Complementi di Idrologia - Appello del 21 giugno 2012

Problema N°1 (7 punti)

1. Enunciare e commentare il teorema del limite centrale. (1,5 punti)
2. Se A e B sono due eventi indipendenti, quale è la probabilità di osservarli simultaneamente? (1,5 punti)
3. La resistenza a compressione di cubetti-campione di calcestruzzo, dopo molte prove, è stata valutata essere distribuita secondo una normale con media 60,14 N/mm^2 e deviazione standard 5,02 N/mm^2. Quale è la probabilità che dieci campioni selezionati a caso mostrino una resistenza a compressione compresa nell'intervallo 48-72 N/mm^2? (4 punti)

Risposte

1. "Sotto **condizioni molto generali**, man mano che il numero delle variabili presenti nella sommatoria diventa **grande**, la distribuzione della variabile somma **si avvicina** sempre più alla distribuzione normale".
   Commento. Il teorema vale in "condizioni molto generali" ovvero se (1) le variabili considerate nella sommatoria sono indipendenti e ugualmente distribuite, (2) se le variabili sono indipendenti e diversamente distribuite. Il termine "si avvicina" non va inteso nel senso matematico di limite ma è più opportuno leggerlo come "viene approssimata da". Infine, il termine "grande" dipende dalla bontà dell'approssimazione richiesta e dalla natura delle distribuzioni delle variabili presenti nella somma.
2. $P[A]\times P[B]$
3. $P\left(\frac{48-60,14}{5,02}\right)=P(-2,42)=1-P(2,42)=0,5-0,4920=0,008$
   $P\left(\frac{72-60,14}{5,02}\right)=P(2,36)=0,9909$
   $P\left[48\le X\le 72\right]=0,9909-0,008=0,9829$ (probabilità per un singolo campione)
   $0,9829^{10}$ = 0,8415 (probabilità che dieci campioni selezionati a caso mostrino una resistenza a compressione compresa nell'intervallo 48-72 N/mm^2)

Problema N°2 (7 punti)

1. Derivare la distribuzione esponenziale dalla distribuzione di Poisson
2. Un impianto di pompaggio dovrà contenere n pompe in parallelo. Supposto che una pompa abbia una vita attesa (senza rotture) di 10 anni, quale è il numero minimo di pompe da mettere assieme cosicché la probabilità di avere rotture in un periodo di 5 anni sia minore o uguale a 0,05?
3. Un operatore gestisce un singolo bus che trasporta persone dal centro città a un centro commerciale in periferia. Il bus parte non appena si raggiungono 12 passeggeri. Se assumiamo che i tempi di arrivo dei passeggeri siano indipendenti e abbiano una media di nove ogni ora, quale è la probabilità che il tempo fra due consecutive partenze sia maggiore di 60 minuti?

Risposte

1. $f_T(t)=\lambda\exp(-\lambda t)$; $F_T(t)=1-\exp(-\lambda t)$
   Derivazione dalla distribuzione di Poisson.

Indichiamo con T il tempo intercorrente fra due eventi successivi. La probabilità che T ecceda un assegnato valore t equivale alla probabilità che nessun evento si manifesti in tale intervallo. Quindi:

$$1-F_T(t)=\frac{(\lambda t)^0 e^{(-\lambda t)}}{0!}=e^{(-\lambda t)} \qquad t\geq 0$$

$$F_T(t)=1-\exp(-\lambda t);$$

$$f_T(t)=\frac{dF_T(t)}{dt}=\lambda\exp(-\lambda t);$$

2. La probabilità del tempo intercorrente fra una rottura e l'altra sia rappresentata tramite una distribuzione esponenziale. La probabilità di rompersi di una singola pompa nel sistema di pompe in parallelo su di un periodo di 5 anni è pari a 1-*exp*(-5/10) =0,3953 (si tenga presente che λ=1/10, ovvero λ è uguale al valore atteso di T, ovvero al valore atteso di anni fra una rottura e la successiva). Il valore di n cercato (nel sistema di pompe in parallelo) tale che la probabilità di avere rotture in un periodo di 5 anni sia minore o uguale a 0,05 è dato dalla soluzione della seguente equazione:

   $$\left(1-e^{-\frac{5}{10}}\right)^n \leq 0,05$$

   Pertanto:

   $$n=1;\quad \left(1-e^{-\frac{5}{10}}\right)^{n=1} = 0,3953 \geq 0,05$$

   $$n=2;\quad \left(1-e^{-\frac{5}{10}}\right)^{n=2} = 0,1548 \geq 0,05$$

   $$n=3;\quad \left(1-e^{-\frac{5}{10}}\right)^{n=3} = 0,0609 \geq 0,05$$

   $$n=4;\quad \left(1-e^{-\frac{5}{10}}\right)^{n=4} = 0,0240 \leq 0,05$$

   Pertanto la soluzione è 4 pompe.
3. Nove persone arrivano in media ogni ora. Pertanto 12 persone arrivano in media ogni 80 minuti. Il tempo medio che intercorre fra una partenza e l'altra del bus è dunque di 80 minuti. Posto che il tempo intercorrente fra una partenza e l'altra sia descrivibile tramite una distribuzione di tipo esponenziale $F_T(t)=1-\exp(-\lambda t)$, il parametro λ vale 1/80 (min^{-1}) e la probabilità che il tempo intercorrente fra una partenza e l'altra sia maggiore di 60 minuti è $1-F_T(60)=\exp(-60/80)=0,472$.

