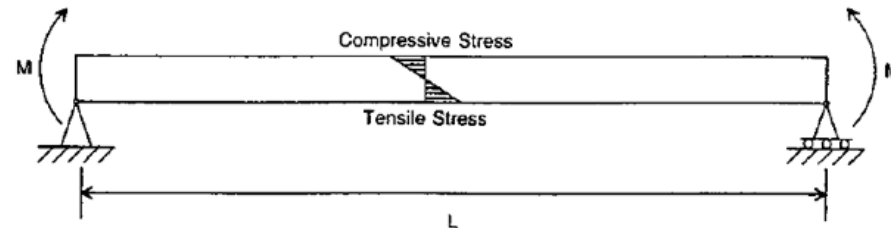


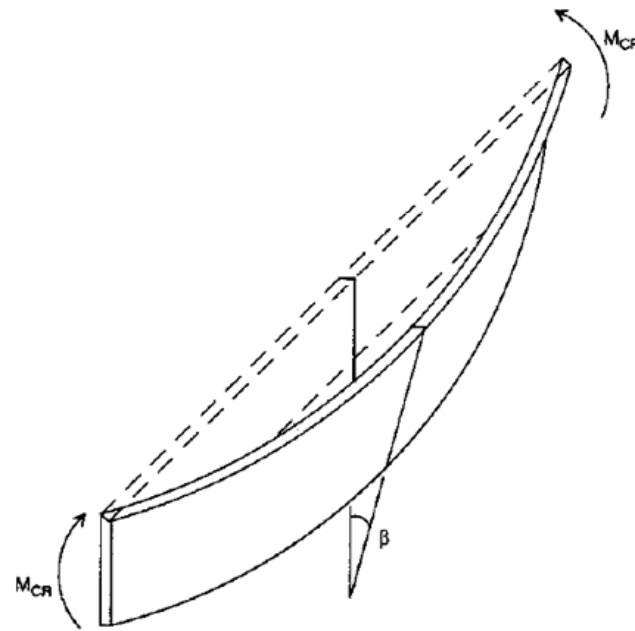
Stabilità dell'equilibrio elastico: formulazione generale

- Travi soggette a carico di punta
- Instabilità flessione-torsionale
- Instabilità per avvitrimento (solo torsionale)
- Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov
- Effetto delle tensioni normali secondarie
- Instabilità di lastre piane
- Altri casi di interesse tecnico

Esempi di instabilità flessio-torsionale



(a)



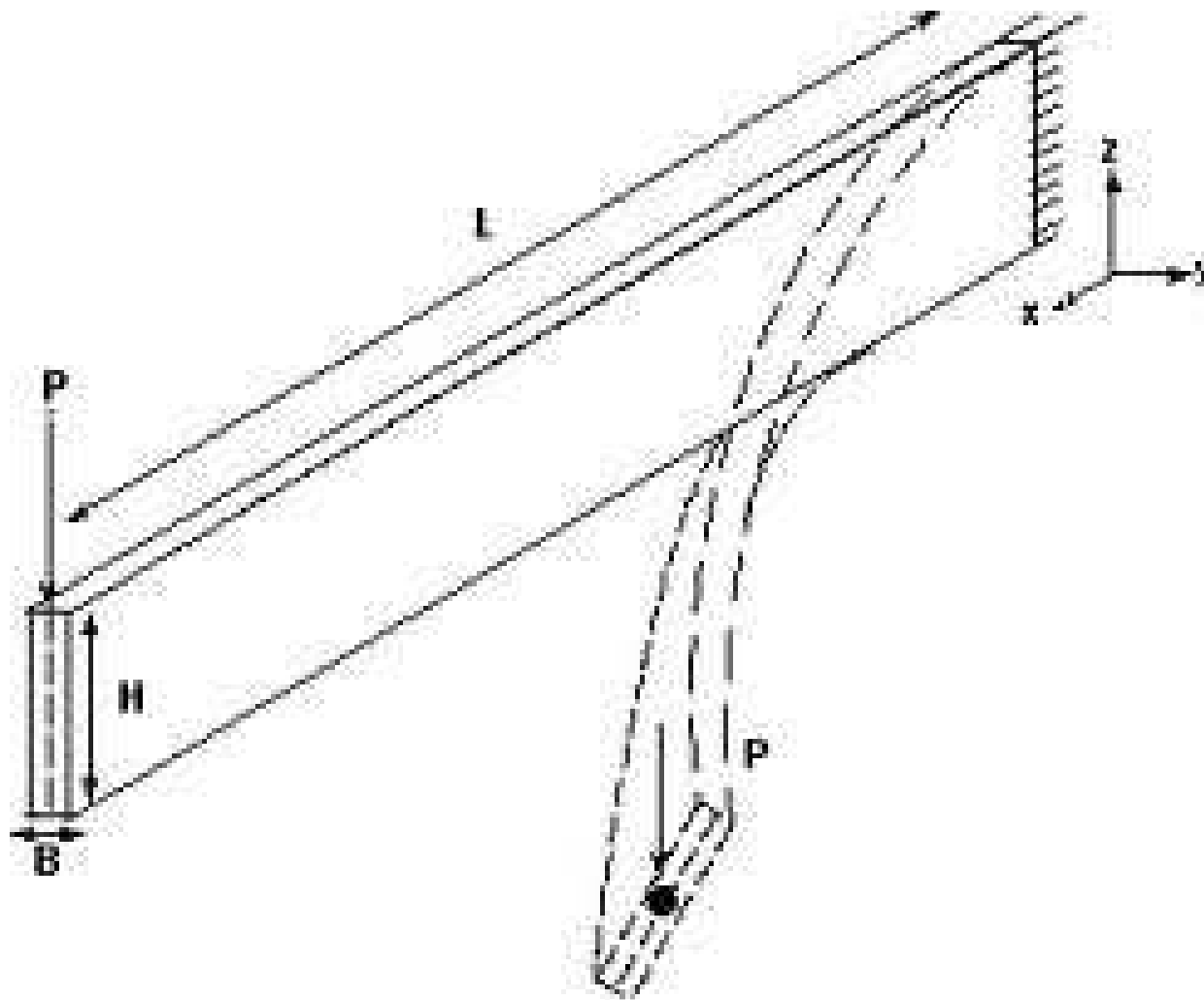
(b)

Esempi di instabilità flessio-torsionale

This cantilever beam has no lateral support. It was excessively loaded and experienced lateral torsional buckling. Part of the failure mechanism included local buckling of the compression flange



Esempi

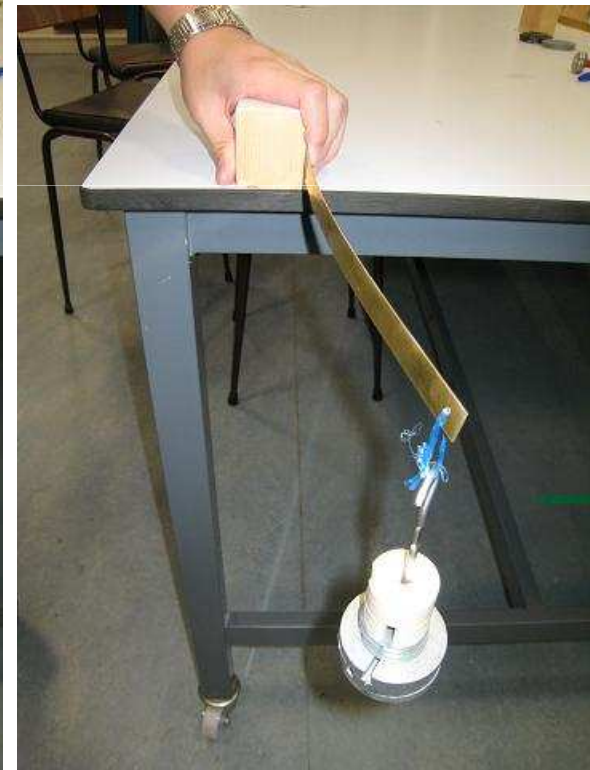


Esempi di instabilità flessio-torsionale

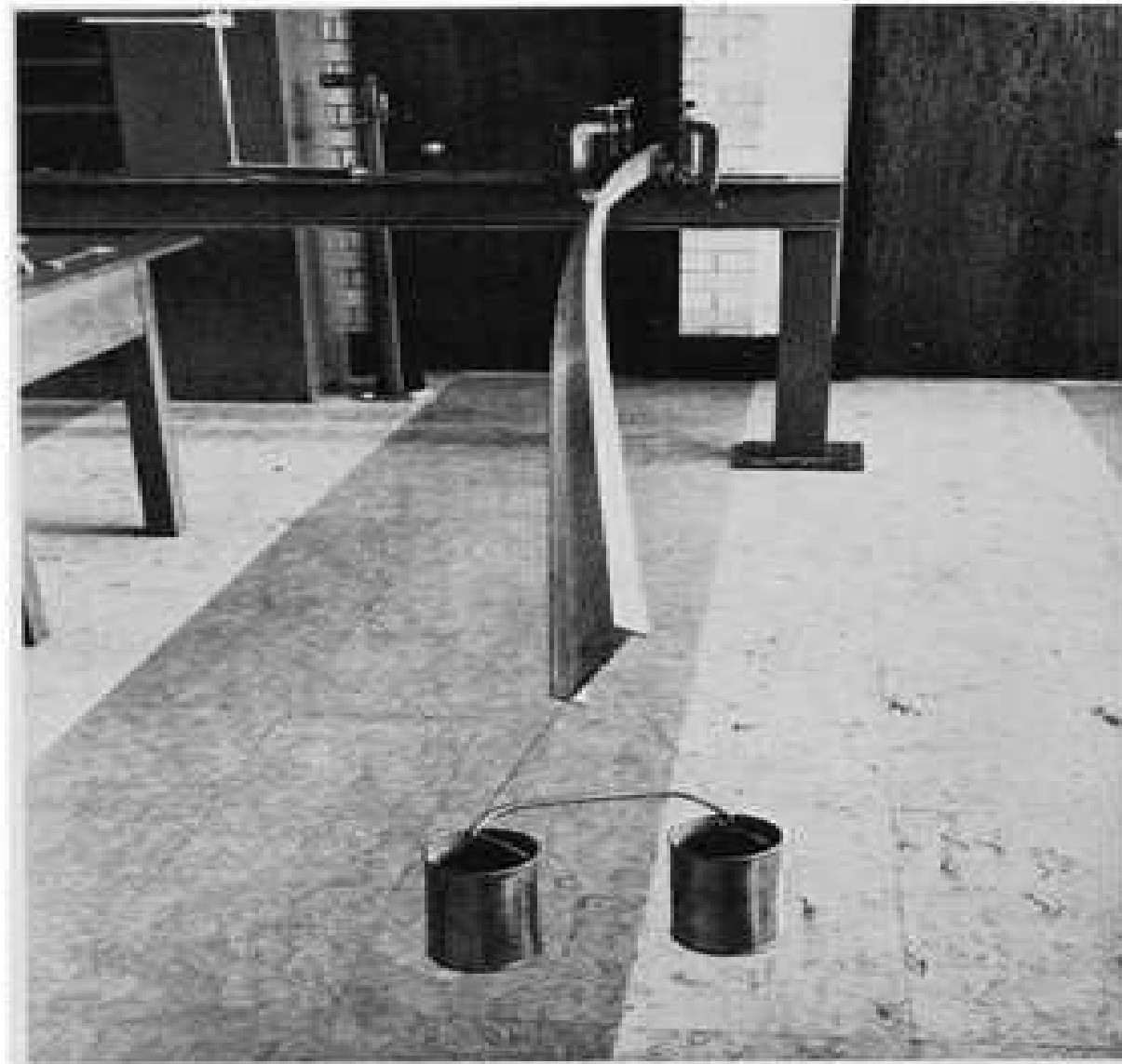


Esempi di instabilità flessio-torsionale

This set of models demonstrates the behaviour of lateral buckling of a narrow rectangular beam with different sizes of section



Esempi di instabilità flessio-torsionale

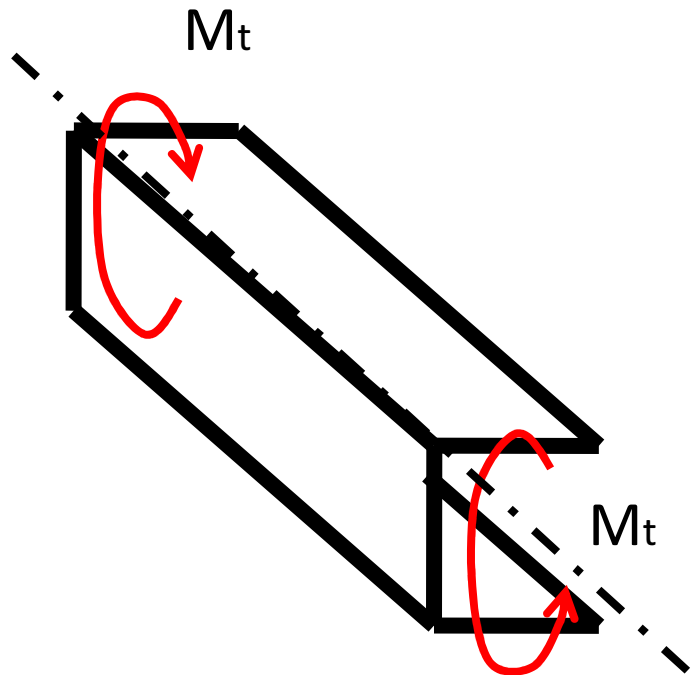


Esempi di instabilità flessio-torsionale

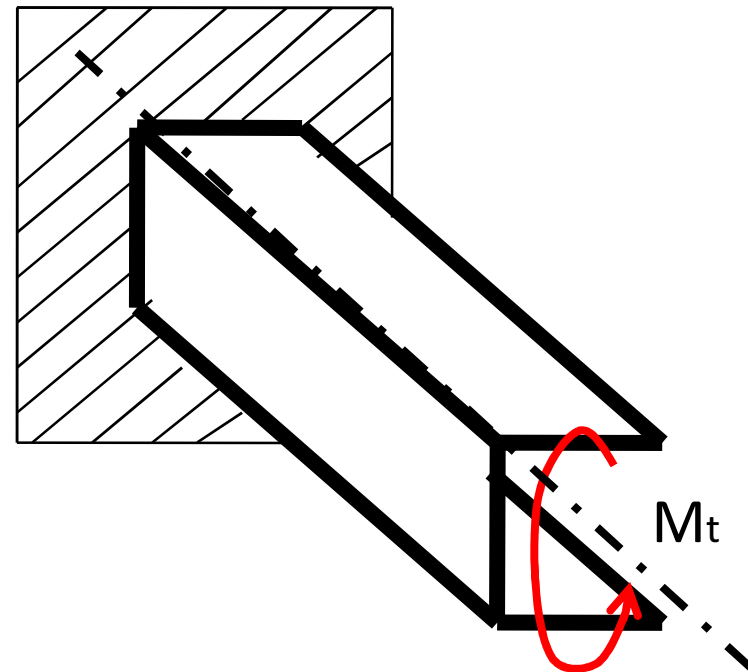
Instabilizzazione dei ferri dell'armatura



Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov

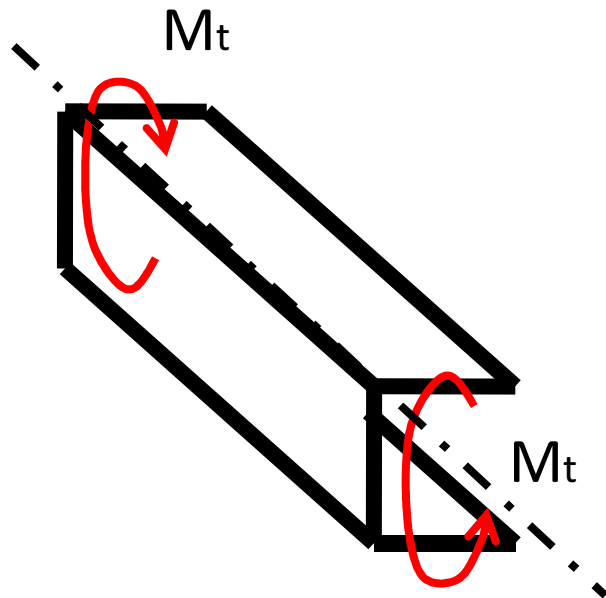


Ingobbamento: libero
Torsione primaria
Alla Saint Venant



impedito
Torsione secondaria
alla Vlasov

Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov



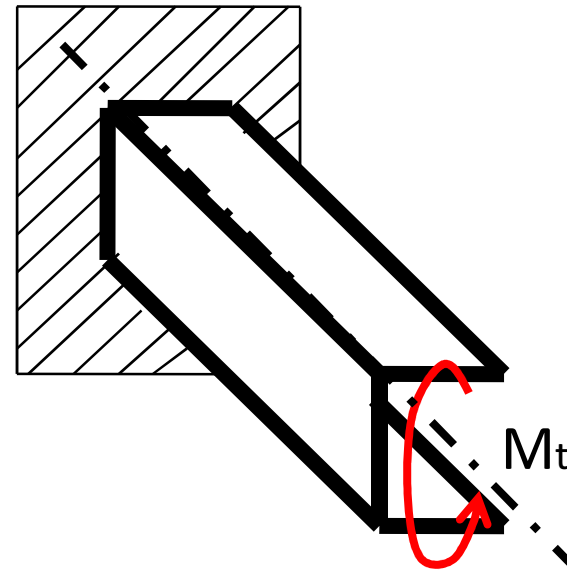
Angolo unitario di torsione

$$\theta' = \text{costante}$$

$$\theta' = \frac{M_t}{GJ_t} \Rightarrow \theta(z) = \theta' z + \theta_0$$

Ingobbamento costante

$$w(s) = \theta' \omega(s)$$



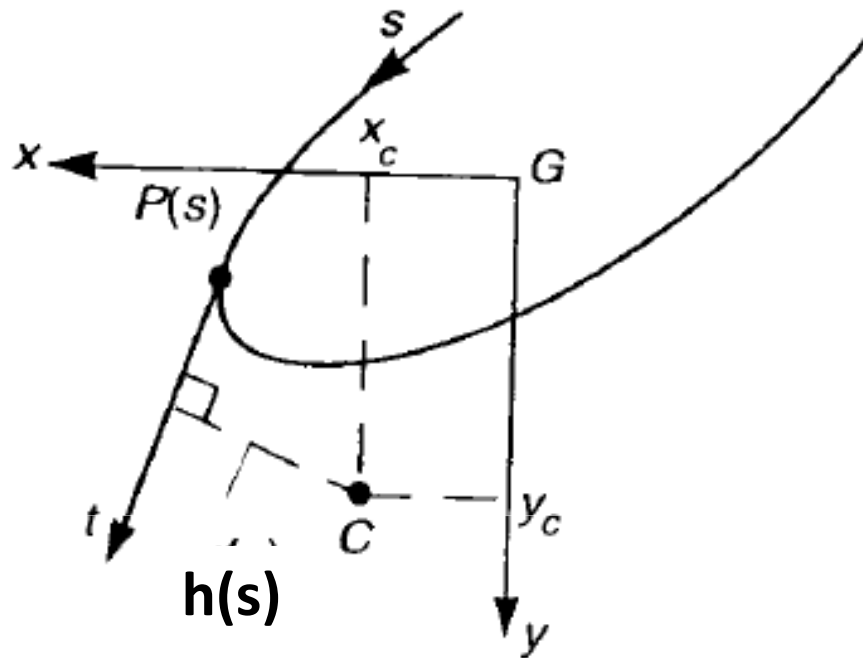
Angolo unitario di torsione variabile

$$\theta'(z) = \frac{M_t(z)}{GJ_t} \Rightarrow M_t(z) = \theta'(z) GJ_t$$

Ingobbamento variabile

$$w(z, s) = \theta'(z) \omega(s)$$

Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov



$h(s)$ è la distanza della tangente alla linea d'asse nel punto corrente dal centro di Taglio C. La funzione di ingobbamento è definita come

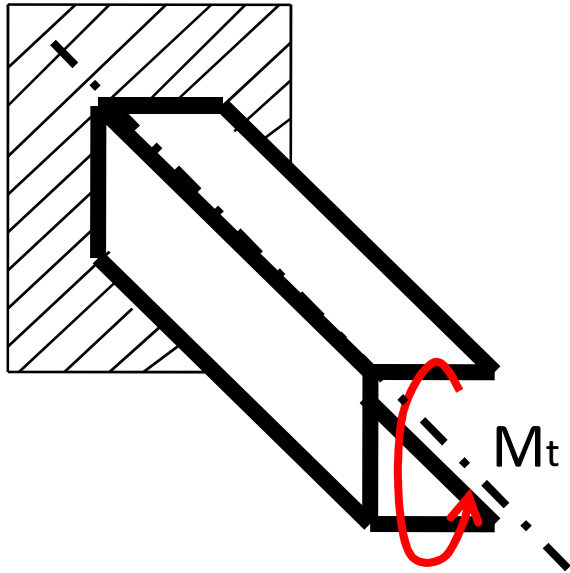
$$\omega(s) = 2(\bar{\Omega} - \Omega(s))$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{2} \int_0^s h(t) dt,$$

$$\Rightarrow d\omega(s) = h(s) ds$$

$$\bar{\Omega}(s) = \frac{1}{A} \int_A \Omega dA = \frac{1}{A} \oint b(s) \Omega(s) ds = \frac{1}{2A} \oint b(s) \int_0^s h(t) dt ds$$

Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov

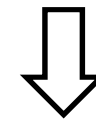


Ipotesi cinematiche

- indeformabilità sezione trasversale
- $b \ll$ sviluppo della linea d'asse $\rightarrow \omega = \omega(s)$
- $d\omega/ds = -h(s)$
- Scorrimento $\gamma_{zs} = 0$ sulla linea media

$$w(z, s) = \theta'(z) \omega(s)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \theta''(z) \omega(s) \Rightarrow \sigma_z = E \varepsilon_z = E \theta''(z) \omega(s)$$



**Nascono delle tensioni normali
a causa dell'ingobbamento impedito**

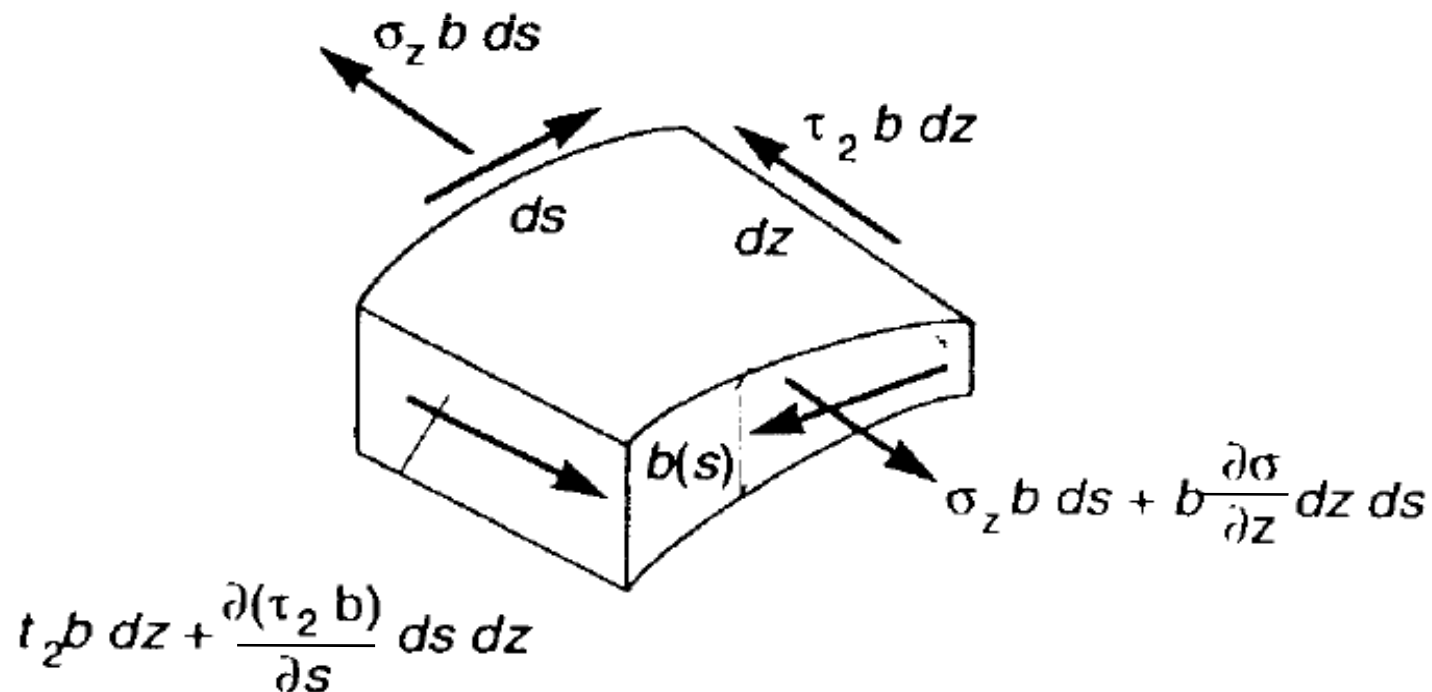
Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov

Consideriamo un elemento infinitesimo di trave.

Pensiamo distribuite uniformemente le σ_z .

Le σ_z variano lungo z .

Per equilibrio nascono delle tensioni tangenziali τ_2 (da torsione secondaria per distinguerle da quella da torsione primaria previste dalla soluzione del Saint Venant)

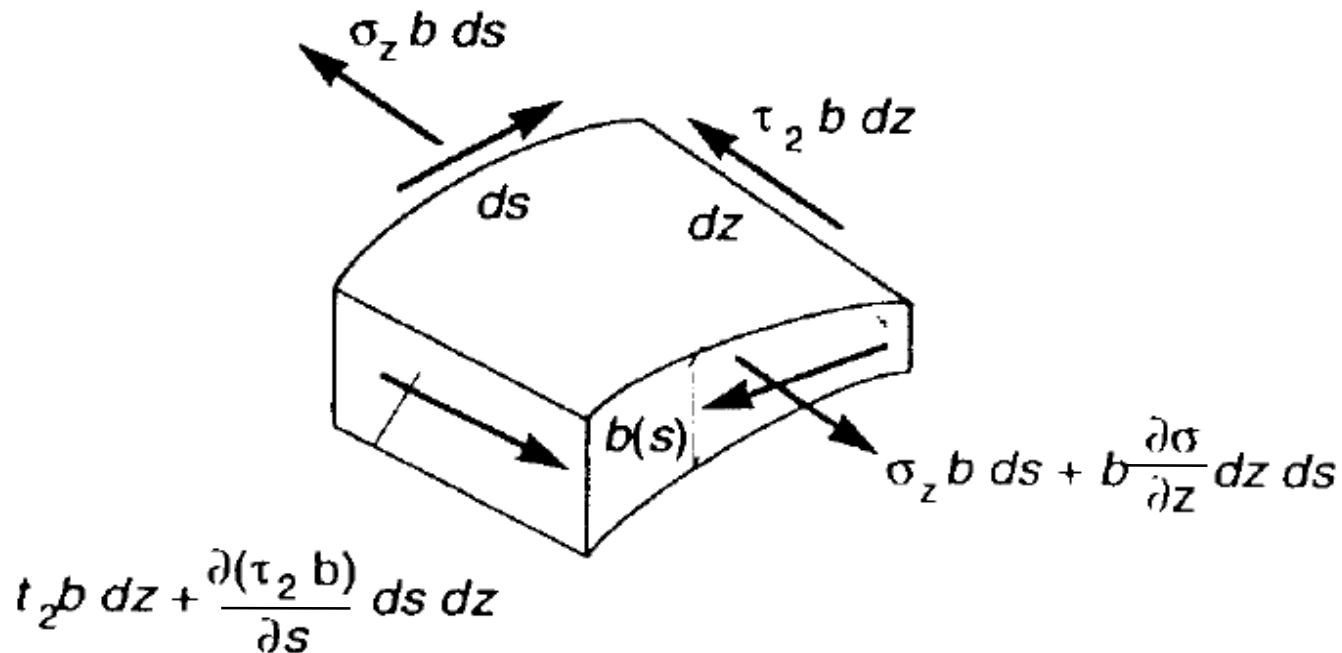


Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov

Equilibrio in z

$$\frac{\partial(\tau_2 b)}{\partial s} ds dz = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} ds dz b$$

$$\frac{\partial(\tau_2(z,s)b(s))}{\partial s} = -\frac{\partial \sigma_z(z,s)b(s)}{\partial z} = -E\theta'''(z)\omega(s)b(s)$$



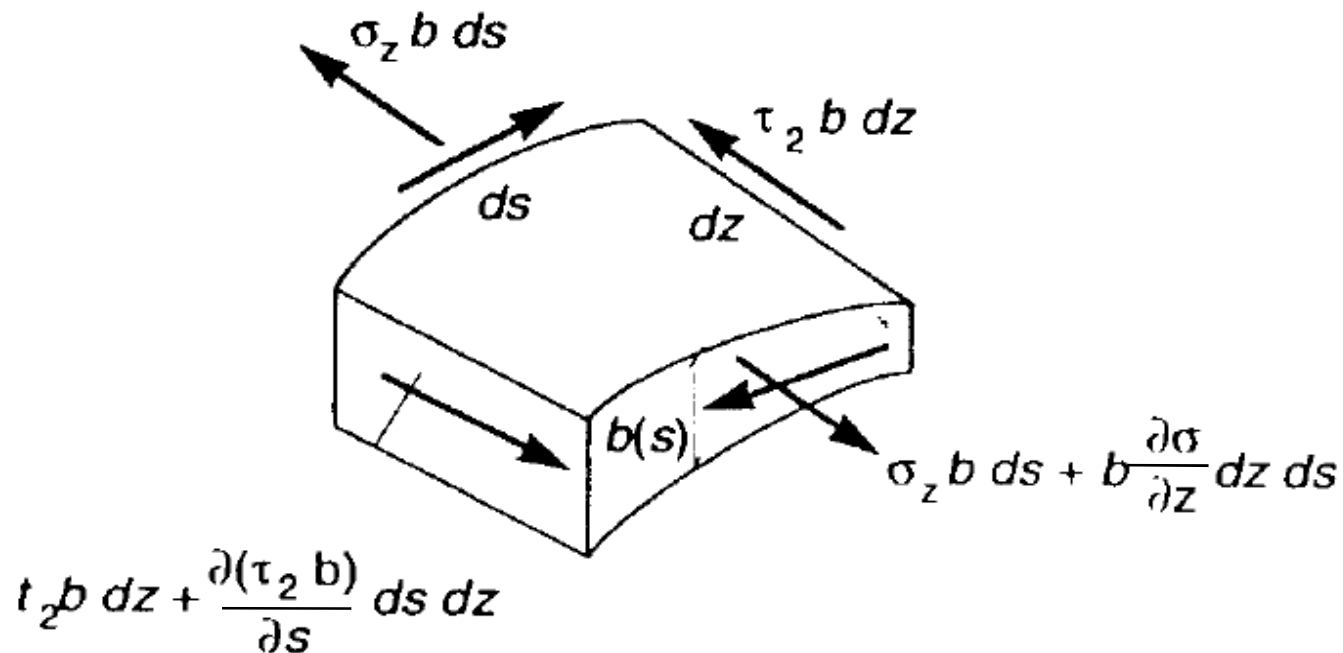
Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov

$$\frac{\partial(\tau_2(z,s)b(s))}{\partial s} = -E\theta'''(z)\omega(s)b(s)$$

$$\Rightarrow \tau_2(z,s)b(s) = \int_0^s -E\theta'''(z)\omega(t)b(t)dt$$

Nasce un momento torcente detto alla Vlasov

$$\mathbf{M}_t^V = \oint \tau_2(z,s).b(s).h(s)ds = -E\theta'''(z) \oint h(s) \int_0^s b(t)\omega(t)dt ds$$



Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov

momento torcente detto alla Vlasov

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_t^V &= -E\theta'''(z) \oint \mathbf{h}(s) \int_0^s \mathbf{b}(t) \omega(t) dt ds = \\ &= -E\theta'''(z) \oint \mathbf{h}(s) ds \int_0^s \mathbf{b}(t) \omega(t) dt = \\ &= -E\theta'''(z) \oint d\omega(s) \int_0^s \mathbf{b}(t) \omega(t) dt = \\ &= E\theta'''(z) \oint \mathbf{b}(s) \omega^2(s) ds \end{aligned}$$

Per dettagli sui passaggi si veda il LC II pag 90-91

Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov

Momento torcente detto alla Vlasov

$$\mathbf{M}_t^V = E\theta'''(z) \oint \mathbf{b}(s)\omega^2(s)ds = E\theta'''(z)\Gamma$$

$$\Gamma = \oint \omega^2(s)\mathbf{b}(s)ds$$

**Rigidità all'ingobbamento o
momento delle aree
Settoriali
Proprietà geometrica della
sezione**

Per dettagli sui passaggi si veda il LC II pag 90-91

Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov

Quindi in totale in caso di vincoli torsionali abbiamo che il Momento torcente totale è dato dalla somma di quello alla SV e di quello alla Vlasov

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{M}_t^{SV} + \mathbf{M}_t^V$$

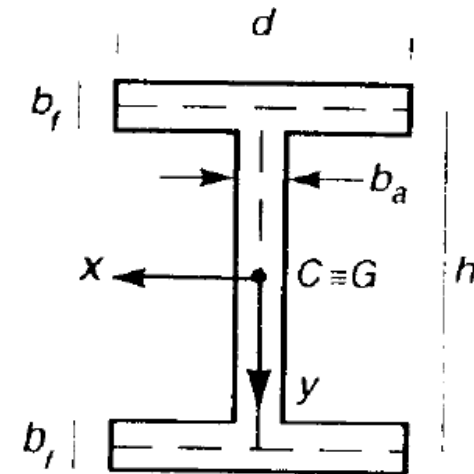
$$\mathbf{M}_t^{SV} = \theta' \mathbf{GJ}_t$$

$$\mathbf{M}_t^V = E\theta'''(\mathbf{z})\Gamma$$

$$\Gamma = \oint \omega^2(s) \mathbf{b}(s) ds$$

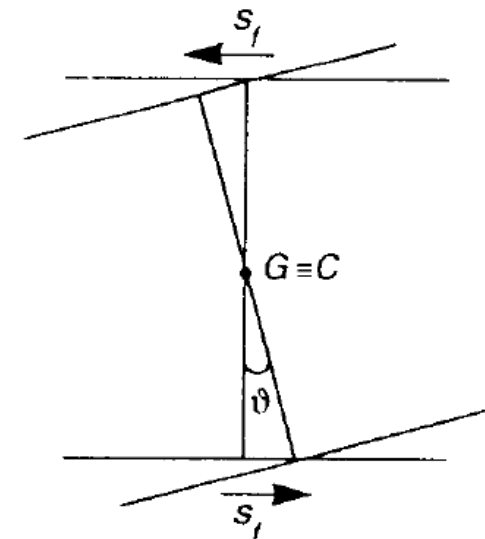
Applicazione: Il caso della trave ad I

Timoshenko (1905), LC II pag 91
Consideriamo la trave con sezione
ad I in figura



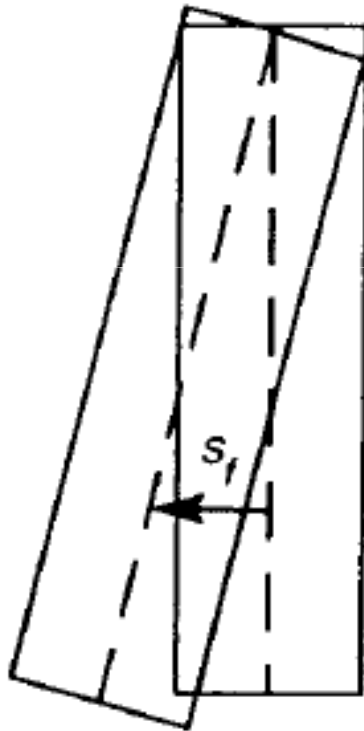
Supponiamo che la sezione ruoti di
un angolo θ

