Sviluppi di Taylor

Andrea Corli

1 settembre 2009

Indice

In questo capitolo analizziamo l'approssimazione di una funzione regolare di una variabile reale con polinomi di grado n arbitrario (*polinomi di Taylor*). Si tratta di approssimazioni *locali*, che danno cioè risultati soddisfacenti in un intorno di un punto prefissato. Il caso particolare in cui $n = 1$, ovvero la linearizzazione di una funzione, è considerato in dettaglio vista la sua importanza.

1 Notazione o

Definizione 1.1 *Siano f e g due funzioni reali di variabile reale definite in un intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, eccettuato al più il punto x_0. Si dice che f* è un o piccolo di *g* per *x* che tende a *x_0, in simboli $f(x) = o\big(g(x)\big)$ per $x \to x_0$, se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Si noti che non è necessario richiedere che f e g siano definite nel punto x_0 in quanto la definizione coinvolge esclusivamente il limite delle due funzioni per x che tende a x_0.

Osservazione 1.1 Se $f = o(g)$ per $x \to x_0$ e g è infinitesima in x_0, allora anche f è infinitesima in x_0. Fissato infatti $0 < \epsilon < 1$, da $|g(x)| < \epsilon$ definitivamente e $|\frac{f(x)}{g(x)}| < \epsilon$ definitivamente segue $|f(x)| < \epsilon^2 < \epsilon$ definitivamente. In questo caso f è dunque un infinitesimo di ordine superiore a g e questo motiva la notazione $f = o(g)$: la lettera "o" sta per "zero" (non usato perché darebbe luogo ad ambiguità di notazione) e suggerisce dunque che la funzione f è uno zero (un infinitesimo di ordine superiore) della funzione g.

Esempio 1.1

- Siano $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $x_0 = 0$; allora $x^2 = o(x)$ per $x \to 0$. Analogamente $x^3 = o(x^2)$ per $x \to 0$.
- $e^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^n)$ per $x \to 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- $1 - \cos x = o(x)$ per $x \to 0$; questo segue dalla regola di de l'Hospital o ricordando che $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$ per $x \to 0$.

Osservazione 1.2 Se $f = o(g)$ per $x \to x_0$, allora $f = c \cdot o(g)$ per $x \to x_0$, per ogni numero reale $c \neq 0$. Infatti se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ allora anche $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{cg(x)} = 0$. In simboli: $o(g) = c \cdot o(g)$ per ogni $c \neq 0$.

Nella Definizione 1.1 non si richiede che le funzioni f e g siano infinitesime in x_0: così, presa $g = 1$, la notazione $f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$ equivale a $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, cioè a richiedere che f sia infinitesima.

Esempio 1.2

- $\sin x = o(1)$ per $x \to 0$, $\log(1 + x) = o(1)$ per $x \to 1$.
- $o(1) \cdot (x - x_0)^n = o\big((x - x_0)^n\big)$ per $x \to x_0$. Se infatti $f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$ allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) \cdot (x - x_0)^n}{(x - x_0)^n} = 0\,.$$

2 Linearizzazione di una funzione

In molti casi si è interessati al comportamento di una funzione f in un intorno di un punto x_0. Se f è derivabile essa può essere allora rimpiazzata dalla sua linearizzata nel punto x_0. Si tratta di questioni già viste in precedenza (la retta tangente) ma che vengono riprese ora da un diverso punto di vista e per motivare la sezione seguente.

Definizione 2.1 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, $x_0 \in (a, b)$; la* funzione linearizzata di f nel punto x_0 *è la funzione*

$$l_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{2.1}$$

Il grafico di l_{x_0} è la retta tangente al grafico di f nel punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Naturalmente linearizzate in punti diversi saranno diverse, in generale, e questo spiega il fatto che abbiamo esplicitato x_0 nella notazione l_{x_0}.

