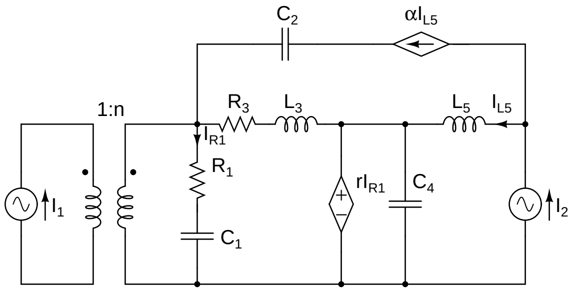
Esame di Teoria dei Circuiti - 8 gennaio 2010 (Soluzione)

Esercizio 1

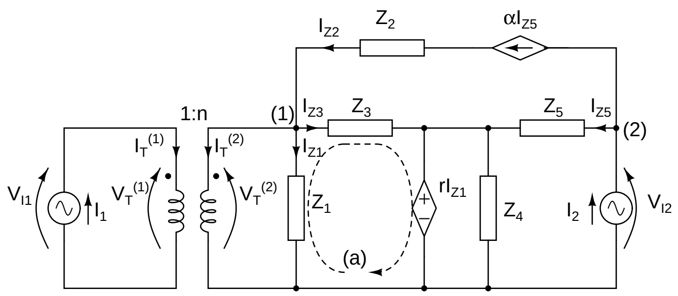


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$\omega = 100\,\text{rad/s}$, $R_1 = 200\,\Omega$, $C_1 = 50\,\mu\text{F} = 50 \cdot 10^{-6}\,\text{F}$, $C_2 = 20\,\mu\text{F} = 20 \cdot 10^{-6}\,\text{F}$, $R_3 = 200\,\Omega$, $L_3 = 2\,\text{H}$, $C_4 = 100\,\mu\text{F} = 100 \cdot 10^{-6}\,\text{F}$, $L_5 = 6\,\text{H}$, $\alpha = 3$, $r = 200\,\Omega$, $n = 500$, $I_1(t) = 7.5\cos(\omega t + \pi/2)\text{A}$, $I_2(t) = 20\cos(\omega t - \pi)\text{mA}$.

Calcolare la potenza attiva e reattiva erogata dai due generatori ideali di corrente I_1 e I_2.

Soluzione

Nel dominio dei fasori il circuito può essere ridisegnato come



con $Z_1 = 200\,\Omega - 200j\,\Omega$, $Z_2 = -500j\,\Omega$, $Z_3 = 200\,\Omega + 200j\,\Omega$, $Z_4 = -100j\,\Omega$, $Z_5 = 600j\,\Omega$, $r = 200\,\Omega$, $I_1 = 7.5\,e^{j\pi/2}\,\text{mA} = 7.5j\,\text{A}$, $I_2 = 20\,e^{-j\pi}\,\text{m}A = -20\,\text{mA}$.

Si noti inoltre che per via di tali sostituzioni, è inoltre necessario sostituire i due generatori comandati αI_{L5} e rI_{R1} rispettivamente con i generatori αI_{Z5} e rI_{Z1}.

Per iniziare, si osservi che $I_{Z2} = \alpha I_{Z5}$. Inoltre, si considerino le equazioni di bilancio delle correnti ai nodi (1) e (2) e l'equazione di bilancio delle tensioni alla maglia (a):

$$\begin{aligned} (1) \quad & \alpha I_{Z5} = I_{Z1} + I_{Z3} + I_T^{(2)} \\ (2) \quad & I_2 = I_{Z5} + \alpha I_{Z5} \\ (a) \quad & Z_1 I_{Z1} = Z_3 I_{Z3} + rI_{Z1} \end{aligned}$$

