Problemi 3D

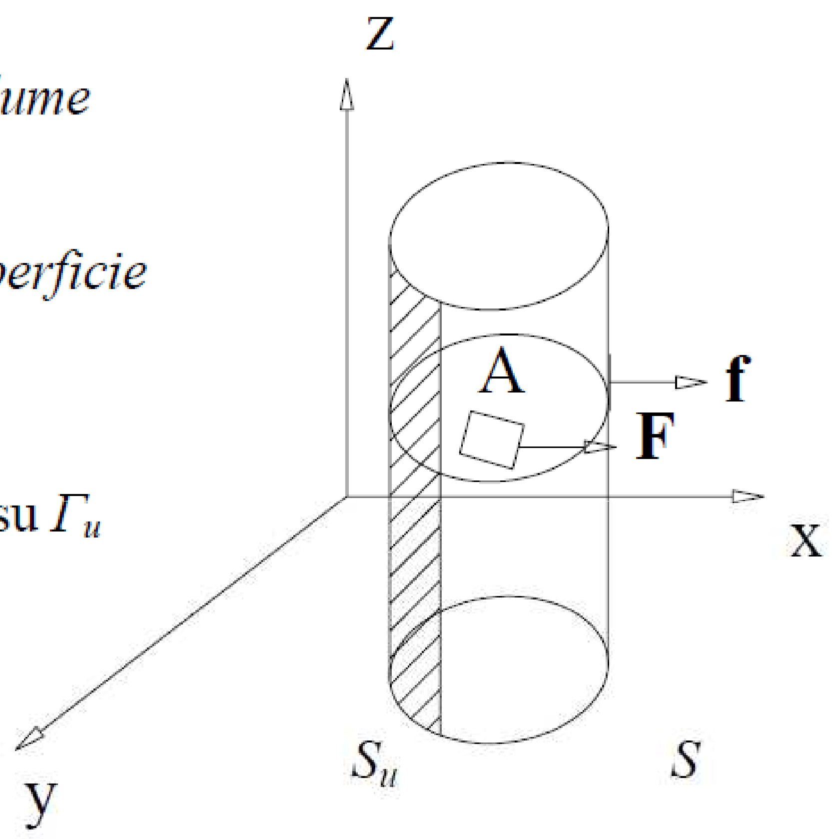
$$\underline{F}(x,y) = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \text{ in } A \quad \textit{forze di volume}$$

$$\underline{f}(x,y) = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \text{ su } \Gamma_F \quad \textit{forze di superficie}$$

$$F_z = 0 \text{ in } A \qquad f_z = 0 \text{ su } \Gamma_F$$

$$\underline{\bar{s}}(x,y) = \begin{Bmatrix} \bar{s}_x \\ \bar{s}_y \end{Bmatrix} \text{ su } \Gamma_u$$

$$\underline{s}(x,y,z) = \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{Bmatrix}$$



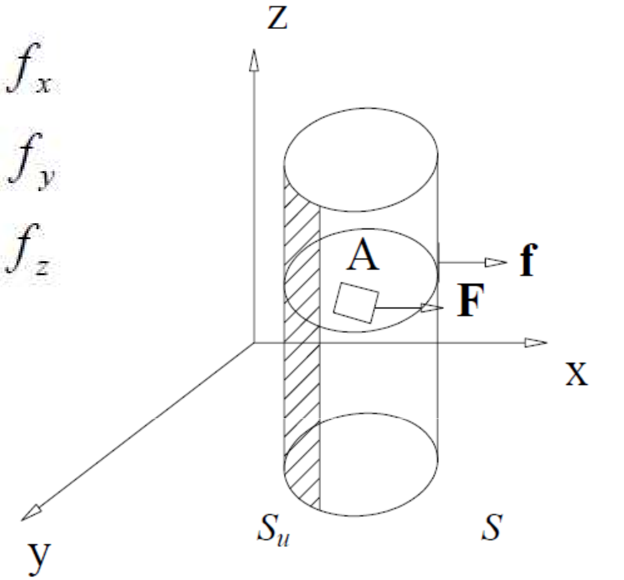
$$\underline{\varepsilon}(x,y,z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \qquad \underline{\sigma}(x,y,z) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Problemi 3D

