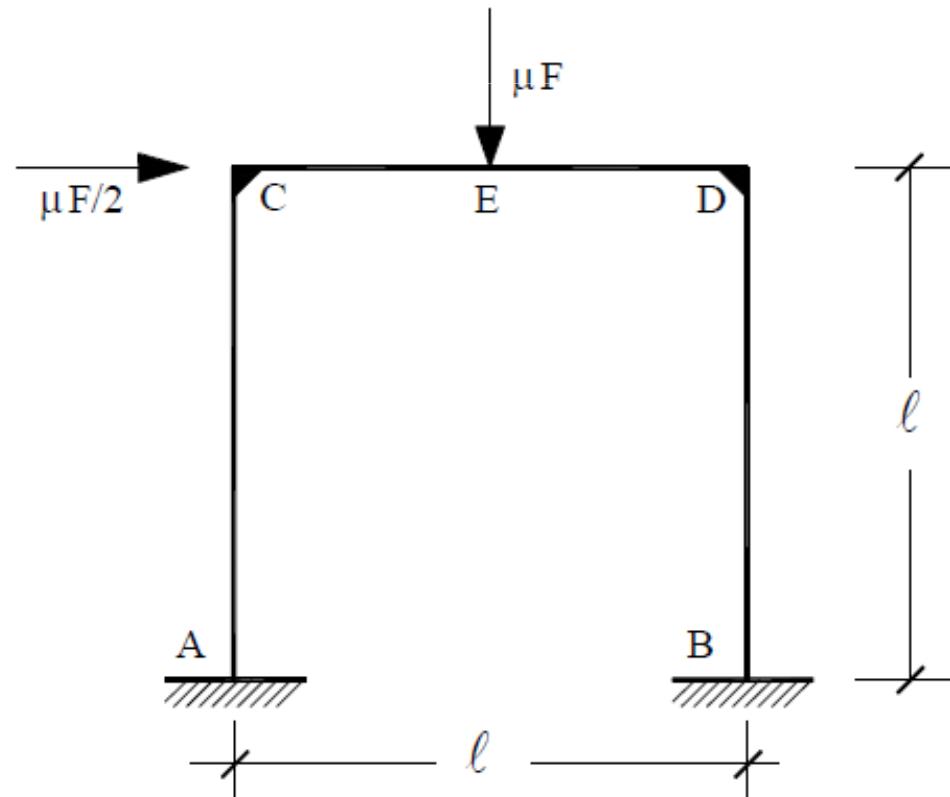


# Analisi limite di un telaio

Si consideri il portale sotto, tre volte iperstatico, dotato di un momento limite superiore ed inferiore costante e pari a  $M_0$

Si assuma inoltre che lo sforzo normale (ed il taglio) non influenzino la condizione di ammissibilità plastica delle cerniere



## Analisi limite di un telaio: Teorema cinematico

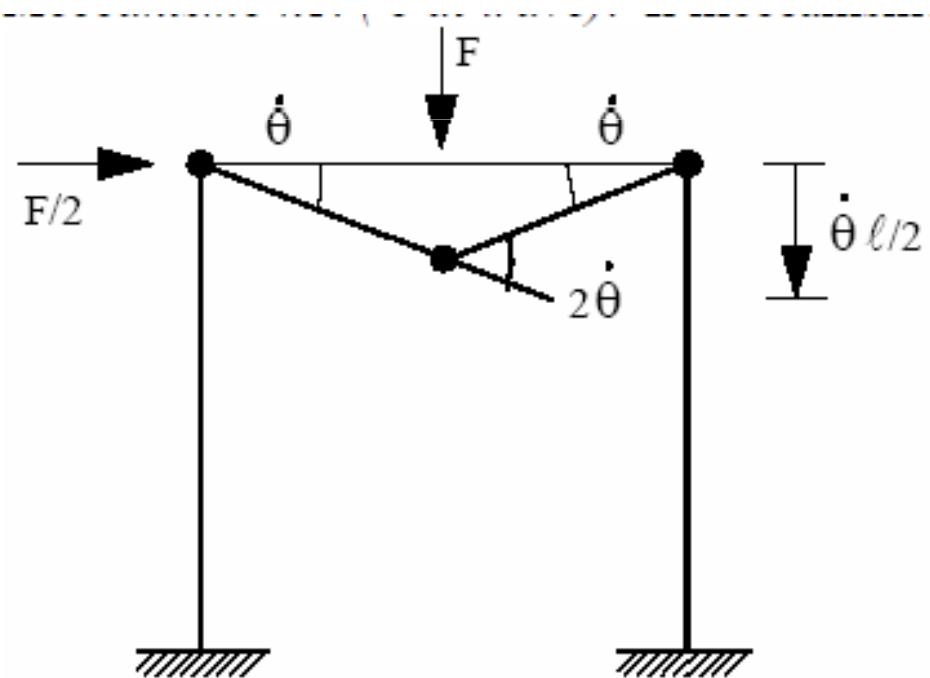
Si considerano i possibili cinematismi ipotizzando la collocazione delle cerniere plastiche nelle sezioni di applicazione dei carichi concentrati, nei vincoli e nei nodi.

**Meccanismo n1. (o di trave). Il meccanismo che coinvolge tre sole cerniere è di tipo locale.**

$$\dot{W}_{01,\text{ext}} = F\dot{\theta}\frac{\ell}{2}$$

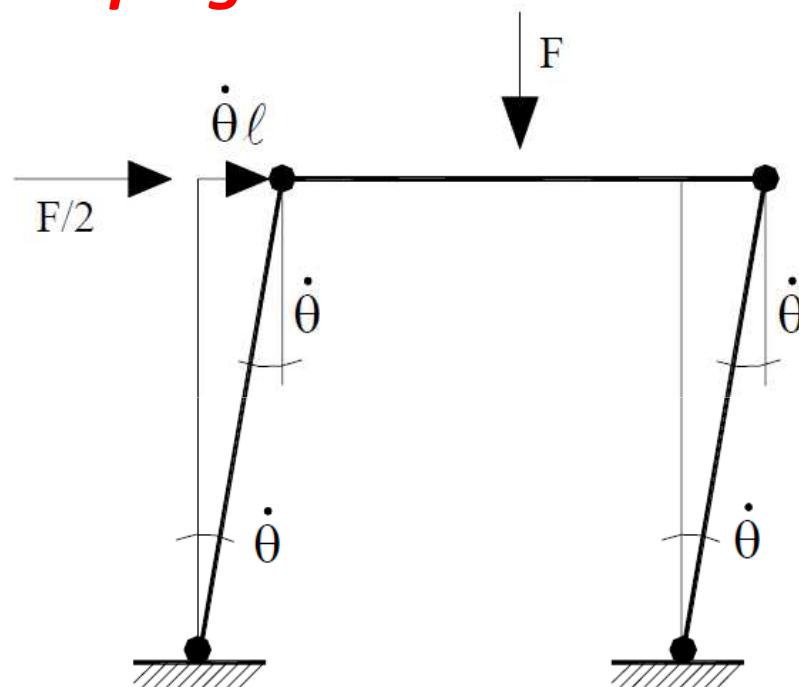
$$D_{1,\text{int}} = 4M\dot{\theta}$$

$$\mu_1 = \frac{D_{1,\text{int}}}{\dot{W}_{01,\text{ext}}} = \frac{8M_0}{F\ell}$$



# Analisi limite di un telaio: Teorema cinematico

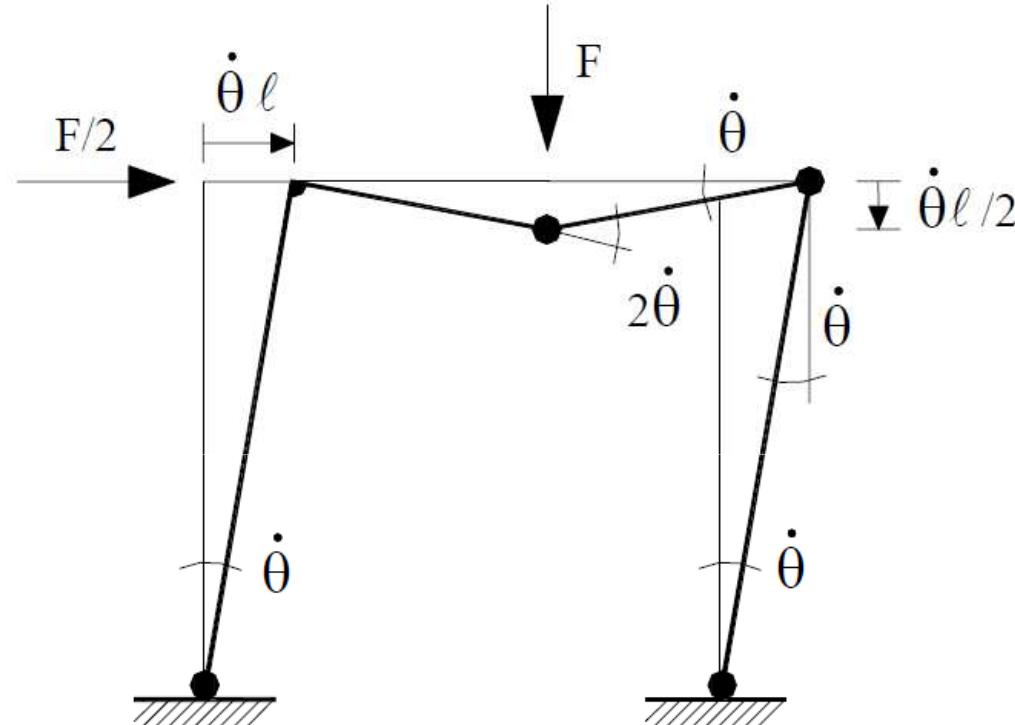
**Meccanismo n 2. (o di parete). Il meccanismo coinvolge 4 cerniere ed è di tipo globale**



$$\dot{W}_{02,\text{ext}} = \frac{F}{2} \dot{\theta}_\ell, \quad D_{2,\text{int}} = 4M\dot{\theta}, \quad \mu_2 = \frac{D_{2,\text{int}}}{\dot{W}_{02,\text{ext}}} = \frac{8M_0}{F\ell}$$

