Influenza delle imperfezioni sulle curve di stabilità

LC III p 329

Consideriamo un'asta doppiamente incernierata

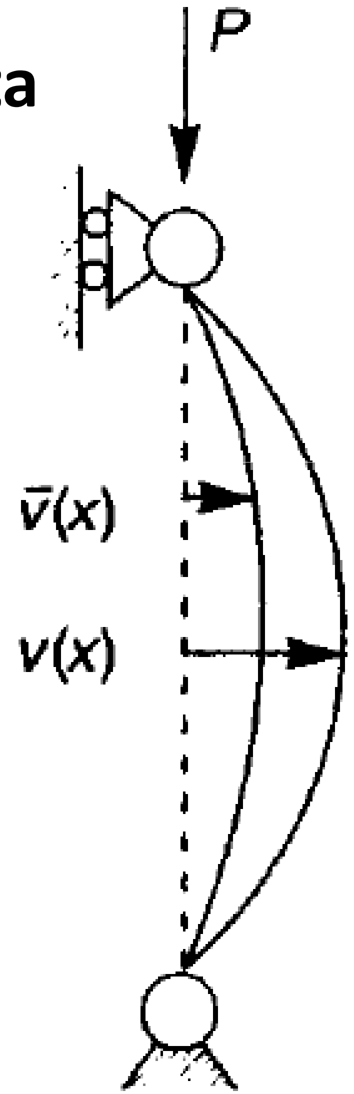
La sua linea d'asse presenti sin dall'inizio un'inflessione descritta dallo spostamento trasversale $\bar{v}(x)$

Se v(x) è lo spostamento trasversale la linea elastica deve essere

$$v_E(x) = v(x) - \bar{v}(x)$$

Cui corrisponde il momento flettente

$$M(x) = -EI(v''(x) - \bar{v}''(x))$$



Influenza delle imperfezioni sulle curve di stabilità

il momento flettente è

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{v}(\mathbf{x})$$

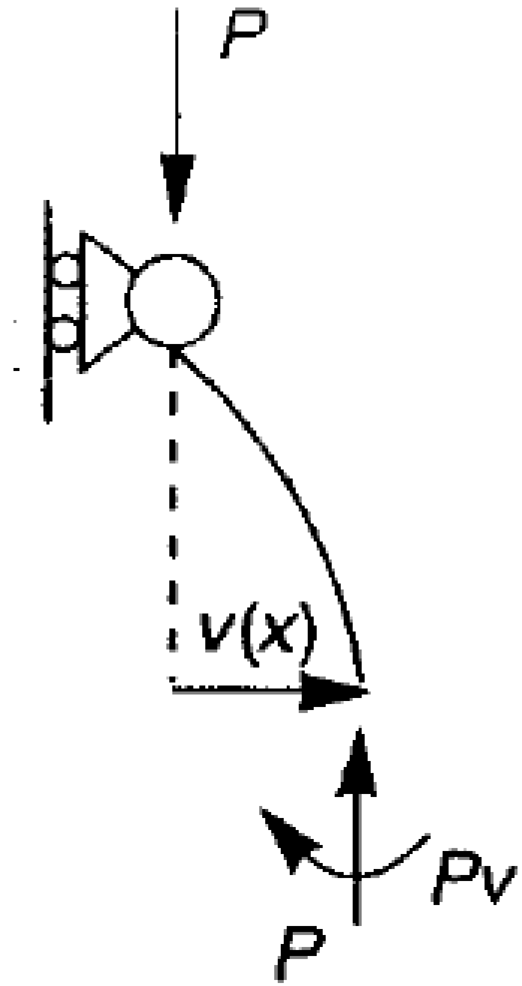
Che sostituita nella

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = -\mathbf{EI}(\mathbf{v}''(\mathbf{x}) - \overline{\mathbf{v}''}(\mathbf{x}))$$

Fornisce

$$\mathbf{v}''(\mathbf{x}) + \alpha^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \overline{\mathbf{v}''}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{EI}}$$



Influenza delle imperfezioni sulle curve di stabilità

Assumendo per l'imperfezione l'espressione sinusoidale

$$\bar{v}(x) = U_\varsigma \sin \frac{\pi x}{\ell}$$

La soluzione dell'equazione differenziale di equilibrio si scrive

$$v(x) = U_\varsigma \frac{1}{1 - \dfrac{P\ell^2}{\pi^2 EI}} \sin \frac{\pi x}{\ell} = U_\varsigma \frac{1}{1 - \dfrac{P}{P_E}} \sin \frac{\pi x}{\ell}$$

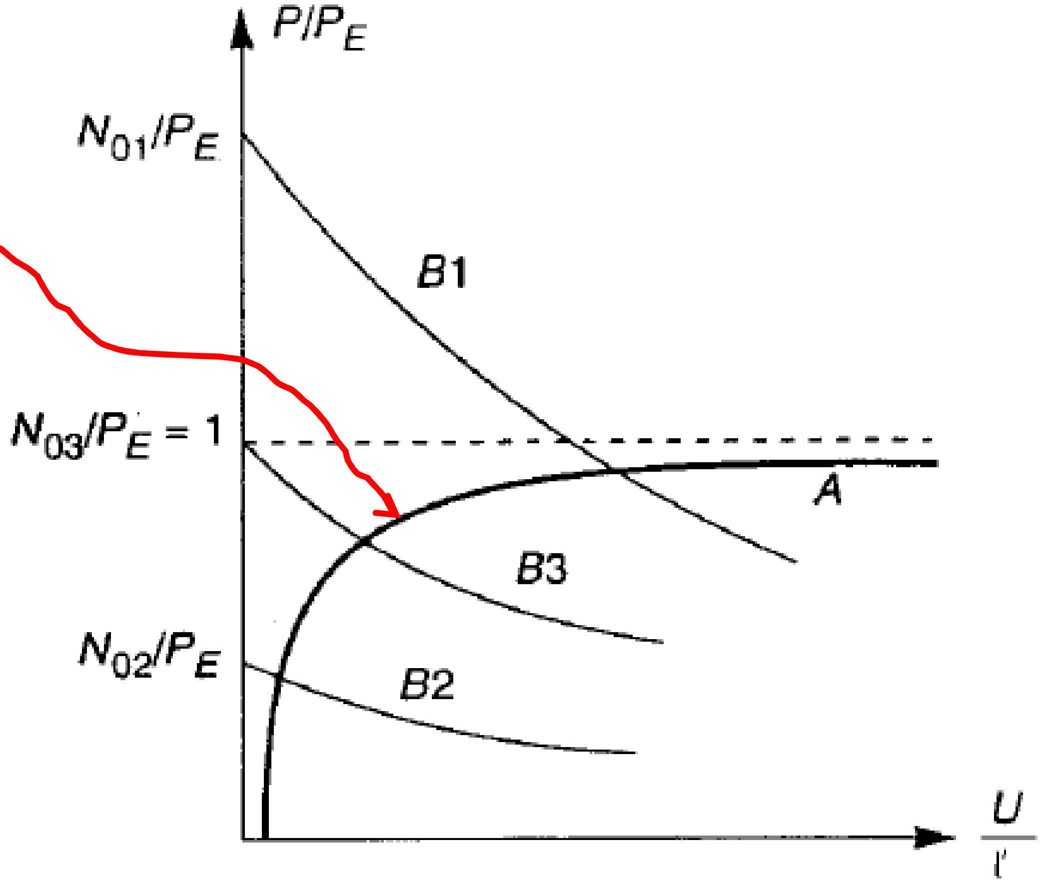
In particolare lo spostamento massimo in mezzeria diviene

$$U = v\left(\frac{\ell}{2}\right) = U_\varsigma \frac{1}{1 - \dfrac{P}{P_E}}$$

Influenza delle imperfezioni sulle curve di stabilità

Curva A in Figura

$$\mathbf{U} = \mathbf{v}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \mathbf{U}_{\varsigma}\,\frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{P}}{\mathbf{P_E}}}$$

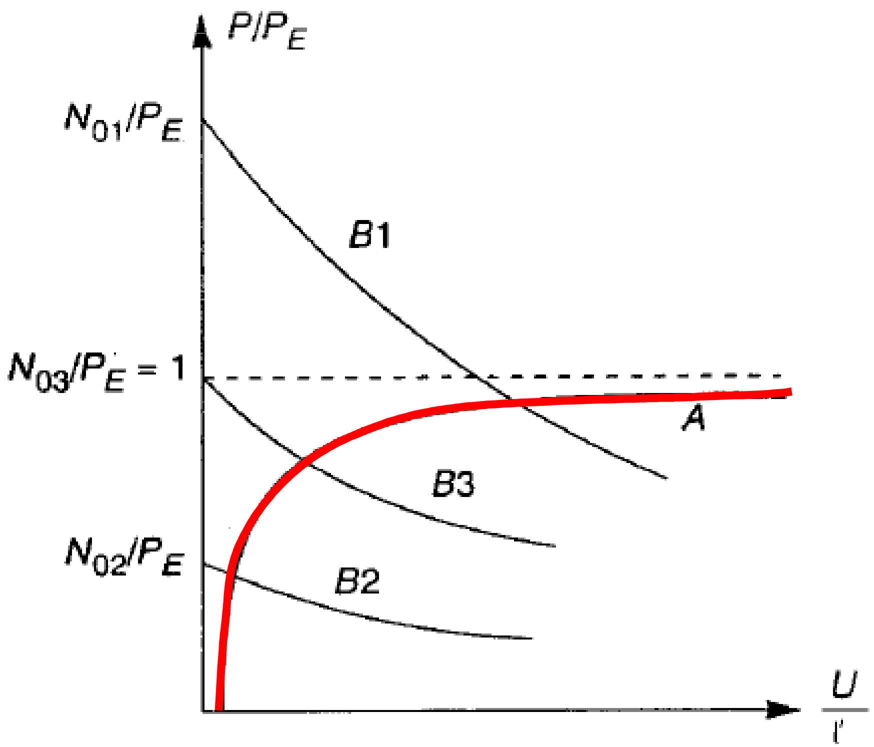


Influenza delle imperfezioni sulle curve di stabilità: limite elastico e collasso