Dalla (2) si ricava

$$I_{Z5} = \frac{1}{1+\alpha} I_2$$

mentre dalla (a) si ha

$$I_{Z3} = \frac{Z_1 - r}{Z_3} I_{Z1}$$

Sostituendo queste espressioni in (1), si ricava I_{Z1}

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} I_2 = I_{Z1} + \frac{Z_1 - r}{Z_3} I_{Z1} + I_T^{(2)}$$

$$I_{Z1} = \frac{-I_T^{(2)} + \dfrac{\alpha}{1+\alpha} I_2}{\dfrac{Z_1 + Z_3 - r}{Z_3}}$$

Per determinare V_{I1} si considerino le equazioni del trasformatore:

$$\begin{cases} V_T^{(2)} = n V_T^{(1)} \\ I_T^{(1)} = -n I_T^{(2)} \end{cases}$$

$$V_{I1} = V_T^{(1)} = \frac{V_T^{(2)}}{n} = \frac{Z_1 \, I_{Z1}}{n} = \frac{Z_1 \, Z_3}{n} \frac{\dfrac{I_1}{n} + \dfrac{\alpha}{1+\alpha} I_2}{Z_1 + Z_3 - r} = -12\,\mathrm{mV} + 12j\,\mathrm{mV}$$

La potenza complessa erogata dal generatore I_1 è definita come

$$N_{I1} = P_{I1} + jQ_{I1} = \frac{1}{2} V_{I1} I_1^*$$

dove $I_1^* = -7.5j$ A è il complesso coniugato di I_1. Usando i valori determinati sopra, $N_{I1} = 45\,\mathrm{mW} + 45j\,\mathrm{mVAR}$, ovvero $P_{I1} = 45\,\mathrm{mW}$ e $Q_{I1} = 45\,\mathrm{mVAR}$.

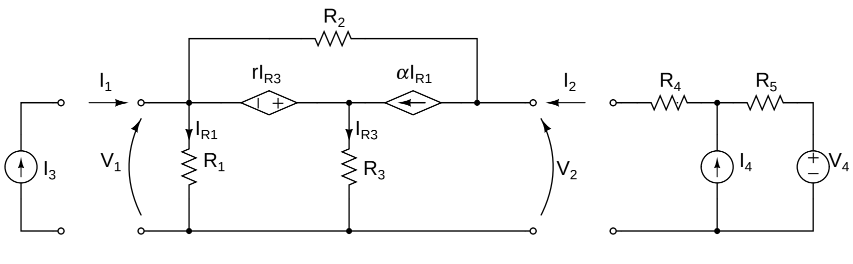
Per determinare V_{I2} basta osservare che

$$V_{I2} = rI_{Z1} + Z_5 I_{Z5} = rZ_3 \frac{\dfrac{I_1}{n} + \dfrac{\alpha}{1+\alpha} I_2}{Z_1 + Z_3 - r} + Z_5 \frac{1}{1+\alpha} I_2 = -6\,\mathrm{mV} - 3j\,\mathrm{mV}$$

$$N_{I1} = \frac{1}{2} V_{I1} I_1^* = 60\,\mathrm{mW} + 30j\,\mathrm{mVAR}$$

con quindi $P_{I1} = 60\,\mathrm{mW}$ e $P_{I1} = 30\,\mathrm{mVAR}$.

Esercizio 2



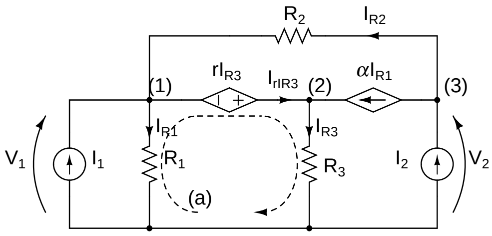
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $R_3 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $r = 4\,\mathrm{k}\Omega$, $\alpha = \frac{3}{2}$, $I_3 = 2\,\mathrm{mA}$, $I_4 = 1\,\mathrm{mA}$, $V_4 = 3\,\mathrm{V}$, $R_4 = R_5 = 1\,\mathrm{k}\Omega$.
Calcolare:

- la matrice R delle resistenze del due porte indicato in figura;
- il circuito equivalente di Thevenin alla porta 1 del due porte calcolato al punto precedente, quando alla porta 2 viene collegato il circuito formato dai generatori ideali I_4 e V_4 e le resistenze R_4 e R_5, come mostrato in figura;
- il circuito equivalente di Norton alla porta 2 quando alla porta 1 viene collegato il generatore ideale di corrente I_3;

- la potenza dissipata dal due porte quando entrambi i circuiti formati da I_3, I_4, V_4, R_4 e R_5 vengono collegati al due porte stesso.

