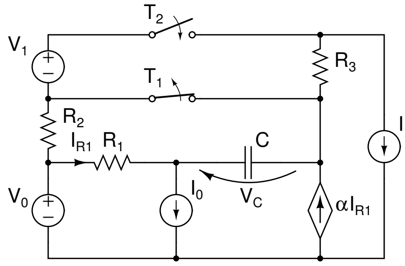
Esame di Teoria dei Circuiti – 7 Marzo 2011 (Soluzione)

Esercizio 1



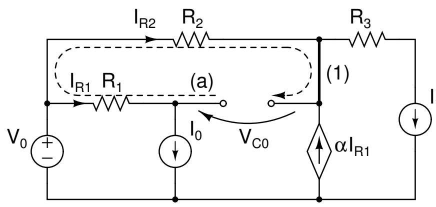
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1\,\mathrm{k}\Omega$ $R_2 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $R_3 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $C = 100\,\mu\mathrm{F}$, $\alpha = \frac{1}{3}$, $V_0 = 3\,\mathrm{V}$, $V_1 = 9\,\mathrm{V}$, $I_0 = 3\,\mathrm{mA}$, $I_1 = 5\,\mathrm{mA}$.

Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T_1 è chiuso, l interruttore T_2 è aperto ed il circuito è a regime. All'istante $t = t_0$ contemporaneamente l'interruttore T_1 si apre e T_2 si chiude.

Determinare l'andamento della tensione $V_C(t)$ ai capi del condensatore.

Soluzione

Per $t < 0$ l'interruttore T_1 è chiuso, T_2 è aperto e, per via dell'ipotesi che il circuito sia a regime, si ha $I_C = 0$; il circuito in esame è dunque equivalente ad un circuito in cui la capacità è sostituita da un circuito aperto. Il circuito si può ridisegnare come segue:



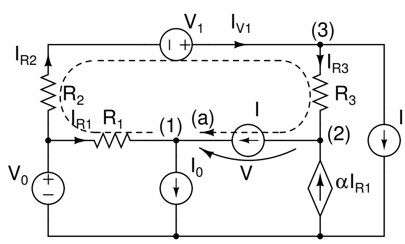
Per determinare la tensione iniziale V_{C0} si può osservare che dalla maglia (a) si ha

$$(a): \quad V_{C0} + R_1 I_{R1} = R_2 I_{R2}$$

con $I_{R1} = I_0$ e, dal nodo (1), $I_{R2} = I_1 - \alpha I_{R1} = I_1 - \alpha I_0$. Segue che

$$V_{C0} = R_2 I_{R2} - R_1 I_{R1} = R_2 I_1 - (R_1 + \alpha R_2)\, I_0 = 5\,\mathrm{V}$$

All'istante $t = t_0 = 0\,\mathrm{sec}$ l'interruttore T_1 si apre mentre l'interruttore T_2 si chiude; in questo istante comincia un transitorio di carica/scarica di C. Per il calcolo di tale transitorio, si ricorra all'equivalente di Thevenin del circuito connesso alla capacità. Si supponga quindi di sostituire alla capacità stessa un generatore ideale di corrente I e di calcolare la tensione V ai suoi capi. Il circuito da esaminare diventa il seguente:



Come nel caso precedente, si può considerare il bilancio delle tensioni alla maglia (a), da cui si ha

$$(a): \quad R_1 I_{R1} + V_1 + V = R_2 I_{R2} + R_3 I_{R3}$$

Le tre correnti I_{R1}, I_{R2} e I_{R3} si possono trovare dal bilancio delle correnti ai nodi indicati con (1), (2) e (3)

$$(1): \quad I_{R1} + I = I_0, \quad I_{R1} = I_0 - I$$

$$(2): \quad I_{R3} + \alpha I_{R1} = I, \quad I_{R3} = I - \alpha I_{R1} = (1+\alpha)I - \alpha I_0$$

$$(3): \quad I_{V_1} = I_{R3} + I_1, \quad I_{R2} = I_{V1} = (1+\alpha)I - \alpha I_0 + I_1$$