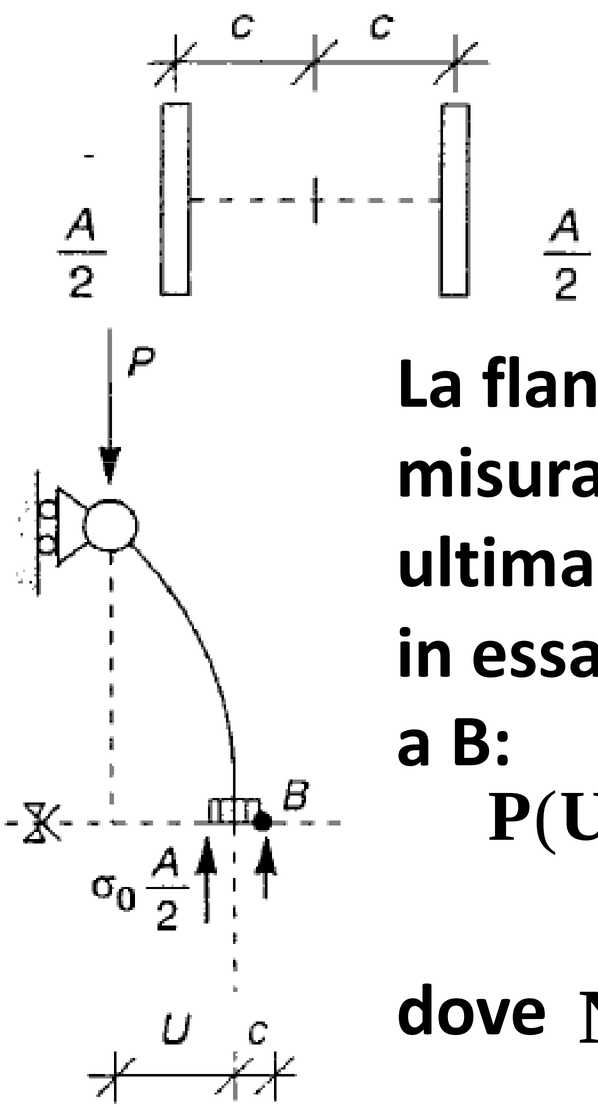
Per effetto del braccio di inflessione il carico P induce un momento flettente che aumenta progressivamente

la curva elastica A è percorribile solo finché la prima fibra non raggiunge il limite elastico σ_0

Oltre σ_0 si verifica una redistribuzione delle tensioni di cui occorre tenere conto



Influenza delle imperfezioni sulle curve di stabilità: limite elastico e collasso



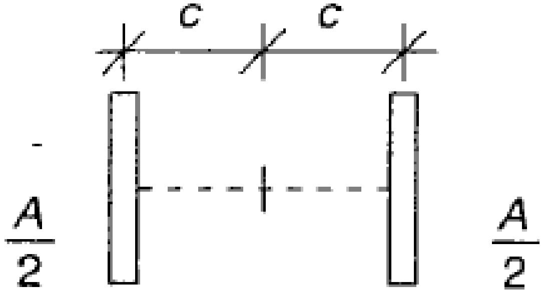
Supponiamo che l'asta abbia la sezione di una putrella ideale (solo ali niente anima)

La flangia di sinistra risulta compressa in misura maggiore dell'altra e la situazione ultima viene raggiunta viene raggiunta quando in essa $\sigma=\sigma_0$; L'equilibrio alla rotazione attorno a B:

$$\mathbf{P}(\mathbf{U}+\mathbf{c}) = \frac{\mathbf{A}}{2}\sigma_0 2\mathbf{c} = \mathbf{N}_0\mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{N}_0 \frac{1}{1+\dfrac{\mathbf{U}}{\mathbf{c}}}$$

dove $\mathbf{N}_0 = \mathbf{A}\sigma_0$ **è il carico di schiacciamento**

Influenza delle imperfezioni sulle curve di stabilità: limite elastico e collasso



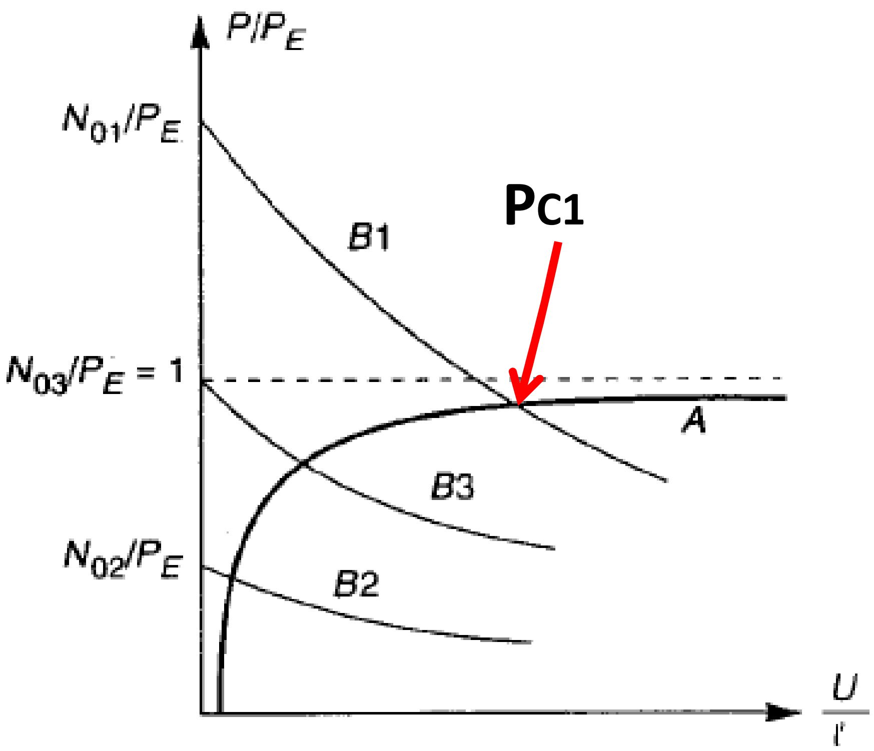
In una putrella ideale per una trave incernierata si ha

$$\rho = \mathbf{c}, \quad \ell_0 = \ell$$

Essendo $\lambda = \dfrac{\ell_0}{\rho} \Rightarrow \rho = \dfrac{\ell_0}{\lambda}$

$$\mathbf{P} = \mathbf{N}_0 \frac{1}{1 + \dfrac{\mathbf{U}}{\mathbf{c}}} = \mathbf{N}_0 \frac{1}{1 + \dfrac{\mathbf{U}\lambda}{\ell}}$$

Influenza delle imperfezioni sulle curve di stabilità: limite elastico e collasso

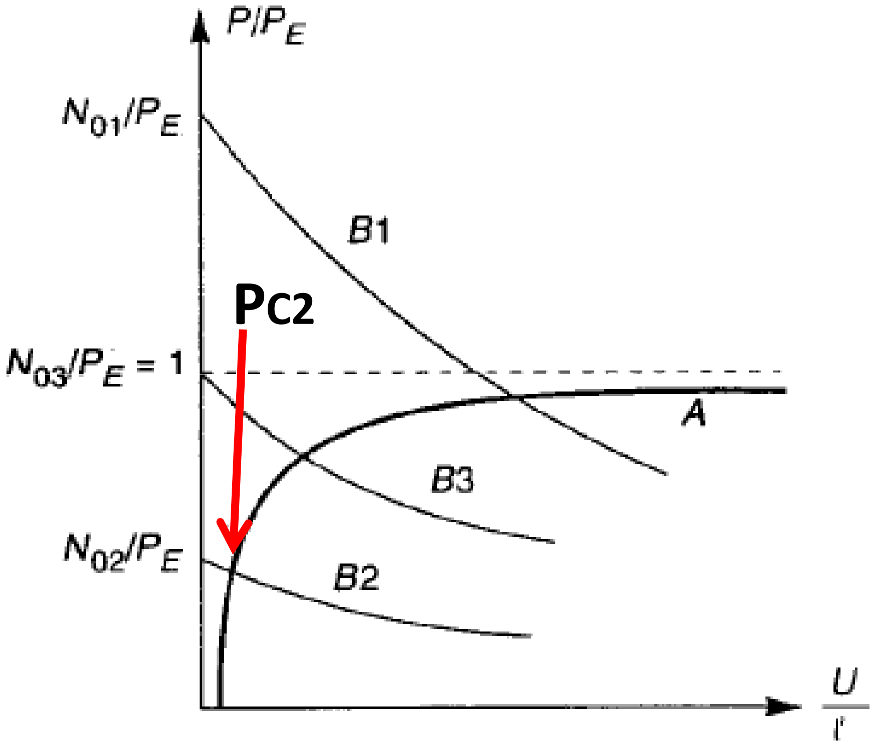


La relazione esprime la dipendenza del carico limite dallo spostamento massimo e si traduce nelle curve B in figura. Per esempio:

