Complementi di Idrologia
Appello del 1 aprile 2011

Problema n° 1 (6 punti di cui 3 per il punto 3)

1. Sia W_k una variabile casuale distribuita secondo una binomiale negativa. Scrivere l'equazione della sua distribuzione di probabilità di massa e spiegare il significato della distribuzione e dei simboli;
2. Calcolare la probabilità che il 3° successo arrivi o al terzo o al quarto esperimento quando la probabilità di avere successo nel generico esperimento è p = 0,30.
3. Ad un semaforo la corsia per girare a sinistra è dimensionata per contenere fino a tre auto. Supposto che arrivino 6 auto nel periodo in cui il semaforo è rosso, quale è la probabilità che la corsia non sia sufficiente a contenere le auto che vogliono girare a sinistra, supposto che la probabilità di girare a sinistra per la singola auto sia p = 0,30?

Soluzione:

1. $p_{W_k}(w) = \binom{w-1}{k-1} p^k (1-p)^{w-k} = \frac{(w-1)!}{(k-1)!(w-k)!} p^k (1-p)^{w-k}$. La distribuzione binomiale negativa fornisce la probabilità che il *k*-mo successo arrivi all'*w*-mo esperimento quando la probabilità di avere successo nel generico esperimento è pari a *p*.

2. $p_{W_k}(3) + p_{W_k}(4) = \frac{(3-1)!}{(3-1)!(3-3)!} 0,30^3 (1-0,30)^{3-3} + \frac{(4-1)!}{(3-1)!(4-3)!} 0,30^3 (1-0,30)^{4-3} = 0,0833$

3. La corsia risulta insufficiente nell'intervallo di tempo in cui il semaforo è rosso se dopo che la corsia è piena arriva una quarta auto che vuole anch'essa girare sinistra (quarto successo) occupando, come ordine di arrivo, la quarta, o la quinta, o la sesta posizione (ovvero, arriva al 4° o al 5° o al 6° esperimento intendendo con esperimento l'osservazione/conteggio delle auto che arrivano). Pertanto la probabilità che la corsia sia insufficiente è data da $F_{W_4}(6)$, ovvero:

$$F_{W_4}(6) = \sum_{w=4}^{6} \binom{w-1}{4-1} 0,30^4 (1-0,30)^{w-4} = 0,07$$

Problema n°2 (6 punti di cui 3 per il punto 4)

1. Si scriva l'equazione della funzione di densità di probabilità $f_T(t)$ e di probabilità cumulata $F_T(t)$ di una variabile T distribuita secondo una esponenziale.
2. Scrivere il valore medio e la varianza di T.
3. Calcolare la probabilità di $T \leq 5$ se la media di T è pari a 10.
4. In un impianto di pompaggio si devono installare n pompe in parallelo di caratteristiche note. Ciascuna di queste pompe presenta un evento di crisi mediamente ogni 10 anni di funzionamento. Quale è il numero minimo di pompe che devo installare affinché la probabilità di non avere una crisi del sistema di pompe in parallelo in un periodo di tre anni sia maggiore o uguale a 0,95?

Soluzione:

1. $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$; $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$; $t \geq 0$

2. $$E[T] = m_T = \int_0^\infty t f_T(t)\,dt = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$$
$$Var(T) = \sigma_T^2 = \int_0^\infty (t - m_T)^2 f_T(t)\,dt = \frac{1}{\lambda^2}$$

3. $F_T(5) = 1 - e^{-\frac{5}{10}} = 0,393$

4. L'intervallo di tempo che intercorre fra un evento di crisi e il successivo può essere descritto con una distribuzione esponenziale $F_T(t) = P[T \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}$ dove λ rappresenta il valore medio di *T*. Si può dunque porre $\lambda = 1/10$. La probabilità che l'insieme di *n* pompe in parallelo abbia un funzionamento corretto per tre anni equivale a calcolare la probabilità che $T \geq 3$ simultaneamente per *n* pompe, ovvero $1 - \left[1 - e^{-3/10}\right]^n$. Noi vogliamo che

$1 - \left[1 - e^{-3/10}\right]^n \geq 0,95$

Da cui:

$n \geq \ln(0,05) \big/ \ln\left[1 - e^{-3/10}\right] = 2,218.$

Pertanto *n* = 3.

Domanda n°1 (9 punti)

1. Dare la definizione generale della curva di riduzione dei volumi $\rho_{D,T}$
2. Se $\rho_D = \left(1 + \frac{D}{\alpha}\right)^{\beta - 1}$, come faccio a stimare i due parametri? In particolare, di quali dati ho bisogno?
3. Supposti noti i due parametri α e β, come faccio a costruire un'onda di piena di progetto?
4. Che proprietà statistiche ha quest'onda di progetto?

Risposte:

1. Sia $Q_{D,T}$ la portata media massima annua sulla durata *D* di assegnato tempo di ritorno *T*. Sia Q_T la portata al picco massima annua di assegnato tempo di ritorno. La curva di riduzione dei volumi è espressa dal rapporto $\rho_{D,T} = Q_{D,T} / Q_T$.