Le equazioni di equilibrio vengono formulate come

$$\sigma_{ij,i} + F_j = 0 \quad \text{in } A \qquad \begin{cases} \sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{zx} \cdot n_z = f_x \\ \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{zy} \cdot n_z = f_y \\ \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z = f_z \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} \cdot n_i = f_i \quad \text{su } \Gamma_F \qquad \begin{cases} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{zx,z} + F_x = 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{zy,z} + F_y = 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + F_z = 0 \end{cases}$$



Le equazioni di congruenza

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(s_{i,j} + s_{j,i} \right) \quad \text{in } V \;\rightarrow \qquad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} s_{x,x} & s_{x,y} + s_{y,x} & s_{x,z} + s_{z,x} \\ s_{y,x} + s_{x,y} & s_{y,y} & s_{y,z} + s_{z,y} \\ s_{z,x} + s_{x,z} & s_{z,y} + s_{y,z} & s_{z,z} \end{bmatrix}$$

Problema piano nel piano xy

Si vuole ora semplificare il problema elastico riconducendolo alla sola sezione trasversale

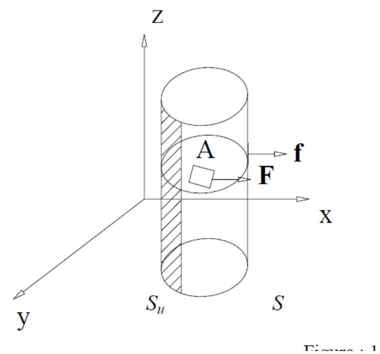
Ovvero riformularlo in termini delle sole variabili nel piano

Le variabili nel piano si suppongono indipendenti da z

$$\underline{s}(x,y)=\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \end{Bmatrix} \qquad \underline{\varepsilon}(x,y)=\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \underline{\sigma}(x,y)=\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\cdot\left(s_{i,j}+s_{j,i}\right) \quad \text{in } A \quad \rightarrow \qquad \underline{\varepsilon}=\begin{bmatrix} s_{x,x} & s_{x,y}+s_{y,x} \\ s_{y,x}+s_{x,y} & s_{y,y} \end{bmatrix}$$

$$s_i=\overline{s_i} \quad \text{su } S_u \quad \rightarrow \qquad \begin{cases} s_x=\overline{s}_x \\ s_y=\overline{s}_y \end{cases}$$



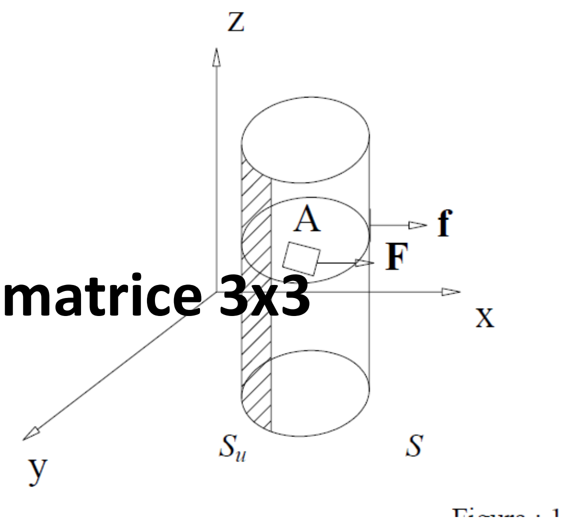
Problema piano nel piano xy

Le variabili nel piano si suppongono indipendenti da z

Le equazioni di equilibrio vengono formulate come

$$\sigma_{ij,i} + F_j = 0 \quad \text{in } A \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + F_x = 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + F_y = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} \cdot n_i = f_i \quad \text{su } \Gamma_F \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y = f_x \\ \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y = f_y \end{cases}$$