# Analisi limite di un telaio: Teorema cinematico

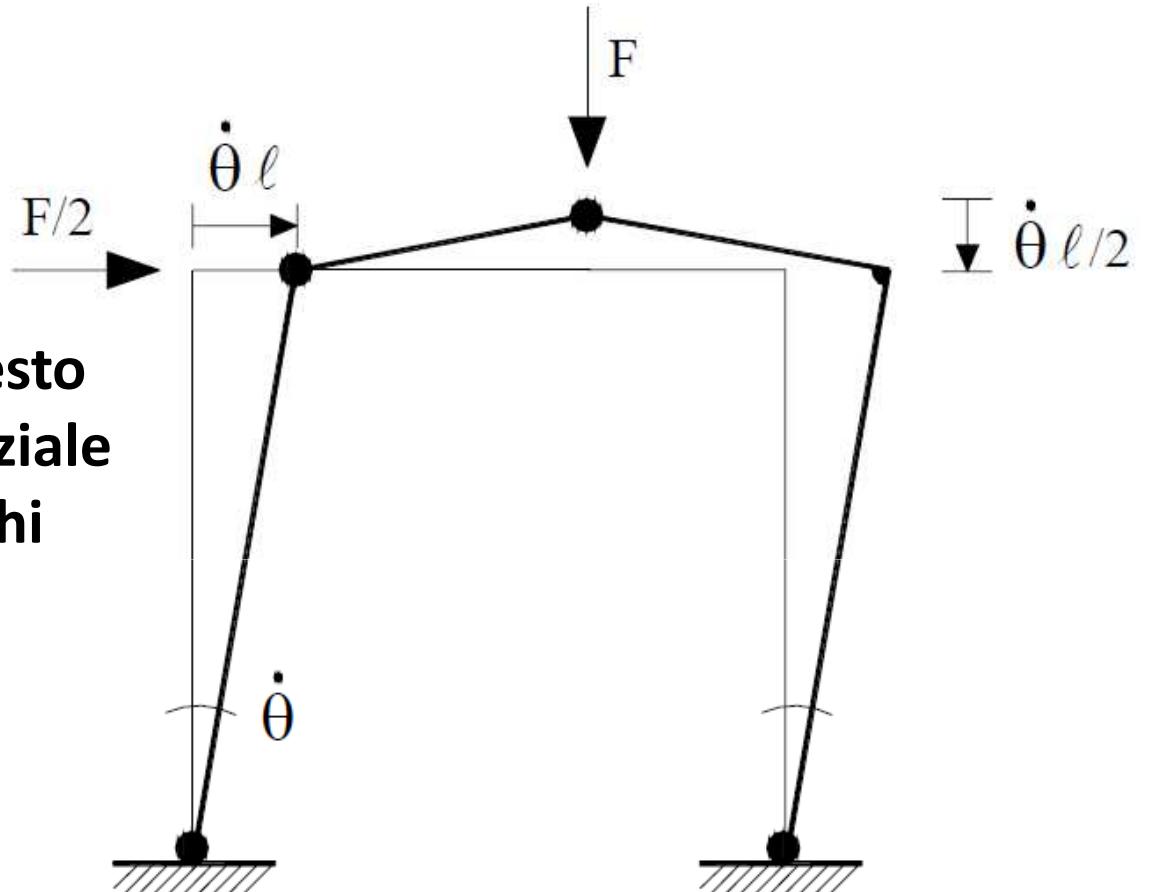
**Meccanismo n 3 (o composto).**



$$\dot{W}_{03,\text{ext}} = \frac{F}{2}\dot{\theta}\ell + \frac{F}{2}\dot{\theta}\ell = F\dot{\theta}\ell, \quad D_{3,\text{int}} = 6M\dot{\theta}, \quad \mu_3 = \frac{D_{3,\text{int}}}{\dot{W}_{03,\text{ext}}} = \frac{6M_0}{F\ell}$$

# Analisi limite di un telaio: Teorema cinematico

## ***Meccanismo n 4***



**Un cinematismo come questo non rappresenta un potenziale meccanismo perché i carichi esterni non esplicano una potenza esterna positiva**

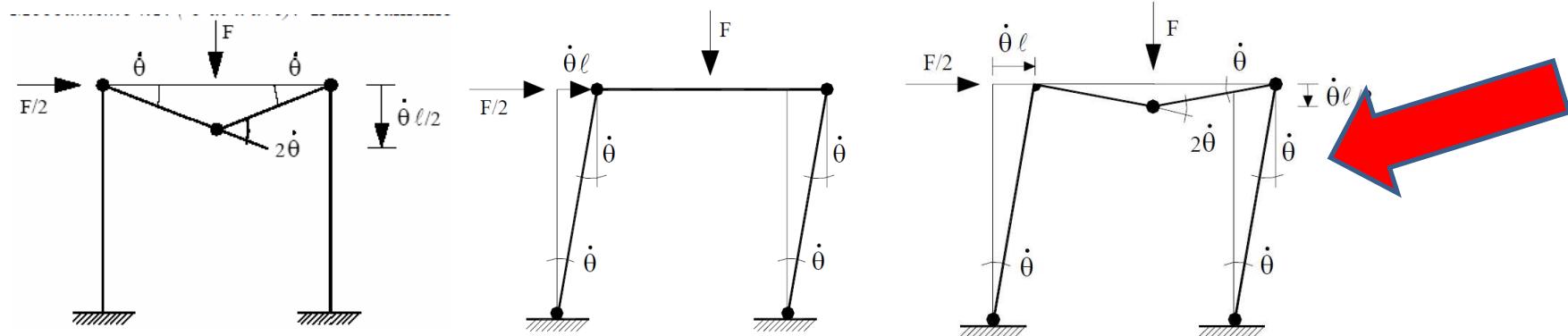
$$\dot{W}_{04,\text{ext}} = \frac{F}{2} \dot{\theta} \ell - \frac{F}{2} \dot{\theta} \ell = 0$$

# Analisi limite di un telaio: Teorema cinematico

***Il moltiplicatore di collasso è il minimo dei moltiplicatori cinematici***

***Nel nostro caso il minimo è***

$$\min \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} = \mu_3 = \frac{6M_0}{F\ell}.$$



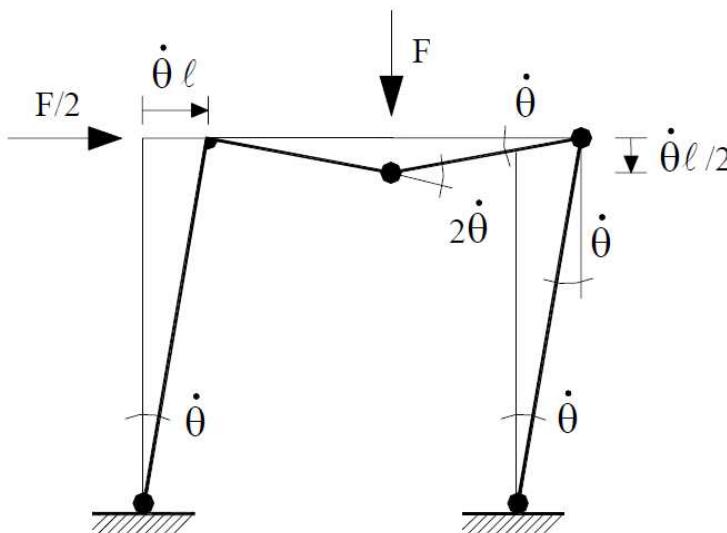
***solo se  $\mu_3$  è anche staticamente ammissibile  
allora è il moltiplicatore di collasso***

## Analisi limite di un telaio: Teorema statico

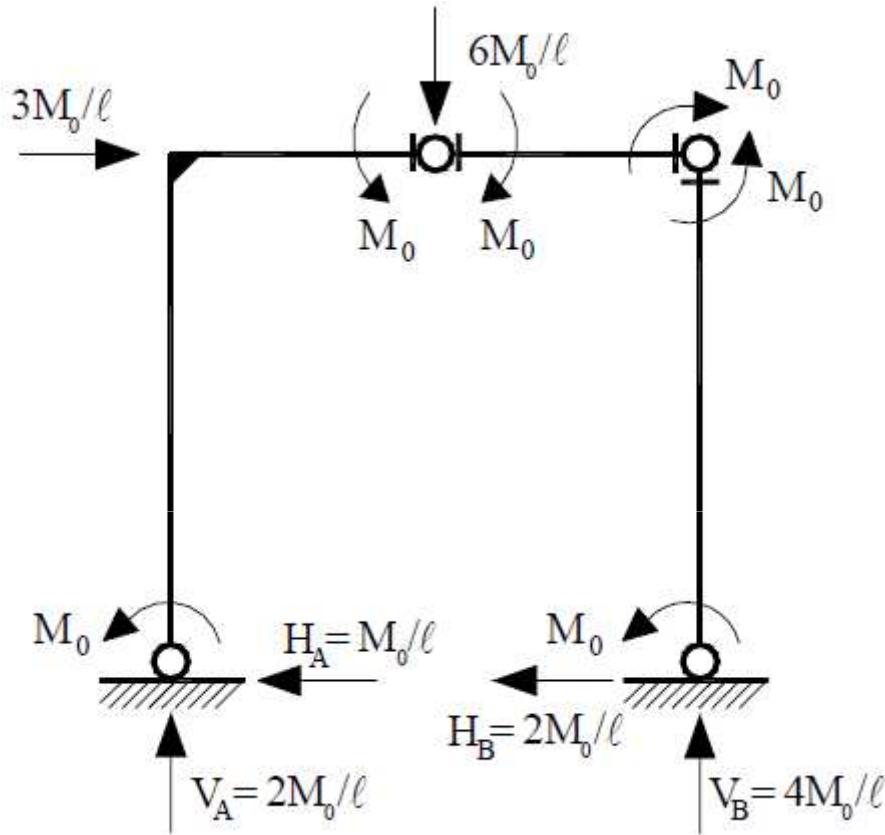
Nel caso in esame non è necessario determinare il più grande dei moltiplicatori ammissibili valutando l'ammissibilità dello stato tensionale

$$M(z) = M^o(z) + \sum_i X_i M^*i(z) \leq M_0 \quad i=1,3$$

E' sufficiente verificare che lo stato tensionale riportato in figura, che corrisponde al meccanismo sopra determinato, sia staticamente ammissibile.