Allora i punti della sezione
subiranno uno spostamento $s_x = \theta y$
Ciascuna flangia si sposta di $s_f = \theta h/2$

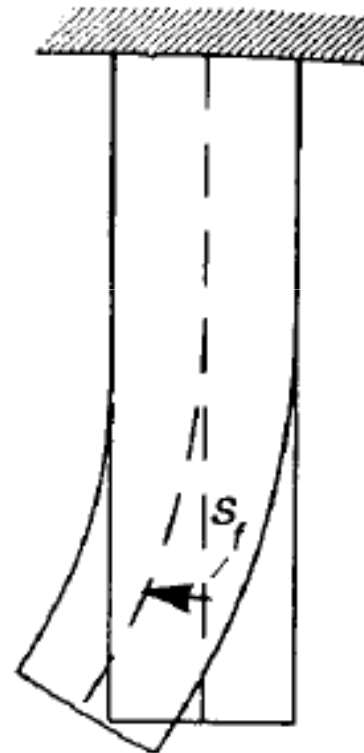


Applicazione: Il caso della trave ad I

In seguito alla rotazione della sezione la trave si inflette se la rotazione è impedita



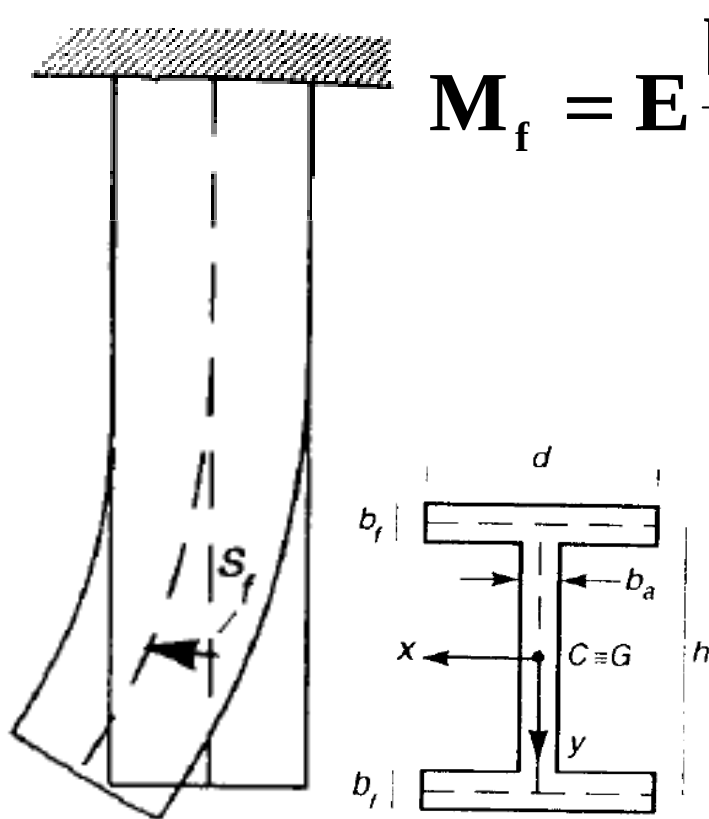
**Rotazione
libera**



**Rotazione impedita
all'incastro**

Applicazione: Il caso della trave ad I

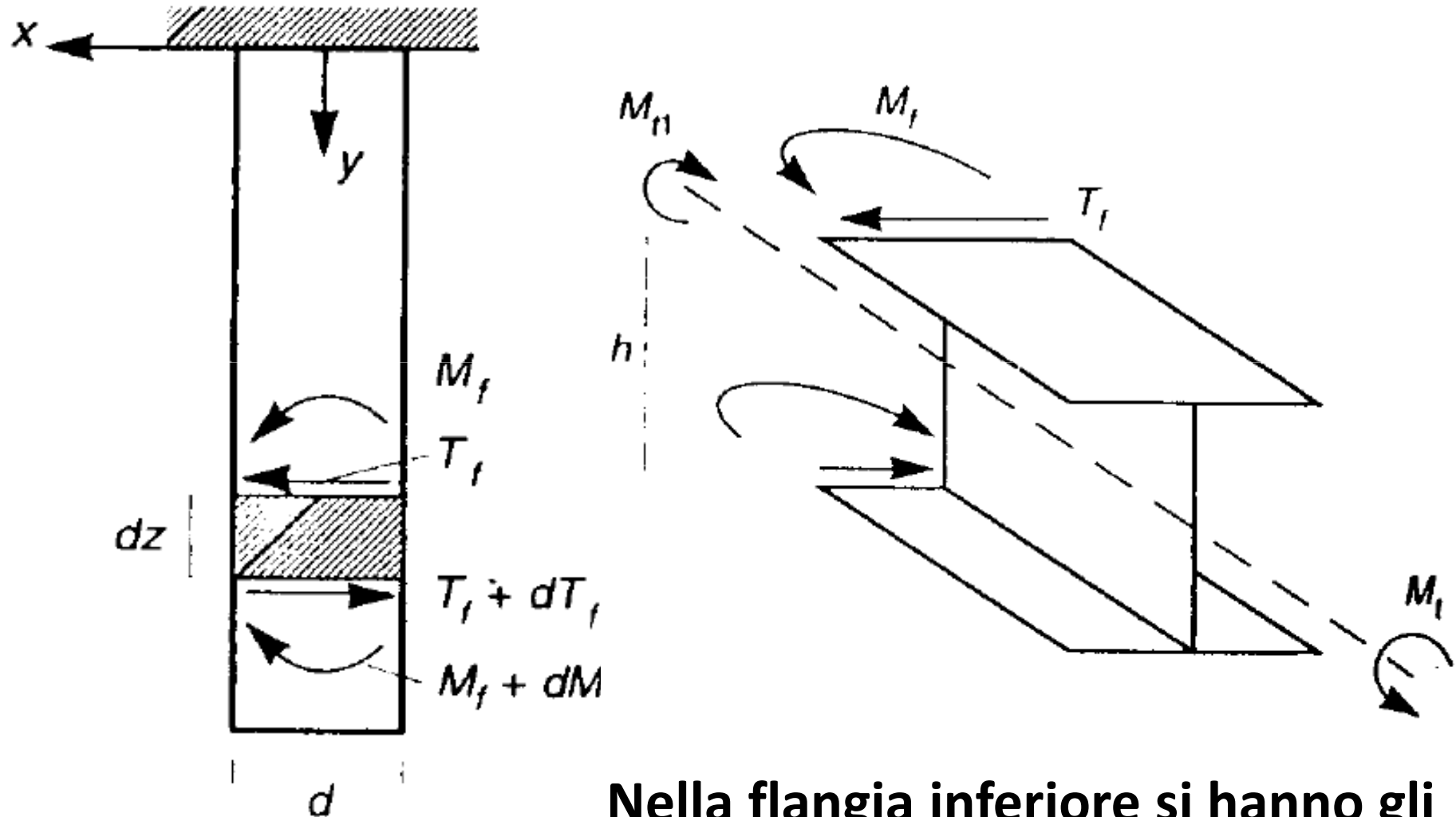
La flangia superiore si inflette come in figura
Nasce un momento flettente per effetto della curvatura
flessionale indotta dalla rotazione non uniforme


$$M_f = E \frac{bd^3}{12} \frac{d^2 s_f}{dz^2} = E \frac{bd^3}{12} \frac{h}{2} \theta'' = E \frac{bd^3 h}{24} \theta''$$

Per equilibrio insorgono i Tagli

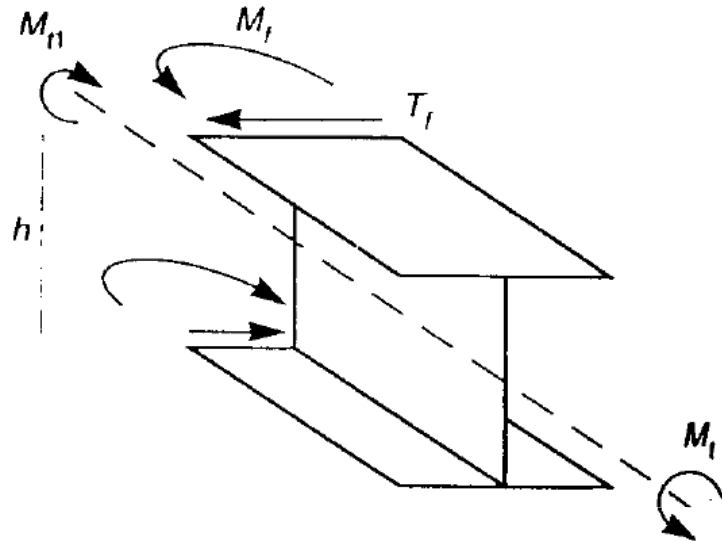
$$T_f = \frac{dM_f}{dz} = E \frac{bd^3 h}{24} \theta'''$$

Applicazione: Il caso della trave ad I



Nella flangia inferiore si hanno gli stessi risultati a segni invertiti

Applicazione: Il caso della trave ad I

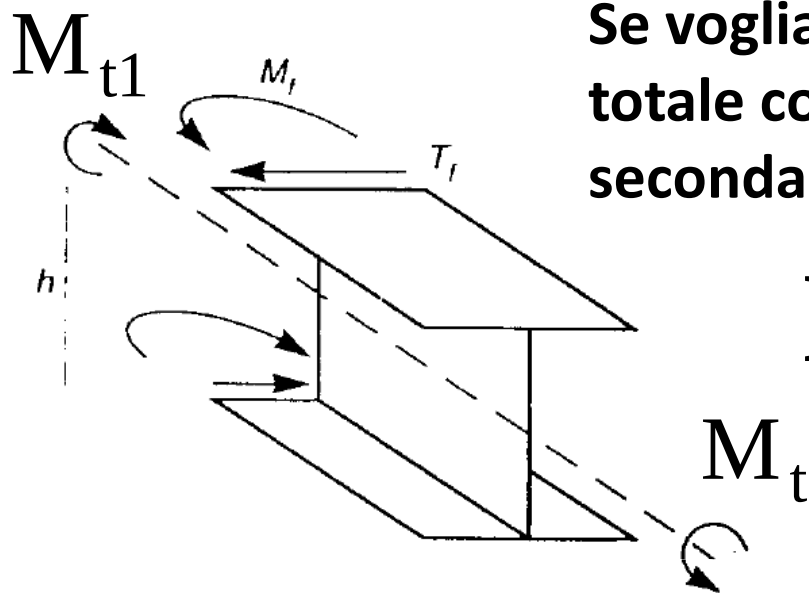


Equilibrio alla rotazione attorno a z deve tenere conto sia del momento torcente primario alla SV che del momento indotto dalla coppia di braccio h formata dai tagli T_f

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{M}_{t1} - T_f h$$

Dove $\mathbf{M}_{t1}(z) = GJ\theta'(z)$ è il contributo alla SV da torsione primaria

Applicazione: Il caso della trave ad I



Se vogliamo scrivere il momento torcente totale come somma del contributo primario e secondario

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{M}_{t1} + \mathbf{M}_{t2}$$

Possiamo vedere che il contributo torsionale secondario ottenuto come

$$\mathbf{M}_{t2}(z) = -\mathbf{T}_f(z)\mathbf{h} = -E\Gamma\theta'''(z)$$

Rappresenta il momento alla Vlasov che cercavamo dove

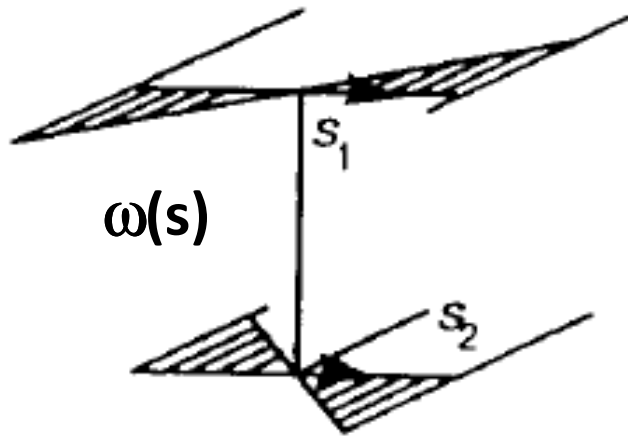
$$\Gamma = \frac{\mathbf{b}\mathbf{d}^3\mathbf{h}}{24}$$

Rappresenta la rigidità di ingobbamento a torsione secondaria per la sezione ad I

Applicazione: Il caso della trave ad I

Si dimostra che la funzione di ingobbamento nel caso in esame si scrive come

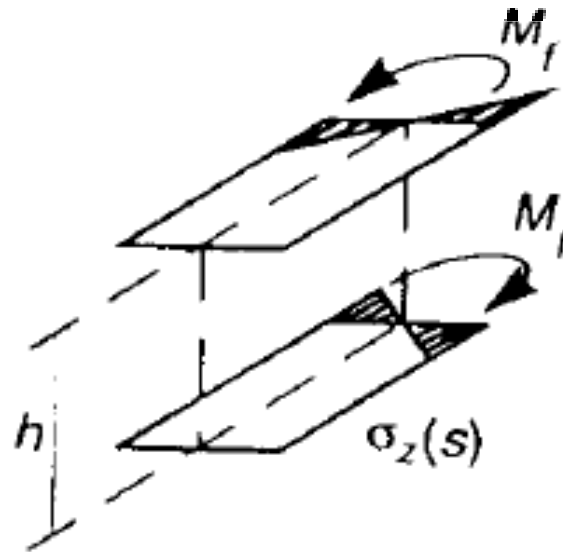
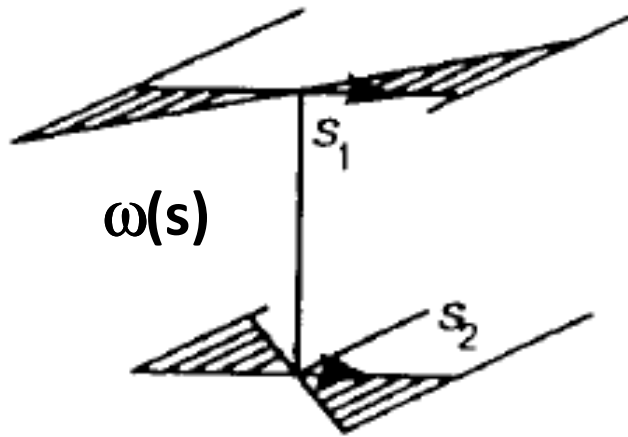
$$\omega(s) = \begin{cases} -(h/2)s_1 & \text{nella flangia superiore} \\ 0 & \text{sull'anima} \\ (h/2)s_2 & \text{nella flangia inferiore} \end{cases}$$



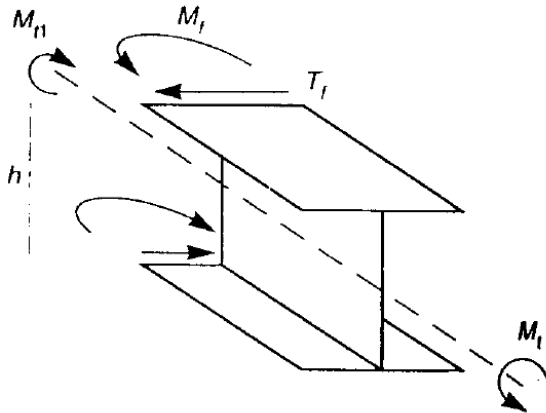
Applicazione: Il caso della trave ad I

È possibile visualizzare le tensioni normali associate alla torsione non uniforme che produce inflessione delle flange