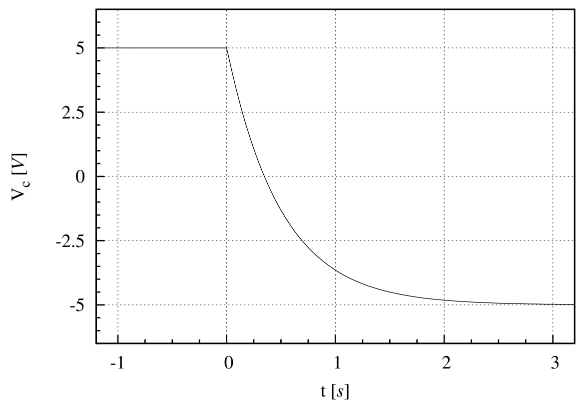
da cui

$$V = -V_1 - R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} + R_3 I_{R3} =$$
$$= \underbrace{-V_1 - R_1 I_0 - \alpha(R_2+R_3)I_0 + R_2 I_1}_{V^{(eq)} = -5\,\mathrm{V}} + \underbrace{(R_1 + (R_2+R_3)(1+\alpha))}_{R^{(eq)} = 5\,\mathrm{k}\Omega} I$$

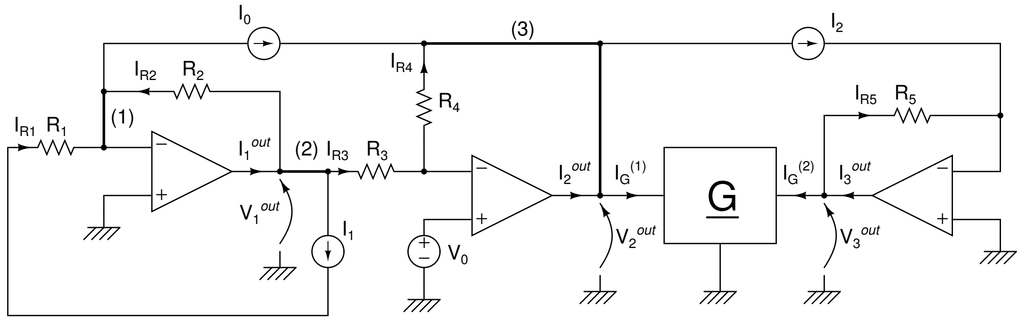
L'andamento della tensione $V_c(t)$ si può quindi ricavare dalla formula del transitorio del primo ordine

$$V_c(t) = \begin{cases} V_{C0} = 5\,\mathrm{V}, & t < t_0 = 0\,\mathrm{s} \\ V^{(eq)} + \left(V_{C0} - V^{(eq)}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = -5 + 10 e^{-\frac{t}{\tau}}\,\mathrm{V}, & t \geq t_0 = 0\,\mathrm{s} \end{cases}$$

con $\tau = R^{(eq)}C = 0.5\,\mathrm{s}$. L'andamento della tensione nel tempo è quello dato dalla figura seguente.



Esercizio 2



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = \ldots = R_5 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $\underline{G} = \begin{pmatrix} 2/5\,\mathrm{m} & -1/5\,\mathrm{m} \\ -1/5\,\mathrm{m} & 2/5\,\mathrm{m} \end{pmatrix} \Omega^{-1}$, $V_0 = 5\,\mathrm{V}$, $I_0 = 2\,\mathrm{mA}$, $I_1 = 7\,\mathrm{mA}$, $I_2 = 5\,\mathrm{mA}$.

Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Calcolare le tensioni V_1^{out}, V_2^{out} e V_3^{out} e le correnti I_1^{out}, I_2^{out} e I_3^{out} di uscita degli amplificatori operazionali.