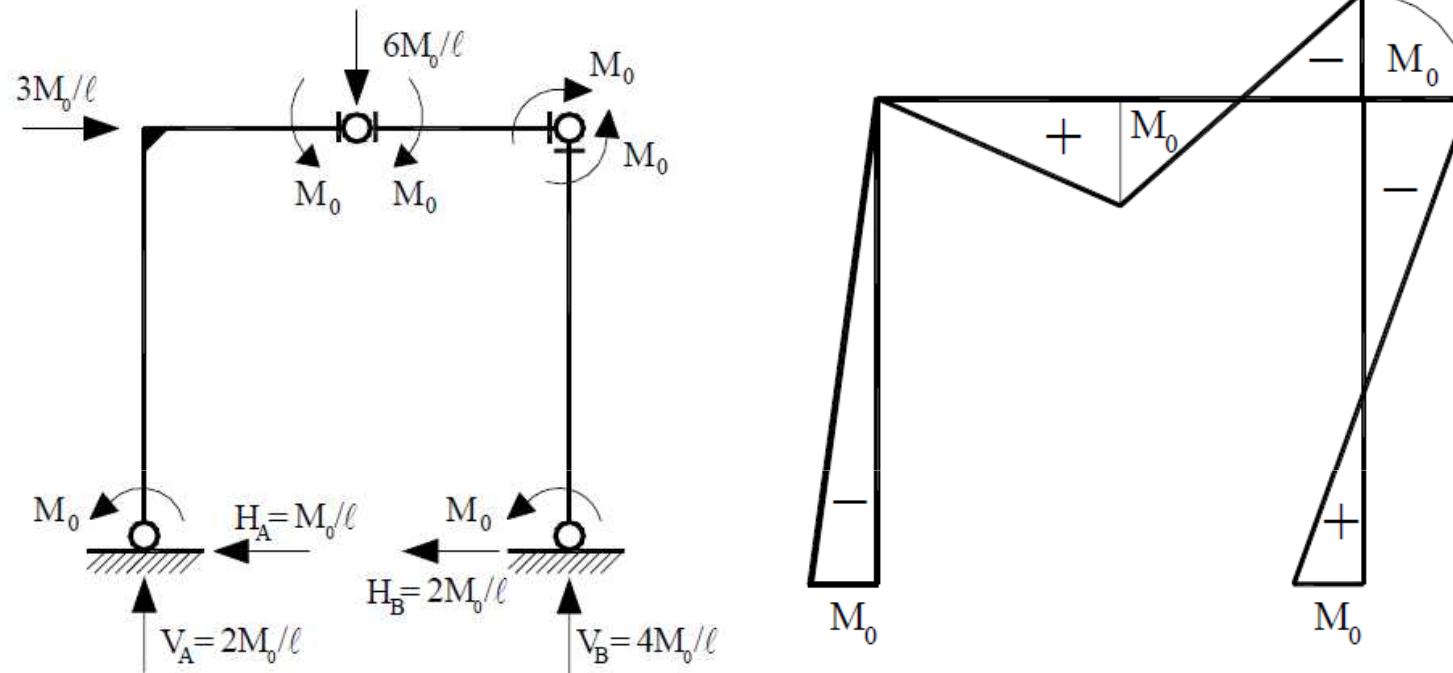


# Analisi limite di un telaio: Teorema statico



$$V_A + V_B = 6M_0/\ell \rightarrow V_A = 2M_0/\ell, \quad H_A + H_B = 3M_0/\ell \rightarrow H_A = M_0/\ell$$
$$H_B \ell + 2M_0 = 0 \rightarrow H_B = 2M_0/\ell, \quad V_B \ell/2 - H_B \ell = 0 \rightarrow V_B = 4M_0/\ell.$$

# Analisi limite di un telaio: Teorema statico



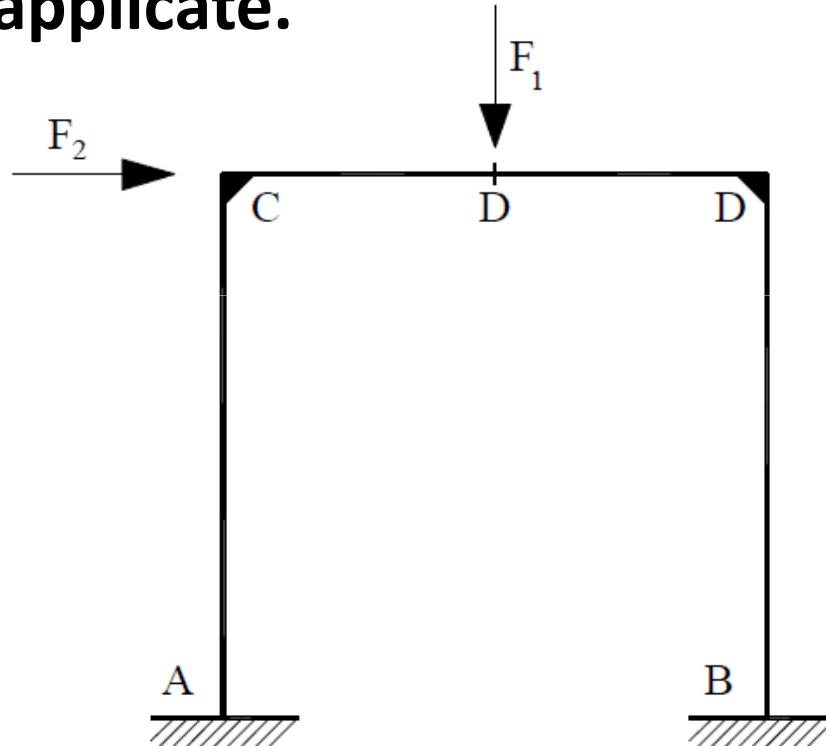
Si tratta di una soluzione staticamente ammissibile,  
allora  $\mu_3$  è il moltiplicatore di collasso

$$\min \{\mu_k\} = \mu_s = \mu_c = 6M_0/F\ell$$

# Dominio limite nello spazio delle forze applicate

Si consideri il portale dell'esempio precedente, si suppongano variare in maniera indipendente le due forze  $F_1$  e  $F_2$  applicate.

Sia  $M_0$  costante  
N non influenzi la  
formazione delle  
cerniere plastiche



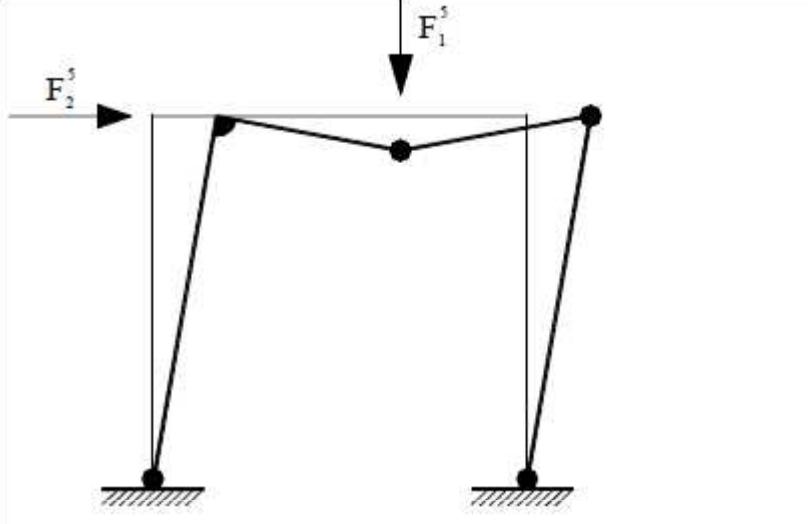
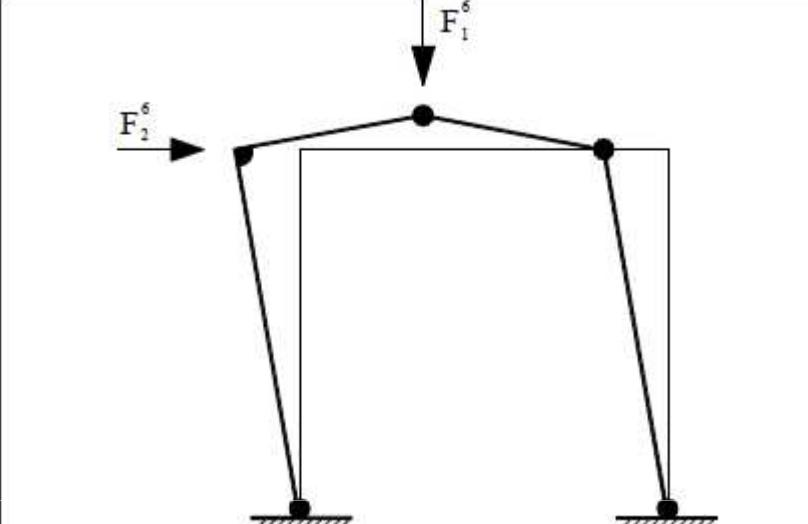
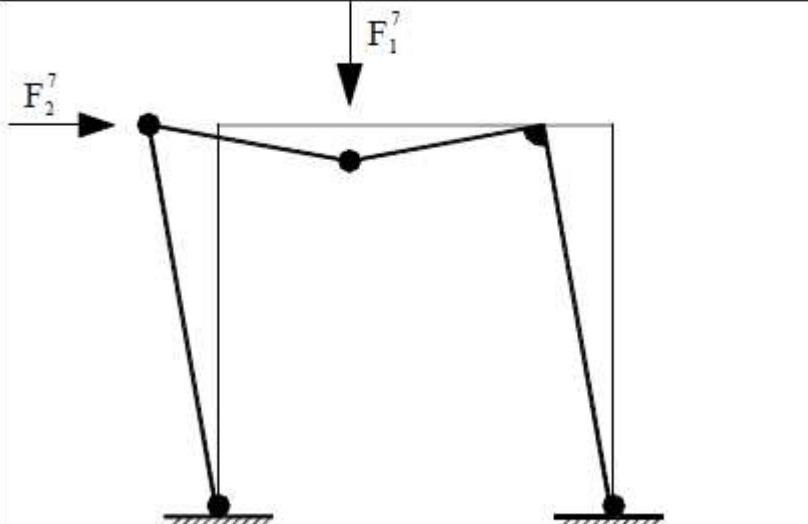
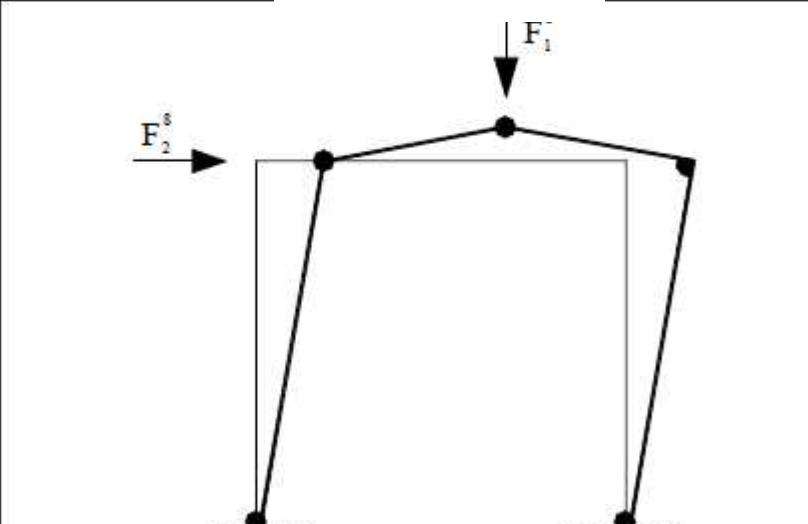
# Dominio limite nello spazio delle forze applicate