L'errore che si commette rimpiazzando f con l_{x_0} è

$$E_{1,x_0}(x) = f(x) - l_{x_0}(x)$$

dove l'indice 1 ricorda che si tratta di un errore dovuto ad una approssimazione lineare (cioè con un polinomio di grado 1). Esso non solo ha la proprietà che $E_{1,x_0}(x) = o(1)$ per $x \to x_0$, proprietà questa comune agli errori relativi a tutte le approssimazioni lineari $p(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$, $m \in \mathbb{R}$, ma di più

$$E_{1,x_0}(x) = o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0\,. \tag{2.2}$$

Infatti

$$\frac{E_{1,x_0}(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \to 0 \qquad \text{per } x \to x_0\,.$$

La funzione l_{x_0} è l'unica funzione lineare rende l'errore $o(x - x_0)$ invece che $o(1)$. In questo senso essa è la *migliore approssimazione lineare di f nel punto x_0*.

Si noti che da (2.2) segue

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

che scriveremo brevemente come $f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ *all'ordine* 1 *per $x \to x_0$*.

Esempio 2.1

- La linearizzata di e^x nel punto 0 è la funzione $1 + x$.
- $\sin x \sim \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} x$ per $x \to \frac{\pi}{6}$; $\log(1 + x) \sim x - 1$ per $x \to 1$.
- L'equazione del moto di un pendolo di braccio l e massa m è

$$\theta'' + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

dove $\theta = \theta(t)$ è l'angolo di deviazione dalla verticale, g l'accelerazione di gravità. Si tratta di una equazione differenziale di difficile soluzione analitica. Poiché $\sin\theta \sim \theta$ al primo ordine per $\theta \to 0$, per piccole oscillazioni (e per brevi intervalli di tempo) l'equazione può essere rimpiazzata dall'equazione linearizzata

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$$

che fornisce immediatamente la soluzione generale $\theta(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, dove l'ampiezza A e lo sfasamento θ_0 sono determinati dalle condizioni iniziali.

3 Formula di Taylor

La sezione precedente mostra come approssimare localmente una funzione derivabile con una funzione lineare, cioè con un polinomio di grado 1. Ci poniamo ora il problema di approssimare localmente una funzione con polinomi di grado n arbitrario, cercando una stima opportuna dell'errore commesso.

Affrontiamo dapprima il problema della ricerca del polinomio approssimante in maniera intuitiva. Nelle prime due righe della Tabella 1 riassumiamo quanto visto finora; la terza riga è relativa all'approssimazione che stiamo cercando, con l'errore desiderato. Il coefficiente α è determinato imponendo che l'errore sia $o\big((x-x_0)^2\big)$, cioè

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \big[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x-x_0)^2\big]}{(x-x_0)^2} = 0\,. \tag{3.1}$$

ordine	approssimazione	errore
0	$f(x_0)$	$o(1)$
1	$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$	$o(x-x_0)$
2	$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x-x_0)^2$	$o\big((x-x_0)^2\big)$

Tabella 1: Ricerca della approssimazione al secondo ordine.

Applicando due volte la regola di de l'Hospital si trova

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \big[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x-x_0)^2\big]}{(x-x_0)^2} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - \big[f'(x_0) + 2\alpha(x-x_0)\big]}{2(x-x_0)} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - 2\alpha}{2} = 0\end{aligned}$$

se e soltanto se $\alpha = \frac{f''(x_0)}{2}$, da cui l'approssimazione al secondo ordine

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2\,.$$

Non è difficile a questo punto congetturare la forma delle approssimazioni di ordine maggiore; ad esempio quella di ordine 3 si otterrà da quella di ordine 2 aggiungendo il termine $\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$. Il fattoriale a denominatore è il risultato della derivata terza di $(x-x_0)^3$.

Per motivare l'espressione dell'errore nel teorema seguente si noti all'ordine 0 si ha

$$f(x) = f(x_0) + o(1) \tag{3.2}$$

in conseguenza della continuità di f. Se f è di classe C^1, dal Teorema del valor medio di Lagrange segue

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0) \tag{3.3}$$

dove c è un punto compreso tra x_0 e x. Pertanto l'errore $o(1)$ che compare in (3.2) è precisato in $f'(c)(x-x_0)$.

Questi calcoli elementari rendono plausibile il seguente risultato, del quale omettiamo la dimostrazione.