Il tensore costitutivo si riconduce ad una matrice 3x3

$$\underline{\sigma} = \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}$$

Problemi piani

Le equazioni di congruenza interne o di De St Venant

i. $\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} = \gamma_{xy,xy}$

ii. $\varepsilon_{y,zz} + \varepsilon_{z,yy} = \gamma_{yz,yz}$

iii. $\varepsilon_{z,xx} + \varepsilon_{x,zz} = \gamma_{zx,zx}$

iv. $\varepsilon_{x,yz} = \frac{1}{2}(\gamma_{xy,z} + \gamma_{zx,y} - \gamma_{yz,x})_{,x}$

v. $\varepsilon_{y,zx} = \frac{1}{2}(\gamma_{xy,z} - \gamma_{zx,y} + \gamma_{yz,x})_{,y}$

vi. $\varepsilon_{z,xy} = \frac{1}{2}(-\gamma_{xy,z} + \gamma_{zx,y} + \gamma_{yz,x})_{,z}$

Problemi piani

Il problema nel piano è ben posto ed ammette una sola soluzione che dipende con regolarità dai dati

Tuttavia occorre che la soluzione del problema piano soddisfi le equazioni di equilibrio e congruenza nello spazio affinché essa rappresenti la soluzione effettiva del problema di partenza

NB: Ricondurre il problema alla ricerca dei soli 8 campi sopra indicati non significa assumere comunque nulli in soluzione i campi s_z, ε_z, σ_z

Problemi piani di deformazione

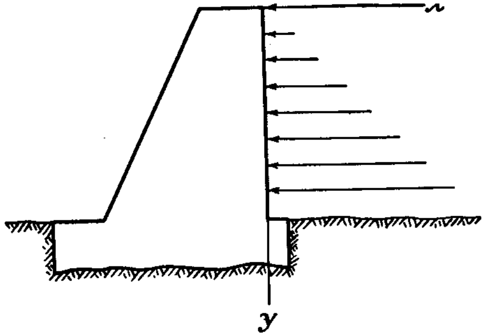


FIG. 9.

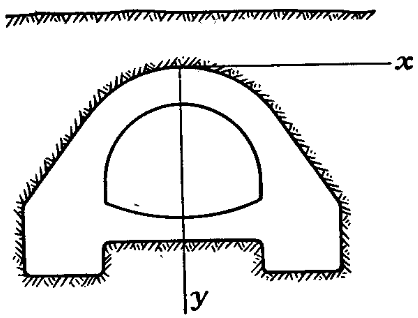


FIG. 10.

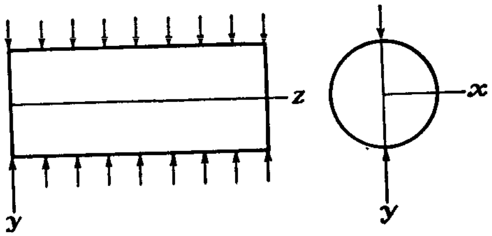
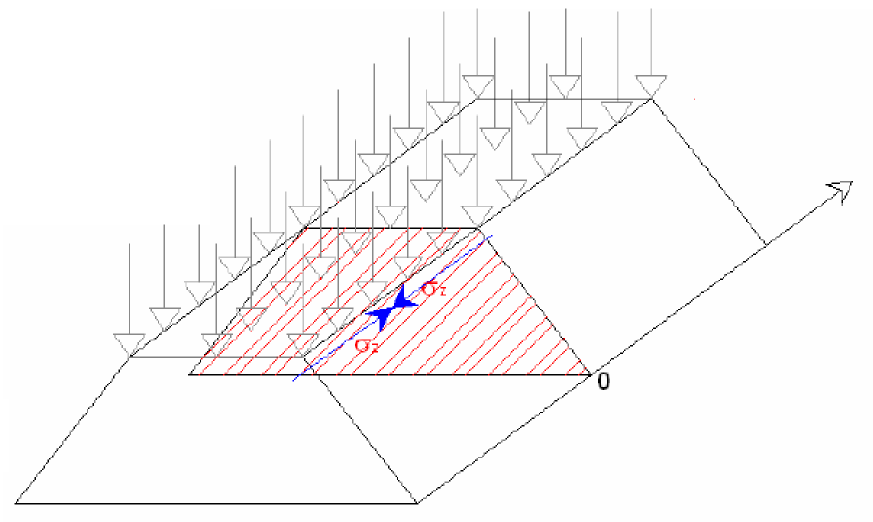