Miscellanea N°1 (9 punti)

1. Il tempo di ritorno si esprime con la formula $T=\dfrac{1}{1-F_X(x)}$. Se $F_X(x)$ rappresenta i massimi mensili e T = 800, quale è il tempo di ritorno espresso in anni?
2. Se Z_2 ha una distribuzione di probabilità *EV2* (scriverne l'equazione, il dominio di esistenza dei parametri e della variabile Z_2), quale è la sua media, la sua varianza e il suo coefficiente di asimmetria?

3. Supponiamo che X sia gaussiana e abbia media 90 e varianza 300. Calcolare la probabilità $P[X \le 50]$, $P[X \ge 150]$ e $P[50 \le X \le 150]$.

Risposte

1. Se $F_X(x)$ rappresenta i massimi mensili allora T = 800 mesi. Pertanto il tempo di ritorno espresso in anni è 800/12 = 66,67 anni.
2. $F_{Z_2}(z_2) = \exp\left[-\left(1 - k\frac{(z_2 - u)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}\right]$; $k<0$; $\alpha>0$; $u + \frac{\alpha}{k} \le z_2 \le \infty$

$$Y_2 = \left(1 - k\frac{(Z_2 - u)}{\alpha}\right)$$

$$Z_2 = u + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k}Y_2$$

$$E\left[Y_2^n\right] = \Gamma(1 + nk)$$

Pertanto:

$$E[Y_2] = \Gamma(1 + k)$$

$$\mathrm{var}[Y_2] = E\left[Y_2^2\right] - E^2[Y_2] = \Gamma(1 + 2k) - \Gamma^2(1 + k)$$

$$E\left[(Y_2 - E[Y_2])^3\right] = E\left[Y_2^3\right] - 3E\left[Y_2^2\right]E[Y_2] + 2E^3[Y_2]$$

$$\gamma_{Y_2} = \frac{E\left[Y_2^3\right] - 3E\left[Y_2^2\right]E[Y_2] + 2E^3[Y_2]}{\left\{\Gamma(1 + 2k) - \Gamma^2(1 + k)\right\}^{3/2}}$$

$$E[Z_2] = u + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k}E[Y_2] = u + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k}\Gamma(1 + k)$$

$$\mathrm{var}[Z_2] = \frac{\alpha^2}{k^2}\mathrm{var}[Y_2] = \frac{\alpha^2}{k^2}\left\{\Gamma(1 + 2k) - \Gamma^2(1 + k)\right\}$$

$$\gamma_{Z_2} = \gamma_{Y_2}.$$

3. $P[X \le 50] = P\left[\frac{50 - 90}{\sqrt{300}}\right] = P[-2,31] = 1 - P[2,31] = 0,5 - 0,4896 = 0,0104$

$$P[X \ge 150] = 1 - P\left[\frac{150 - 90}{\sqrt{300}}\right] = 1 - P[3,46] = 0,0003$$

$$P[50 \le X \le 150] = (1 - P[X \le 50]) - P[X \ge 150] = (1 - 0,0104) - 0,0003 = 0,9893$$

Domanda N°2 (9 punti)

1. Che cosa rappresenta la curva di riduzione dei volumi $\rho_{D,T}$ e quale è la sua definizione formale?
2. Sotto quali assunzioni è possibile scrivere $\rho_{D,T} \approx \rho_D = m_{Q_D}/m_Q$ dove m_{Q_D} rappresenta la media dei massimi annui della portata media sulla durata D e m_Q la media dei massimi annui al colmo.
3. Come faccio a costruire un'onda di progetto di assegnato tempo di ritorno T se assumo $\rho_D = (1 + D/\alpha)^{\beta - 1}$ e una forma di tipo triangolare?