B_1 curva relativa a snellezza $\lambda_1 > \lambda_0$ asta snella il cui carico critico di schiacciamento N_{01} > P_E Euleriano

Il suo carico critico P_{C1} è di poco < P_E in quanto la risposta elastica ha avuto modo di avvicinare l'asintoto

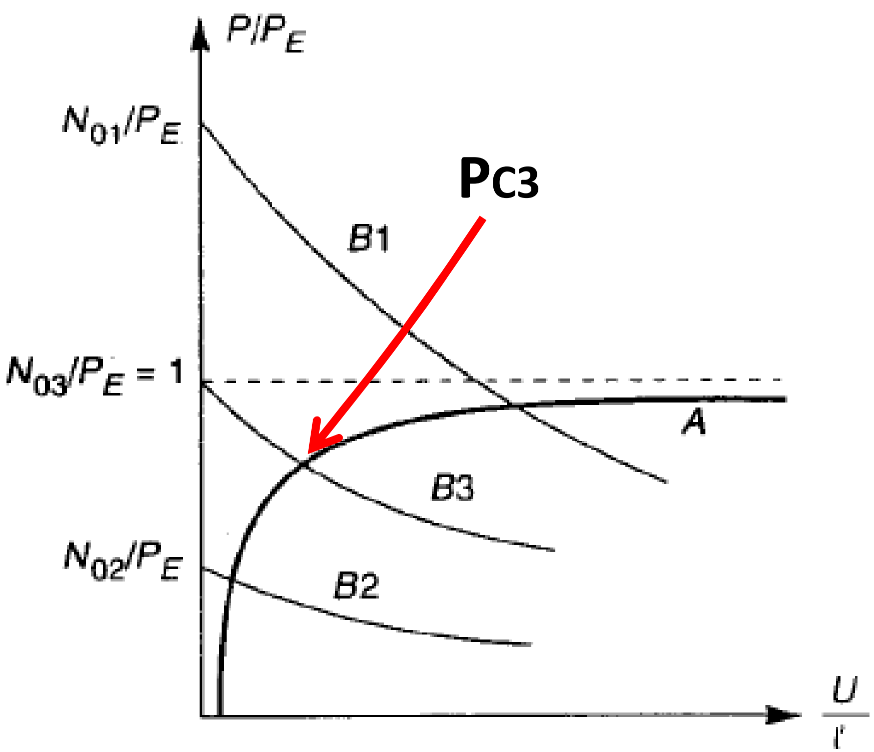
Influenza delle imperfezioni sulle curve di stabilità: limite elastico e collasso



B2 curva relativa a snellezza $\lambda_2 < \lambda_0$ asta tozza il cui carico critico di schiacciamento N_{02} molto minore del P_E Euleriano

Il carico critico P_{C2} è quasi pari al carico di schiacciamento

Influenza delle imperfezioni sulle curve di stabilità: limite elastico e collasso



B_3 curva relativa alla snellezza di transizione

$\lambda_3 = \lambda_0$

$N_{03}=P_E$

Interseca la curva elastica A proprio quando il deterioramento della rigidezza inizia ad amplificare l'effetto dell'imperfezione ed il carico critico P_{c3} è molto < sia al carico critico teorico P_E che al carico di schiacciamento N_{03}

Influenza delle imperfezioni sulle curve di stabilità: limite elastico e collasso

Introduciamo le grandezze adimensionali

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{N}_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad \Lambda = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \psi = \frac{\mathbf{U}}{\ell}\lambda_0, \quad \varsigma = \frac{\mathbf{U}_\varsigma}{\ell}\lambda_0$$

Vogliamo trovare una relazione adimensionale tra carico critico e spostamento

$$\boxed{\mu} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{P}_E} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{N}_0}\frac{\mathbf{N}_0}{\mathbf{P}_E} = \mathbf{s}\frac{\sigma_0}{\sigma_E} = \mathbf{s}\frac{\sigma_0\lambda^2}{\pi^2\mathbf{E}} = \mathbf{s}\frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} = \boxed{\mathbf{s}\Lambda^2}$$

Influenza delle imperfezioni sulle curve di stabilità: limite elastico e collasso

Date $\mathbf{s} = \dfrac{\mathbf{P}}{\mathbf{N}_0} = \dfrac{\sigma}{\sigma_0}, \quad \Lambda = \dfrac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \psi = \dfrac{\mathbf{U}}{\ell}\lambda_0, \quad \varsigma = \dfrac{\mathbf{U}_\varsigma}{\ell}\lambda_0$

La linea elastica nella situazione limite diviene $\mathbf{U} = \mathbf{v}(\frac{\ell}{2}) = \mathbf{U}_\varsigma \dfrac{1}{1 - \dfrac{\mathbf{P}}{\mathbf{P_E}}}$

$$\psi = \zeta \frac{1}{1 - \mathbf{s}\Lambda^2}$$

Mentre la relazione diviene $\mathbf{P} = \mathbf{N}_0 \dfrac{1}{1 + \dfrac{\mathbf{U}}{\mathbf{c}}} = \mathbf{N}_0 \dfrac{1}{1 + \dfrac{\mathbf{U}\lambda}{\ell}}$

$$\mathbf{s} = \frac{1}{1 + \psi\Lambda}$$

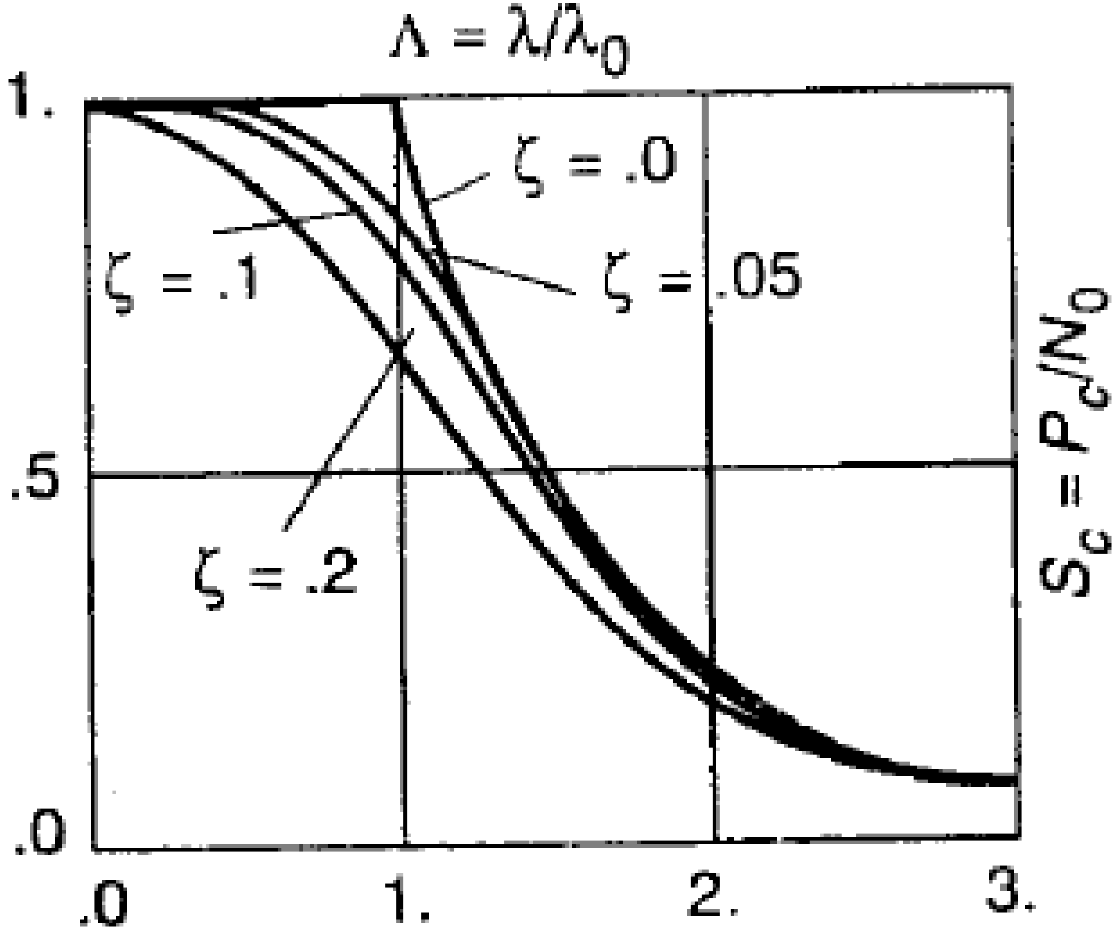
Influenza delle imperfezioni sulle curve di stabilità: limite elastico e collasso

Sostituendo $\psi = \zeta \dfrac{1}{1 - s\Lambda^2}$ **nella** $s = \dfrac{1}{1 + \psi\Lambda}$

Si ottiene un'equazione del II grado in s la cui radice minima definisce la capacità portante s_c dell'asta imperfetta

$$s_c = \frac{1}{2\Lambda^2}[1 + \Lambda^2 + \zeta\Lambda - \sqrt{(1 + \Lambda^2 + \zeta\Lambda)^2 - 4\Lambda^2}]$$

