Complementi di Idrologia
Appello del 20 luglio 2011

Problema N°1 (6 punti)

Si consideri la seguente distribuzione di probabilità di massa Binomiale:

$$p_X(x) = \frac{4!}{x!(4-x)!} 0,5^x (1-0,5)^{4-x} \qquad x=0,1,2,3,4$$

1. Farne il grafico per $0 \le x \le 4$ e calcolare $P[X = 2]$, $P[X \ge 2]$, $P[1 \le X \le 3]$ (usare 4 cifre decimali).
2. Calcolare la media e la varianza della distribuzione sopra riportata
3. Calcolare la probabilità di avere due eventi con tempo di ritorno 10 anni in un periodo di 5 anni.

Risposte

1. $p_X(x = 0,1,2,3,4) =$ 0,0625; 0,25; 0,375; 0,25; 0,0625. $P[X = 2]$=0,375; $P[X \ge 2]$=0,6875; $P[1 \le X \le 3]$=0,875.
2. $m_X = np$ = 4×0,5=2; $\sigma_X^2 = np(1-p)$ =4×0,5×(1-0,5)=1.
3. n=5; p=0,10; X=2. $p_X(X=2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} 0,1^2 (1-0,1)^{5-2} = 0,0729$

Problema N°2 (8 punti)

Si consideri la seguente distribuzione di probabilità di massa di Poisson

$$p_X(x) = \frac{e^{-5}(5)^x}{x!} \qquad x = 0,1,2,\ldots, \infty$$

1. Farne il grafico per $0 \le x \le 7$ e calcolare $P[X = 5]$, $P[2 \le X \le 7]$, $P[X > 2]$ (usare 4 cifre decimali).
2. Ad un incrocio vi è un semaforo e davanti al semaforo c'è la corsia per girare a sinistra. In media ogni ora il numero dei veicoli che si pone sulla corsia per girare a sinistra è pari a 160 e la luce rossa ha una durata di 50 secondi. Quale è il numero medio di veicoli che si ferma quando il semaforo è rosso?
3. Fermo restando il numero medio di veicoli che si fermano sulla corsia di sinistra ad ogni "rosso", calcolare la lunghezza di tale corsia (come multiplo della lunghezza media di un veicolo) in modo che sia in grado di contenere le auto che si fermano nel 95% dei casi.

Risposte

1. $p_X(X = 0,1,2,3,4,5,6,7) =$ 0,0067; 0,0337; 0,0842; 0,1404; 0,1755; 0,1755; 0,1462; 0,1044. $P[X = 5]$= 0,1755; $P[2 \le X \le 7]$=0,8262; $P[X > 2] = 1 - P[X \le 2]$=1 - 0,1246=0,8754.
2. $\nu = \frac{160}{3600} 50 = 2,22$ (circa 2)
3. $P[X \le i] = \sum_{x=0}^{i} \frac{e^{-\nu}\nu^x}{x!} = \sum_{x=0}^{i} \frac{e^{-2,22} 2,22^x}{x!}$. Pertanto

$$P[X \le 0] = \frac{e^{-2,22} 2,22^0}{0!} = 0,1086$$

$$P[X \le 1] = P[X \le 0] + P[X = 1] = 0{,}1086 + 0{,}2411 = 0{,}3497$$
$$P[X \le 2] = P[X \le 1] + P[X = 2] = 0{,}3497 + 0{,}2676 = 0{,}6173$$
$$P[X \le 3] = P[X \le 2] + P[X = 3] = 0{,}6173 + 0{,}1980 = 0{,}8153$$
$$P[X \le 4] = P[X \le 3] + P[X = 4] = 0{,}8153 + 0{,}1099 = 0{,}9252$$
$$P[X \le 5] = P[X \le 4] + P[X = 5] = 0{,}9252 + 0{,}0488 = 0{,}9740$$

La lunghezza richiesta alla corsia è pari a 5 volte la lunghezza media del generico veicolo.