Soluzione

Per trovare la matrice delle resistenze $\underline{R}$ si supponga di collegare al due porte i due generatori ideali di corrente I_1 e I_2 e di calcolare le tensioni V_1 e V_2 ai loro capi. Si definisca inoltre un verso arbitrario per le correnti I_{R2} e I_{rIR3}.



Si consideri il sistema costituito dalle equazioni di bilancio delle correnti ai nodi (1), (2) e (3)

$$
\begin{aligned}
(1):&\quad I_1 + I_{R2} = I_{R1} + I_{rIR3}\\
(2):&\quad I_{rIR3} + \alpha I_{R1} = I_{R3}\\
(3):&\quad I_2 = \alpha I_{R1} + I_{R2} = 0
\end{aligned}
$$

che sommando membro a membro la (1) e la (2) può essere ridotto in

$$
\begin{aligned}
(1)+(2):&\qquad I_1 + I_{R2} + \alpha I_{R1} = I_{R1} + I_{R3}\\
(3):&\qquad I_2 = \alpha I_{R1} + I_{R2} = 0
\end{aligned}
$$

Dalla (2) si ha $I_{R2} = I_2 - \alpha I_{R1}$; inoltre dal bilancio delle tensioni alla maglia indicata con (a) si ha $R_1 I_{R1} + r I_{R3} = R_3 I_{R3}$, ovvero

$$I_{R3} = -\frac{R_1}{r - R_3} I_{R1}$$

Sostituiti nella $(1)+(2)$, è possibile ricavare I_{R1}

$$I_1 + I_2 - \cancel{\alpha I_{R1}} + \cancel{\alpha I_{R1}} = I_{R1} - \frac{R_1}{r - R_3} I_{R1}$$

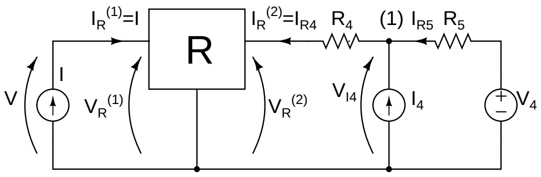
$$I_{R1} = \frac{r - R_3}{r - R_1 - R_3}\,(I_1 + I_2)$$

con cui è possibile ricavare V_1 e V_2

$$V_1 = R_1 I_{R1} = \underbrace{R_1 \frac{r - R_3}{r - R_1 - R_3}}_{R_{11} = R_{12} = 2\,\mathrm{k}\Omega}(I_1 + I_2)$$

$$
\begin{aligned}
V_2 = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} = (R_1 - \alpha R_2)\, I_{R1} + R_2 I_2 =\\
= \underbrace{(R_1 - \alpha R_2)\frac{r - R_3}{r - R_1 - R_3}}_{R_{21} = -1\,\mathrm{k}\Omega} I_1 + \underbrace{\left((R_1 - \alpha R_2)\frac{r - R_3}{r - R_1 - R_3} - \alpha R_2\right)}_{R_{22} = 0} I_2
\end{aligned}
$$

Per il secondo punto dell'esercizio, si consideri il seguente circuito, dove per calcolare il circuito equivalente di Thevenin si è collegato alla porta 1 un generatore ideale di corrente I



Si indichino con $V_R^{(1)}$ e $I_R^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di R, e con $V_R^{(2)}$ e $I_R^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2, con $I_R^{(1)} = I$, $I_R^{(2)} = I_{R4}$ e (usando l'equazione della matrice $\underline{R}$ trovata al punto precedente) $V_R^{(2)} = R_{12}I$.