4. Come la 3 ma con forma di tipo Gamma.

Risposte

1. Sia $Q_{D,T}$ la portata media massima annua sulla durata D di assegnato tempo di ritorno T. Sia Q_T la portata al picco massima annua di assegnato tempo di ritorno. La curva di riduzione dei volumi è espressa dal rapporto $\rho_{D,T} = Q_{D,T} / Q_T$.
2. E' sempre possibile scrivere:
$$\rho_{D,T} = \frac{Q_{D,T}}{Q_T} = \frac{m_{Q_D} + K_T \sigma_{Q_D}}{m_Q + K_T \sigma_{Q_Q}}$$
dove K_T rappresenta il fattore di frequenza. Nel caso per entrambe le variabili si adotti una distribuzione di Gumbel possiamo scrivere:
$$\rho_{D,T} = \frac{m_{Q_D}\left\{1+K_T CV_{Q_D}\right\}}{m_Q\left\{1+K_T CV_Q\right\}} = \frac{m_{Q_D}\left\{1-\left[0,45+0,78\ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)\right]CV_{Q_D}\right\}}{m_Q\left\{1-\left[0,45+0,78\ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)\right]CV_Q\right\}}$$
Per T tendente ad infinito possiamo scrivere:
$$\rho_{D,T} \cong \frac{m_{Q_D}\left\{\left[0,45+0,78\ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)\right]CV_{Q_D}\right\}}{m_Q\left\{\left[0,45+0,78\ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)\right]CV_Q\right\}} = \frac{m_{Q_D} CV_{Q_D}}{m_Q CV_Q}$$
Infine, il coefficiente di variazione non varia con la durata e quindi $CV_{Q_D} \cong CV_Q$. Quindi:
$$\rho_{D,T} = \frac{Q_{D,T}}{Q_T} \cong \frac{m_{Q_D}}{m_Q} = \rho_D$$
3. L'onda di progetto triangolare ha tempo di base t_B, tempo al picco t_p e portata al picco Q_p. Per prima cosa si pone la portata al picco uguale alla portata al colmo di assegnato tempo di ritorno, ovvero $Q_p = Q_T$. Si impone inoltre che il volume dell'onda abbia il medesimo tempo di ritorno. Il volume dell'onda di assegnato tempo di ritorno T si esprime nel seguente modo:
$V_{onda,T} = Q_{t_B,T} \times t_B$ dove $Q_{t_B,T}$ è la portata media sulla durata t_B avente tempo di ritorno T che a sua volta può essere scritto come: $Q_{t_B,T} = \left(1+t_B/\alpha\right)^{\beta} Q_T$. Tenendo inoltre conto che per semplice geometria il volume dell'onda triangolare si può anche scrivere base per altezza diviso 2, si ottiene:
$V_{onda,T} = Q_{t_B,T} \times t_B = \left(1+t_B/\alpha\right)^{\beta} Q_T \times t_B = t_B \times Q_T / 2$. Da questo segue:
$t_B = \alpha\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1/\beta - 1} - 1\right]$. Per quanto riguarda infine t_p, questo si pone uguale a $r \times t_B$ dove r è il rapporto di ripartizione della portata (solitamente minore di 1/2).
4. Nel caso si assuma una distribuzione Gamma il procedimento è il seguente. Si parte dalla distribuzione gamma con area sottesa pari a 1, ovvero:
$f_T(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)}$ e si cerca il valore di $t = t_p$ che ne definisce il picco q_p. Il valore di t_p si ottiene facendo la derivata di $f_T(t)$ rispetto al tempo e imponendola uguale a zero. Questa operazione porta a:

$$t_p = \frac{1}{\lambda}(k-1);\ q_p = \frac{\lambda (k-1)^{(k-1)} e^{-(k-1)}}{\Gamma(k)}.$$

Si impone che il picco sia uguale a Q_T. Da questo segue:
$Q_T = c \times q_p$ e il valore di c risulta:

$$c = \frac{Q_T \Gamma(k)}{\lambda (k-1)^{(k-1)} e^{-(k-1)}}$$

L'onda richiesta avrà equazione:

$$Q(t) = c \times f_T(t) = \frac{Q_T \Gamma(k)}{\lambda (k-1)^{(k-1)} e^{-(k-1)}} \frac{\lambda (\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)}$$

Al fine di stimare i parametri λ e k ho bisogno di scrivere due relazioni. La prima si basa sulla equivalenza con l'onda triangolare (che ha tempo di base t_B, tempo al picco t_p e portata al picco Q_T). In particolare impongo che il volume dell'onda triangolare sia uguale al volume dell'onda gamma:

$$\overbrace{t_B Q_T / 2 = \frac{1}{2} Q_T \alpha \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1/\beta - 1} - 1 \right]}^{\text{volume onda triangolare}} = \overbrace{\frac{Q_T \Gamma(k)}{\lambda (k-1)^{(k-1)} e^{-(k-1)}}}^{\text{volume onda gamma}}.$$

La seconda relazione è invece riferita al tempo al picco:

$$\overbrace{\frac{1}{\lambda}(k-1)}^{\text{tempo al picco della funzione gamma}} = \overbrace{r t_B = r\alpha \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\beta - 1}} - 1 \right]}^{\text{tempo al picco della funzione triangolare}}$$

Da queste due relazioni posso stimare λ e k e quindi definire pienamente l'onda di forma gamma di assegnato tempo di ritorno T.