Le tensioni normali risultano proporzionali alla funzione di ingobbamento



Applicazione: Il caso della trave ad I



Introduciamo il Bimomento definito come

$$B = E\Gamma\theta''$$

Esso rappresenta uno degli sforzi generalizzati associati al problema in esame

Nella sezione ad I il bimomento si scrive come

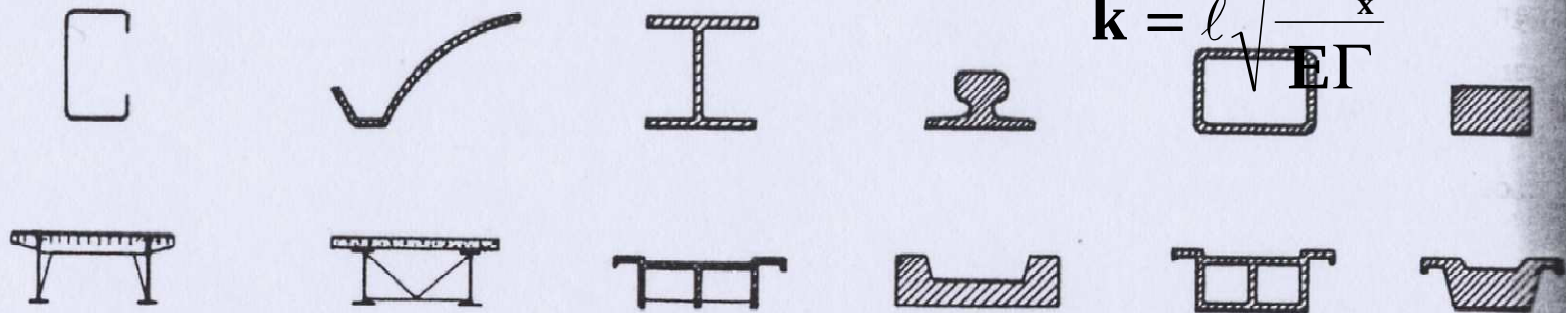
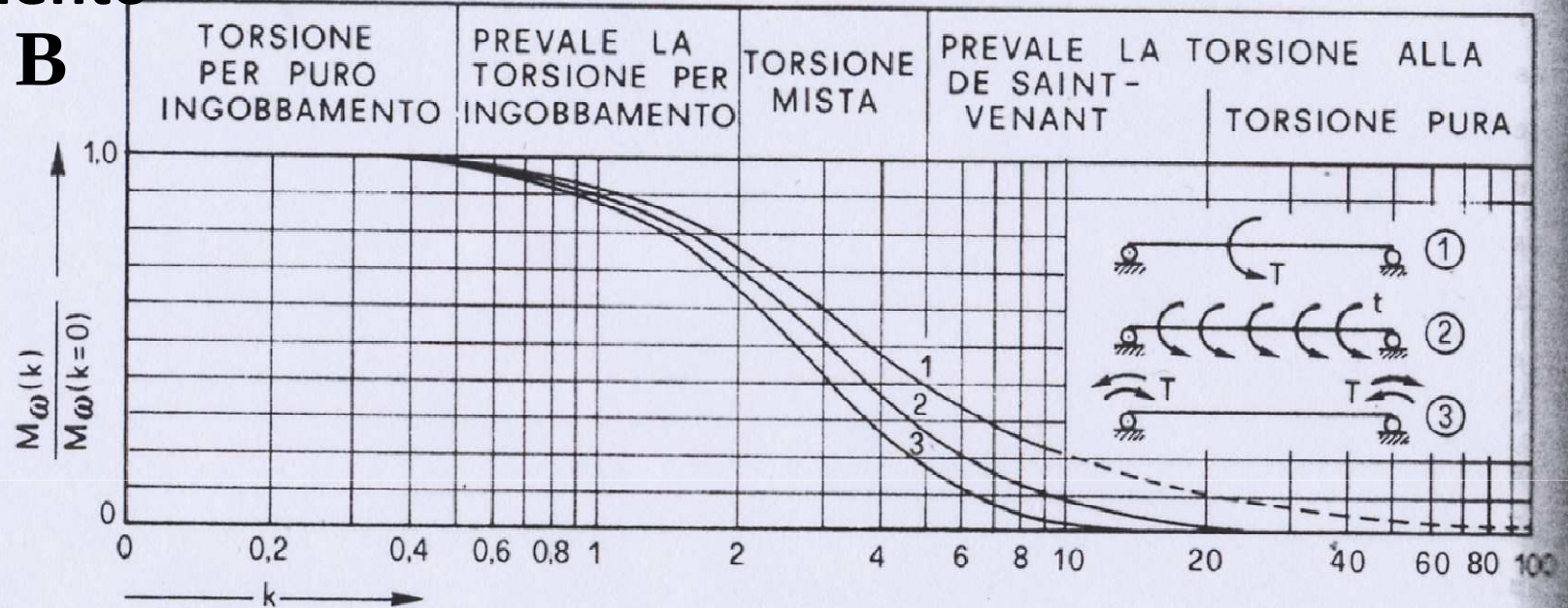
$$B = M_f h$$

Prodotto momenti di flangia per la distanza delle flange stesse

Comportamento a torsione dei profili più usati

bimomento

$$M_{\omega} = B$$



$$k = l \sqrt{\frac{GI_x}{EI}}$$

Ballio Mazzolani p 438

Carichi critici instabilità flessione-torsionale

L'instabilità flessione-torsionale è in genere descritta da equazioni differenziali complesse a coefficienti variabili

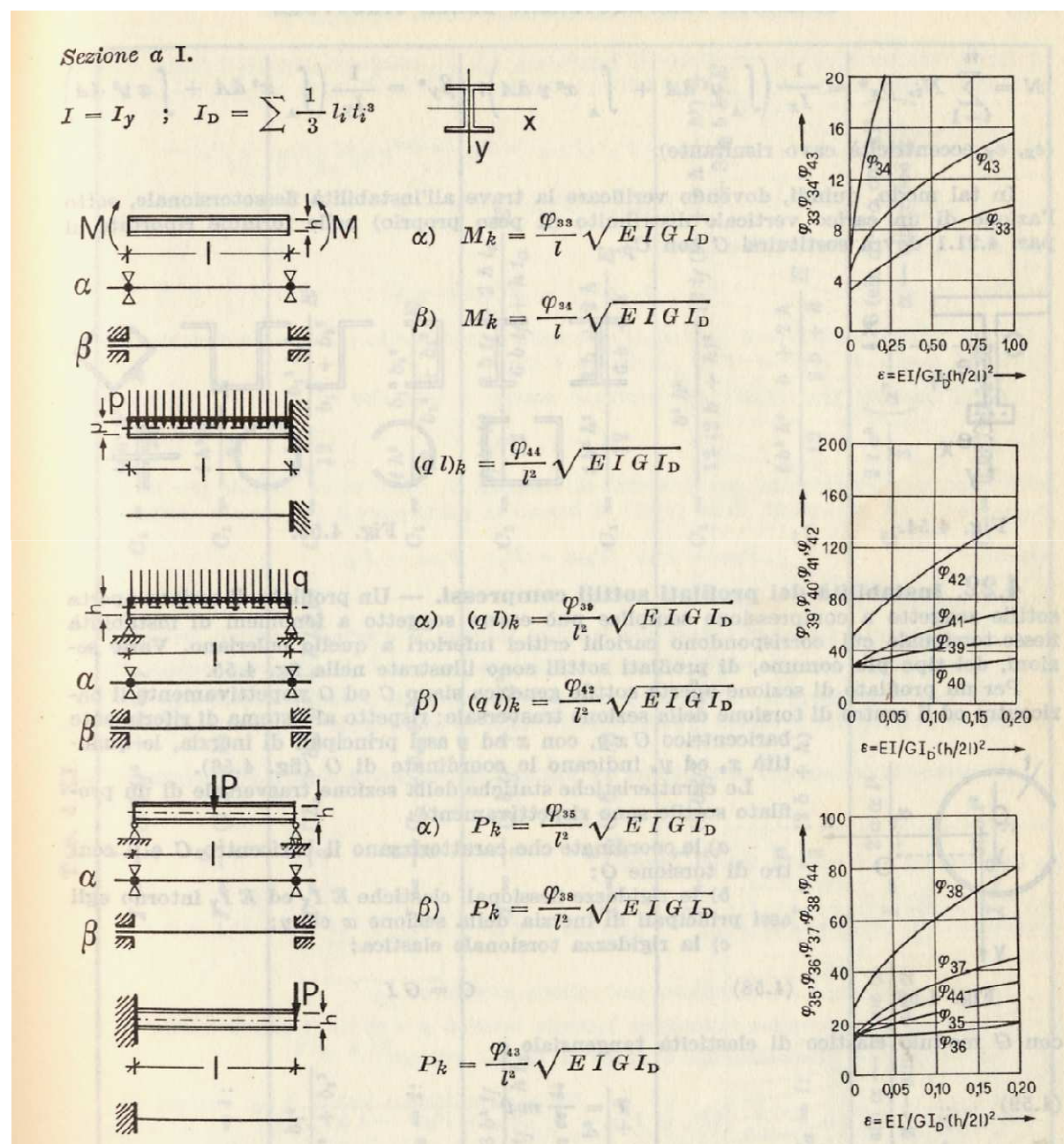
Tuttavia il momento critico può essere scritto nella forma

$$M_c = \frac{\alpha}{\ell} \sqrt{EI_y G \Gamma}$$

Dove α è una costante

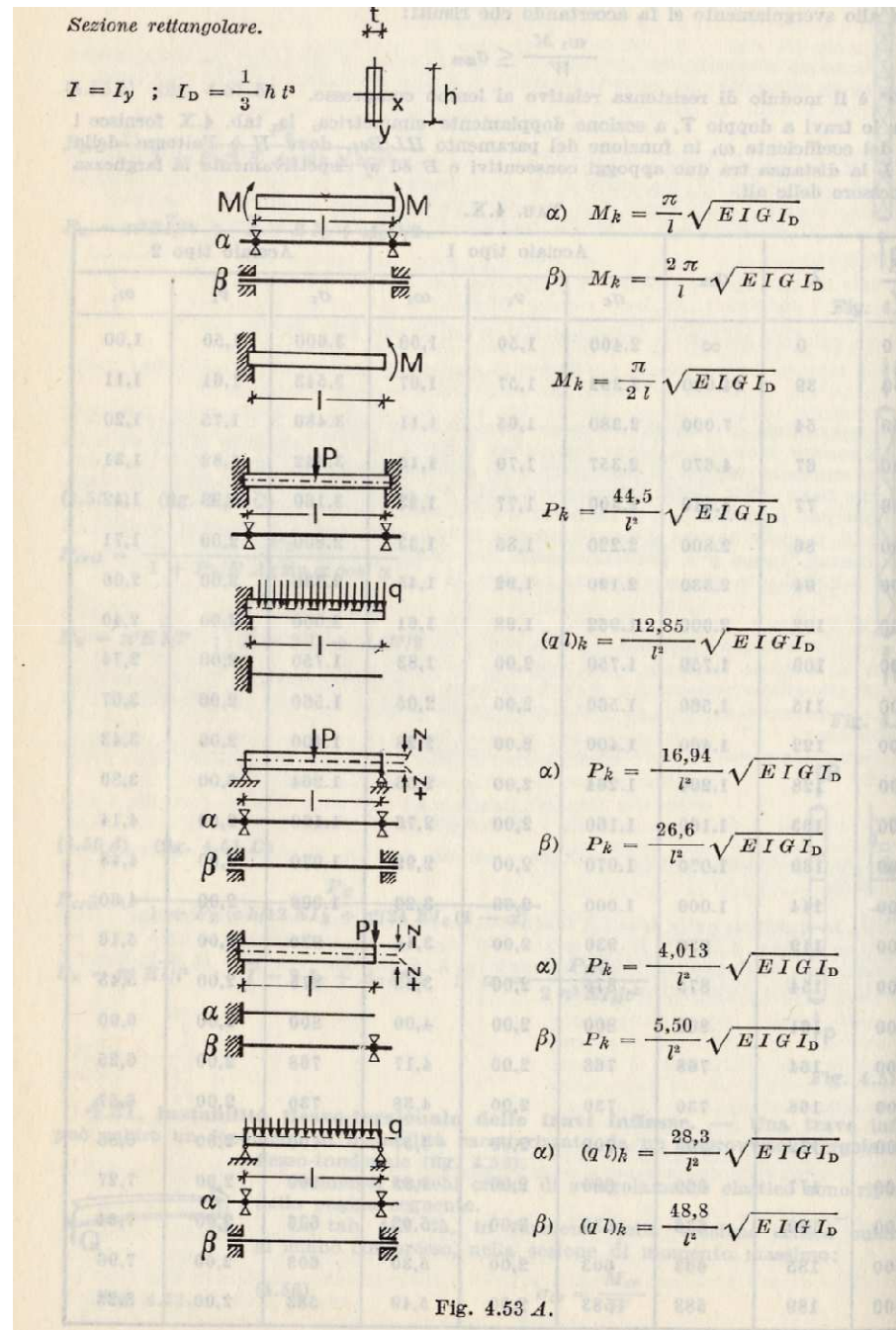
Il momento critico aumenta con l'aumentare della rigidità flessionale trasversale secondo l'asse "debole" e con la rigidità torsionale
Ciò suggerisce di adottare profili HE o profili chiusi

Carichi critici instabilità flessio-torsionale



Manuale
dell'ingegnere
civile
Capitolo
instabilità

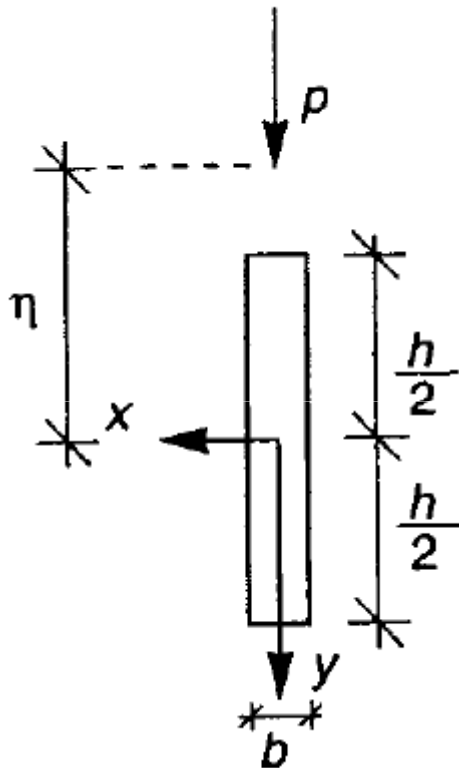
Carichi critici instabilità flessio-torsionale



Manuale
dell'ingegnere
civile
Capitolo
instabilità

Dipendenza del carico critico flessio-torsionale dal punto di applicazione del carico

Data una trave vincolata con appoggi flessio-torsionali ai due estremi con sezione rettangolare sottile, soggetta ad un carico trasversale uniforme $p = \text{costante}$ applicato ad una distanza η dal centro di taglio C coincidente col baricentro G

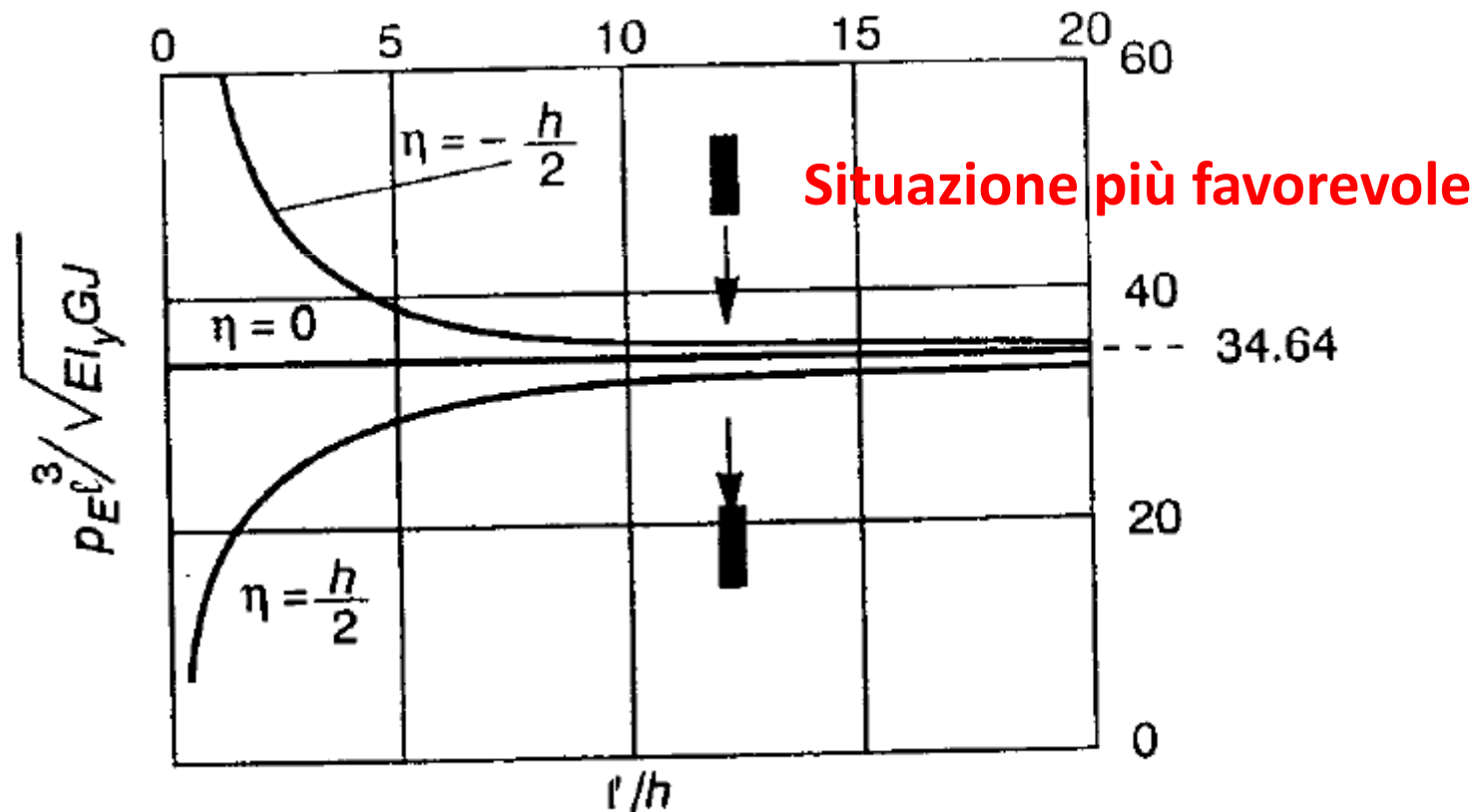


La sezione è doppiamente simmetrica, la sua EPT si scrive come

$$V_2\left(\begin{pmatrix} u \\ \vartheta \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_y u''^2 + GJ \vartheta'^2 - 2(M_x^0 \vartheta)' u' - p\eta \vartheta^2] dz$$