Influenza delle imperfezioni sulle curve di stabilità: limite elastico e collasso



La figura rappresenta s_c per alcuni valori del parametro relativo all'imperfezione ζ confrontandola con la curva teorica ottenuta per $\zeta=0$

Ad esempio se $\lambda=100$, la curva per $\zeta=0.1$ corrisponde a $U_\zeta=\ell/1000$; Per $\Lambda=1$ allora $\sigma_c \sim 73\%$ di $\sigma_E=\sigma_0$

Influenza della ridistribuzione degli sforzi sulla sezione

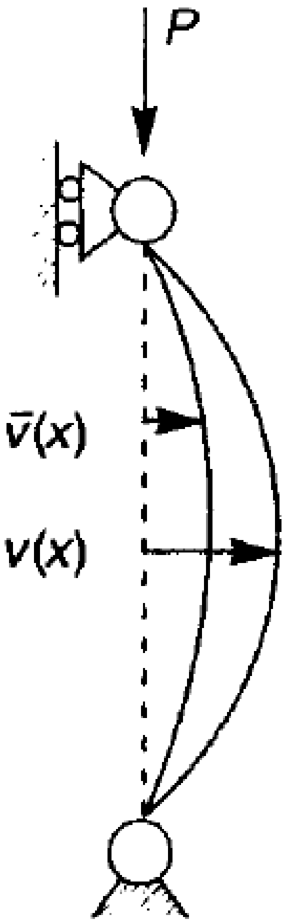
Una putrella ideale non ha altre risorse oltre quelle elastiche: una trave isostatica, esaurite le risorse elastiche collassa

In generale, altre sezioni possono ridistribuire gli sforzi conferendo alla struttura ulteriore resistenza

Per esempio, con riferimento alla sezione di mezzeria della trave incernierata avremo che per un certo valore del carico P_I si raggiunge lo snervamento nella fibra più sollecitata e la curva elastica

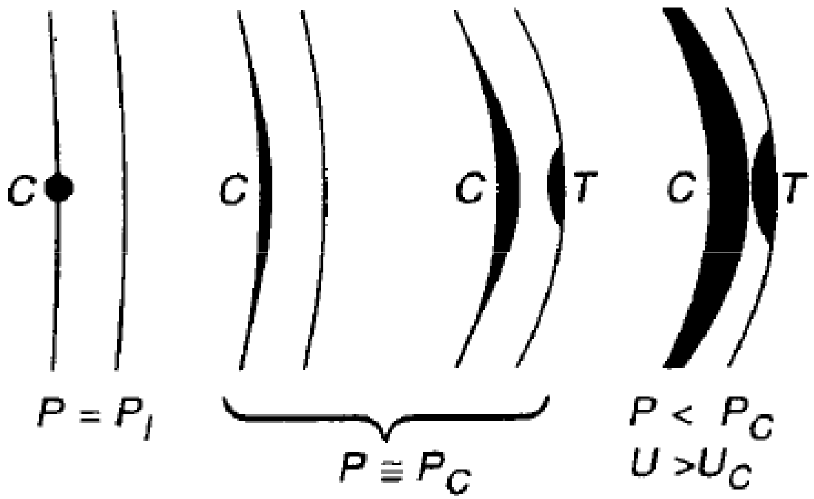
$$\mathbf{U} = \mathbf{v}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \mathbf{U}_{\varsigma}\,\frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{P}}{\mathbf{P_E}}}$$

viene abbandonata



Influenza della ridistribuzione degli sforzi sulla sezione

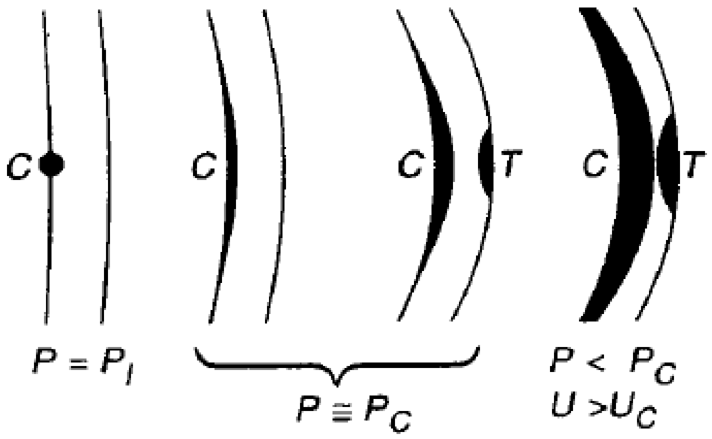
Per un certo valore del carico Pı si raggiunge lo snervamento nella fibra più sollecitata

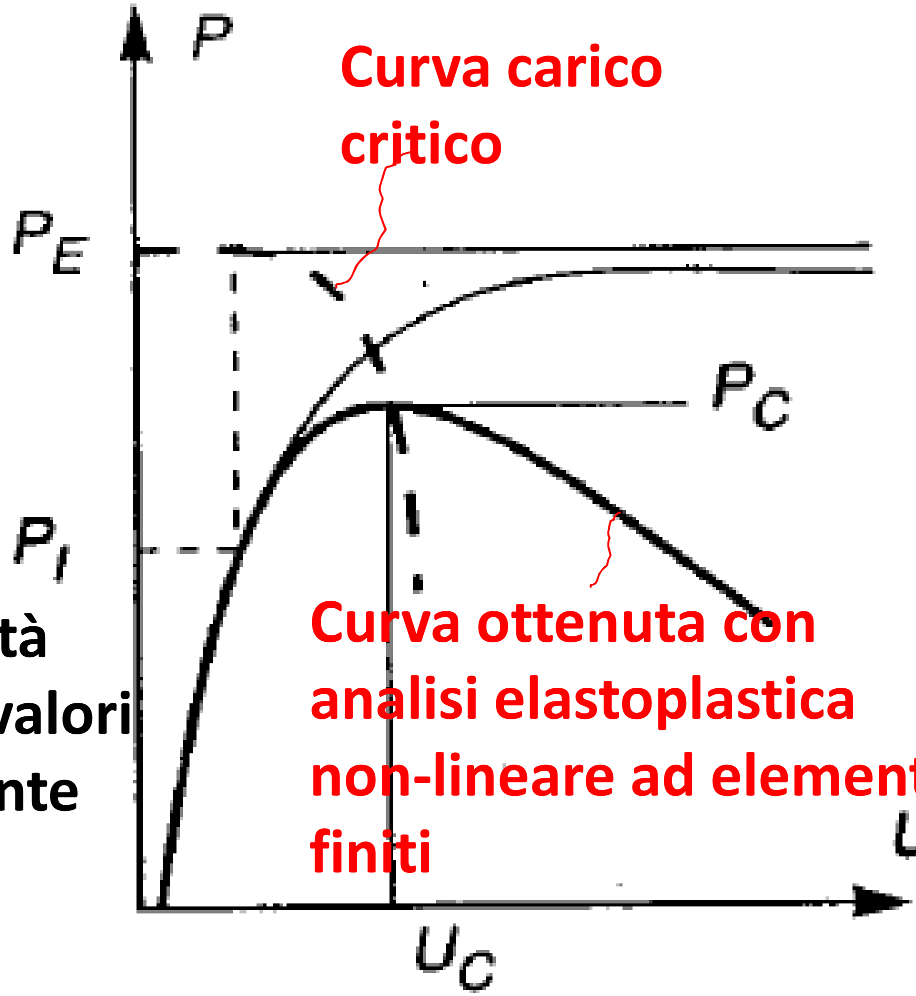


Inizialmente avremo un solo punto C della sezione plasticizzato ; al crescere del carico aumenta l’area plasticizzata e la rigidezza diminuisce . La freccia aumenta rispetto a quella elastica

I momenti flettenti possono plasticizzare a trazione anche fibre sul lato opposto finché le zone plasticizzate a compressione e quelle plasticizzate a trazione si uniscono
Si genera un meccanismo in mezzeria e le azioni N ed M si collocano sulla curva limite in mezzeria

Influenza della ridistribuzione degli sforzi sulla sezione





L'interazione tra plasticità e stabilità implica che il carico massimo < ai valori previsti considerando separatamente I due fenomeni

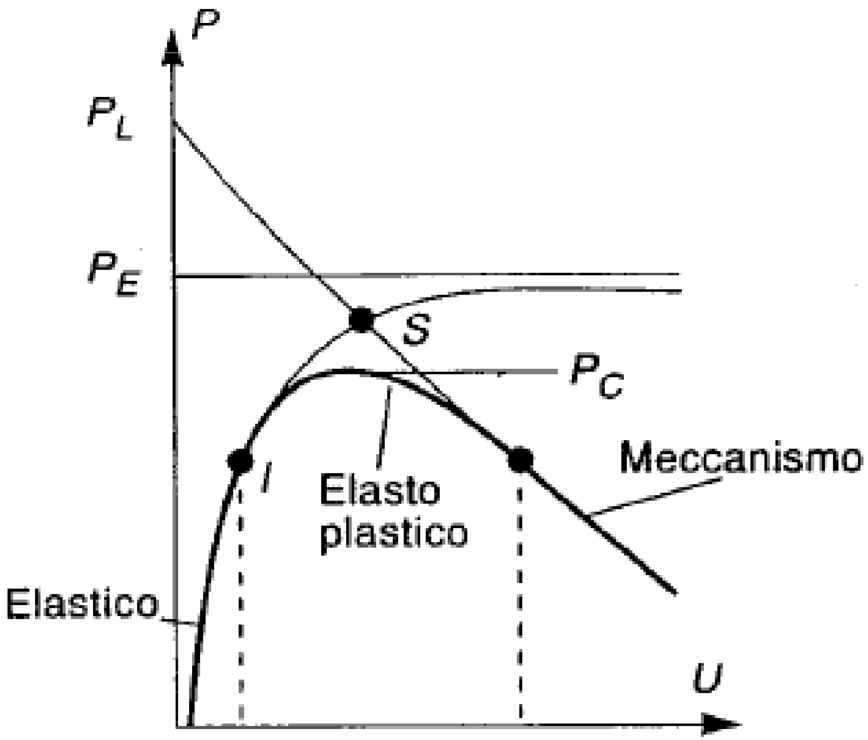
P_c è infatti < sia di P_E che di N_0

Il calcolo del carico massimo può essere svolto solo numericamente

Delimitazione superiore al carico di collasso

Oss: P_I rappresenta una delimitazione inferiore

esiste una delimitazione superiore P_S ?