Dal bilancio delle correnti al nodo (1) è possibile ricavare V_{I4} e I_{R4}

$$I_4 + I_{R5} = I_{R_4}, \qquad I_4 + \frac{V_4 - V_{I4}}{R_5} = \frac{V_{I4} - R_{12}I}{R_4}$$

$$V_{I4} = \frac{\dfrac{R_{12}}{R_4}I + I_4 + \dfrac{V_4}{R_5}}{\dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_5}}$$

(Nota: si poteva arrivare allo stesso risultato applicando direttamente il teorema di Milmann)

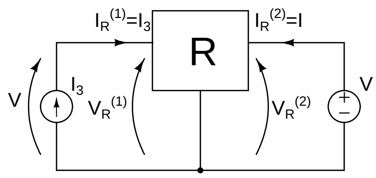
$$I_R^{(2)} = I_{R4} = \frac{V_{I4} - V_R^{(2)}}{R_4} = \frac{\dfrac{R_{21}}{R_4}I + I_4 + \dfrac{V_4}{R_5}}{1 + \dfrac{R_4}{R_5}} - \frac{R_{21}}{R_4}I = \frac{R_5 I_4 + V_4 - R_{21}I}{R_4 + R_5}$$

È ora possibile trovare V

$$V = V_R^{(1)} = R_{11}I + R_{12}I_4 = R_{11}I + R_{12}\frac{R_5 I_4 + V_4 - R_{21}I}{R_4 + R_5} =$$

$$= \underbrace{R_{12}\frac{R_5 I_4 + V_4}{R_4 + R_5}}_{V^{(eq)} = 4\,\mathrm{V}} + \underbrace{\left(R_{11} - \frac{R_{21}}{R_4 + R_5}\right)}_{R^{(eq)} = 3\,\mathrm{k\Omega}} I$$

Per calcolare il circuito equivalente di Norton alla porta 2, si consideri invece il seguente circuito



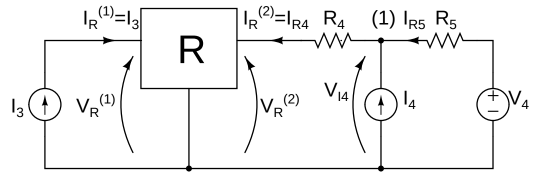
dove si collegato un generatore ideale di tensione V per calcolarne la corrente I. Usando l'equazione della matrice $\underline{R}$ si ha

$$V_R^{(2)} = R_{21}I_3 = V$$

Che *non ha soluzione* in I. Ricordando che V è arbitraria, per $V \neq R_{21}I_3 = -2\,\mathrm{V}$ l'equazione trovata non può essere risolta, mentre per $V = R_{21}I_3 = -2\,\mathrm{V}$ la I resta indeterminata. Il circuito considerato non è controllabile in tensione, ovvero il circuito equivalente di Norton <u>*non esiste*</u>.

Per verifica, è possibile calcolare il circuito equivalente di Thevenin, che consiste appunto in un generatore ideale di tensione con $V^{(eq)} = -2\,\mathrm{V}$.

Per l'ultimo punto, si consideri invece il seguente circuito



dove la potenza dissipata da R è data da

$$P_R = V_R^{(1)} I_R^{(1)} + V_R^{(2)} I_R^{(2)} = \left(R_{11} I_R^{(1)} + R_{12} I_R^{(2)}\right) I_R^{(1)} + R_{21} I_R^{(1)} I_R^{(2)}$$