Dipendenza del carico critico flessio-torsionale dal punto di applicazione del carico

Si ottiene il seguente andamento per il carico critico al variare del punto di applicazione del carico



Travi a traliccio

4.15.2. VERIFICA ALL'INSTABILITÀ DEL CORRENTE COMPRESSO.

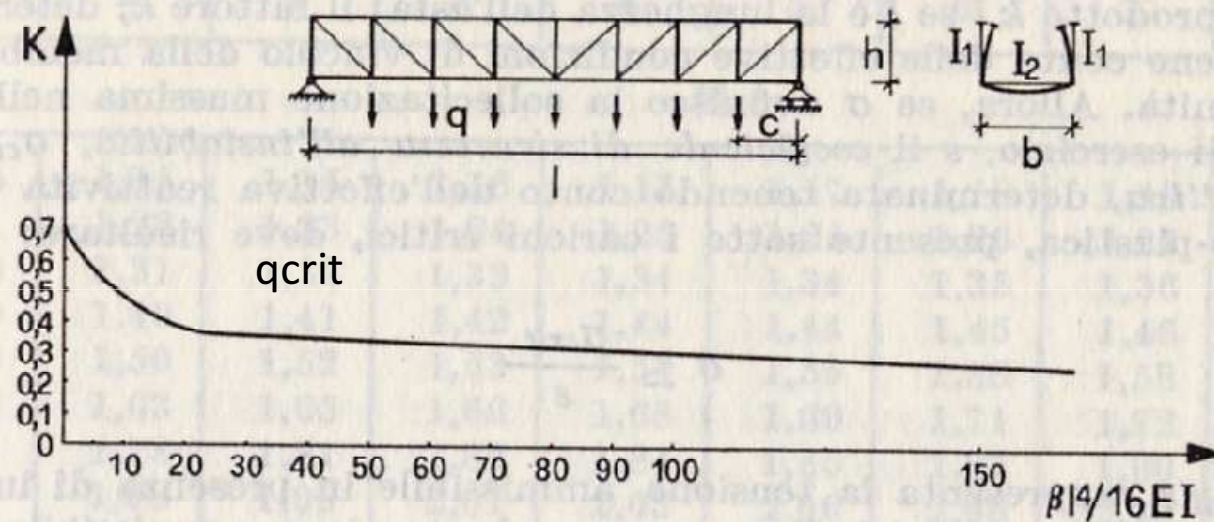


Fig. 4.43.

$$q_{crit} = \frac{8 h}{l^2} \frac{\pi^2 EI}{(k l)^2} ; \quad \beta = \frac{R_0}{c} ; \quad R_0 = \frac{6 E/h^2}{2 h/J_1 + 3 b/I_2} .$$

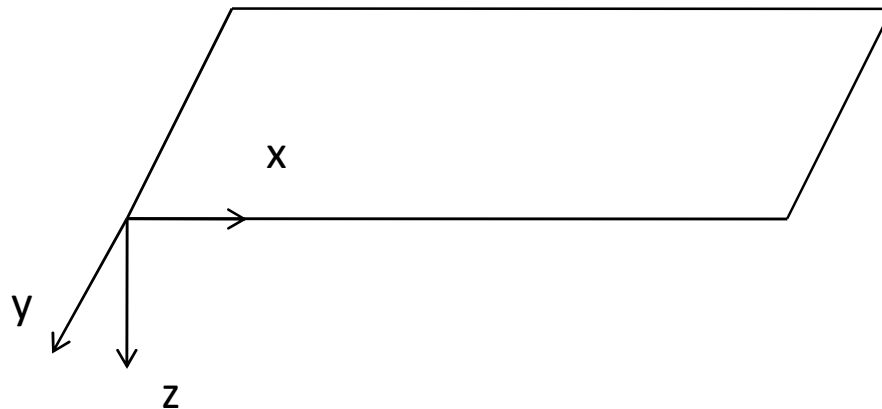
Instabilità di lastre piane

LC II vol

Equazione di equilibrio di Sophie Germain-Lagrange per le piastre sottili in configurazione fondamentale

$$\nabla^4 \mathbf{w} = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{D}} \leftrightarrow \frac{\partial^4 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}^4} + \frac{\partial^4 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}^4} + 2 \frac{\partial^4 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}^2 \partial \mathbf{y}^2} = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{D}}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E} \mathbf{s}^3}{12(1 - \nu^2)}$$



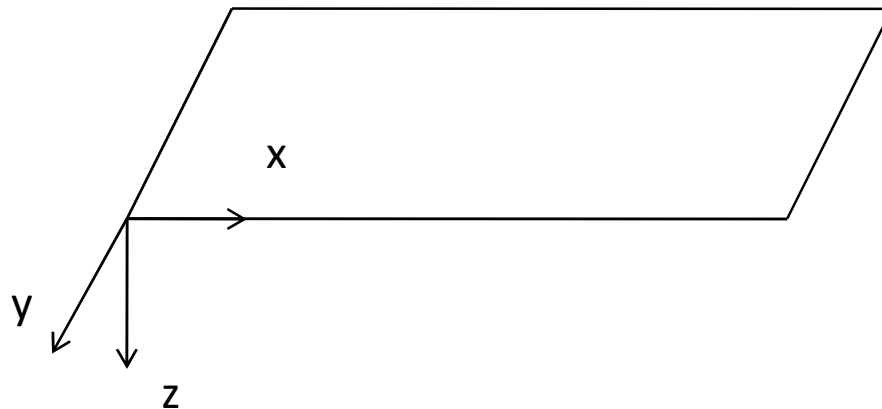
Instabilità di lastre piane

LC II vol

Equazione di equilibrio di Von Karman in configurazione variata si scrive

$$\mathbf{D} \nabla^4 \mathbf{w} = \mathbf{N}_x^0 \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2} + \mathbf{N}_y^0 \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial y^2} + 2\mathbf{N}_{xy}^0 \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x \partial y}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E} s^3}{12(1 - \nu^2)}$$



Instabilità di lastre piane

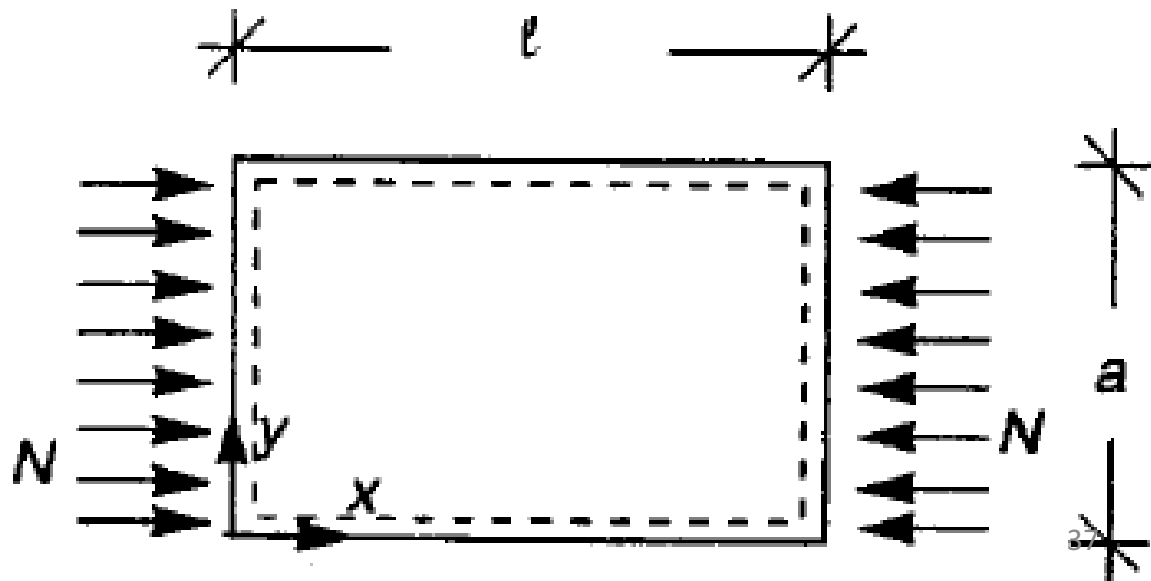
LC II vol

Caso della trave appoggiata e compressa uniformemente

$$N_x^0 = -N, \quad N_y^0 = 0, \quad N_{xy}^0 = 0 \Rightarrow D \nabla^4 w = N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$D \nabla^4 w = N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$D = \frac{Es^3}{12(1-\nu^2)}$$



Instabilità di lastre piane

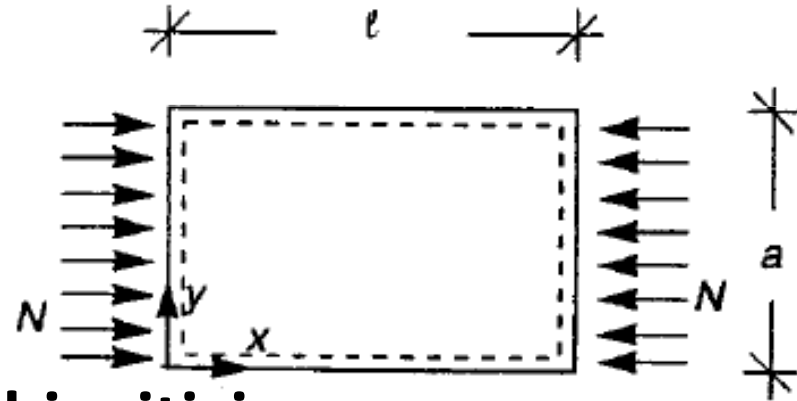
La soluzione dell'equazione di equilibrio si cerca con il metodo di Ritz espandendo w in serie di Fourier

$$w(x, y) = W_{nm} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi y}{a}$$

↓

$$D \nabla^4 w = N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

↓



Si ottengono i seguenti carichi critici

$$N_{nm} = D \frac{\pi^2 \ell^2}{n^2} \left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{a^2} \right)$$

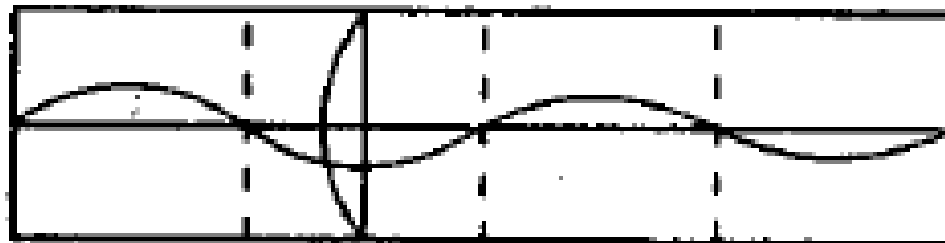
Instabilità di lastre piane

Il più piccolo carico critico si ottiene per $m=1$ ed è pari a

$$N_E = K\pi^2 \frac{D}{a^2} \quad \text{con} \quad K = \min_n K_n, \quad K_n = \left(n \frac{a}{\ell} + \frac{1}{n} \frac{\ell}{a} \right)^2$$

Cui corrisponde la deformata critica che presenta n semionde in direzione carico ed una semionda in direzione normale

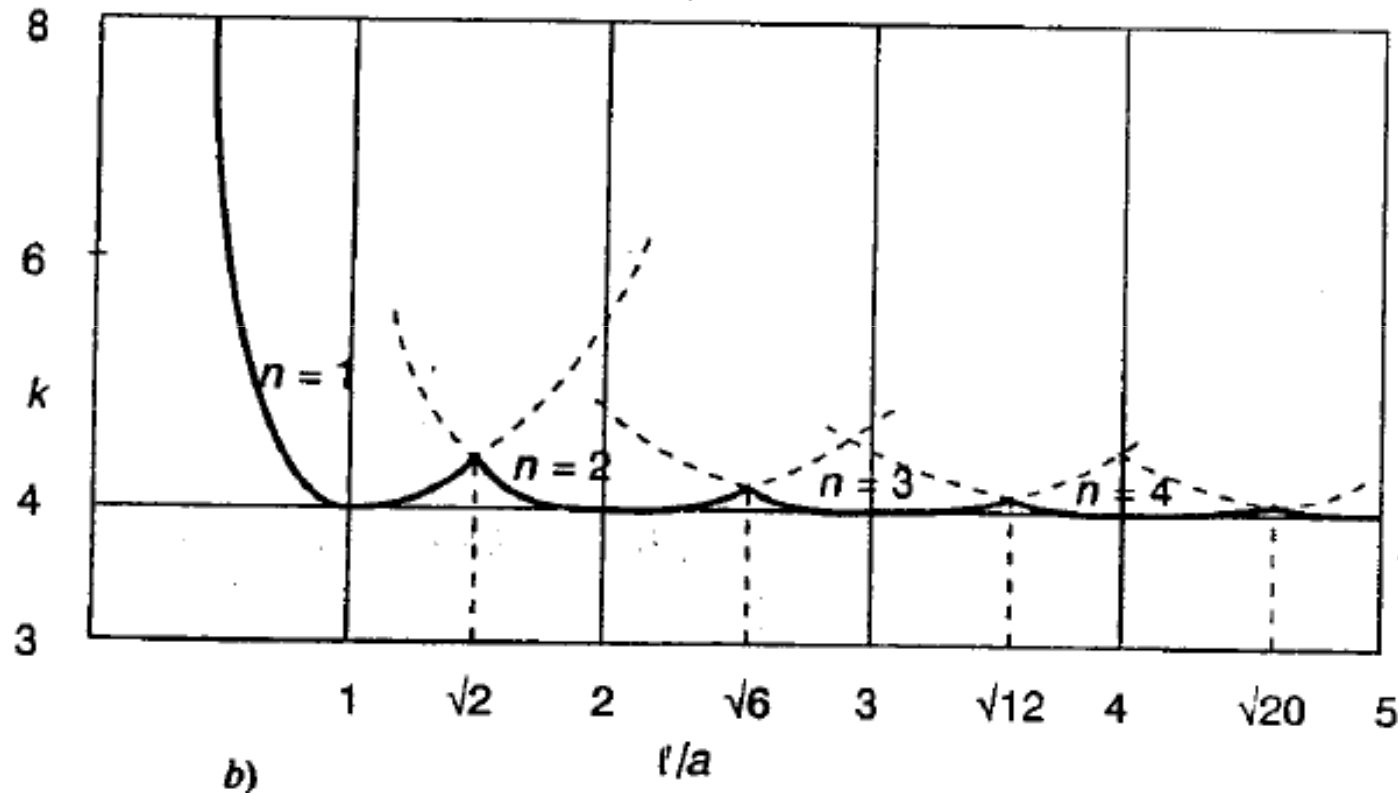
$$w_E(x, y) = W_{n1} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{\pi y}{a}$$



Instabilità di lastre piane

Diagramma che rappresenta K al variare di ℓ/a

$$K = \min_n K_n, \quad K_n = \left(n \frac{a}{\ell} + \frac{1}{n} \frac{\ell}{a} \right)^2$$