FIG. 11.

$$\underline{s} = \underline{s}(x, y)$$
$$s_z = 0$$
$$\varepsilon_z = s_{z,z} = 0$$



Lo spostamento nel piano xy non dipende da z

$\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ Implica $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$

Problemi piani di deformazione

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\cdot\varepsilon_x + \nu\cdot\varepsilon_y\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\cdot\varepsilon_y + \nu\cdot\varepsilon_x\right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

e

$$\sigma_z = \frac{E\cdot\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_x + \varepsilon_y\right] = \upsilon\cdot(\sigma_x + \sigma_y)$$

Problemi piani di deformazione

$$\underline{\sigma} = \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = \frac{E}{(1+\upsilon)\cdot(1-2\upsilon)} \cdot \begin{vmatrix} (1-\upsilon) & \upsilon & 0 \\ \upsilon & (1-\upsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\upsilon}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix}$$

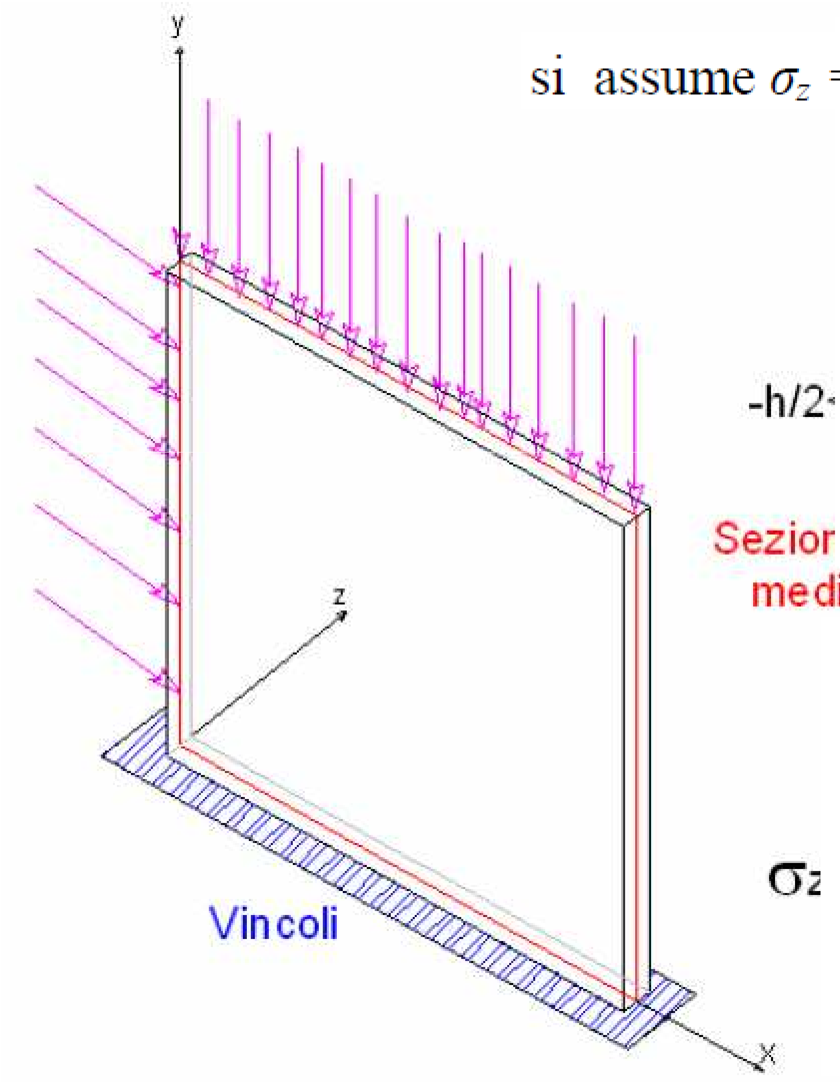
$$\sigma_z = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_x + \varepsilon_y \right] = \upsilon \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{C}^{-1} \underline{\sigma}$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\upsilon & 0 \\ -\upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\cdot(1+\upsilon) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix}$$

