$ e quale è la sua definizione formale?
2. Sotto quali assunzioni è possibile scrivere $\rho_{D,T} \approx \rho_D = m_{Q_D}/m_Q$ dove m_{Q_D} rappresenta la media dei massimi annui della portata media sulla durata *D* e m_Q la media dei massimi annui al colmo.
3. Come faccio a costruire un onda di progetto di assegnato tempo di ritorno T se assumo $\rho_D = (1+D/\alpha)^{\beta-1}$?
4. Con riferimento all'onda di progetto costruita al punto 3 dire se le seguenti affermazioni sono vere o false?
   a. il tempo di base dell'onda è finito
   b. la forma dell'onda è sempre simmetrica
   c. la portata al colmo discende dalle modalità di costruzione dell'onda

Risposte alla domanda n°2

1. Sia $Q_{D,T}$ la portata media massima annua sulla durata *D* di assegnato tempo di ritorno *T*. Sia Q_T la portata al picco massima annua di assegnato tempo di ritorno. La curva di riduzione dei volumi rappresenta il rapporto tra $Q_{D,T}$ e Q_T, ovvero $\rho_{D,T} = Q_{D,T}/Q_T$.

2. Il rapporto $\rho_{D,T} = Q_{D,T} \big/ Q_T$ può essere scritto nel seguente modo:

$$\rho_{D,T} = \frac{Q_{D,T}}{Q_T} = \frac{m_{Q_D} + K_T \sigma_{Q_D}}{m_Q + K_T \sigma_{Q_Q}}$$

dove K_T rappresenta il fattore di frequenza. Nel caso per entrambe le variabili si adotti una distribuzione di Gumbel possiamo scrivere:

$$\rho_{D,T} = \frac{m_{Q_D}\left\{1 + K_T CV_{Q_D}\right\}}{m_Q\left\{1 + K_T CV_Q\right\}} = \frac{m_{Q_D}\left\{1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi}\left[0,5772 + \ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)\right] CV_{Q_D}\right\}}{m_Q\left\{1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi}\left[0,5772 + \ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)\right] CV_Q\right\}}$$

Per T tendente ad infinito possiamo scrivere:

$$\rho_{D,T} \cong \frac{m_{Q_D}\left\{\frac{\sqrt{6}}{\pi}\left[0,5772 + \ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)\right] CV_{Q_D}\right\}}{m_Q\left\{\frac{\sqrt{6}}{\pi}\left[0,5772 + \ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)\right] CV_Q\right\}} = \frac{m_{Q_D} CV_{Q_D}}{m_Q CV_Q}$$

Il coefficiente di variazione non varia con la durata e quindi $CV_{Q_D} \cong CV_Q$. Quindi:

$$\rho_{D,T} = \frac{Q_{D,T}}{Q_T} \cong \frac{m_{Q_D}}{m_Q} = \rho_D$$

3. Posto $r = t_a \big/ D = 1 - t_b \big/ D$

$$V_{D,T} = \int_0^{rD} f_a\left(t_a\right) dt_a + \int_0^{(1-r)D} f_b\left(t_b\right) dt_b$$

$$\frac{dV_{D,T}}{dD} = f_a\left(rD\right) r + f_b\left(\left(1-r\right)D\right)\left(1-r\right)$$

Poiché $f_a\left(rD\right) = f_b\left(\left(1-r\right)D\right)$, allora $\frac{dV_{D,T}}{dD} = f_a\left(rD\right)$

Allo stesso tempo:

$$V_{D,T} = D \cdot Q_{D,T} = D \cdot \rho_D \cdot Q_T$$

$$\frac{dV_{D,T}}{dD} = \frac{d}{dD}\left(D \cdot \rho_D \cdot Q_T\right) = \rho_D \cdot Q_T + D\frac{d\rho_D}{dD} Q_T$$

Posto:

$$\rho_D = \left(1 + \frac{D}{\alpha}\right)^{\beta - 1}$$

si ha:

$$\frac{dV_{D,T}}{dD} = \rho_D \cdot Q_T + D\left[\frac{\left(\beta - 1\right)}{\alpha}\left(1 + \frac{D}{\alpha}\right)^{(\beta-2)}\right] Q_T$$

Uguagliando si ha

$$f_a\left(t_a\right) = f_a\left(rD\right) = f_b\left(t_b\right) = f_b\left(\left(1-r\right)D\right) = \rho_D \cdot Q_T + D\left[\frac{\left(\beta - 1\right)}{\alpha}\left(1 + \frac{D}{\alpha}\right)^{(\beta-2)}\right] Q_T$$

4. a: falso; b: falso; c: falso