Difatto si assume $K=4$
valore cui tende per $\ell/a \gg$

$$N_E \simeq 4\pi^2 \frac{D}{a^2} \quad \text{per} \quad \ell \geq a$$

Esempi di instabilità flessio-torsionale

The following photo shows local buckling of the compression flange



Esempi di instabilità flessio-torsionale

The following photo shows local buckling of the compression flange

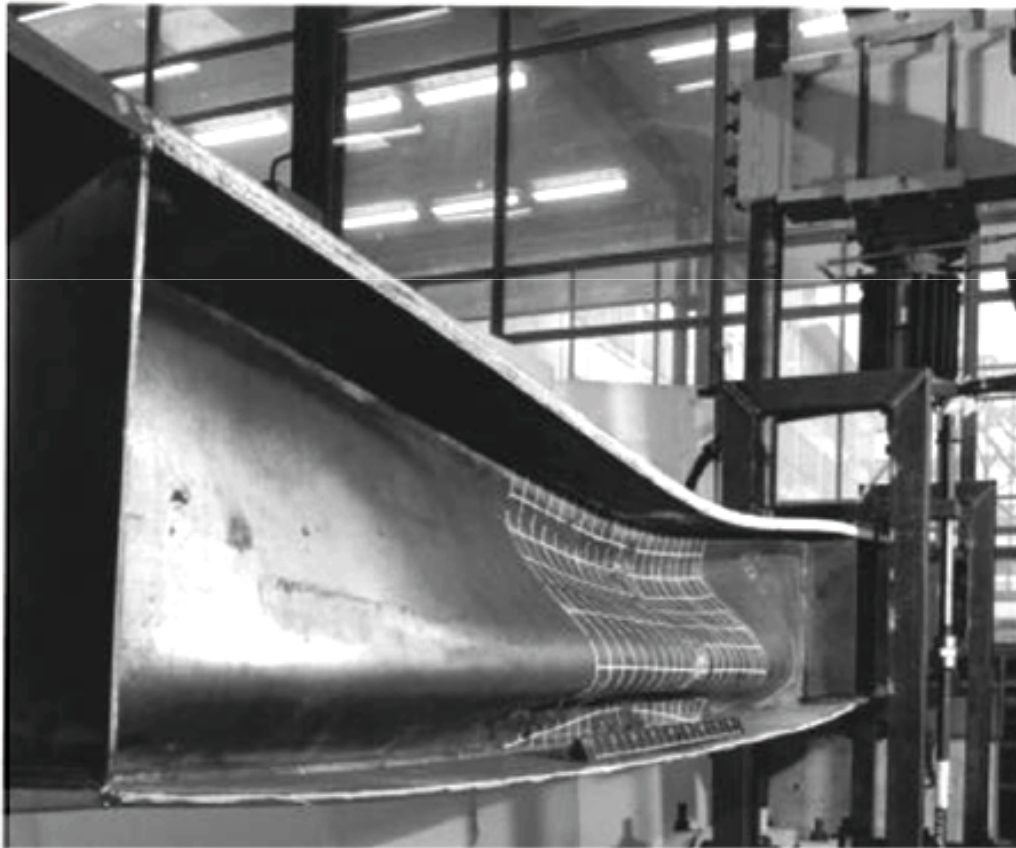
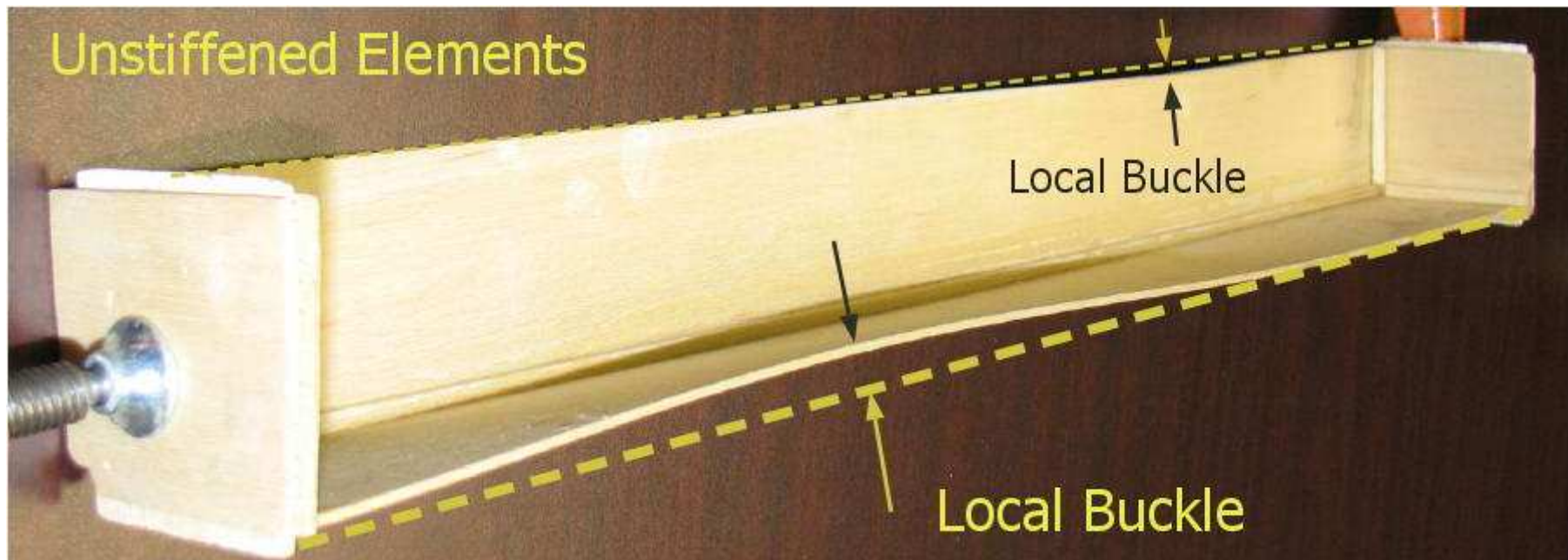


Figure 2. Vertical web buckling.

Esempi di instabilità flessio-torsionale

The following photo shows local buckling of the compression flange



Esempi di instabilità flessio-torsionale

La trave da ponte crolla in fase di costruzione a causa della mancanza della soletta di cls di copertura che le conferisce rigidità torsionale in fase di esercizio



Esempi di instabilità flessio-torsionale

La trave da ponte crolla in fase di costruzione a causa della mancanza della soletta di cls di copertura che le conferisce rigidità torsionale in fase di esercizio

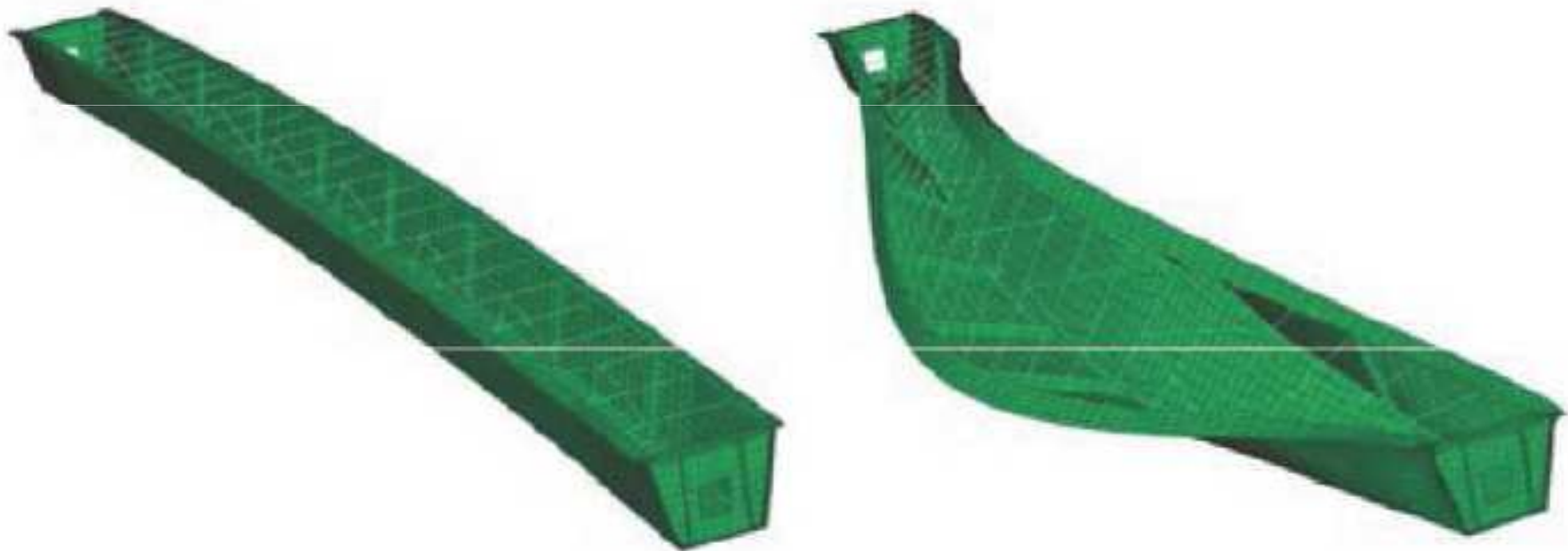


Figure 5: Finite element model of the Marcy Pedestrian Bridge showing the undeformed shape and the global lateral-torsional buckling mode.

Esempi di instabilità flessio-torsionale

The following photo shows local buckling

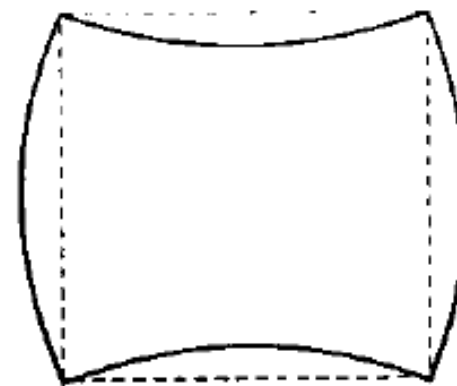
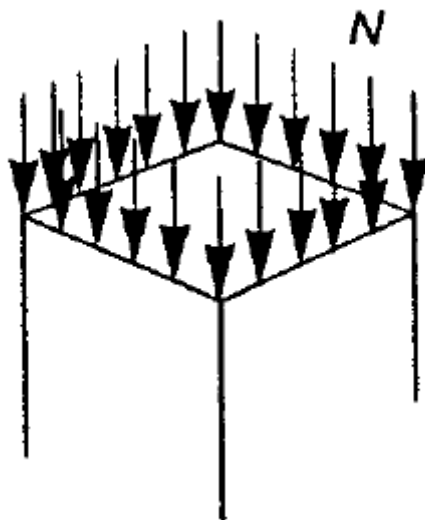
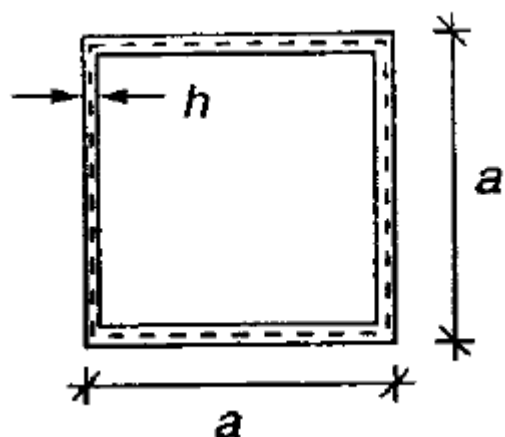


Instabilità locale e globale di lastre piane

Le pareti di profili sia chiusi che aperti sono lastre molto allungate

Se tali lastre sono sottili possono instabilizzarsi dando luogo ad imbozzamenti che possono interessare zone più o meno estese

Si tratta di instabilità locale che può precedere sia l'instabilità della trave nel suo complesso che il raggiungimento del limite elastico del materiale



Instabilità locale e globale di lastre piane

Prendiamo la trave lunga ℓ in figura supposta uniformemente compressa

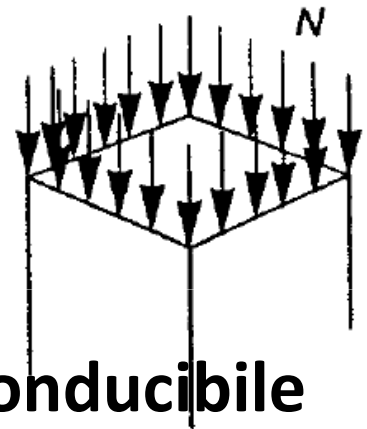
il carico critico euleriano globale della trave è $P_E = \pi^2 EI / \ell$ cui corrisponde la tensione

$$\sigma_E^G = \frac{P_E}{A} = \frac{1}{6} \pi^2 E \left(\frac{a}{\ell} \right)^2$$

Tuttavia il carico si ripartisce su ciascuna parete componente la trave e dunque il problema è riconducibile a quello della lastra appoggiata

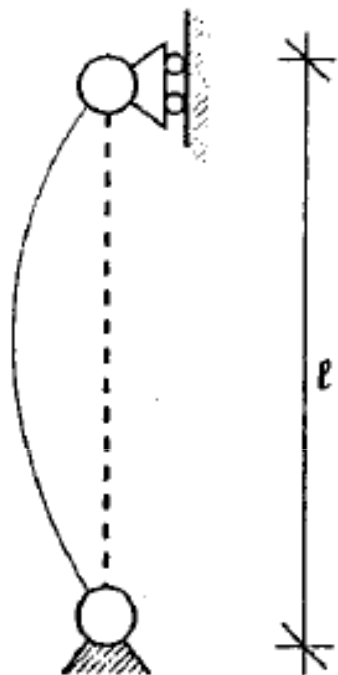
→ La tensione corrispondente al carico critico locale si scrive come

$$\sigma_E^L = \frac{N_E}{h} = \frac{1}{3} \pi^2 \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h}{a} \right)^2$$



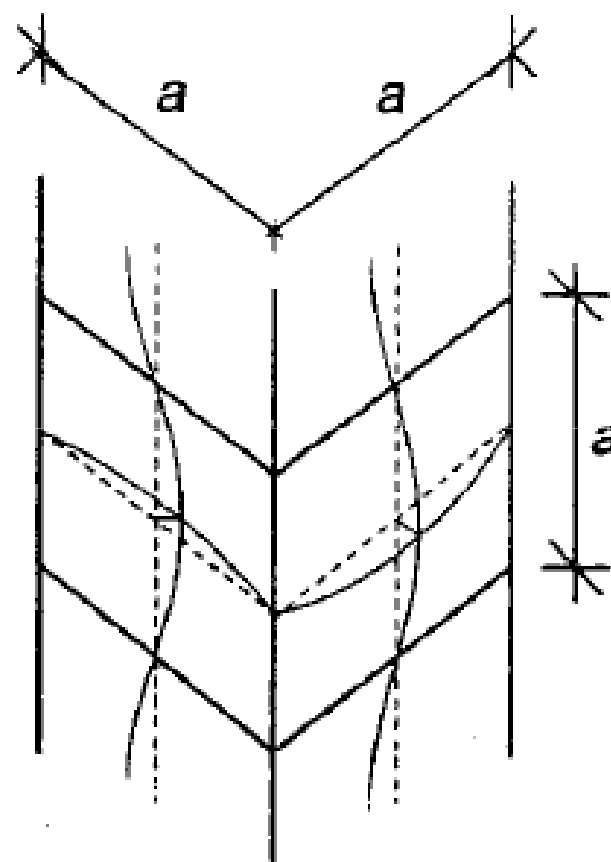
Instabilità locale e globale di lastre piane

Globale



$$\sigma_E^G = \frac{P_E}{A} = \frac{1}{6} \pi^2 E \left(\frac{a}{\ell} \right)^2$$

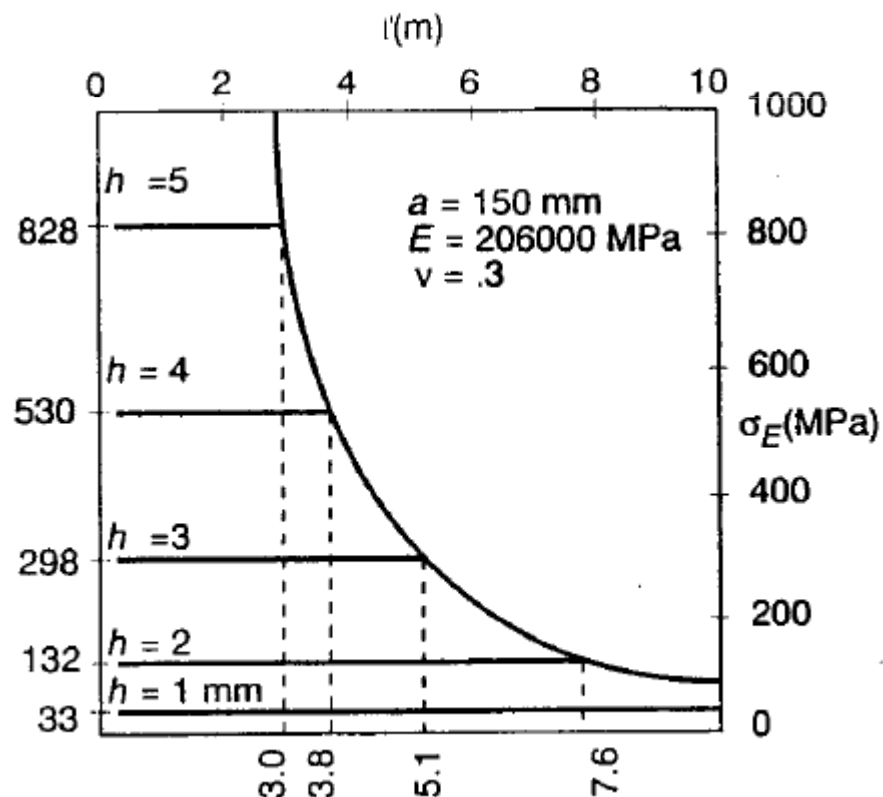
Locale



$$\sigma_E^L = \frac{N_E}{h} = \frac{1}{3} \pi^2 \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h}{a} \right)^2$$