Problemi piani di tensione

si assume $\sigma_z = 0$.



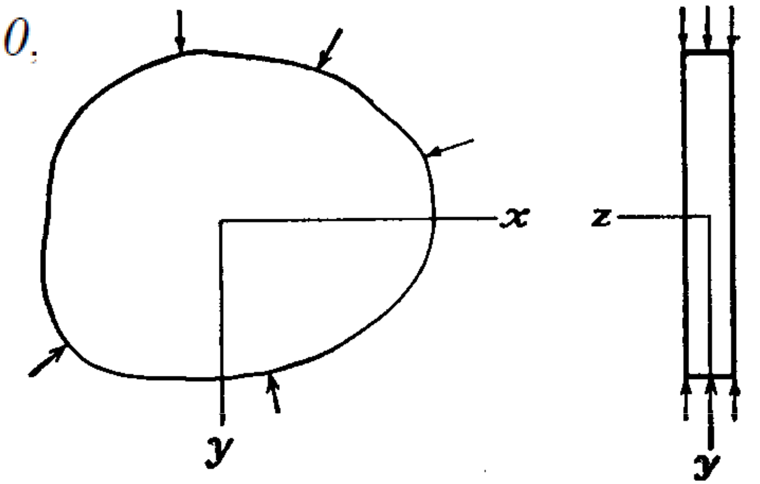
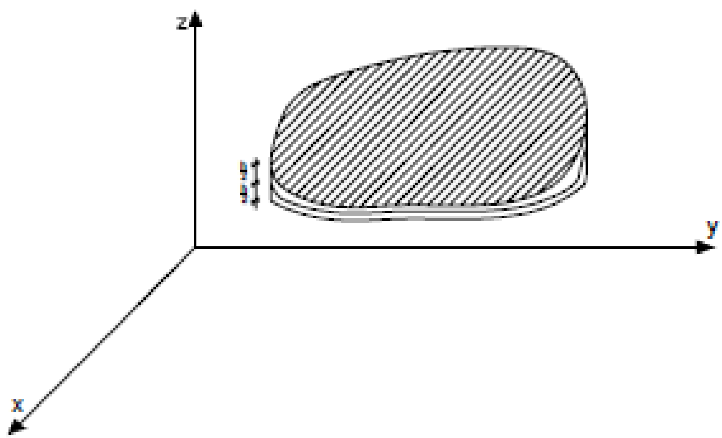


FIG. 8.



Problemi piani di tensione

Se si assume che una lastra sottile sia caricata da forze sul contorno parallele al piano medio della lastra e distribuite uniformente sullo spessore , allora σ_z, τ_{xz} e $\tau_{yz}=0$ su entrambe le facce della lastra e si può assumere che siano 0 anche ovunque. Si assume inoltre che σ_x, σ_y, τ_{xy} siano indipendenti da z ovvero funzioni di x ed y solo