1) Inizialmente la risposta è elastica e la freccia è data da

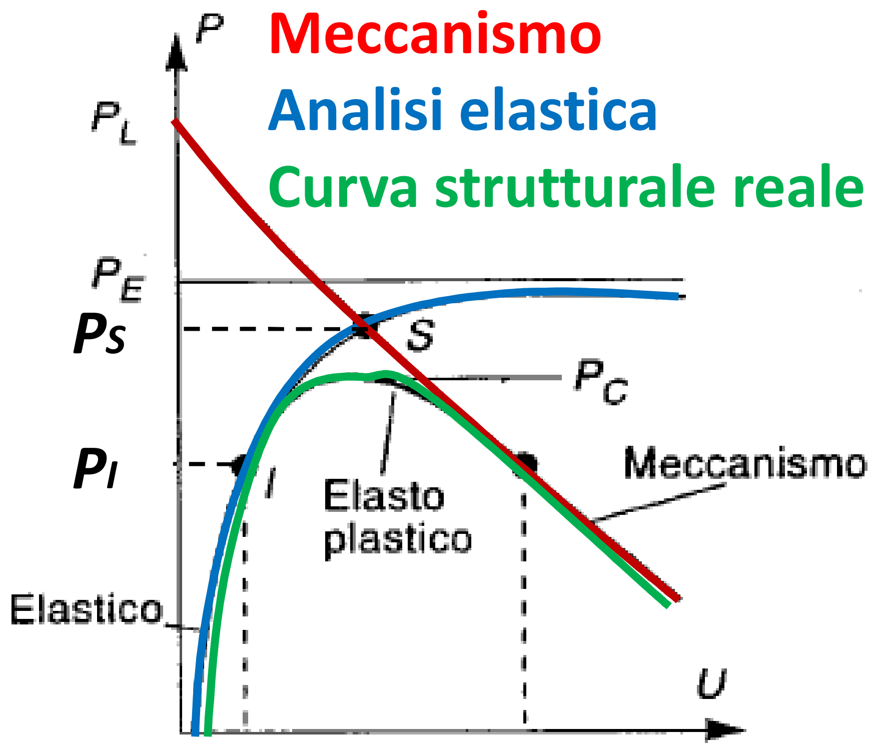
$$\mathbf{U} = \mathbf{v}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \mathbf{U}_{\varsigma} \frac{1}{1 - \dfrac{\mathbf{P}}{\mathbf{P_E}}}$$

2) Poi la risposta risente della plasticizzazione fino a PC

3) Tratto discendente curva: si forma un cinematismo

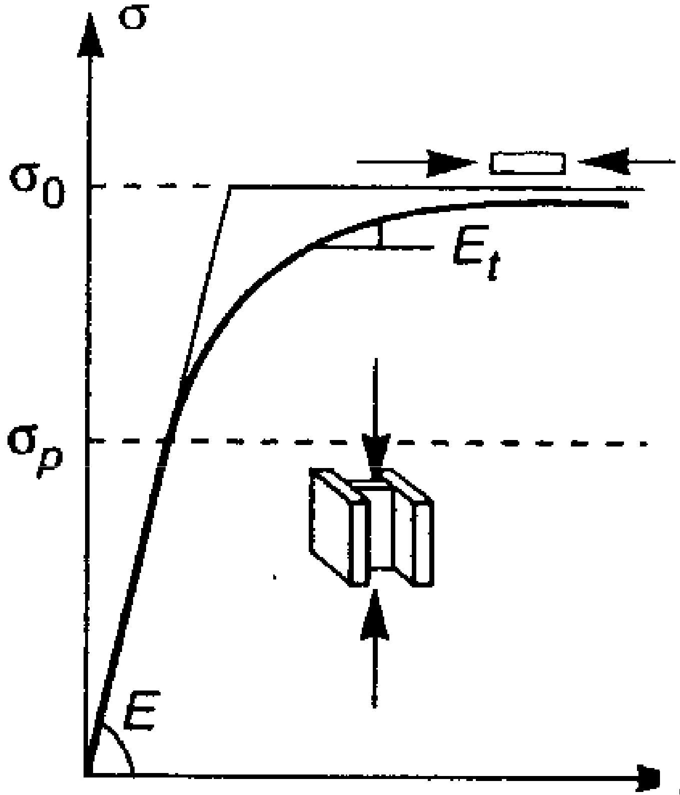
Delimitazione superiore al carico di collasso

Nella pratica nel tratto elasto-plastico in cui avviene il collasso la curva strutturale reale si troverà al di sotto della curva ottenuta dal calcolo elastico in grandi spostamenti e della curva del meccanismo (cinematismo) che si ottiene considerando l'equilibrio in configurazione deformata caratterizzata dalla cerniera plastica.

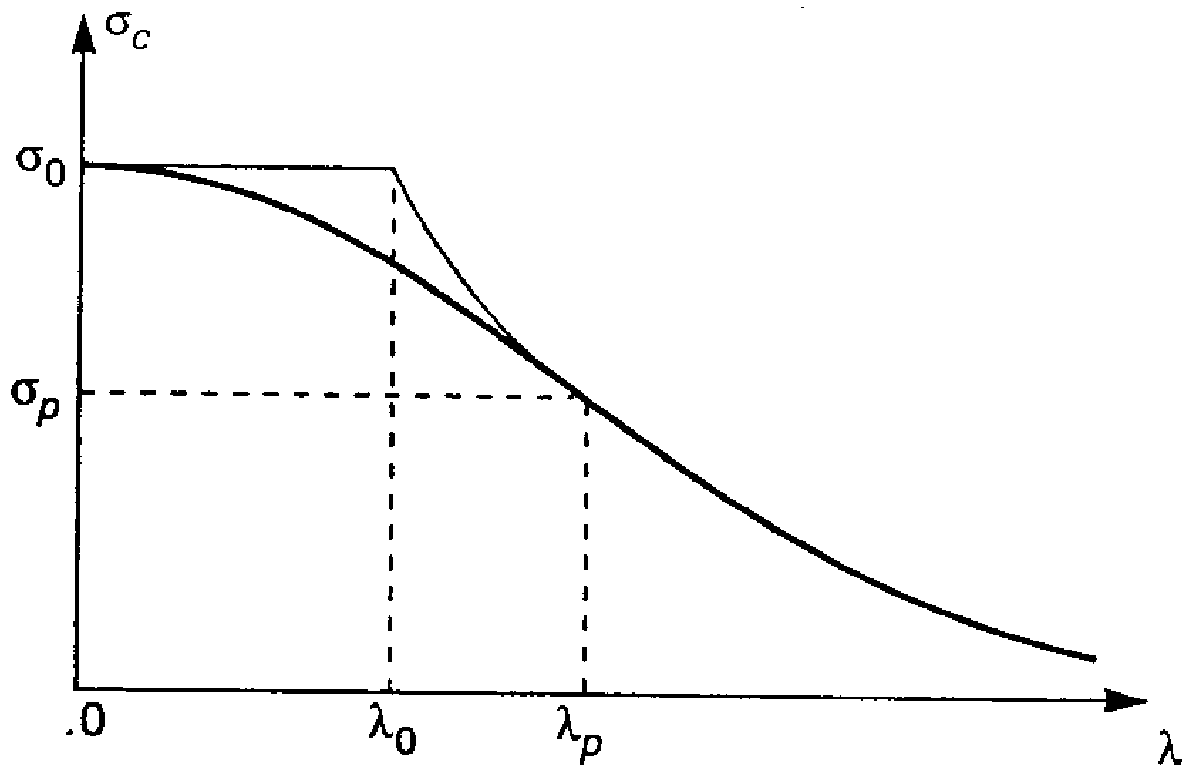


Il punto S individua la delimitazione superiore al carico critico

Curve di stabilità in caso di aste elasto-plastiche



Una volta raggiunta la snellezza corrispondente al limite di proporzionalità la curva di stabilità segue la formula di Shanley