Soluzione

Si considerino i versi delle correnti come indicati in figura. Si consideri per tutti gli amplificatori operazionale che la corrente sugli ingressi sia nulla e che la tensione ai due ingressi sia uguale per via del corto circuito virtuale.

La tensione e la corrente di uscita più semplici da calcolare sono quelli dell'operazionale 3, in cui $V_3^- = V_3^+ = 0$ e $I_{R5} + I_2 = 0$:

$$V_3^{out} = V_3^- + R_5 I_{R5} = -R_5 I_2 = -5\,\mathrm{V}$$

$$I_3^{out} = I_{R5} + I_G^{(2)} = -I_2 + G_{21} V_2^{out} + G_{22} V_3^{out}$$

Proseguendo con l'amplificatore operazionale 1, dove $I_{R1} = I_1$ e $V_1^+ = V_1^- = 0$, si ha dal bilancio delle correnti al nodo (1)

$$(1): \quad I_{R1} + I_{R2} = I_0, \quad I_{R2} = I_0 - I_{R1} = I_0 - I_1$$

$$V_1^{out} = V_1^- + R_2 I_{R2} = R_2(I_0 - I_1) = -5\,\mathrm{V}$$

e considerando il bilancio delle correnti al nodo (2)

$$(2): \quad I_1^{out} = I_{R2} + I_1 + I_{R3} = I_0 - \cancel{I_1} + \cancel{I_1} + I_{R3}$$

Poiché $V_2^- = V_2^+ = V_0$, si ha

$$I_{R4} = I_{R3} = \frac{V_1^{out} - V_2^-}{R_3} = -10\,\mathrm{mA}$$

$$V_2^{out} = V_2^- - R_4 I_{R4} = 15\,\mathrm{V}$$

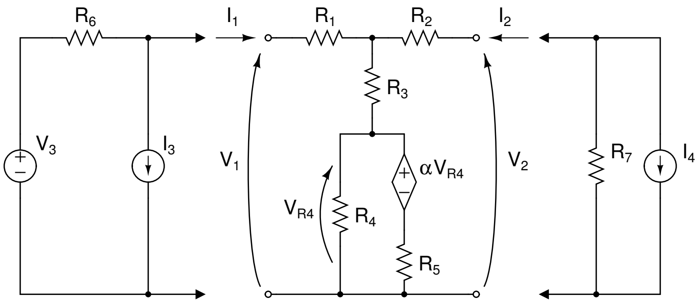
che permette, considerando anche il bilancio di correnti al nodo (3), di trovare tutte le correnti richieste.

$$(3): \quad I_2^{out} + I_0 + I_{R4} = I_G^{(1)} + I_2, \quad I_2^{out} = G_{11} V_2^{out} + G_{12} V_3^{out} + I_2 - I_0 - I_{R3} = 20\,\mathrm{mA}$$

$$I_1^{out} = -8\,\mathrm{mA}$$

$$I_3^{out} = -10\,\mathrm{mA}$$

Esercizio 3



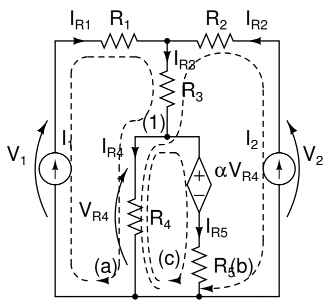
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 6\,\mathrm{k\Omega}$, $R_5 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_6 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_7 = 1.33\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 2$, $V_3 = 3\,\mathrm{V}$, $I_3 = 15\,\mathrm{mA}$.

Determinare:

- la descrizione del due porte evidenziato in figura tramite matrice resistenza $\underline{R}$;
- il circuito equivalente di Thevenin alla porta 2 del due porte $\underline{R}$ calcolato al punto precedente, quando alla porta 1 vengono collegati i generatori ideali V_3 ed I_3 e la resistenza R_6, come mostrato in figura;
- quale valore deve avere il generatore di corrente ideale I_4 affinché la potenza P_{R7} dissipata dalla resistenza R_7 sia nulla, quando alla porta 1 di $\underline{R}$ vengono collegati V_3, I_3 e R_6 (come nel caso precedente) e alla porta 2 la resistenza R_7 ed il generatore I_4, come mostrato in figura. Assumendo per I_4 il valore appena calcolato, si calcoli la potenza $P_{\underline{R}}$ dissipata dalla matrice $\underline{R}$.