Si considerino tutti i possibili meccanismi

Mechanism (1) Safe domain $F_1 < 8M_0/\ell, \forall F_2$	Mechanism (2) $F_1 > -8M_0/\ell, \forall F_2$
Mechanism (3) Safe domain $F_2 < 4M_0/\ell, \forall F_1$	Mechanism (4) $F_2 > -4M_0/\ell, \forall F_1$

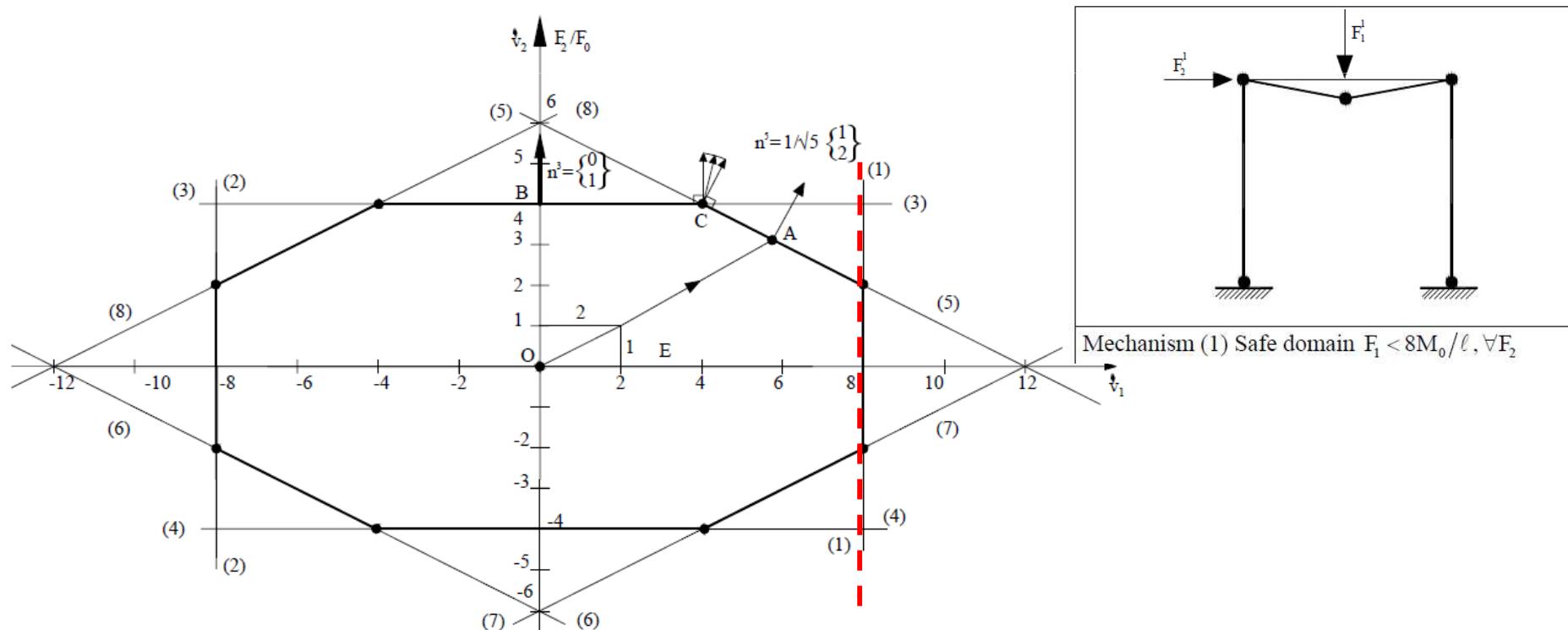
# Dominio limite nello spazio delle forze applicate

Si considerino tutti i possibili meccanismi

	
Mechanism (5) Safe domain $F_1 \ell/2 + F_2 \ell < 6M_0$	Mechanism (6) $F_1^6 \ell/2 + F_2^6 \ell > -6M_0$
	
Mechanism (7) Safe domain $-F_2 \ell + F_1 \ell/2 < 6M_0$	Mechanism (8) $-F_2 \ell + F_1 \ell/2 > -6M_0$

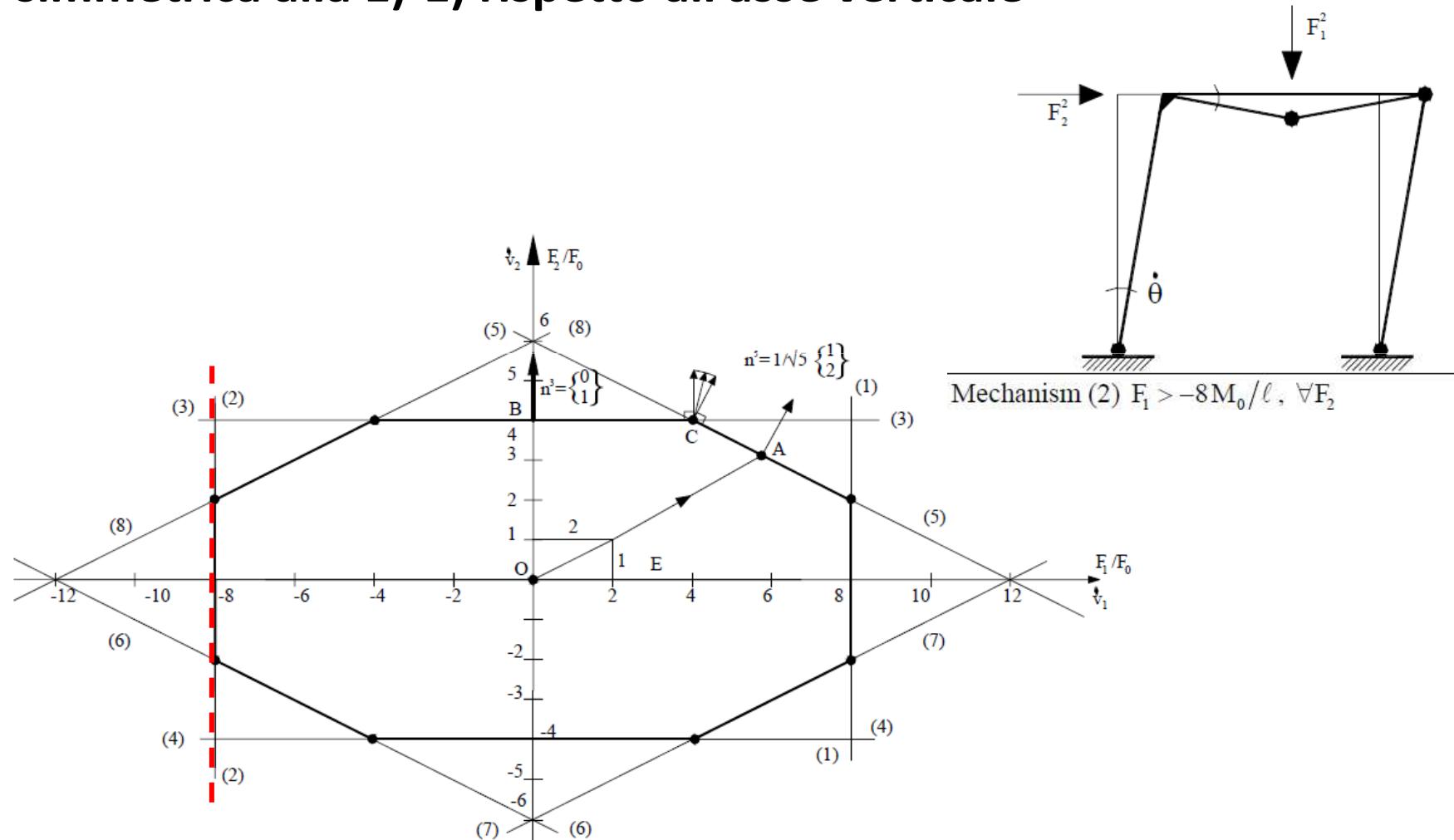
# Dominio limite nello spazio delle forze applicate

Si consideri il meccanismo n1: il collasso non dipende dal valore  $F_2$  della forza orizzontale (la potenza esterna ad essa associata è nulla), il carico di collasso, o forza verticale massima che la struttura può sostenere, risulta  $F_1 = 8M_0 / \ell$ . Nel piano  $F_1-F_2$  il collasso relativo a questo meccanismo è rappresentato dalla retta verticale (1)-(1).