Curve di stabilità per aste reali: osservazioni

1) Avevamo visto in analisi limite che le auto-tensioni non influenzano il carico di collasso. Ciò è vero solo nell'ipotesi di piccoli spostamenti.
2) Quando si considera l'equilibrio che si instaura in configurazione variata, si ha che effettivamente il carico di collasso è influenzato dalle auto-tensioni
3) La presenza di curvature iniziali o imperfezioni iniziali influenza il carico critico
4) Eccentricità dei carichi e variazioni del limite di snervamento lungo la struttura influenzano il valore del carico critico

Curve di stabilità per aste reali: osservazioni

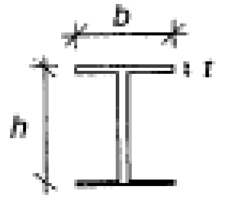
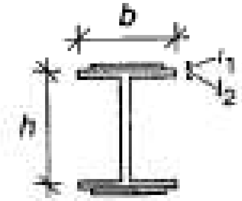
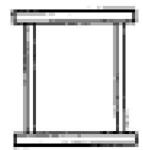
Pertanto si conglobano tutti gli effetti delle imperfezioni in un unico parametro espressione della deviazione dalla linearità iniziale

Occorre inoltre distinguere le curve di stabilità secondo
-la forma della sezione
-I valori della snellezza in quanto determinate imperfezioni possono avere conseguenze diverse in aste tozze ed aste snelle

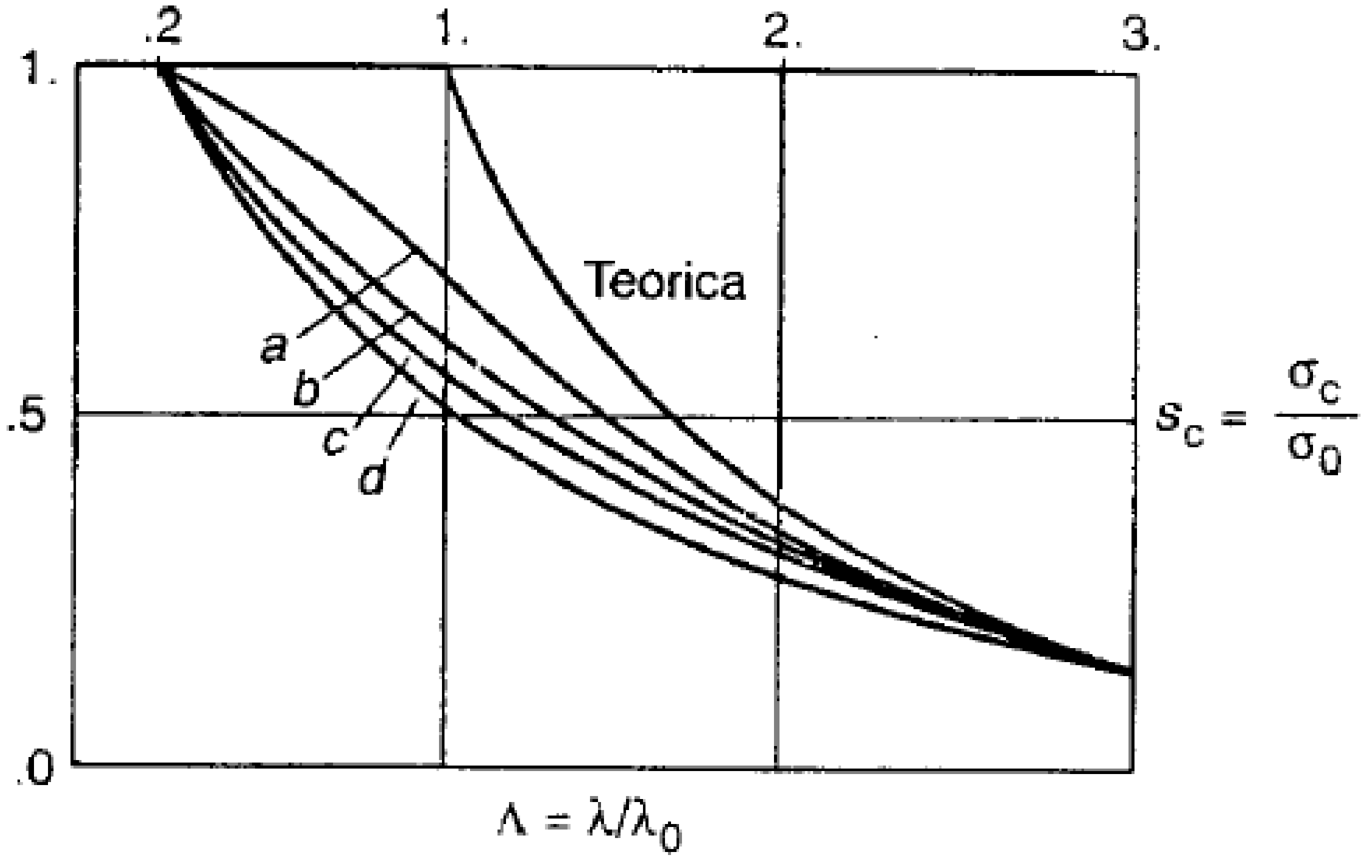
Classificazione secondo la normativa Italiana

Tabella 16.4

λ	S_c Curva *a*	Curva *b*	Curva *c*	Curva *d*
0.00	1.000	1.000	1.000	1.000
0.10	1.000	1.000	1.000	1.000
0.20	1.000	1.000	1.000	1.000
0.30	.978	.965	.951	.917
0.40	.953	.925	.900	.841
0.50	.923	.885	.843	.709
0.60	.885	.838	.733	.699
0.70	.844	.785	.719	.633
0.80	.796	.727	.655	.572
0.90	.739	.663	.593	.517
1.00	.674	.599	.537	.468
1.10	.606	.538	.486	.424
1.20	.540	.481	.439	.385
1.30	.480	.429	.395	.350
1.40	.427	.383	.357	.319
1.50	.381	.343	.323	.290
1.60	.341	.306	.293	.265
1.70	.306	.277	.266	.242
1.80	.277	.250	.241	.222
1.90	.251	.226	.219	.204
2.00	.228	.205	.200	.188
2.10	.208	.188	.183	.173
2.20	.190	.173	.169	.160
2.30	.175	.159	.158	.148
2.40	.162	.147	.147	.138
2.50	.149	.137	.137	.129
2.60	.138	.128	.128	.120
2.70	.128	.119	.119	.112
2.80	.119	.110	.110	.105
2.90	.112	.103	.103	.098
3.00	.105	.096	.096	.092

Aste	Forme della sezione		Curva
Semplici	Profili cavi quadri, rettangoli o tondi saldati o laminati $t \leq 40$ mm		*a*
Semplici	I laminati $\frac{h}{b} \geq 1.2$ $t \leq 40$		*b*
	I laminati rinforzati con piatti saldati $t_1 \leq 40$ $t_2 \leq 40$		
	Chiusa, a cassone, saldata $t \leq 40$		
Semplici o composte	Generica	$t \leq 40$ mm	*c*
	Tutte	$t > 40$ mm	*d*

Classificazione secondo la normativa Italiana



Capacità portante di travi presso-inflesse

Il comportamento di una trave presso-inflessa può essere assimilato a quella di un'asta imperfetta con inflessione iniziale

Ovviamente la soluzione elastica perde di validità quando si raggiunge la combinazione di momento M e sforzo normale N raggiunge il limite del dominio elastico nella sezione maggiormente sollecitata

La situazione di crisi è sempre dovuta ad instabilità della struttura parzialmente plasticizzata e corrisponde ad un valore del carico < di quello teorico P_L calcolato con l'analisi limite supponendo gli spostamenti piccoli

Capacità portante di travi presso-inflesse

Una stima della capacità portante di travi presso-inflesse è fornita dalla formula di Rankine

$$\frac{1}{P_R} = \frac{1}{P_E} + \frac{1}{P_L}$$

Dove:

P_R=carico critico predetto dalla formula di Rankine

P_E=carico critico Euleriano della trave compressa

P_L=carico critico limite calcolato nelle ipotesi di piccoli spostamenti tenendo conto di un comportamento elasto-plastico perfetto (detto anche carico di collasso rigido-plastico)

Capacità portante di travi presso-inflesse

Essendo nella maggior parte dei casi $P_L << P_E$ la formula di Rankine si riscrive come

$$P_R = P_L \frac{1}{1+\frac{P_L}{P_E}}$$

Cosicché P_R si ottiene riducendo P_L ovvero moltiplicando P_L per un coefficiente <1

OSS: la formula di Rankine è limitata solo a casi in cui la deformata critica assomiglia al meccanismo di collasso rigido-plastico → la formula non si utilizza per le verifiche

Dominio limite di travi presso-inflesse

Le verifiche si solito si basano sulla ricostruzione di un dominio ammissibile per i carichi esterni

la delimitazione del dominio ammissibile, definita *Curva di Interazione*, sarà una funzione della snellezza λ dell'asta

Vediamo la costruzione della curva di interazione per il caso della trave isostatica incernierata presso-inflessa in figura