2. Per stimare i parametri occorre avere a disposizione un campione di dati per ogni durata *D*, ciascuno composto dai valori massimi annui delle portate medie su detta durata, e un campione di dati dei valori massimi annui delle portate al colmo. Fissato un valore *D* si calcola il valore medio del campione di dati corrispondente; si calcola inoltre il valore medio del campione dei dati relativi alle portate massime annue al colmo. Per ogni valore di *D* si stima il rapporto $\hat{\rho}_D = r_D = \frac{\hat{m}_{Q_D}}{\hat{m}_Q}$. A questo punto di stimano i due coefficienti α e β con il metodo dei minimi quadrati non lineare.

3. Posto:

$r = t_a/D = 1 - t_b/D$

$$V_{D,T} = \int_0^{rD} f_a(t_a)\,dt_a + \int_0^{(1-r)D} f_b(t_b)\,dt_b$$

$$\frac{dV_{D,T}}{dD} = f_a(rD)\,r + f_b\left((1-r)D\right)(1-r)$$

Poiché $f_a(rD) = f_b\left((1-r)D\right)$, allora $\frac{dV_{D,T}}{dD} = f_a(rD)$

Allo stesso tempo:

$$V_{D,T} = D\cdot Q_{D,T} = D\cdot\rho_D\cdot Q_T$$

$$\frac{dV_{D,T}}{dD} = \frac{d}{dD}\left(D\cdot\rho_D\cdot Q_T\right) = \rho_D\cdot Q_T + D\frac{d\rho_D}{dD}Q_T$$

Posto:

$$\rho_D = \left(1+\frac{D}{\alpha}\right)^{\beta-1}$$

si ha:

$$\frac{dV_{D,T}}{dD} = \rho_D\cdot Q_T + D\left[\frac{(\beta-1)}{\alpha}\left(1+\frac{D}{\alpha}\right)^{(\beta-2)}\right]Q_T$$

Uguagliando si ha:

$$f_a(t_a) = f_a(rD) = f_b(t_b) = f_b\left((1-r)D\right) = \rho_D\cdot Q_T + D\left[\frac{(\beta-1)}{\alpha}\left(1+\frac{D}{\alpha}\right)^{(\beta-2)}\right]Q_T$$

4. L’onda di portata così costruita ha la caratteristica che il picco e le portata massime sulle varie durate hanno tutte lo stesso tempo di ritorno.

Domanda n°2 (punti 9)

Posto $Z_2 = \max\left\{X_1,.....X_n\right\}$

1. Sotto quale ipotesi la variabile Z_2 è distribuita secondo la legge *EV2*?
2. Scrivere la distribuzione di probabilità cumulata di *EV2* specificando il dominio di validità dei parametri di forma e di scala oltre che il dominio di definizione della variabile Z_2.
3. Definire la variabile Y_2 e mostrare la sua distribuzione di probabilità. Introdurre la variabile $Y_1 = -1/k\ln Y_2$ e mostrare che questa variabile è proprio la variabile ridotta di Gumbel.
4. Dimostrare che la *EV2* nel piano di Gumbel ha una concavità rivolta verso l’alto.

Risposte

1. Le variabili X_i sono

(a) indipendenti fra di loro

(b) ugualmente distribuite

(c) la coda della distribuzione di probabilità cumulata della generica X_i può essere approssimata dalla seguente legge: $F_X(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1}{k}}; \quad k < 0, \quad x \geq x_0$

(d) n tende all'infinito

2. $F_{Z_2}(z_2) = \exp\left[-\left(1 - k\frac{(z_2 - u)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}\right]$; k<0; α>0; $u + \frac{\alpha}{k} \leq z_2 \leq \infty$

3. $Y_2 = 1 - k\frac{(Z_2 - u)}{\alpha} = g(Z_2)$

$$Z_2 = u + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k}Y_2 = g^{-1}(Y_2)$$

$$F_{Y_2}(y_2) = F_{Z_2}\left(g^{-1}(y_2)\right) = \exp\left[-y_2^{\frac{1}{k}}\right]$$

$$Y_1 = -\frac{1}{k}\ln Y_2 = g(Y_2)$$

$$Y_2 = e^{-kY_1} = g^{-1}(Y_1)$$

$F_{Y_1}(y_1) = F_{Y_2}\left(g^{-1}(y_1)\right) = e^{-e^{-y_1}}$; dunque Y_1 è effettivamente la variabile ridotta di Gumbel.

4. Il piano di Gumbel ha per ascissa Y_1 e per ordinata Z_2. Poiché k<0 l'equazione $Z_2 = u + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k}Y_2 = u + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k}e^{-kY_1}$ indica che la curva Z_2=$f(Y_1)$ ha una concavità rivolta verso l'alto e andamento esponenziale.