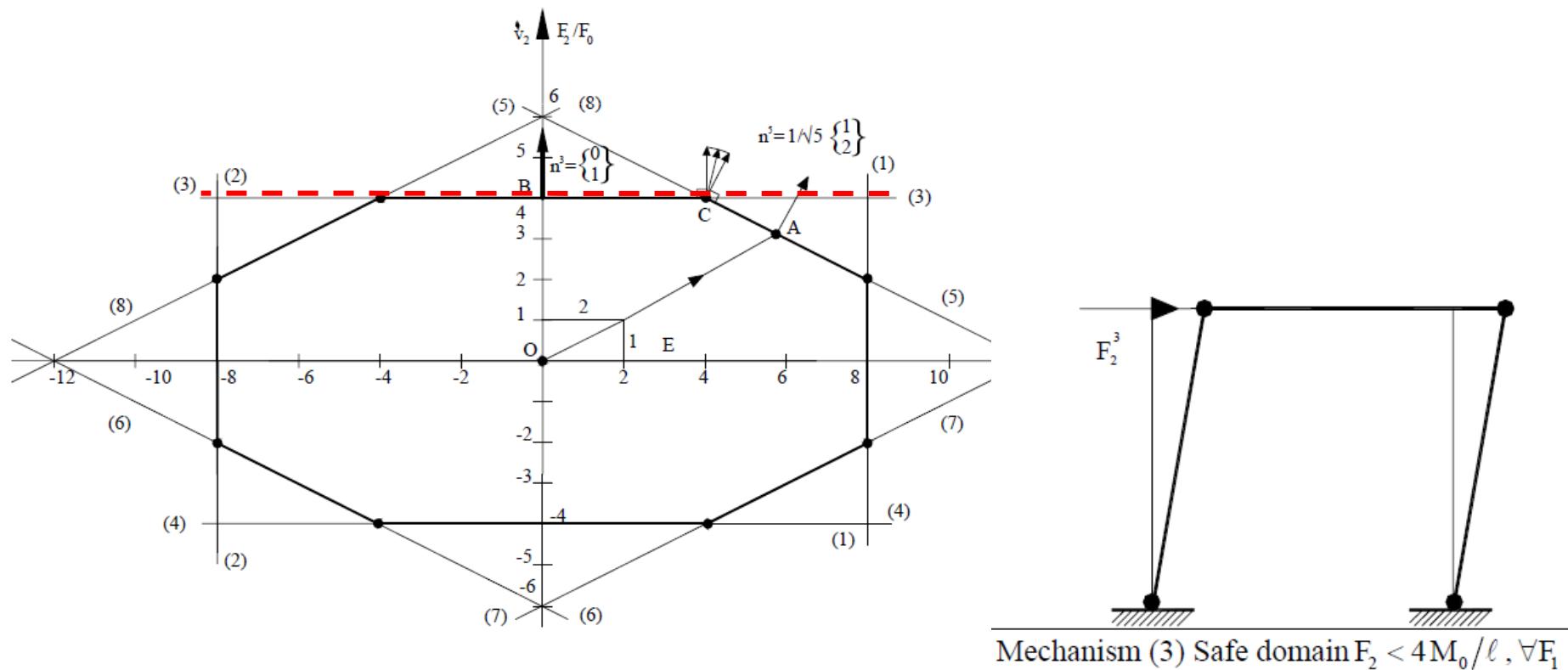
# Dominio limite nello spazio delle forze applicate

Si consideri il meccanismo n2: ad esso è associata la retta (2)-(2) simmetrica alla 1)-1) rispetto all'asse verticale



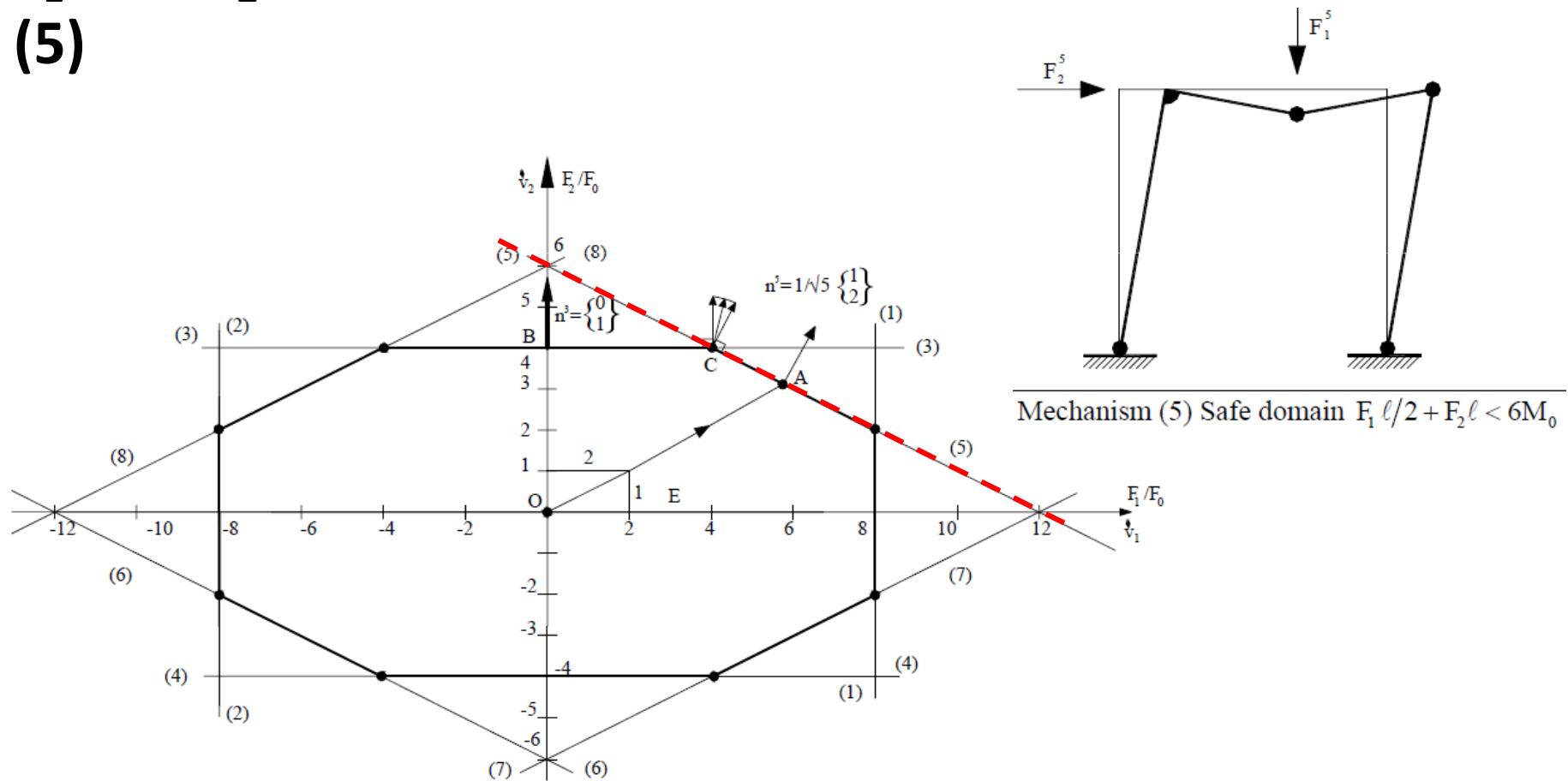
# Dominio limite nello spazio delle forze applicate

**meccanismo n3: Se invece si considera il meccanismo di parete nr.3, il collasso non dipende dal valore della forza verticale , mentre la forza orizzontale massima sostenibile risulta  $F_2^3 = 4M_0/\ell$**



## Dominio limite nello spazio delle forze applicate

**meccanismo n5: Infine se si considera il meccanismo n5 (meccanismo composto) applicando il PLV si trova  $F_1^5/2 + F_2^5 = 6M_0/\ell$ , rappresentata nella figura dalla retta (5)-(5)**



# Dominio limite nello spazio delle forze applicate

## Meccanismo 5 nel punto A

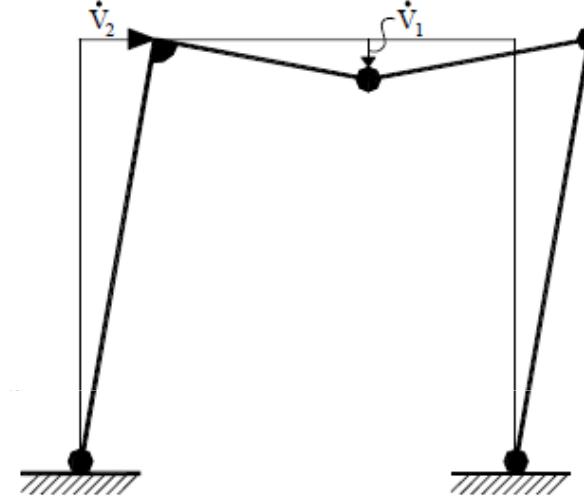
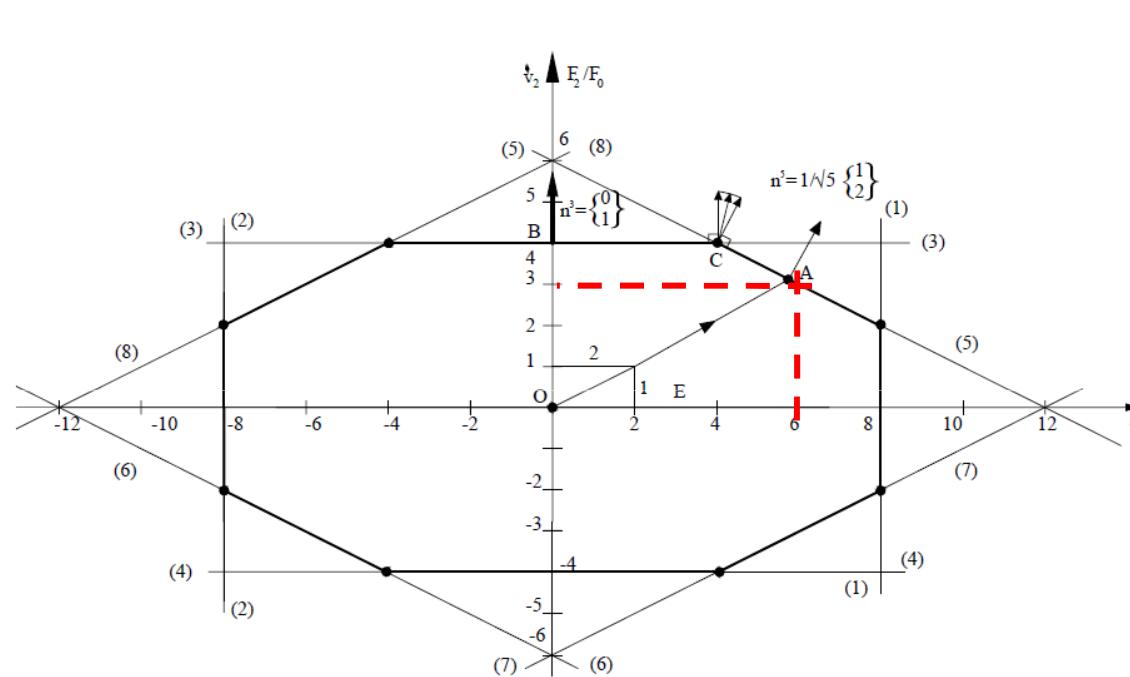