Teorema 3.1 (Formula di Taylor con resto di Lagrange) *Sia $f \in C^{n+1}([a,b])$, $x_0 \in [a,b]$. Per ogni $x \in [a,b]$ esiste c compreso tra x_0 e x tale che*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

La formula (3.4) prende anche il nome di *sviluppo di Taylor di f*. Il polinomio

$$T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

è il *polinomio di Taylor di f di ordine n e centro x_0*. Indicato con $E_{n,x_0}(x) = f(x) - T_{n,x_0}(x)$ l'errore, o resto, la (3.4) si scrive come

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + E_{n,x_0}(x)\,.$$

Nel caso in cui $x_0 = 0$ la formula (3.4) prende il nome di *formula o sviluppo di McLaurin* e il polinomio

$$T_{n,0}(x) = T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

viene detto *polinomio di McLaurin di f di ordine n.*

Il termine $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ è l'errore espresso nella forma di Lagrange. Se $n = 0$ la formula (3.4) si riduce infatti alla (3.3), cioè al Teorema di Lagrange. Poiché f è supposta di classe C^{n+1} nell'intervallo $[a,b]$ ne segue che la derivata $f^{(n+1)}$ è continua e dunque che $|f^{(n+1)}|$ ha massimo M per il Teorema di Weierstrass. Pertanto

$$|E_{n,x_0}(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,.$$

Nel caso in cui non sia indispensabile una espressione precisa del resto come quella della formula (3.4) si può ricorrere al seguente risultato.

Teorema 3.2 (Formula di Taylor con resto di Peano) *Sia $f \in C^n([a,b])$, $x_0 \in [a,b]$. Allora*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &\quad + o\big((x-x_0)^n\big)\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Poiché $f \in C^n([a,b])$ applichiamo la formula di Taylor con resto di Lagrange all'ordine $n-1$: otteniamo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n\,.$$

Poiché $f^{(n)}$ è continua e il punto c è compreso tra x_0 e x si ha che $f^{(n)}(c) = f^{(n)}(x_0) + o(1)$. Pertanto dall'Esempio 1.2

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(1)\frac{(x-x_0)^n}{n!} \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{o\big((x-x_0)^n\big)}{n!}\,. \end{aligned}$$

Dall'Osservazione 1.2 si ha $\frac{o((x-x_0)^n)}{n!} = o\big((x-x_0)^n\big)$ e allora (3.5). □

Si notino le differenze tra i Teoremi 3.1 e 3.2: in entrambi i casi la funzione f è approssimata con lo stesso polinomio di Taylor, ma mentre nel primo si ha l'espressione precisa dell'errore $E_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (la funzione f era supposta di classe C^{n+1}), nel secondo si ha la stima $E_{n,x_0}(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ (ora f è solo supposta di classe C^n).

Esempio 3.1

- La funzione e^x è di classe C^∞; calcolandone le derivate in 0 la formula di McLaurin dà $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$. Si noti che l'approssimazione è sempre per difetto se $x > 0$; se $x < 0$ l'approssimazione è per difetto se n è dispari e per eccesso se n è pari.

- La funzione $\sin x$ è di classe C^∞; dal calcolo delle sue derivate successive in 0 si trova lo sviluppo di McLaurin $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$. In maniera analoga $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$. Si noti che lo sviluppo di McLaurin della funzione (dispari) sin contiene solo potenze dispari, quello della funzione (pari) cos contiene solo potenze pari.

- Si consideri la funzione $\log(1+x)$; si ha $D^n \log(1+x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ e dunque lo sviluppo di McLaurin è $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

- Se $\alpha \in \mathbb{R}$ lo sviluppo di McLaurin della funzione $(1+x)^\alpha$ è $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$ dove il coefficiente binomiale generalizzato è definito da

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

  In particolare

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Riassumiamo di seguito gli sviluppi delle funzioni elementari trovati sopra.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \tag{3.6}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \tag{3.7}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \tag{3.8}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n). \tag{3.9}$$

Esercizio 3.1 Si consideri una funzione f (ad esempio di classe C^∞); provare che se f è pari (dispari) allora il polinomio di McLaurin di f contiene solo potenze pari (dispari).

4 Esempi ed applicazioni

Incominciamo questa sezione mostrando tramite esempi alcuni metodi di calcolo del polinomio di Taylor di una funzione e del relativo errore.

Esempio 4.1 Alcuni sviluppi di Taylor possono essere dedotti da altri per sostituzione di variabili.

