Complementi di Idrologia
Appello del 16 marzo 2011

Problema N°1 (6 punti)

1. Scrivere l'equazione della funzione di probabilità di massa della distribuzione Binomiale
2. Calcolare la probabilità di avere *un* successo su 30 esperimenti se la probabilità di avere successo nel generico esperimento è pari a p = 0,10.
3. Come per il punto 2, ma calcolare la probabilità di avere *almeno* un successo.
4. Scrivere l'equazione del rischio.
5. Determinare il tempo di ritorno che dovrebbe essere usato per progettare una piccola diga tale per cui la portata di progetto viene superata con una probabilità pari al 5% durante un periodo di 50 anni.

Soluzione:

1. $p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$

2. n = 30; p = 0,1; x=1; $p_X(1) = \frac{30!}{1!(30-1)!} 0{,}1^1 (1-0{,}1)^{30-1} = 0{,}1413$

3. $p_X(x \geq 1) = 1 - p_X(x=0) = 1 - \frac{30!}{0!(30-0)!} 0{,}1^0 (1-0{,}1)^{30-0} = 1 - 0{,}9^{30} = 0{,}9576$

4. $R = 1 - (1-p)^n$

5. Il rischio R su n anni è dato da $R = 1 - (1-p)^n$

   Posto R = 0.05 e n= 50 si ottiene:

   $p = 1 - (1 - 0{,}05)^{1/50} = 0{,}00103$

   Il tempo di ritorno T richiesto è:

   $T = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}00103} = 975 \approx 1000 \text{ anni}$

Problema N°2 (6 punti)

1. Scrivere la distribuzione di probabilità di massa della distribuzione di Poisson e spiegarne il significato
2. Che cosa rappresenta il parametro della distribuzione?
3. Si deve costruire un impianto di sollevamento. Il progettista sa che la pompa indicatagli dal fornitore tende ad incepparsi mediamente 2 volte all'anno. Il progettista ritiene di non doversi preoccupare di questo fatto se la probabilità di avere non più di 4 rotture per anno è inferiore al 90 %. Domanda: il progettista si deve preoccupare o no?

Soluzione:

1. La distribuzione di Poisson è:

   $p_X(x) = \frac{\nu^x e^{-\nu}}{x!}$ con x = 0,1,2,…..

   Essa rappresenta la probabilità di avere x successi (o arrivi) in un determinato intervallo di tempo
2. Il parametro ν rappresenta il valore medio, ovvero il numero medio di arrivi (successi) in un certo intervallo di tempo.
3. Nel caso in esame si può assumere $\nu = 2$; l'intervallo di riferimento è l'anno. Pertanto:

$$P[x \le 4] = F_X(4) = \sum_{x=0}^{4} \frac{2^x e^{-2}}{x!} = 0{,}135 + 0{,}271 + 0{,}271 + 0{,}180 + 0{,}090 = 0{,}947$$

Risposta: il progettista si deve preoccupare.

Domanda 1 (9 punti)

X è un variabile distribuita secondo una distribuzione di Bernoulli:

1) scrivere la distribuzione di probabilità di massa (PMF) della variabile *X*

2) calcolare la sua media e la sua varianza

Se *Y* è una variabile Binomiale:

3) quale è il suo legame con la variabile X

4) quale è la sua media e la sua varianza

Soluzione:

1. $p_X(x) = \begin{cases} p & \text{se } x = 1 \\ 1-p & \text{se } x = 0 \end{cases}$

2. $$m_X = E[X] = \sum x p_X(x) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$
$$\sigma_X^2 = E\left[(X - m_X)^2\right] = \sum (x - m_X)^2 \, p_X(x) = (1-p)^2 \, p + (0-p)^2 (1-p) = (1-p)\, p$$

3. $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

4. $$m_Y = E[Y] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np$$
$$\sigma_Y^2 = Var[Y] = Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = np(1-p)$$

Le variabili X_i sono indipendenti fra di loro

Domanda 2 (9 punti)

Posto:

$Z = \max\{X_1, ...X_n\}$

1) sotto quale ipotesi la variabile Z è distribuita secondo la legge di Gumbel?

2) scrivere la distribuzione di probabilità cumulata di Gumbel

3) descrivere il metodo dei momenti per stimare i parametri della distribuzione di Gumbel.

4) derivare la distribuzione della variabile ridotta di Gumbel Y_1

5) rappresentare nel piano di Gumbel la variabile *Z* (ordinata) e Y_1 (ascissa)

Soluzione

1. Le variabili X_i sono

(a) indipendenti fra di loro

(b) ugualmente distribuite

(c) la coda della distribuzione di probabilità cumulata della generica X_i può essere approssimata dalla seguente legge: $F_X(x) = 1 - e^{-g(x)}$ con $g(x)$ monotona crescente

(d) *n* tende all'infinito

2. $F_Z(z) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{z-u}{\alpha}\right)\right], \quad -\infty \le z \le +\infty ; \quad \alpha > 0$

3. $\begin{cases} m_Z = u + 0,5772\alpha \\ \sigma_Z^2 = \dfrac{\pi^2\alpha^2}{6} \end{cases} \qquad (1)$

La media e la varianza della popolazione si stimano con la media e la varianza campionaria

$$\hat{m}_Z = \overline{z} = \frac{1}{N}\sum z_i$$

$$\hat{\sigma}_Z^2 = s_Z^2 = \frac{1}{N-1}\sum\left(z_i - \overline{z}\right)^2$$

Sostituendo le stime della media e della varianza della popolazione nel sistema (1) è possibile stimare i coefficienti u e α.

4. Si pone $Y_1 = \frac{Z-u}{\alpha} = g(Z)$. Ne segue $Z = \alpha Y_1 + u = g^{-1}(Y_1)$. Poiché il legame fra *Z* e Y_1 è monotono crescente ($\alpha > 0$) risulta:

$$P[Y_1 \le y_1] = F_{Y_1}(y_1) = P\left[Z \le g^{-1}(y_1)\right] = F_Z\left(g^{-1}(y_1)\right) = F_Z(\alpha y_1 + u) = \exp\left[-\exp(-y_1)\right]$$

5. Il legame fra Z e Y1 nel piano di Gumbel è una retta che ha per intercetta il parametro *u* (che per questo motivo si chiama parametro di posizione). Il parametro α influenza la pendenza della retta e si chiama parametro di scala.