Instabilità locale di lastre piane

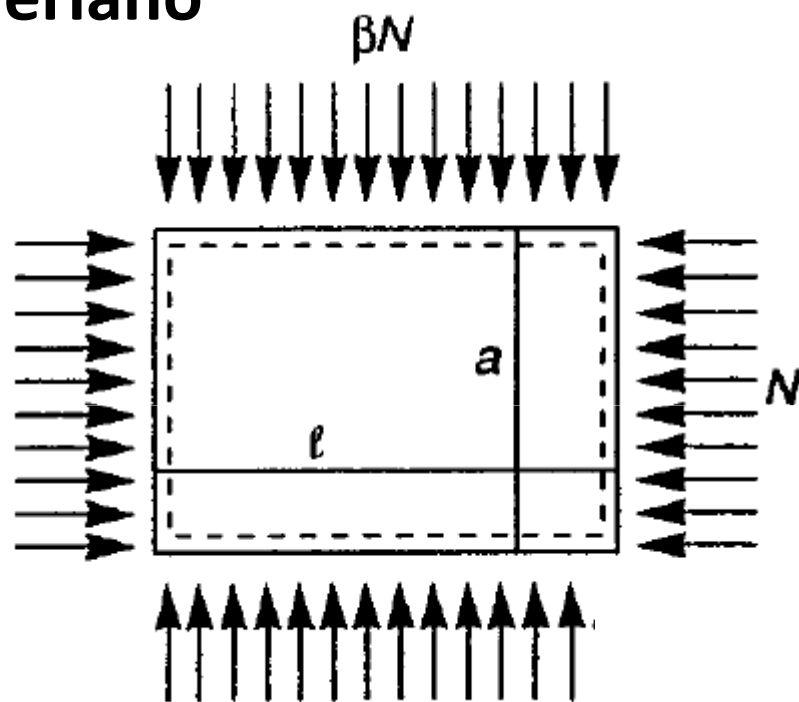
$$\sigma_E = \begin{cases} \sigma_E^L & \text{se } \frac{l}{a} \leq \sqrt{\frac{1-\nu^2}{2}} \frac{a}{h} & \text{(instabilità locale)} \\ \sigma_E^G & \text{se } \frac{l}{a} \geq \sqrt{\frac{1-\nu^2}{2}} \frac{a}{h} & \text{(instabilità globale)} \end{cases}$$



Il carico critico euleriano per unità di area sarà dunque il minimo tra i due carichi critici globale e locale

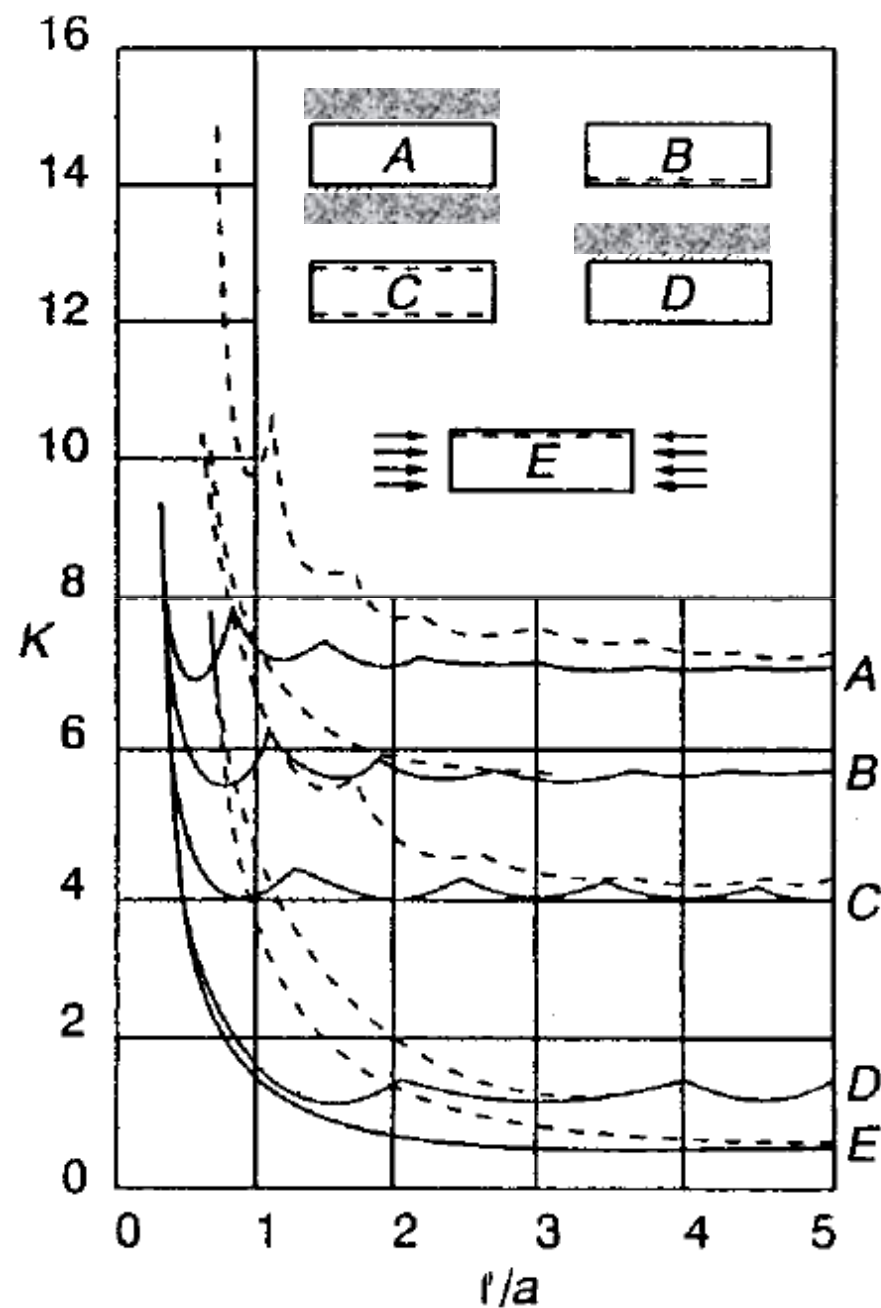
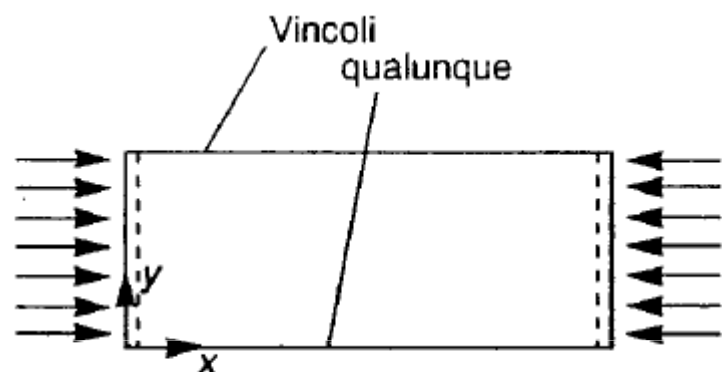
Lastra compressa secondo 2 direzioni ortogonali

Operando come in precedenza si ottiene il carico critico Euleriano



$$N_E = \min_{n, m} \pi^2 D \frac{\left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{a^2} \right)^2}{\left(\frac{n^2}{\ell^2} + \beta \frac{m^2}{a^2} \right)}$$

Influenza delle condizioni di vincolo

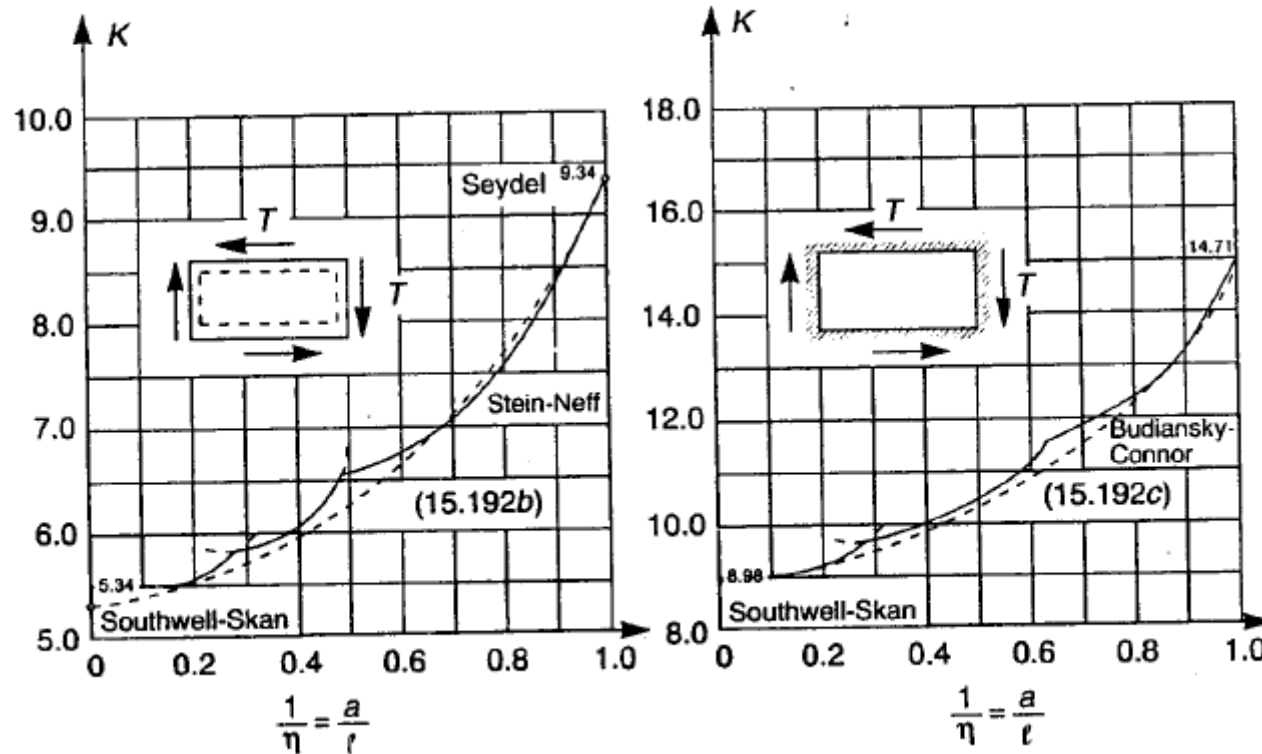


Lastre soggette ad azioni taglienti

Valore del taglio critico

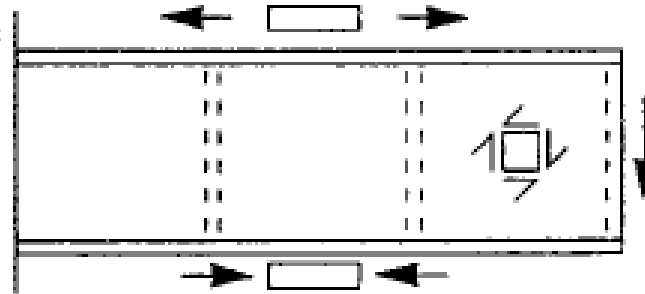
$$T_E = \pm K \pi^2 \frac{D}{a^2}$$

Dove K si determina dai diagrammi sotto riportati

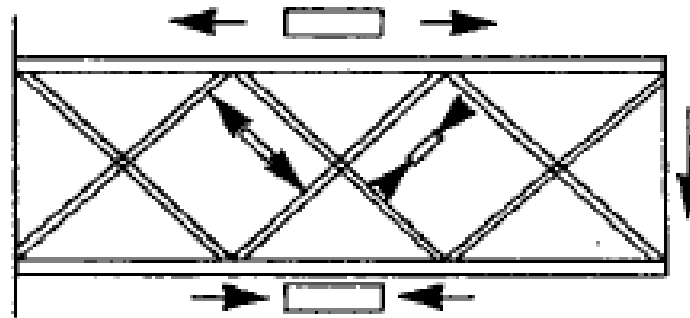


Pannelli irrigiditi

In assenza di irrigidimenti la lastra non è in grado di assorbire il carico dopo l'imbozzamento



Con gli irrigidimenti la lastra è in grado di assorbire il carico dopo l'imbozzamento aumentano le risorse post-critiche

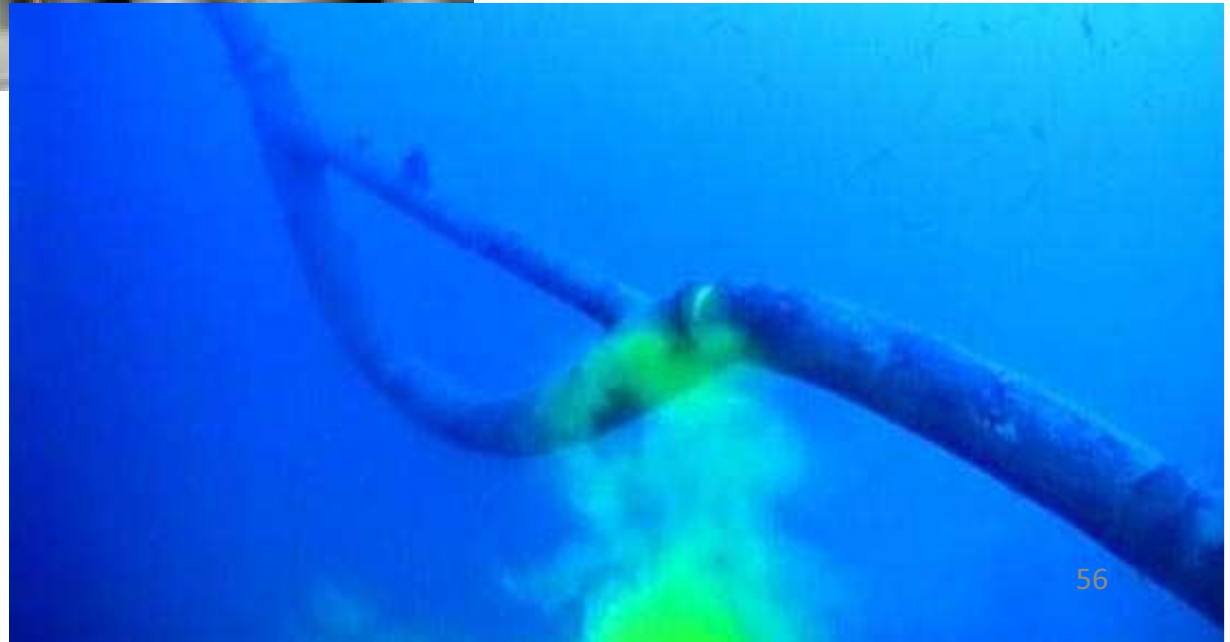


Lateral buckling of a cantilever

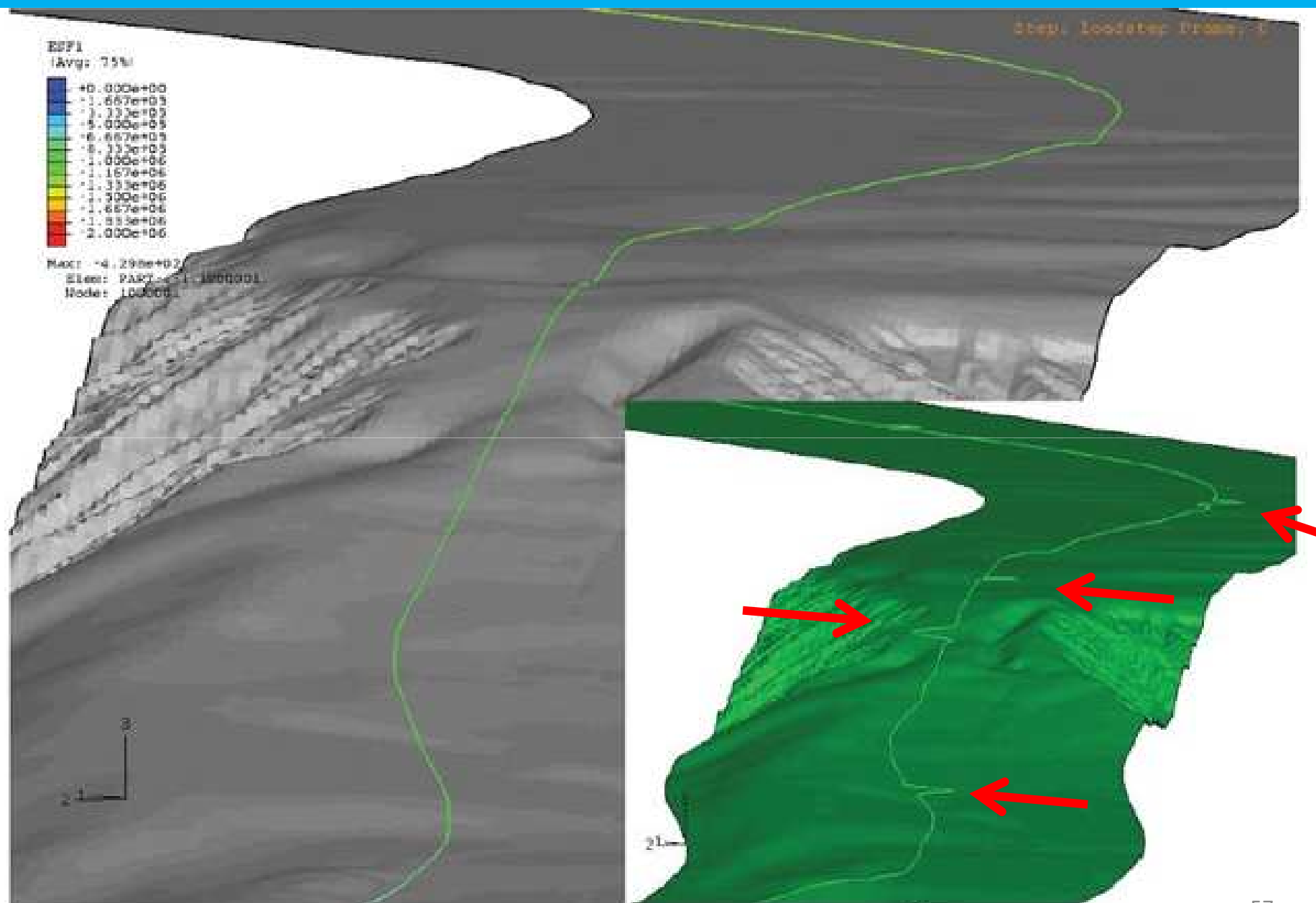
Additional supports provided to prevent lateral torsional buckling through reducing the beam length