Fig.2.108

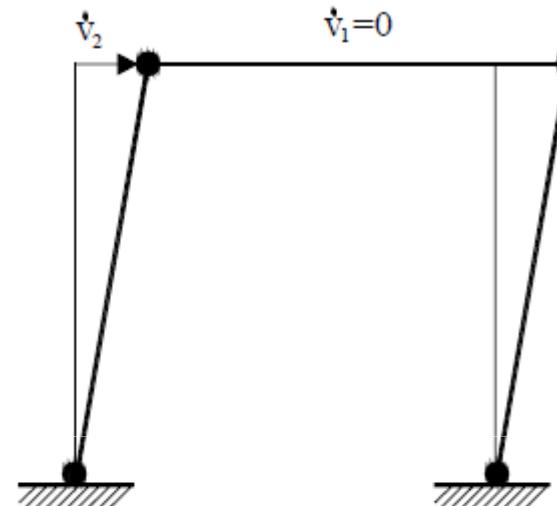
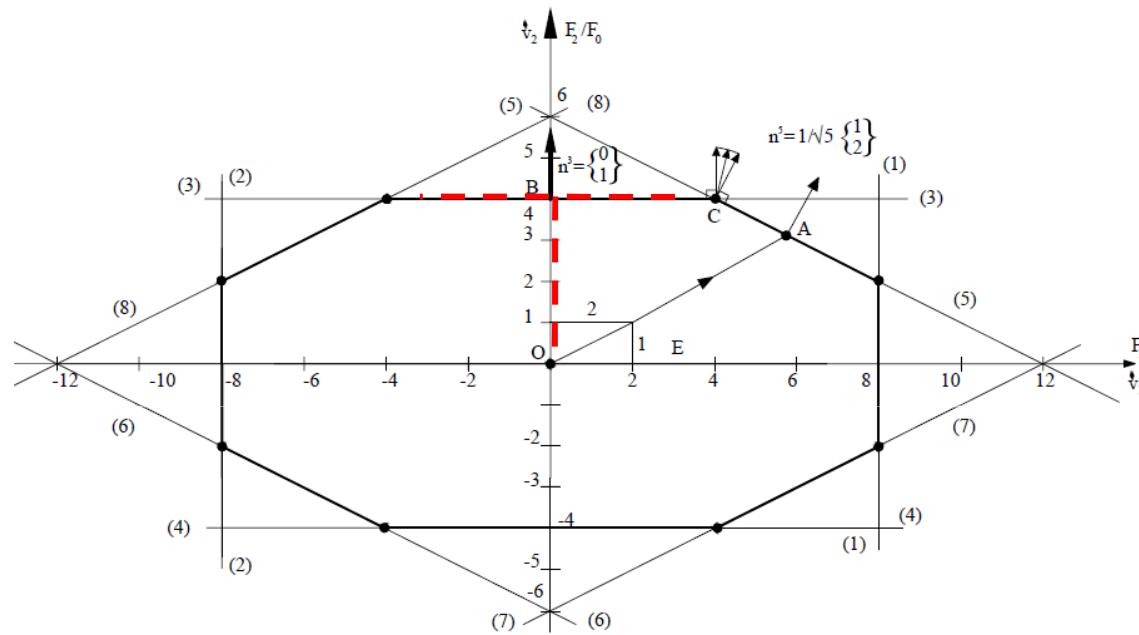
$$F_1 = 6F_0, F_2 = 3F_0, \mathbf{f} = \{6F_0 \ 3F_0\}^T, \dot{v}_1 = \frac{1}{2} \ell \dot{\theta}, \dot{v}_2 = \ell \dot{\theta}, \dot{\mathbf{u}}_p^5 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\ell \dot{\theta}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} \ell \dot{\theta} \right) = \mathbf{n}^5 \dot{\lambda},$$

$$\mathbf{n}^5 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

Plastic flow rule (normality); Plastic dissipation  $D_{st} = \mathbf{f}^T \dot{\mathbf{u}}_p^5$

# Dominio limite nello spazio delle forze applicate

## Meccanismo 3 nel punto B

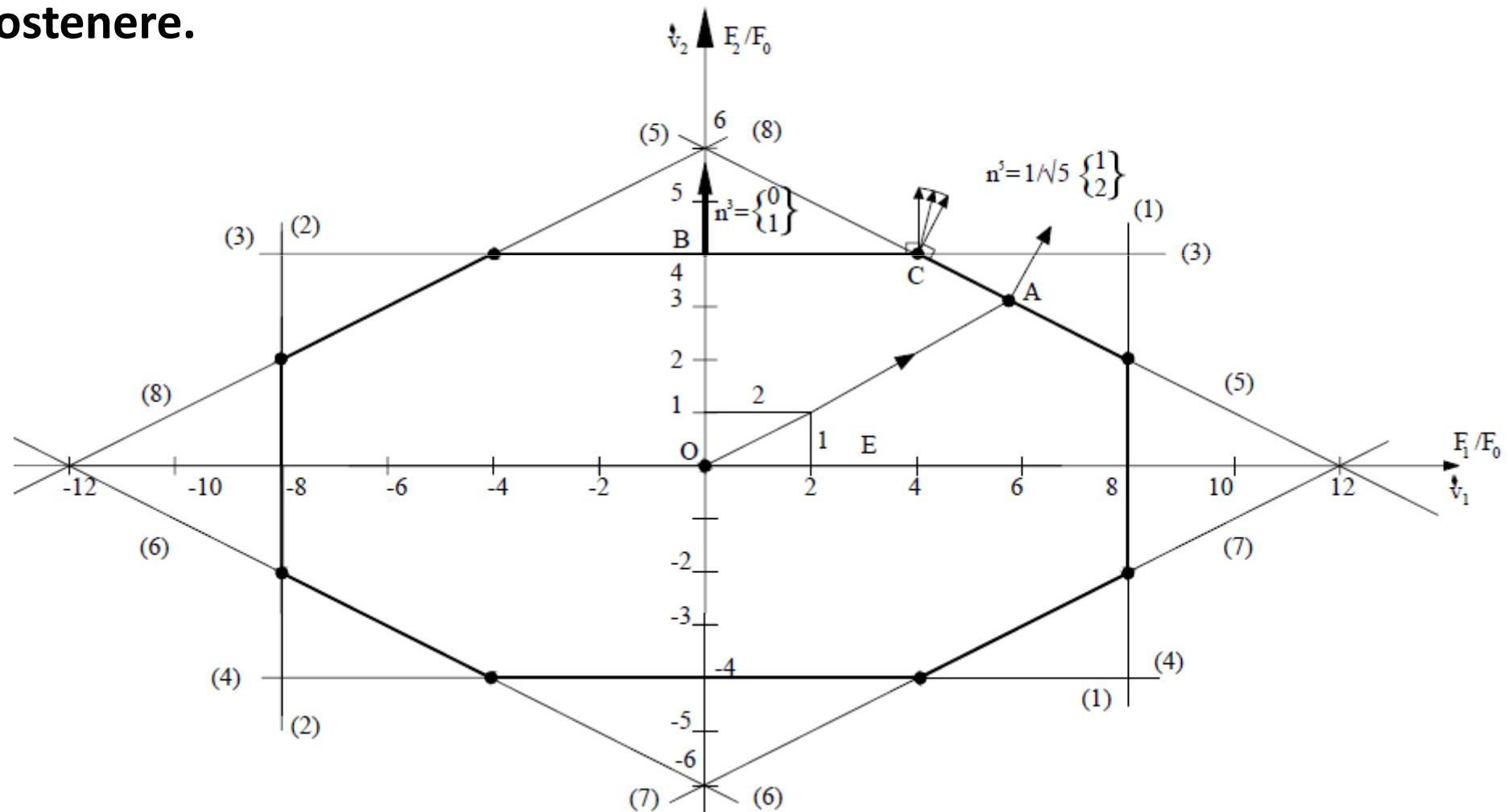


$$F_1 = 0, \quad F_2 = 4F_0, \quad \mathbf{f} = \{0 \ 4F_0\}^T, \quad \dot{v}_1 = 0, \quad \dot{v}_2 = \dot{\theta}\ell, \quad \dot{\mathbf{u}}_p^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} (\dot{\theta}\ell) = \mathbf{n}^3 \dot{\lambda}$$

Plastic flow rule (normality): Plastic dissipation  $D_{st} = \mathbf{f}^T \dot{\mathbf{u}}_p^3$

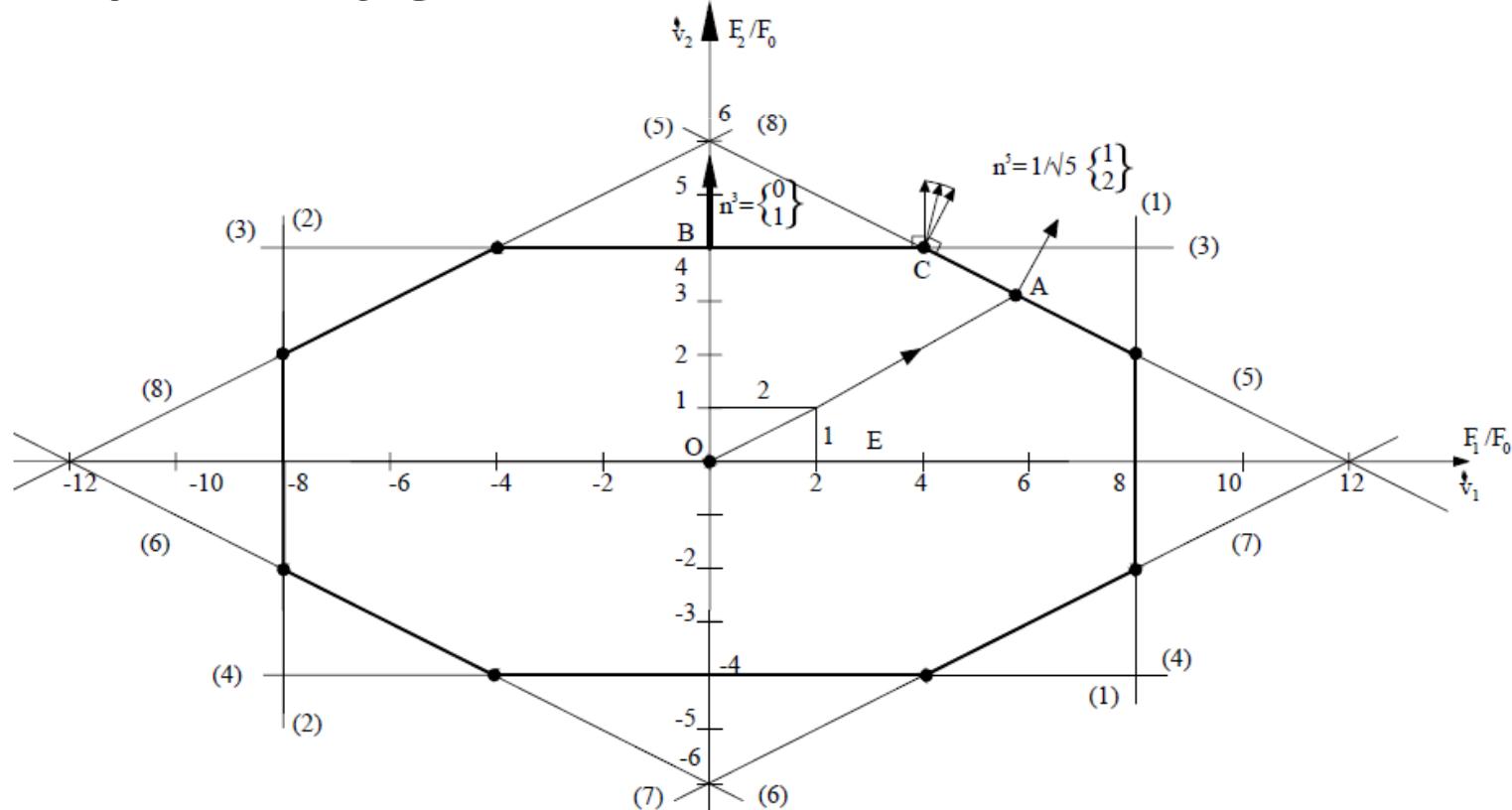
# Dominio limite nello spazio delle forze applicate