Domanda N°1 (9 punti)

1. La distribuzione Esponenziale rappresenta il tempo (variabile continua) necessario per osservare il primo evento; quale è la distribuzione che descrive il tempo per arrivare al *k*-esimo evento (indicazione: scrivere le equazioni di questi modelli, la loro media e la loro varianza);
2. quali sono le due distribuzioni di probabilità concettualmente corrispondenti alle due precedenti se la variabile è discreta? (indicazione: scrivere le equazioni di questi modelli, la loro media e la loro varianza);
3. Derivare la distribuzione binomiale negativa partendo dalla distribuzione Binomiale.

Risposte

1. La distribuzione Esponenziale rappresenta il tempo per arrivare al primo evento o il tempo intercorrente fra un evento e il successivo. Le sue funzioni di probabilità sono:

   $$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}; \qquad F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \qquad m_T = \frac{1}{\lambda}; \qquad \sigma_T^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

   Sia X_k il tempo necessario per arrivare al k-esimo evento. Se T_i , i=1,2,….,k sono k variabili indipendenti con distribuzione Esponenziale di uguale parametro λ, allora $X_k=T_1+T_2+,\dots,+T_k$
   Ne segue che:

   $$m_{X_k} = \frac{k}{\lambda}; \qquad \sigma_{X_k}^2 = \frac{k}{\lambda^2}; \qquad f_{X_k}(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} \qquad x \ge 0$$ (Distribuzione Gamma)

2. Le due distribuzioni di probabilità corrispondenti alla Esponenziale e alla Gamma, sono rispettivamente la Geometrica e la Binomiale negativa. La prima rappresenta il numero di esperimenti che si deve compiere per arrivare il primo successo, la seconda rappresenta il numero di esperimenti che si deve compiere per arrivare al k-esimo successo. Le distribuzioni di probabilità di massa sono le seguenti:
   Distribuzione geometrica

   $$p_N(n) = (1-p)^{n-1} p \qquad n=1,2,3,\dots; \qquad m_N = \frac{1}{p}; \qquad \sigma_N^2 = \frac{1-p}{p^2}$$ (Distribuzione geometrica)

   Distribuzione binomiale negativa
   Sia W_k il numero di esperimenti per arrivare al k-esimo successo. Risulta $W_k=N_1+N_2+,\dots,+N_k$ dove N_i rappresenta una variabile geometrica e pertanto:

   $$m_{W_k} = \frac{k}{p}; \qquad \sigma_{W_k}^2 = \frac{k(1-p)}{p^2}; \qquad p_{W_k}(w) = \binom{w-1}{k-1}(1-p)^{w-k} p^k \qquad w=k, k+1,\dots$$

3. Il k-esimo successo si manifesta al w-esimo esperimento se in w-1 esperimenti ci sono stati k-1 successi. In base alla distribuzione binomiale la probabilità di avere k-1 successi su w-1 esperimenti,

quando la probabilità di successo in ogni esperimento è pari a *p*, è pari a $\binom{w-1}{k-1}(1-p)^{w-k}\ p^{k-1}$.

Pertanto la probabilità dell'evento composto [*k*-1 successi in *w*-1 esperimenti $\cap$ *k*-esimo successo al *w*-esimo esperimento] è data da:

$$\binom{w-1}{k-1}(1-p)^{w-k}\ p^{k-1}\cdot p=\binom{w-1}{k-1}(1-p)^{w-k}\ p^{k}=p_{W_k}(w)$$

Domanda N°2 (9 punti)

1. Che cosa rappresenta la curva di riduzione dei volumi $\rho_{D,T}$ e quale è la sua definizione formale?
2. Sotto quali assunzioni è possibile scrivere $\rho_{D,T} \approx \rho_D = \dfrac{m_{Q_D}}{m_Q}$ dove m_{Q_D} rappresenta la media dei massimi annui della portata media sulla durata *D* e m_Q la media dei massimi annui al colmo.
3. Come faccio a costruire un onda di progetto di assegnato tempo di ritorno T se assumo $\rho_D = \left(1+\dfrac{D}{\alpha}\right)^{\beta-1}$?
4. Con riferimento all'onda di progetto costruita al punto 3, quali di queste affermazioni è/sono vera/e?
   a. qualsiasi portata media sulla durata *D* ha tempo di ritorno *T*
   b. la portata media massima sulla durata *D* ha tempo di ritorno *T*
   c. la portata al colmo ha tempo di ritorno *T*
   d. la portata al colmo ha un valore finito indipendentemente dall'equazione utilizzata per esprimere la curva di riduzione dei volumi