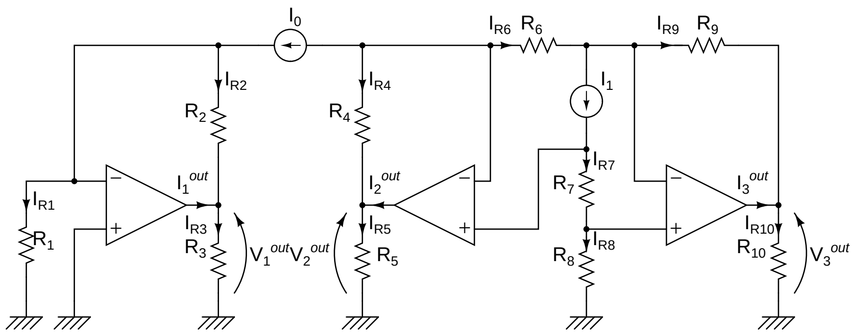
$$= R_{11} \left(I_R^{(1)}\right)^2 + (R_{12} + R_{21})\, I_R^{(1)} I_R^{(2)}$$

Si noti che il circuito è identico a quello considerato al punto 2, dalla cui soluzione si ricava

$$I_R^{(2)} = \frac{R_5 I_4 + V_4 - R_{21} I_3}{R_4 + R_5} = 3\,\mathrm{mA}$$

da cui $P_R = 14\,\mathrm{mW}$.

Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = \ldots = R_{10} = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $I_0 = 2\,\mathrm{mA}$, $I_1 = 1\,\mathrm{mA}$. Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Calcolare le tensioni di uscita V_1^{out}, V_2^{out} e V_3^{out}, e le correnti di uscita I_1^{out}, I_2^{out} e I_3^{out} dei tre amplificatori operazionali.

Soluzione

Si considerino i versi delle correnti indicati in figura. Per il corto circuito virtuale sugli ingressi dell'operazionale 1 si ha

$$V_1^- = V_1^+ = 0$$

e quindi $I_{R1} = 0$. Inoltre, dato che per ipotesi gli ingressi degli operazionali non assorbono corrente, si ha $I_{R2} = I_0 - I_{R1} = I_0$. Quindi per l'amplificatore operazionale 1 si ha

$$V_1^{out} = V_1^- - R_2 I_{R2} = -R_2 I_0 = -2\,\mathrm{V}$$

$$I_1^{out} = -I_0 + I_{R3} = -I_0 + \frac{V_1^{out}}{R_3} = -4\,\mathrm{mA}$$

Per quanto riguarda gli operazionale 2 e 3 si ha $I_1 = I_{R7} = I_{R8}$, e quindi:

$$V_3^- = V_3^+ = R_8 I_1$$

$$V_2^- = V_2^+ = (R_7 + R_8)\, I_1$$

Si osservi inoltre che $I_{R6} = \frac{V_2^- - V_3^-}{R_6} = \frac{R_7}{R_6} I_1$. Da questo è possibile calcolare I_{R4} ed I_{R9} e quindi le uscite degli operazionali.

$$I_{R4} = -I_0 - I_{R6} = -I_0 - \frac{R_7}{R_6} I_1$$

$$V_2^{out} = V_2^- - R_4 I_{R4} = (R_7 + R_8)\, I_1 + R_4 I_0 + \frac{R_4\, R_7}{R_6} I_1 = 5\,\mathrm{V}$$

$$I_2^{out} = -I_{R4} + I_{R5} = I_0 + \frac{R_7}{R_6} I_1 + \frac{V_2^{out}}{R_5} = 8\,\mathrm{mA}$$

$$I_{R9} = I_{R6} - I_1 = \left(\frac{R_7}{R_6} - 1\right) I_1$$

$$V_3^{out} = V_3^- - R_9 I_{R9} = R_8 I_1 - R_9 \left(\frac{R_7}{R_6} - 1\right) I_1 = 1\,\mathrm{V}$$

$$I_3^{out} = -I_{R9} + I_{R10} = -\left(\frac{R_7}{R_6} - 1\right) I_1 + \frac{V_3^{out}}{R_{10}} = 1\,\mathrm{mA}$$