Dominio limite di travi presso-inflesse

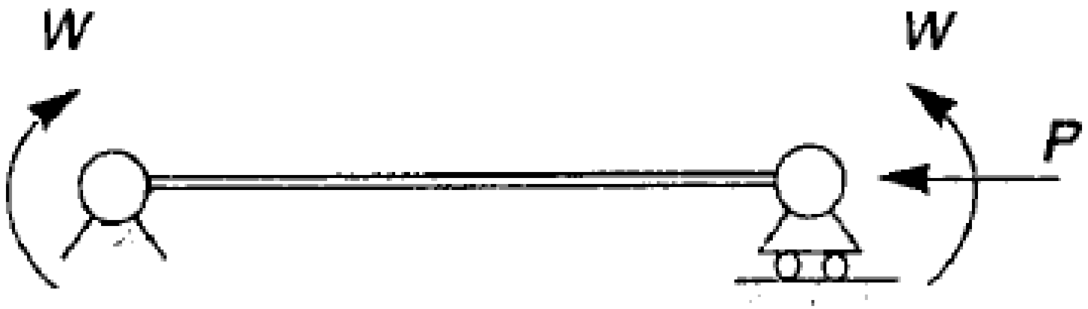
Supponiamo che la sezione della trave sia una putrella ideale
In tal caso il domino limite di interazione si scrive come

$$\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{N}_0} + \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{M}_0} = 1$$

Poiché la trave è isostatica, l'esaurimento delle risorse elastiche implica il collasso della trave stessa

Pertanto la curva di interazione si ottiene sostituendo N_{max} ed M_{max} nel dominio limite di interazione

Dominio limite di travi presso-inflesse



Mentre lo sforzo normale

N=P

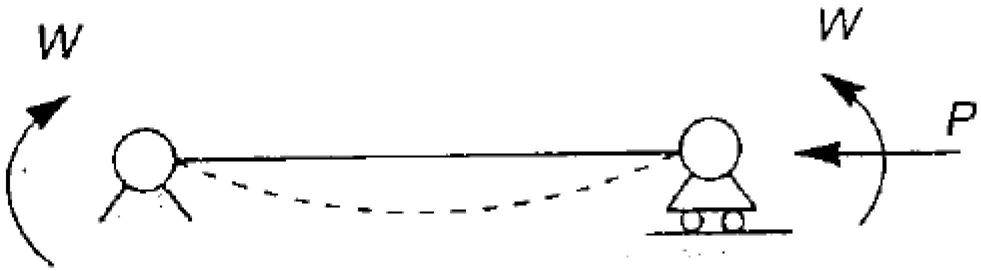
si dimostra che (LC III pagg 345 -350) il momento massimo nel caso in esame si può ottenere attraverso l'approssimazione

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\max} = \frac{\mathbf{W}}{1 - \dfrac{\mathbf{P}}{\mathbf{P_E}}}$$

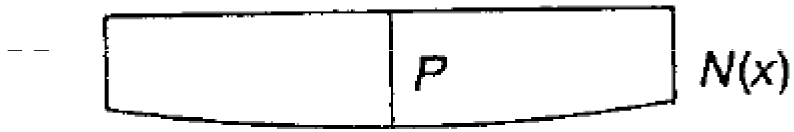
Dove $\beta = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\mathbf{P}}{\mathbf{P_E}}}$ **è detto fattore di amplificazione di M**

Dominio limite di travi presso-inflesse

Infatti i diagrammi delle azioni interne tenendo conto della non linearità diventano



$$N_{max}$$



$$M_{max} = \frac{W}{1 - \frac{P}{P_E}}$$

Dominio lomite di travi presso-inflesse

Sostituendo N_{max} ed M_{max} nel dominio di interazione si ha:

$$\frac{W}{M_0} = \left(1 - \frac{P}{N_0}\right)\left(1 - \frac{P}{P_E}\right)$$

Vogliamo adimensionalizzare il dominio di interazione

Poniamo

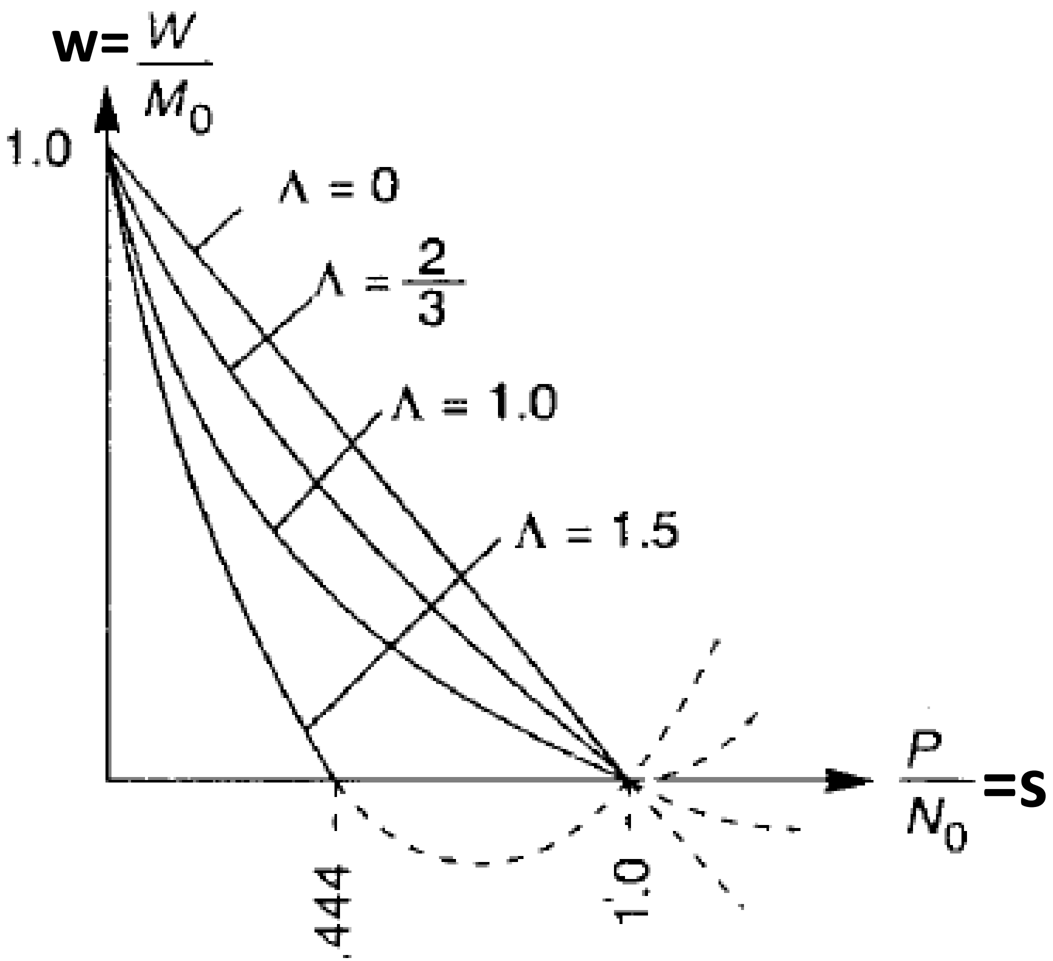
$$s = \frac{P}{N_0}, \quad \Lambda = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad w = \frac{W}{M_0}, \quad \mu = \frac{P}{P_E}$$

Otteniamo $$w = (1 - s)(1 - \mu) = (1 - s)(1 - s\Lambda^2)$$

Essendo $$\mu = \frac{P}{P_E} = \frac{P}{N_0}\frac{N_0}{P_E} = s\frac{\lambda^2}{\lambda_0^{\,2}} = s\Lambda^2$$

Dominio limite di travi presso-inflesse

Le equazioni $$w = (1 - s)(1 - \mu) = (1 - s)(1 - s\Lambda^2)$$
definiscono delle parabole nel piano (s,w)



Oss: per w=0 dovremmo trovare $s=s_c$ previsto dalla curva di stabilità dell'asta reale ed invece si trova s=1 cioè $P=N_0$

Questo non è accettabile

Le parabole così ottenute non sono soddisfacenti

Dominio limite di travi presso-inflesse

Per tenere conto della presenza di imperfezioni si è proposto

1) Di sostituire N_0 con P_c dell'asta reale nelle formule appena viste

$$\frac{\mathbf{W}}{\mathbf{M}_0} = \left(1 - \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{P_c}}\right)\left(1 - \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{P_E}}\right), \qquad \mathbf{w} = \left(1 - \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s_c}}\right)\left(1 - \mathbf{s}\Lambda^2\right)$$

2) Di considerare un'imperfezione geometrica sinusoidale

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_\varsigma \sin\frac{\pi \mathbf{x}}{\ell} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{v}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \mathbf{U}_\varsigma \frac{1}{1 - \dfrac{\mathbf{P}}{\mathbf{P_E}}}$$

Dominio limite di travi presso-inflesse

2) Se si considera un'imperfezione geometrica sinusoidale il momento massimo risulta

$$\mathbf{M}_{\max} = \frac{\mathbf{W}}{1 - \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{P_E}}} + \mathbf{PU} = \frac{\mathbf{W} + \mathbf{PU}_{\varsigma}}{1 - \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{P_E}}}$$

Sostituendo si ottiene una curva di interazione del tipo

$$\mathbf{w} = (1 - \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s_c}})(1 - \mathbf{s}\Lambda^2) - \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s_c}}(1 - \mathbf{s_c})(1 - \mathbf{s_c}\Lambda^2)$$