Soluzione

Per determinare la descrizione tramite matrice delle resistenze $\underline{R}$ del circuito in esame si supponga di collegare al due porte i due generatori ideali di corrente I_1 e I_2, e quindi di calcolarne la tensione V_1 e V_2 ai loro capi. Si definisca inoltre un verso arbitrario per le correnti sulle resistenze.



Dalle maglie (a) e (b), osservando che $I_{R1} = I_1$, $I_{R2} = I_2$ e $I_{R3} = I_1 + I_2$, si ha

$$(a): \quad V_1 = R_1 I_{R1} + R_3 I_{R3} + V_{R4} = R_1 I_1 + R_3(I_1 + I_2) + V_{R4}$$

$$(b): \quad V_2 = R_2 I_{R2} + R_3 I_{R3} + V_{R4} = R_2 I_2 + R_3(I_1 + I_2) + V_{R4}$$

Per determinare V_{R4} si considerino assieme il bilancio delle tensioni alla maglia (c) e il bilancio delle correnti al nodo (1)

$$(c): \quad V_{R4} = \alpha V_{R4} + V_{R5}, \quad V_{R5} = (1-\alpha) V_{R4}$$

$$(1): \quad I_{R3} = I_{R4} + I_{R5} = \frac{V_{R4}}{R_4} + (1-\alpha)\frac{V_{R4}}{R_5}$$

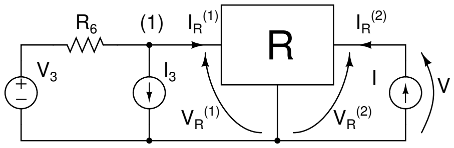
$$V_{R4} = \frac{I_{R3}}{\frac{1}{R_4} + \frac{1-\alpha}{R_5}} = R_4 R_5 \frac{I_1 + I_2}{R_4(1-\alpha) + R_5}$$

da cui

$$V_1 = \Bigg(\underbrace{R_1 + R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4(1-\alpha)+R_5}}_{R_{11} = 3\,\mathrm{k\Omega}}\Bigg) + \Bigg(\underbrace{R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4(1-\alpha)+R_5}}_{R_{12} = 1\,\mathrm{k\Omega}}\Bigg) I_2$$

$$V_2 = \Bigg(\underbrace{R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4(1-\alpha)+R_5}}_{R_{21} = 1\,\mathrm{k\Omega}}\Bigg) + \Bigg(\underbrace{R_2 + R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4(1-\alpha)+R_5}}_{R_{22} = 3\,\mathrm{k\Omega}}\Bigg) I_2$$

Per il secondo punto dell'esercizio, si connetta al due porte calcolato in precedenza il circuito formato da V_3, I_3 e R_6. Si calcoli l'equivalente di Thevenin del circuito complessivo collegando alla porta 2 di $\underline{R}$ un generatore ideale di corrente I per calcolarne la tensione V ai suoi capi.



Si indichino con $V_R^{(1)}$ e $I_R^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{R}$, e con $V_R^{(2)}$ e $I_R^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2, con $V_R^{(2)} = V$ e $I_R^{(2)} = I$. Dalla seconda delle equazioni costitutive di $\underline{R}$ si ha

$$V = V_R^{(2)} = R_{21} I_R^{(1)} + R_{22} I_R^{(2)} = R_{21} I_R^{(1)} + R_{22} I$$

Si determini quindi $I_R^{(1)}$.