- Dallo sviluppo (3.6) rimpiazzando x con $-x$ troviamo

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n + o(x^n).$$

Per addizione e sottrazione seguono allora

$$\begin{aligned}
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})\,.
\end{aligned}$$

Sempre da (3.6) ma rimpiazzando x con x^2 si ottiene

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n})\,.$$

- Da (3.9) con $\alpha = 1/3$ e rimpiazzando x con x^3 si ottiene $\sqrt[3]{1+x^3} = 1 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^6 + o(x^9)$.
- Per applicare lo sviluppo (3.9) con $\alpha = -1$ osserviamo che

  $$\binom{-1}{n} = (-1)^n n!\,.$$

  Dunque

  $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)\,.$$

  Rimpiazzando x con $-x$ si trova (si ricordi la serie geometrica)

  $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots x^n + o(x^n)\,.$$

Esempio 4.2 Nel caso di funzioni composte il calcolo delle derivate può essere lungo e ingombrante. Il calcolo del polinomio di Taylor può essere facilitato componendo gli sviluppi delle singole funzioni.

- Lo sviluppo di McLaurin al terz'ordine della funzione $\log(1+\sin x)$ può essere dedotto da quelli delle funzioni $\sin x$ e $\log(1+y)$:

$$\begin{aligned}
\log(1+\sin x) &= \log\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^6)\right) \\
&= x - \frac{x^3}{6} + o(x^6) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^6)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^6)\right)^3 + o(x^3) \\
&= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\,.
\end{aligned}$$

Facciamo ora qualche commento a proposito dell'errore commesso nell'approssimazione.

Osservazione 4.1 Una stima più precisa dell'errore può essere fatta se alcuni termini del polinomio di Taylor sono mancanti. E' questo il caso della funzione seno. Lo sviluppo di McLaurin al primo ordine dà $\sin x = x + o(x)$; poiché nello sviluppo al secondo ordine manca il termine relativo a x^2 si trova $\sin x = x + o(x^2)$. Si noti che dalla semplice analisi del polinomio di McLaurin abbiamo guadagnato un ordine nella stima dell'errore. Analogamente $\cos x = 1 + o(x)$, considerando lo sviluppo al primo ordine. Pertanto le stime dell'errore riportate in (3.7) e (3.8) possono essere migliorate rispettivamente in $o(x^{2n+2})$ e $o(x^{2n+1})$.

Osservazione 4.2 La formula (3.4) vale per ogni x dell'intervallo $[a, b]$, ma l'errore di solito è tanto più grande quanto più x è lontano da x_0. Consideriamo ad esempio lo sviluppo al primo ordine di McLaurin di e^x con resto di Lagrange,

$$e^x = 1 + x + \frac{e^c}{2}x^2\,.$$

Sul punto c non abbiamo alcuna informazione se non che è compreso tra 0 e x. Perciò se $x = \frac{1}{2}$ il resto è stimabile con $\sqrt{e}/2 \sim 0.82$, mentre se $x = 2$ allora la stima è $e^2/2 \sim 3.69$.

Concludiamo questa sezione citando, tra le applicazioni, la possibilità di effettuare calcoli approssimati.

Esempio 4.3 Vogliamo calcolare il numero e a meno di un errore di 0.01. Dalla formula di McLaurin con resto di Lagrange abbiamo $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, con c tra 0 e x. Posto $x = 1$ troviamo

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

con $c \in [0, 1]$. Poiché $e^c \leq e < 3$ deduciamo che $\frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{100}$ se $(n + 1)! > 300$; basta scegliere allora $n = 5$ (poiché $6! = 720$). Perciò

$$e \sim 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{326}{120} \sim 2.71\,.$$

Esercizio 4.1 Trovare gli sviluppi di McLaurin di $\frac{1}{1+x^2}$, e^{-x^2}, $\operatorname{arctg} x$.

Esercizio 4.2 Sviluppi di Taylor di centri diversi danno naturalmente risultati diversi (si pensi alle rette tangenti al grafico di una funzione). Calcolare gli sviluppi di Taylor di ordine 2 della funzione e^x nei punti 0, ± 1 e disegnarne un grafico approssimativo.

Risposta. $T_{2,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $T_{2,1}(x) = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2}$, $T_{2,-1}(x) = \frac{1}{e} + \frac{x+1}{e} + \frac{(x+1)^2}{2e}$.