Dominio limite di travi presso-inflesse

Vogliamo confrontare tra loro

a) la curva teorica

$$\mathbf{w} = (1-\mathbf{s})(1-\mu) = (1-\mathbf{s})(1-\mathbf{s}\Lambda^2)$$

Che non tiene conto delle imperfezioni

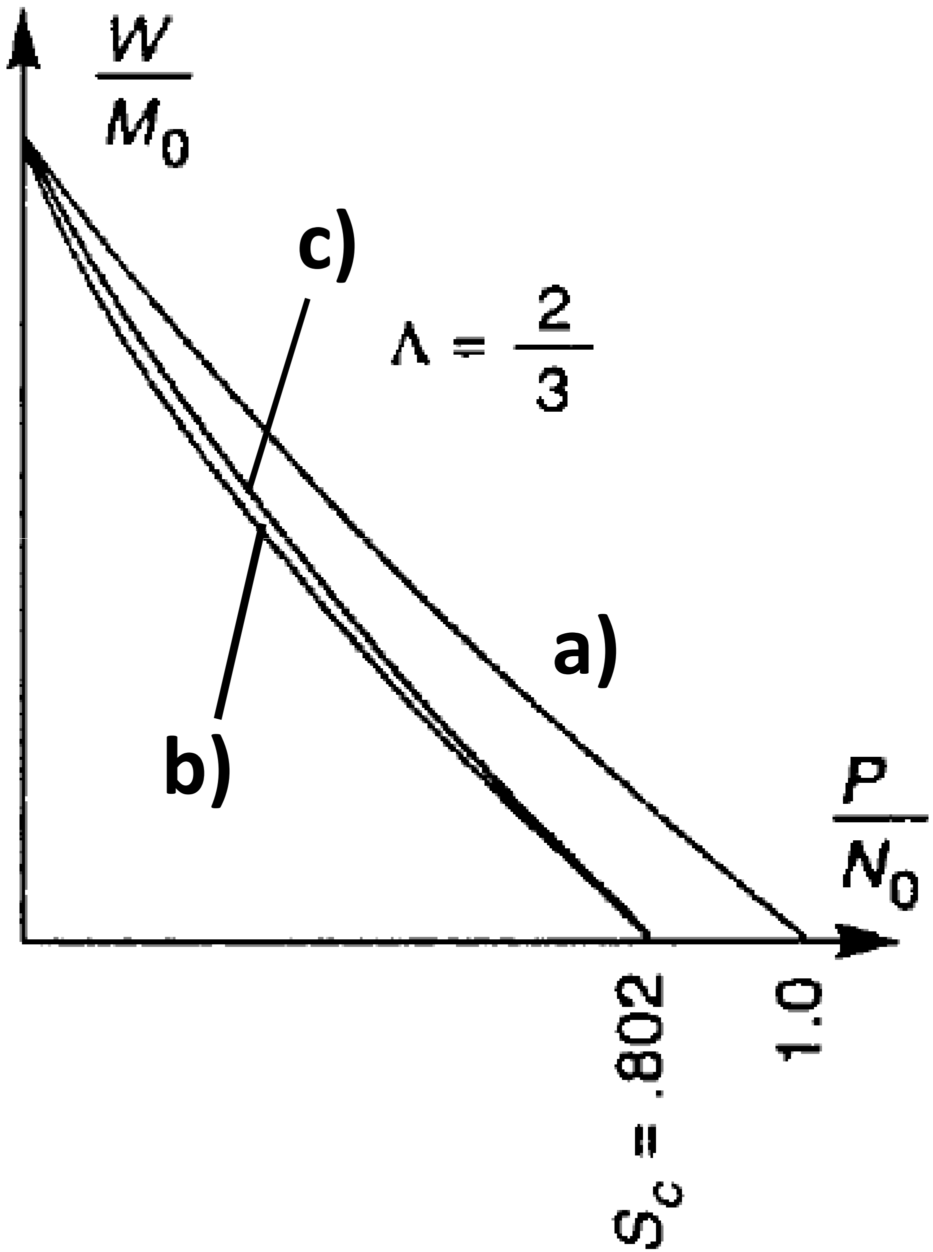
b) la curva ottenuta considerando P_c dell'asta compressa al posto del carico di schiacciamento N_0

$$\mathbf{w} = (1-\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s_c}})(1-\mathbf{s}\Lambda^2)$$

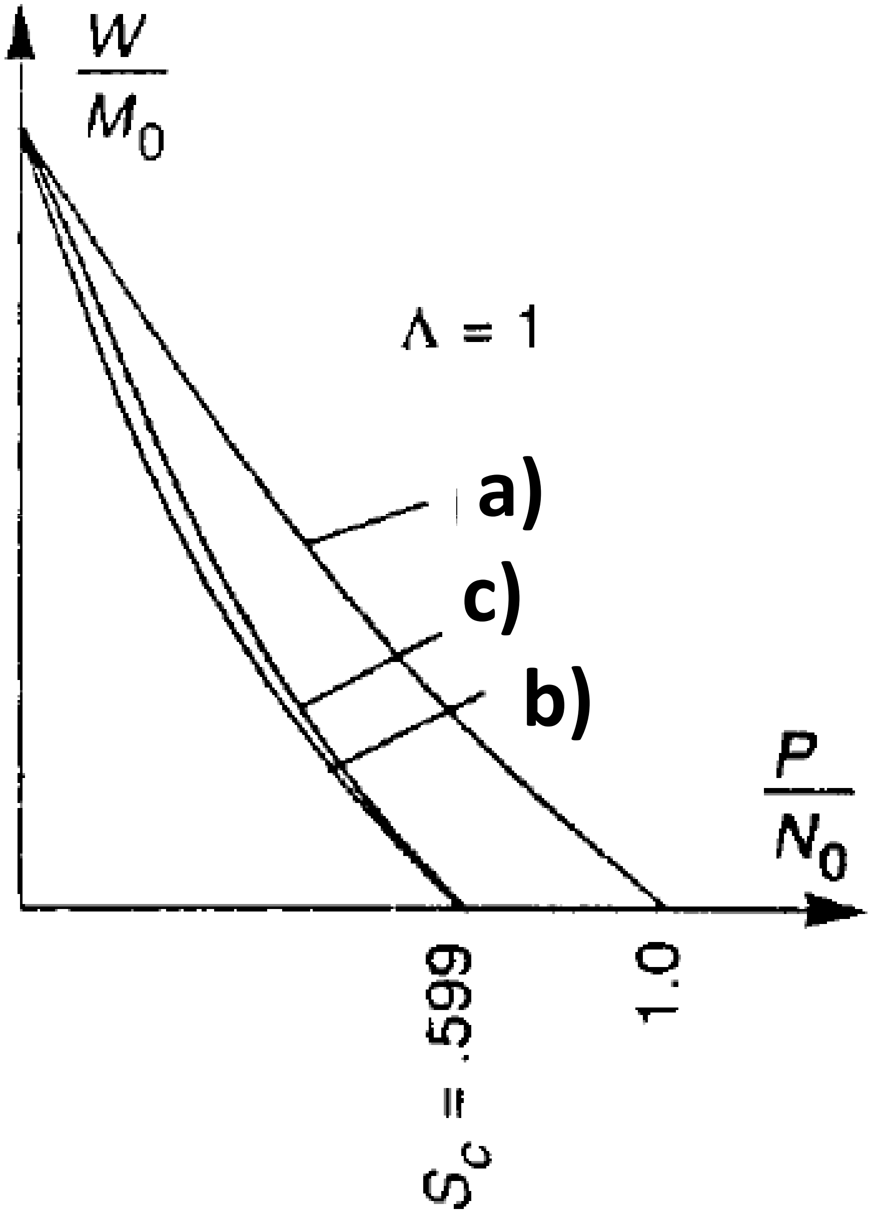
c) La curva ottenuta considerando una imperfezione geometrica sinuosoidale

$$\mathbf{w} = (1-\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s_c}})(1-\mathbf{s}\Lambda^2) - \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s_c}}(1-\mathbf{s_c})(1-\mathbf{s_c}\Lambda^2)$$

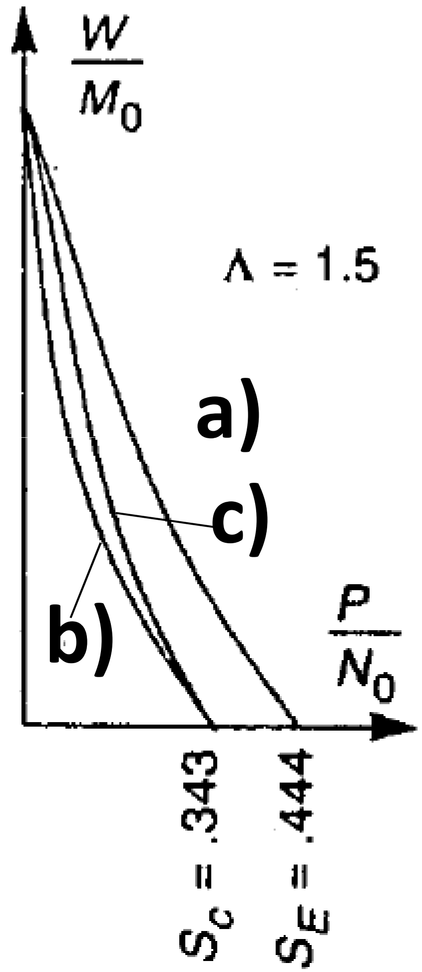
Dominio limite di travi presso-inflesse



Dominio limite di travi presso-inflesse



Dominio limite di travi presso-inflesse



Il divario tra la curva b) la curva c) aumenta all'aumentare della snellezza adimensionale Λ