Il dominio limite dei carichi è dunque, nel caso in esame, rappresentato dall'ottagono in figura e tutti i punti interni ad esso rappresentano stati di carico ammissibili che la struttura è in grado di sostenere.



# Dominio limite nello spazio delle forze applicate

Il dominio limite nello spazio dei carichi rappresenta la generalizzazione in termini di carichi della condizione di snervamento che viene assegnata in termini di sollecitazioni. *Si può dimostrare che il dominio limite risulta sempre una figura convessa, chiusa e limitata.*



## Analisi a collasso in presenza di carichi permanenti e corollari dei teoremi dell'analisi limite

La normativa Italiana per le costruzioni e gli Eurocodici distinguono i carichi in *permanenti*, e.g. *il peso proprio*, che non variano nel tempo e non dipendono da un eventuale moltiplicatore dei carichi ed i carichi *accidentali applicati dall'esterno alla struttura, eventualmente variabili nel tempo*, rispetto a cui occorre valutare la sicurezza rispetto allo stato limite ultimo di collasso plastico.

# Analisi a collasso in presenza di carichi permanenti e corollari dei teoremi dell'analisi limite

## Teorema statico.

Per brevità ci si riferisce solo a sistemi di travi ove l'unica sollecitazione che induce plasticizzazione è il momento flettente ed il moltiplicatore di collasso è il più grande fra i moltiplicatori che verificano l'equilibrio e l'ammissibilità plastica

$$|M(z)| \leq M_0$$

nelle sezioni critiche di ascissa z

## Analisi a collasso in presenza di carichi permanenti e corollari dei teoremi dell'analisi limite

Come visto precedentemente conviene scrivere il momento nel modo seguente:

$$M(z) = M^o(z) + \sum_i X_i M^* i(z) \leq M_0 \text{ dove } i=1, N_{ip}$$

Il momento  $M^o(z)$  dovuto ai carichi applicati alla struttura principale può allora essere scritto sovrapponendo gli effetti nel modo seguente:

$$M^o(z) = M^o_p(z) + \mu_s M^o_a(z)$$

dove  $M^o_p(z)$ : momento flettente dovuto ai carichi permanenti ed è costante

$M^o_a(z)$ : momento flettente dovuto ai carichi utili o accidentali e dipende dal moltiplicatore  $\mu_s$

# Analisi a collasso in presenza di carichi permanenti e corollari dei teoremi dell'analisi limite

## Teorema cinematico

Per ogni cinematismo cinematicamente ammissibile il moltiplicatore di collasso può essere determinato applicando il PLV e risulta:

$$\mu_k = \frac{D_{int,k}}{\dot{W}_{0k,ext}}$$

# Analisi a collasso in presenza di carichi permanenti e corollari dei teoremi dell'analisi limite

## Teorema cinematico

Se i carichi  $q$  sono dati da carichi permanenti  $q_p$  (non dipendenti dal moltiplicatore) ed accidentali  $q_a$  (dipendenti da esso) occorre scrivere la potenza esterna  $\dot{W}_{ok,ext}$  come somma del contributo dei due tipi di carico, il PLV può di conseguenza essere scritto nel modo

seguente:  $\dot{W}_{ok,ext} = \dot{W}_{ok,extp} + \mu_k \dot{W}_{ok,exta} = D_{int,k}$

Pertanto il moltiplicatore cinematicamente ammissibile  $\mu_k$  risulta fornito dalla relazione

$$\mu_k = \frac{D_{int,k} - \dot{W}_{ok,extp}}{\dot{W}_{ok,exta}}$$

## Corollari dei teoremi fondamentali dell'analisi limite

- I- Se due moltiplicatori l'uno staticamente ammissibile  $\mu_s$  e l'altro cinematicamente ammissibile  $\mu_k$  coincidono, essi definiscono il moltiplicatore di collasso  $\mu_c$ . Il corollario è diretta conseguenza della disuguaglianza fondamentale
- II- Eventuali distorsioni e/o cedimenti vincolari non modificano il valore del moltiplicatore di collasso  $\mu_c$ .

## Corollari dei teoremi fondamentali dell'analisi limite

III- Le proprietà elastiche della struttura non modificano il valore del moltiplicatore di collasso  $\mu_c$  si è in effetti fatto riferimento ad un modello rigido-plastico per le cerniere

IV- L'aggiunta ( l'eliminazione) di una qualunque porzione di materiale, supposto privo di peso, alla struttura non può provocare una diminuzione (un aumento) del valore del moltiplicatore di collasso  $\mu_c$ . Non viene modificato il diagramma del momento  $M(z)$ ; al più l'aggiunta di materiale non può che far aumentare  $M_0$  in qualche sezione

## Corollari dei teoremi fondamentali dell'analisi limite

V- L'aumento (la riduzione) in una qualunque sezione della tensione  $\sigma_0$  di snervamento del materiale non può fare diminuire (aumentare) il valore del moltiplicatore di collasso  $\mu_c$ .

# Considerazioni

**Precedentemente, si sono riportate le ipotesi sotto cui è possibile applicare il calcolo a rottura.**

**In particolare si è asserito che :**

**“Il materiale deve possedere duttilità illimitata”**

**Questo requisito è indispensabile per poter adottare il modello di cerniera plastica.**

**Questa schematizzazione è accettabile per travi in acciaio od in c.a. debolmente armate, certamente non per strutture in vetro od in cls. non armato.**

# Considerazioni

Si osserva, inoltre, che si è trascurata *l'influenza dello sforzo di taglio sulla ammissibilità plastica* delle sezioni. Ciò è accettabile per travi normalmente dimensionate ma porta ad una sopravvalutazione del moltiplicatore di collasso.

Peraltro non è possibile trascurare il taglio ai fini dell'equilibrio

# Considerazioni

Nel caso delle strutture intelaiate, ad esempio il portale in precedenza studiato, è necessario tenere

conto *dell'influenza dello sforzo normale*. In seguito si vedrà come si possa tener conto della presenza dello sforzo normale introducendo la seguente condizione di ammissibilità:

$$\phi(N, M) = \left\{ \left| \frac{M}{M_0} \right| + \left( \frac{N}{N_0} \right)^2 - 1 \leq 0 \right\}$$

# Considerazioni

Nei pilastri in c.a. la presenza di uno sforzo normale elevato riduce la duttilità della struttura, per questo motivo la recente OPCM 3274 sulle costruzioni in zona sismica prescrive di progettare la struttura in modo che le cerniere si verifichino nelle travi (sottodimensionandole) e non nei pilastri (*gerarchia delle resistenze*).

# Considerazioni

***“La struttura deve presentare spostamenti piccoli”***

Per poter applicare la sovrapposizione degli effetti, come più volte fatto in questo capitolo, le equazioni di equilibrio devono essere scritte con riferimento alla configurazione iniziale non deformata.

Questa ipotesi implica che, in questo ambito, non è possibile tener conto di fenomeni di instabilità dell'equilibrio.

# Considerazioni

Ciò non è, in genere, tecnicamente accettabile nelle strutture reticolari e nei telai metallici, specie se non controventati. Nel caso di strutture metalliche dotate di opportuni sistemi irrigidenti di controvento ciò possibile solo se le colonne sono poco snelle ( snellezza  $\lambda < 80-90$  e dunque coefficiente  $\omega < 1-1,2$ ). Si ritornerà su questo importante problema nella seconda parte del corso.

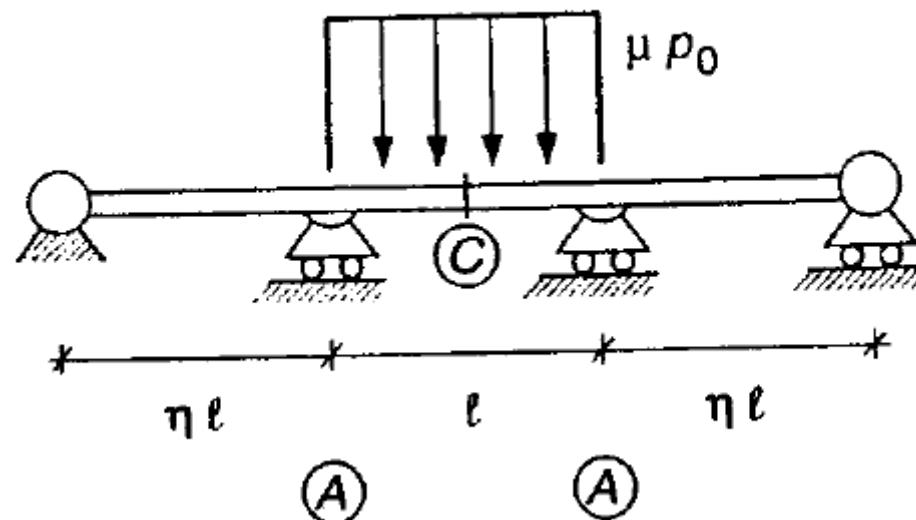
# Considerazioni

## *Paradosso di Stuessi e Kollrunner sull'attendibilità del moltiplicatore di collasso*

Il moltiplicatore  $\mu_c$  è indipendente dalle proprietà elastiche e quindi dalla deformabilità della struttura, tuttavia occorre verificare che questa non risulti eccessiva in modo da compromettere le ipotesi alla base dell'analisi limite. Nella maggior parte dei casi di interesse tecnico la deformabilità elastica non provoca problemi.