Considerando $I_{R6} = (V_3 - V_R^{(1)})/R_6$ assieme al bilancio delle correnti al nodo (1) e alla prima equazione costitutiva di $\underline{R}$, si ha $I_R^{(1)}$

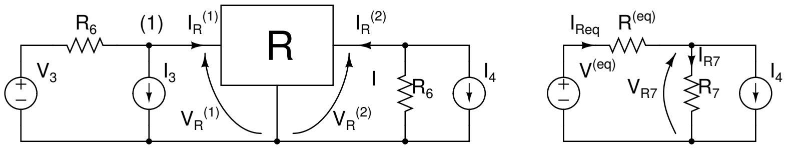
$$(1): \quad I_{R6} = I_3 + I_R^{(1)}, \quad \frac{V_3 - R_{11} I_R^{(1)} - R_{12} I}{R_6} = I_3 + I_R^{(1)}$$

$$I_R^{(1)} = \frac{V_3 - R_6 I_3 - R_{12} I}{R_{11} + R_6}$$

da cui

$$V = \underbrace{R_{21}\frac{V_3 - R_6 I_3}{R_{11} + R_6}}_{V^{(eq)} = -3\,\mathrm{V}} + \Bigg(\underbrace{R_{22} - \frac{R_{12} R_{21}}{R_{11} + R_6}}_{R^{(eq)} = 2.75\,\mathrm{k\Omega}}\Bigg) I$$

Per il punto successivo dell'esercizio, si colleghino al circuito preso in esame al punto precedente il generatore di corrente I_4 e la resistenza R_7. Si determini per quale valore di corrente I_4 si ha $P_{R7} = 0\,\mathrm{W}$ e, assumendo questo valore, si determini la potenza dissipata dal due porte $\underline{R}$.



Avendo già determinato l'equivalente di Thevenin del circuito formato da $\underline{R}$, V_3, I_3 e R_6, conviene per la determinazione del valore di I_4 considerare il circuito di destra. Se $P_{R7} = 0\,\mathrm{W}$ allora sia $I_{R7} = 0\,\mathrm{A}$ e $V_{R7} = 0\,\mathrm{V}$; dunque

$$I_{R4} = I_{Req} = \frac{V^{(eq)}}{R^{(eq)}} = \frac{R_{21}\left(V_3 - R_6 I_3\right)}{R_{22}\left(R_{11} + R_6\right) - R_{12}R_{21}} = -\frac{12}{11}\,\mathrm{mA} \simeq 1.09\,\mathrm{mA}$$

Equivalentemente, sarebbe stato possibile senza alcuna assunzione a priori su I_4 determinare la potenza dissipata da R_7 nel circuito a destra

$$P_{R7} = R_7\left(\frac{V^{(eq)} - I_4 R^{(eq)}}{R_7 + R^{(eq)}}\right)^2$$

che se impostata uguale a $0\,\mathrm{W}$ dà lo stesso risultato di sopra.

A questo punto si consideri il circuito di sinistra per determinare $P_{\underline{R}} = V_R^{(1)} I_R^{(1)} + V_R^{(2)} I_R^{(2)}$. Si noti che per via dell'analisi precedente, si conoscono già $I_R^{(2)} = -I_4$ e $V_R^{(2)} = 0\,\mathrm{V}$, cioè

$$V_R^{(2)} = R_{21} I_R^{(1)} + R_{22} I_R^{(2)} = R_{21} I_R^{(1)} - R_{22} I_4 = 0\,\mathrm{V}, \quad I_R^{(1)} = \frac{R_{22}}{R_{21}} I_4$$

da cui

$$P_{\underline{R}} = V_R^{(1)} I_R^{(1)} = \left(R_{11}\frac{R_{22}}{R_{21}} I_4 - R_{12} I_4\right)\frac{R_{22}}{R_{21}} I_4 =$$
$$= \left(R_{11}\frac{{R_{22}}^2}{{R_{21}}^2} - R_{12}\frac{R_{22}}{R_{21}}\right){I_4}^2 = \frac{3456}{121}\,\mathrm{mA} \simeq 28.56\,\mathrm{mA}$$