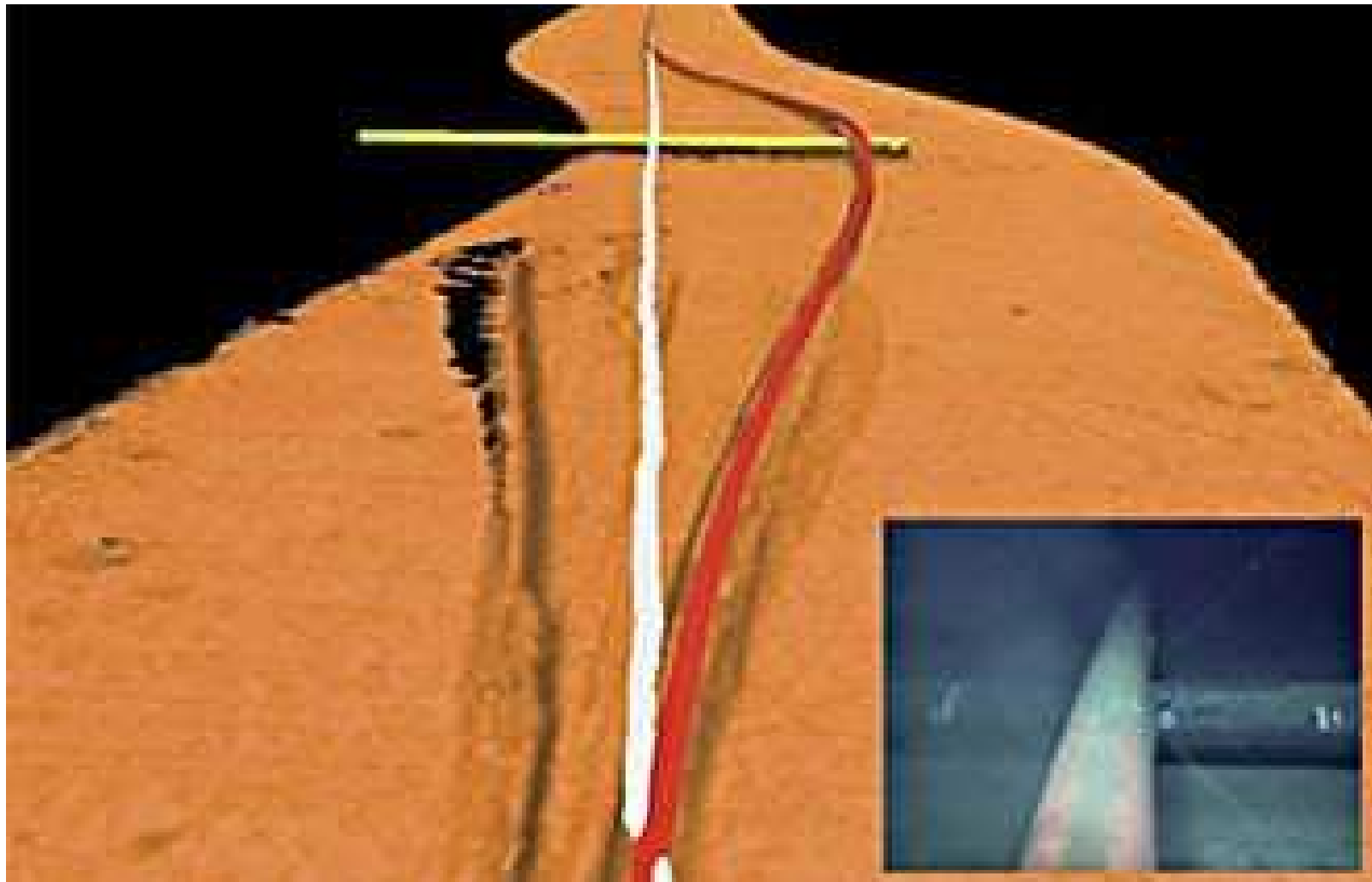
Cilindri cavi inflessi: Ovalizzazione dei tubi



Cilindri cavi inflessi: Ovalizzazione dei tubi



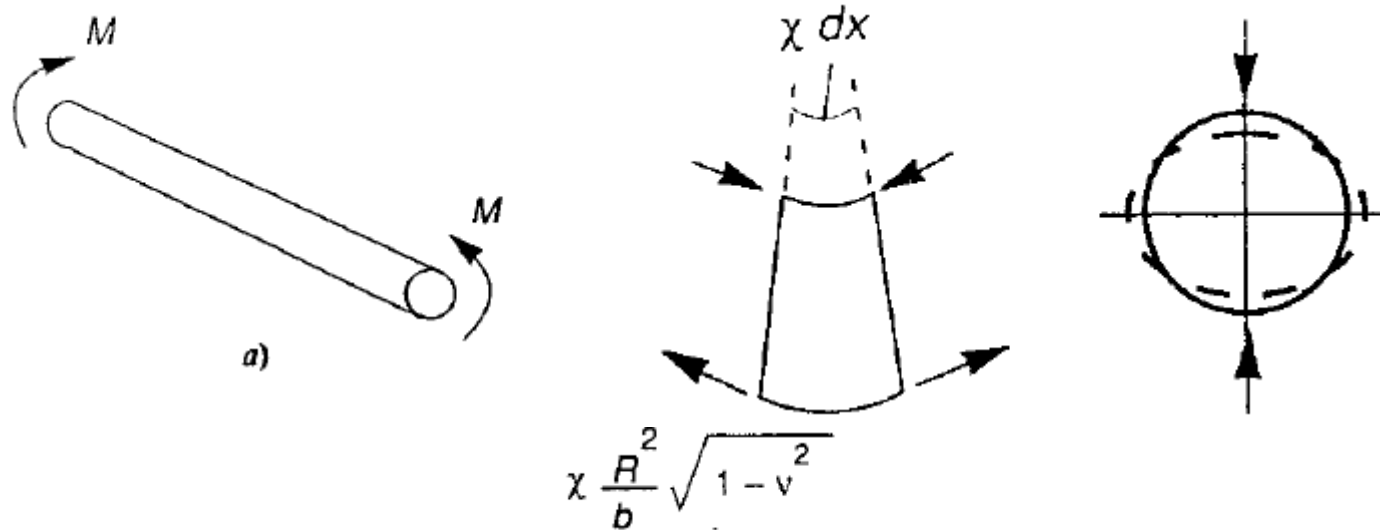
Cilindri cavi inflessi: Ovalizzazione dei tubi



Cilindri cavi inflessi: Ovalizzazione dei tubi

LC III p 396

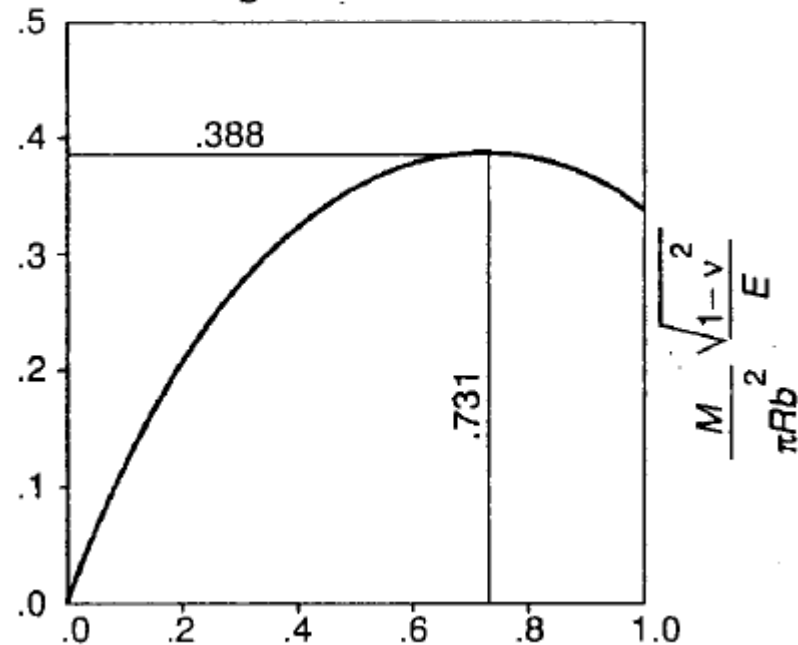
Effetto
Brazier



Relazione momento
curvatura

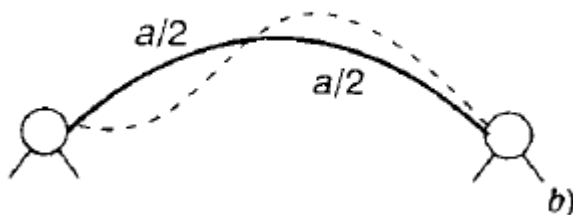
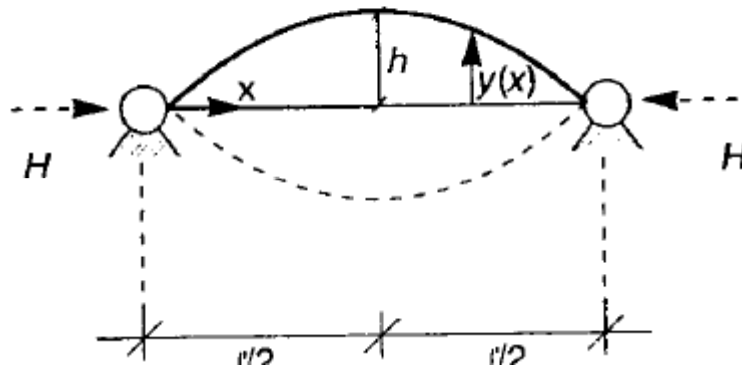
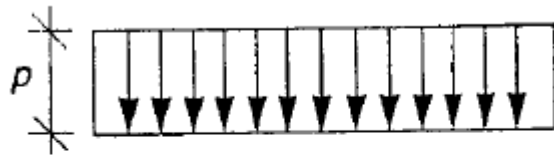


In corrispondenza del
picco si ha
l'ovalizzazione
Ovvero instabilità a
scatto



Instabilità di archi ribassati : arco incernierato

Esempi di problemi non Euleriani

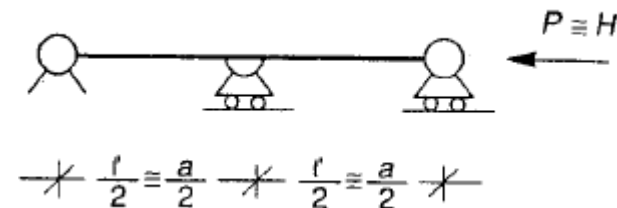


Instabilità Euleriana si manifesta per inflessione inestensionale secondo la deformata critica antisimmetrica

Il valore H_E della reazione orizzontale del vincolo per cui si instabilizza è

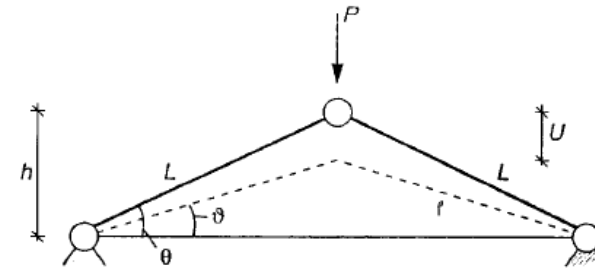
$$H_E \cong 4\pi^2 \frac{EI}{\ell^2}$$

Ottenuto per analogia con un'asta incernierata



Instabilità di archi ribassati : arco incernierato

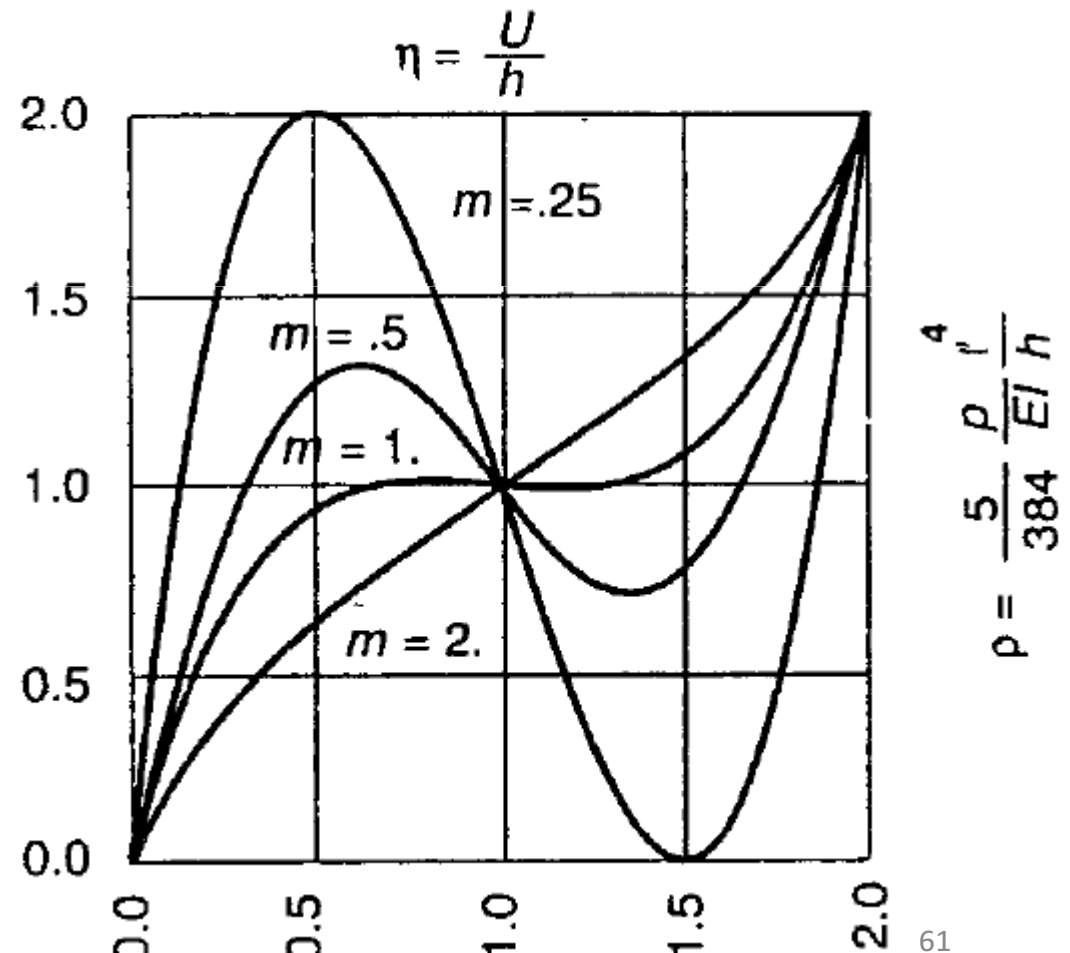
Un'analisi non lineare mostra un'instabilità a scatto (snap through) simile a quella dell'arco a 3 cerniere



Il comportamento dell'arco può essere descritto per mezzo della relazione tra lo spostamento U in mezzeria e il carico p

$$q = \frac{5}{384} \frac{p l^4}{E I h}$$

$$m = 4 \frac{I}{h^2 A}$$

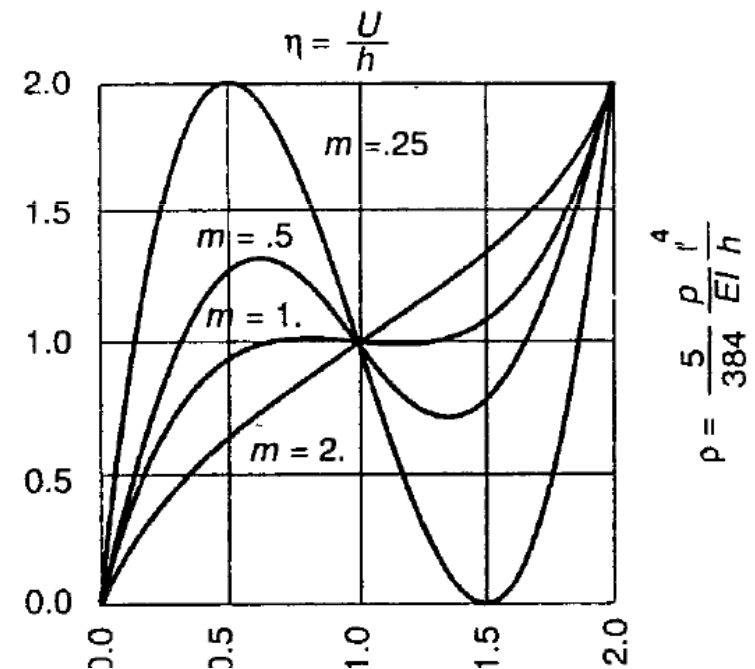


Instabilità di archi ribassati : arco incernierato

a) $m < 0.182$ evento critico è la biforcazione,
che si verifica per $H_E \cong 4\pi^2 \frac{EI}{\ell^2}$
occorre un'analisi non lineare

b) $0.182 \leq m < 1$ collasso avviene per
instabilità a scatto

c) $m \geq 1$ la transizione a configurazioni
rovesciate avviene con continuità e la
capacità portante è dettata dal limite di
deformabilità tollerabile



Instabilità di membrane e gusci

Initial post-buckling deflection pattern of cylindrical shell