Risposte:

1. Sia $Q_{D,T}$ la portata media massima annua sulla durata *D* di assegnato tempo di ritorno *T*. Sia Q_T la portata al picco massima annua di assegnato tempo di ritorno. La curva di riduzione dei volumi rappresenta il rapporto tra $Q_{D,T}$ e Q_T, ovvero $\rho_{D,T} = Q_{D,T}/Q_T$.

2. Il rapporto $\rho_{D,T} = Q_{D,T}/Q_T$ può essere scritto nel seguente modo:

$$\rho_{D,T} = \frac{Q_{D,T}}{Q_T} = \frac{m_{Q_D} + K_T\sigma_{Q_D}}{m_Q + K_T\sigma_{Q_Q}}$$

dove K_T rappresenta il fattore di frequenza. Nel caso per entrambe le variabili si adotti una distribuzione di Gumbel possiamo scrivere:

$$\rho_{D,T} = \frac{m_{Q_D}\left\{1+K_T CV_{Q_D}\right\}}{m_Q\left\{1+K_T CV_Q\right\}} = \frac{m_{Q_D}\left\{1-\frac{\sqrt{6}}{\pi}\left[0,5772+\ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)\right]CV_{Q_D}\right\}}{m_Q\left\{1-\frac{\sqrt{6}}{\pi}\left[0,5772+\ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)\right]CV_Q\right\}}$$

Per *T* tendente ad infinito possiamo scrivere:

$$\rho_{D,T} \cong \frac{m_{Q_D}\left\{\frac{\sqrt{6}}{\pi}\left[0,5772+\ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)\right]CV_{Q_D}\right\}}{m_Q\left\{\frac{\sqrt{6}}{\pi}\left[0,5772+\ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)\right]CV_Q\right\}} = \frac{m_{Q_D}CV_{Q_D}}{m_Q CV_Q}$$

Il coefficiente di variazione non varia con la durata e quindi $CV_{Q_D} \cong CV_Q$. Quindi:

$$\rho_{D,T} = \frac{Q_{D,T}}{Q_T} \cong \frac{m_{Q_D}}{m_Q} = \rho_D$$

3. Posto:

$$r = t_a / D = 1 - t_b / D$$

$$V_{D,T} = \int_0^{rD} f_a(t_a)\, dt_a + \int_0^{(1-r)D} f_b(t_b)\, dt_b$$

$$\frac{dV_{D,T}}{dD} = f_a(rD)r + f_b((1-r)D)(1-r)$$

Poiché $f_a(rD) = f_b((1-r)D)$, allora $\frac{dV_{D,T}}{dD} = f_a(rD)$

Allo stesso tempo:

$$V_{D,T} = D \cdot Q_{D,T} = D \cdot \rho_D \cdot Q_T$$

$$\frac{dV_{D,T}}{dD} = \frac{d}{dD}(D \cdot \rho_D \cdot Q_T) = \rho_D \cdot Q_T + D \frac{d\rho_D}{dD} Q_T$$

Posto:

$$\rho_D = \left(1 + \frac{D}{\alpha}\right)^{\beta-1}$$

si ha:

$$\frac{dV_{D,T}}{dD} = \rho_D \cdot Q_T + D\left[\frac{(\beta-1)}{\alpha}\left(1+\frac{D}{\alpha}\right)^{(\beta-2)}\right] Q_T$$

Uguagliando si ha:

$$f_a(t_a) = f_a(rD) = f_b(t_b) = f_b((1-r)D) = \rho_D \cdot Q_T + D\left[\frac{(\beta-1)}{\alpha}\left(1+\frac{D}{\alpha}\right)^{(\beta-2)}\right] Q_T$$

4.
   a. falso
   b. vero
   c. vero
   d. vero