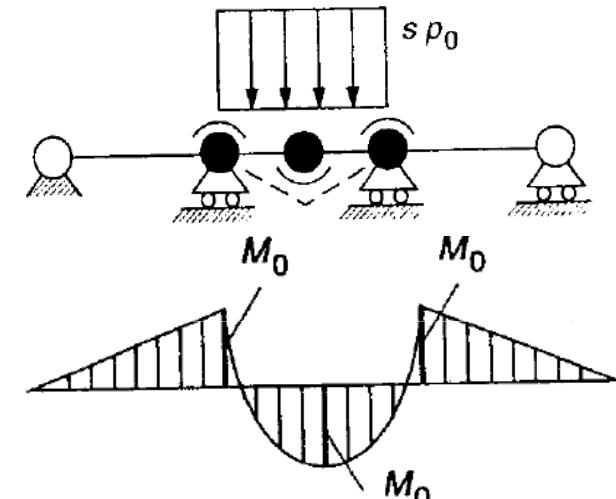
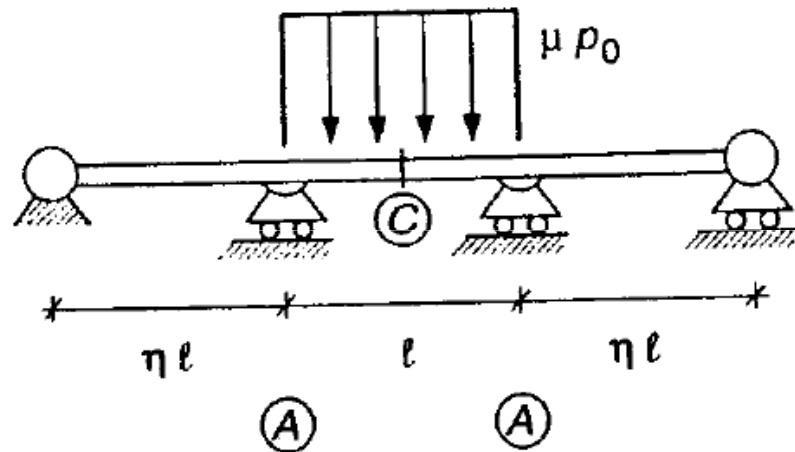
# Considerazioni

Tuttavia , L Corradi vol. III pp 45-47, esiste un esempio in cui questo accade. Si consideri una trave simmetrica su tre campate e si supponga che le due campate laterali abbiano una lunghezza  $\mu$  volte la campata centrale caricata con un carico concentrato in mezzeria.



# Considerazioni

Il meccanismo di collasso è quello parziale usuale di trave con tre cerniere allineate ed il moltiplicatore non dipende dal valore di  $\mu$ .



Meccanismo di collasso

Il moltiplicatore di collasso  $s$  risulta:  
 $s$  non dipende da  $\mu$

$$s = 16 \quad \left( p_L = 16 \frac{M_0}{l^2} \right)$$

# Considerazioni

## *Paradosso di Stüssi e Kollrunner*

Tuttavia, al tendere di  $\mu$  all'infinito la campata centrale tende a comportarsi come semplicemente appoggiata

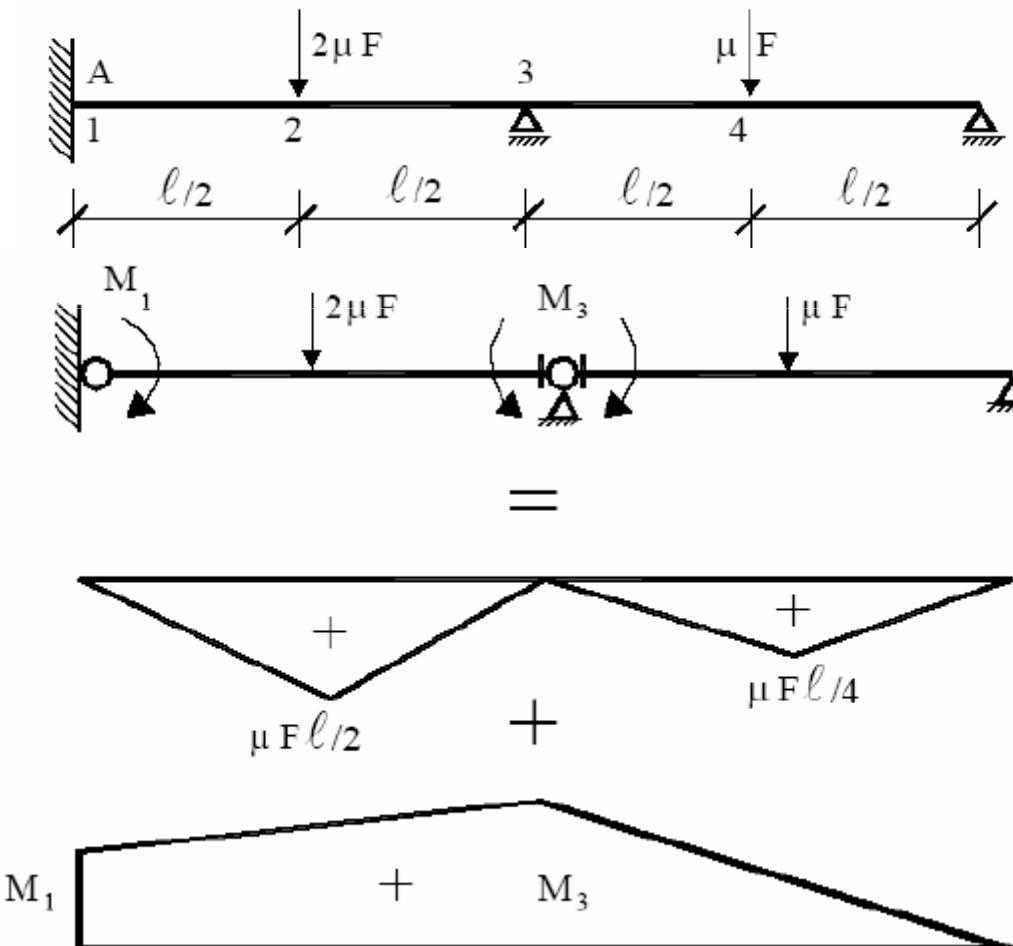
Mentre la formula del moltiplicatore di collasso non riesce a tenerne conto

un' analisi incrementale mostra come si possano raggiungere prima del collasso spostamenti non accettabili.

Un esempio analogo appare nel settore geotecnico e riguarda i pali trivellati la cui portanza non viene in genere valutata a collasso perché questo avviene con cedimenti eccessivi

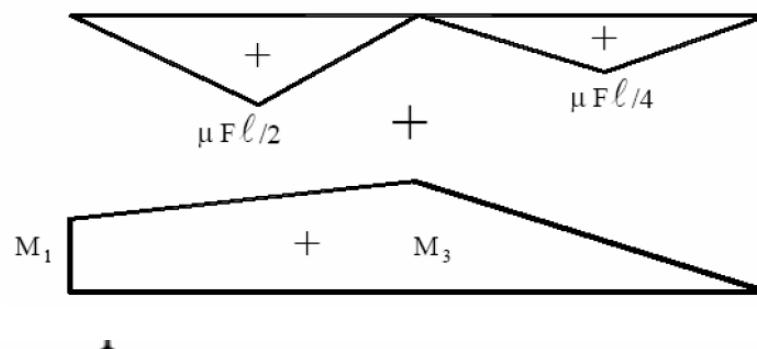
# La valutazione del moltiplicatore di collasso come problema di programmazione lineare

Si consideri la trave continua in figura ed ad essa si applichi il **teorema statico**



# La valutazione del moltiplicatore di collasso come problema di programmazione lineare

**Una distribuzione di momenti staticamente ammissibile è equilibrata e plasticamente ammissibile**



$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = M_1 \\ M_1 = 2\mu F \ell / 4 + M_1 / 2 + M_3 / 2 \\ M_3 = M_3 \\ M_4 = \mu F \ell / 4 + M_3 / 2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} |M_1| \leq M_0 \\ |M_2| \leq M_0 \\ |M_3| \leq M_0 \\ |M_4| \leq M_0 \end{array}$$

Find  $\rightarrow \max \mu_s = \mu_c$

# La valutazione del moltiplicatore di collasso come problema di programmazione lineare

Si ricorda che, mentre in presenza di carichi concentrati le sezioni dove verificare l'ammissibilità vanno poste nelle sezioni di applicazioni dei carichi ed in corrispondenza dei vincoli e nei nodi,

In presenza di carichi distribuiti la loro collocazione ha un certo grado di arbitrarietà che può portare ad una sottostima del moltiplicatore di collasso

# La valutazione del moltiplicatore di collasso come problema di programmazione lineare

Le equazioni di equilibrio e le disuguaglianze che impongono l'ammissibilità possono essere poste nella seguente forma matriciale

Equilibrium

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \mu \begin{Bmatrix} 0 \\ -F\ell/2 \\ 0 \\ -F\ell/4 \end{Bmatrix}$$
$$\mathbf{B}^T \quad \mathbf{m} = \mu \mathbf{m}^0$$

Plastic admissibility  $-\mathbf{m}_p < \mathbf{m} < \mathbf{m}_p$ ,  $\mathbf{m}_p = \{ M_0 \quad M_0 \quad M_0 \quad M_0 \}$

# La valutazione del moltiplicatore di collasso come problema di programmazione lineare

Il teorema statico può dunque essere scritto nel modo seguente che rappresenta un problema di ottimizzazione che va sotto il nome di *Programmazione lineare (LP Linear Programming)*

$$\text{Find } \begin{cases} \max \mu_s = \mu_c \\ \mathbf{B}^T \mathbf{m} = \mu \mathbf{m}^0 \\ -\mathbf{m}_p < \mathbf{m} < \mathbf{m}_p \end{cases}$$