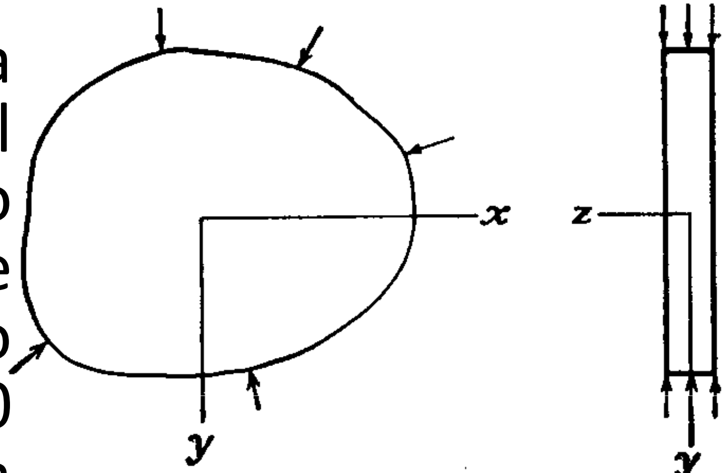
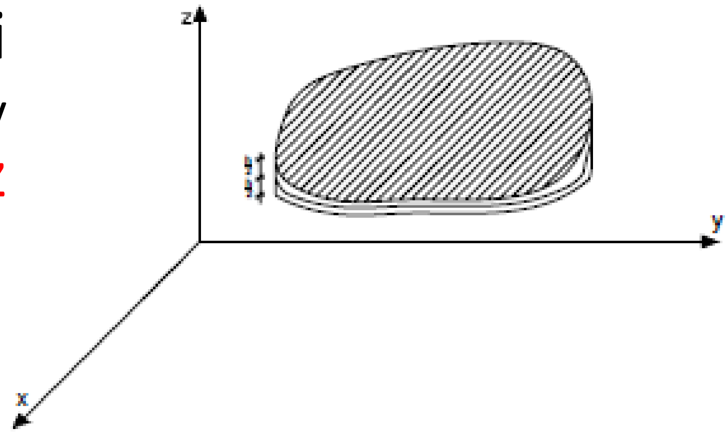


FIG. 8.



Problemi piani di tensione

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

In base all'equazione costitutiva si ha che

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

Poichè σ_x, σ_y, sono $f(x,y)$ Pertanto $\boxed{\varepsilon_z = \varepsilon_z(x,y)}$

Problemi piani di tensione

Inoltre, in base alle equazioni di congruenza interna seguenti

$$\partial^2 \varepsilon_x/\partial y^2 + \partial^2 \varepsilon_y/\partial x^2 = \partial^2 \gamma_{xy}/\partial x \partial y$$

$$\partial^2 \varepsilon_y/\partial z^2 + \partial^2 \varepsilon_z/\partial y^2 = \partial^2 \gamma_{yz}/\partial y \partial z$$

$$\partial^2 \varepsilon_z/\partial x^2 + \partial^2 \varepsilon_x/\partial z^2 = \partial^2 \gamma_{zx}/\partial z \partial x$$

Poiché $\partial^2 \varepsilon_y/\partial z^2 = \partial^2 \varepsilon_x/\partial z^2 = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$

Si ha che $\partial^2 \varepsilon_z/\partial y^2 = \partial^2 \varepsilon_z/\partial x^2 = 0$

Pertanto la congruenza impone che ε_z dipenda linearmente da x e y

$$\varepsilon_z = C + C_1 x + C_2 y$$

Problemi piani di tensione

Tuttavia $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ implica $\begin{cases} s_{z,x} = s_{z,y} = 0 \\ s_z = s_z(z) \end{cases}$ dunque $\boxed{\varepsilon_z = s_{z,z}}$

Per cui è possibile la presenza di uno $\varepsilon_z = s_{z,z} \neq 0$ purché solo funzione di z.

Tale circostanza non è però consentita , dal momento che tutte le componenti di sforzo sono al più funzioni di x e y.

Dovrà quindi essere $\begin{cases} \varepsilon_z = c \\ s_z = c \cdot z \end{cases}$

$\boxed{\varepsilon_z = \varepsilon_z(x,y)}$ incompatibile $\boxed{\varepsilon_z = c}$

Dunque si dice che la soluzione è equilibrata
ma non congruente

Problemi piani di tensione

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\upsilon & 0 \\ -\upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot (1+\upsilon) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = \frac{E}{(1-\upsilon^2)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-\upsilon)}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix}$$