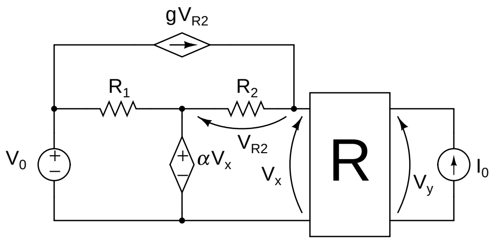
Esame di Teoria dei Circuiti - 5 dicembre 2008 - Soluzione

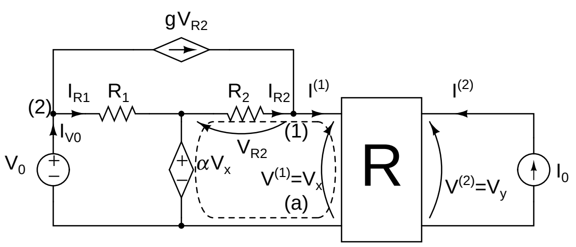
Esercizio 1



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{k\Omega}$, $g = 0.5\mathrm{m\Omega}^{-1}$, $\alpha = 3$, $V_0 = 1\,\mathrm{V}$, $I_0 = 4\,\mathrm{mA}$.
Calcolare:

- la potenza erogata dal generatore V_0.
- quale valore deve assumere I_0 affinché le due tensioni V_x e V_y in ingresso al due porte R assumano lo stesso valore.

Soluzione



Se indichiamo con $V^{(1)}$ e $I^{(1)}$ e con $V^{(2)}$ e $I^{(2)}$ la tensione e la corrente della porta, rispettivamente, di sinistra e di destra di R, abbiamo che $V^{(1)} = V_x$, $V^{(2)} = V_y$ e $I^{(2)} = I_0$.

$$\begin{cases} V_x = R_{11} I^{(1)} + R_{12} I_0 \\ V_y = R_{21} I^{(1)} + R_{22} I_0 \end{cases}$$

Inoltre, dal bilancio delle correnti al nodo (1) si ha:

$$I^{(1)} = gV_{R2} + I_{R2} = (gR_2 + 1)\, I_{R2}$$

e dal bilancio delle tensioni alla maglia (a)

$$\alpha V_x = V_x + V_{R2} = V_x + R_2 I_{R2}; \quad I_{R2} = \frac{(\alpha - 1)\, V_x}{R_2}$$

Sostituendo queste due espressioni nella prima delle due equazioni del due porte, si può ricavare il valore di V_x.

$$V_x = R_{11}\,(gR_2 + 1)\, I_{R2} + R_{12} I_0 = R_{11} \left(g + \frac{1}{R_2} \right) (\alpha - 1)\, V_x + R_{12} I_0$$

$$V_x = \frac{R_{12} I_0}{1 - R_{11}\left(g + \frac{1}{R_2}\right)(\alpha - 1)}$$

La corrente I_{V0} erogata dal generatore V_0 è data (bilancio di correnti al nodo (2)) da $I_{V0} = I_{R1} + gV_{R2}$, con $I_{R1} = (V_0 - \alpha V_x)/R_1$ e $V_{R2} = (\alpha - 1) V_x$.

$$I_{V0} = \frac{V_0 - \alpha V_x}{R_1} + g(\alpha - 1) V_x$$

Numericamente, $V_x = -12\,\mathrm{V}$, $I_{V0} = 25\,\mathrm{mA}$.

$$P_{V0} = V_0 I_{V0} = 25\,\mathrm{mW}$$

Il secondo punto chiede di trovare per quale valore di I_0 le due tensioni V_x e V_y sono uguali. Il valore di V_x è già stato calcolato; per trovare V_y è necessario considerare la seconda equazione del due porte:

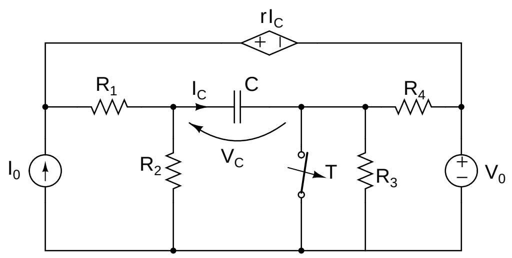
$$\begin{aligned} V_y &= R_{21}(gR_2 + 1) I_{R2} + R_{22} I_0 = R_{21}\left(g + \frac{1}{R_2}\right)(\alpha - 1) V_x + R_{22} I_0 \\ &= I_0 \frac{R_{12} R_{21}\left(g + \frac{1}{R_2}\right)(\alpha - 1)}{1 - R_{11}\left(g + \frac{1}{R_2}\right)(\alpha - 1)} + R_{22} I_0 \end{aligned}$$

Imporre $V_x = V_y$ significa risolvere l'equazione

$$\left(\frac{R_{12}}{1 - R_{11}\left(g + \frac{1}{R_2}\right)(\alpha - 1)} - \frac{R_{12} R_{21}\left(g + \frac{1}{R_2}\right)(\alpha - 1)}{1 - R_{11}\left(g + \frac{1}{R_2}\right)(\alpha - 1)} + R_{22} \right) I_0 = 0$$

Poichè il termine tra parentesi è diverso da zero, l'unica soluzione è $I_0 = 0$

Esercizio 2

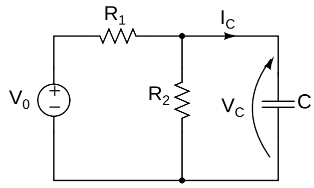


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = R_4 = r = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 20\,\mu\mathrm{F}$, $V_0 = 4\,\mathrm{V}$, $I_0 = 10\,\mathrm{mA}$.

Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{sec}$ l'interruttore T è chiuso ed il circuito è a regime. All'istante $t = t_0$ l'interruttore si apre. Determinare l'andamento della tensione $V_C(t)$.

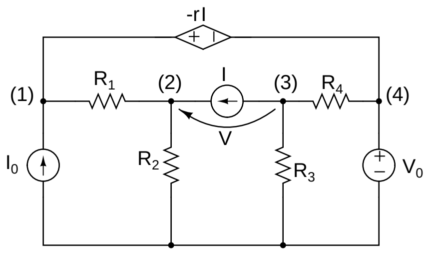
Soluzione

Per $t < t_0$ l'interruttore T è chiuso; dato che il circuito è a regime, $I_C = 0$ ed il generatore di tensione rI_C si può considerare un corto circuito. Il circuito si semplifica come segue:



La tensione V_C^0 sulla capacità è data da $V_C^0 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} V_0 = 3\,\mathrm{V}$.

All'istante $t = t_0$ l'interruttore si apre. Per calcolare l'equivalente di Thevenin del circuito conneso alla capacità si supponga di sostituire alla capacità stessa un generatore ideale di corrente I e di calcolare la tensione V ai suoi capi. Nota che essendo $I_C = -I$, si può sostituire il generatore di tensione rI_C con uno di valore $-rI$.



Il circuito presenta 4 nodi, numerati da (1) a (4) in figura. La tensione $V^{(4)}$ al nodo (4) è fissata, e vale $V^{(4)} = V_0$; anche la tensione al nodo (1) è fissa e vale $V^{(1)} = V_0 - rI$. Per trovare le tensioni $V^{(2)}$ e $V^{(3)}$ è sufficiente risolvere separatamente le equazioni di bilancio delle correnti, rispettivamente, ai nodi (2) e (3). Per il nodo (2) si ha

$$\frac{V^{(1)} - V^{(2)}}{R_1} + I = \frac{V^{(2)}}{R_2}$$

$$V^{(2)} = \frac{R_2 V^{(1)} + R_1 R_2 I}{R_1 + R_2} = \frac{R_2 V_0 - rR_2 I + R_1 R_2 I}{R_1 + R_2}$$

mentre per il nodo (3)

$$\frac{V^{(4)} - V^{(3)}}{R_4} = I + \frac{V^{(3)}}{R_3}$$

$$V^{(3)} = \frac{R_3 V^{(4)} - R_3 R_4 I}{R_3 + R_4} = \frac{R_3 V_0 - R_3 R_4 I}{R_3 + R_4}$$

La tensione V è data dalla differenza tra le tensioni $V^{(2)}$ e $V^{(3)}$.

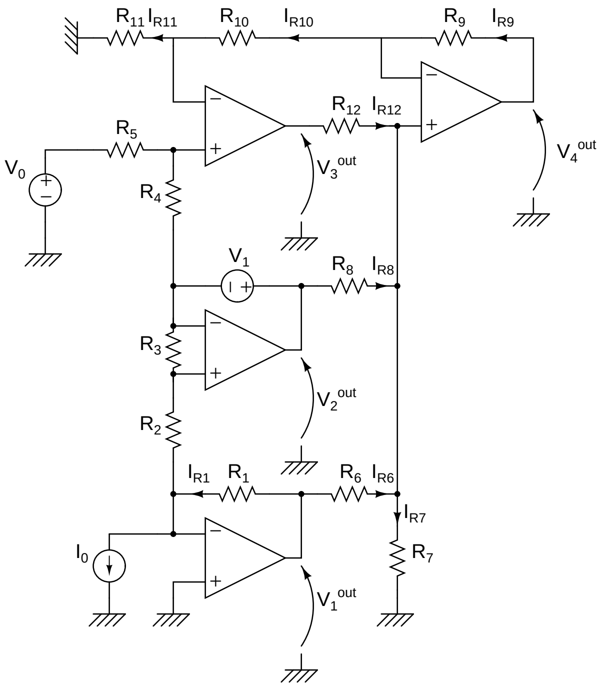
$$V = V^{(2)} - V^{(3)} = \underbrace{\frac{R_2 V_0}{R_1 + R_2} - \frac{R_3 V_0}{R_3 + R_4}}_{V^{eq}} + \underbrace{\left(\frac{R_2 \left(R_1 - r\right)}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right)}_{R^{eq}} I$$

Numericamente, $V^{eq} = 1\,\mathrm{V}$, $R^{eq} = 250\,\Omega$. Per $t > t_0$ la tensione $V_c(t)$ è data quindi da

$$V_c(t) = V^{eq} + \left(V_C^0 - V^{eq} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 + 2e^{-\frac{t}{\tau}}\mathrm{V}$$

$$\tau = R^{eq} C = 5\,\mathrm{msec}$$

Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $R_1 = R_2 = \ldots = R_{12} = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $V_0 = 3\,\mathrm{V}$, $V_1 = 1\,\mathrm{V}$, $I_0 = 10\,\mathrm{mA}$. Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Calcolare le tensioni di uscita degli operazionali V_1^{out}, V_2^{out}, V_3^{out} e V_4^{out}.

Soluzione

Per la condizione di corto circuito virtuale, si ha $V_2^- = V_2^+$ da cui si ricava $R_3 I_{R3} = 0$, $I_{R3} = 0$. Di conseguenza, anche $I_{R2} = 0$ e

$$V_2^- = V_2^+ = V_1^- = V_1^+ = 0$$

Con queste osservazioni è possibile ricavare V_1^{out} e V_2^{out}:

$$V_1^{out} = V_1^- + R_1 I_1 = R_1 I_0 = 10\,\mathrm{V}$$

$$V_2^{out} = V_2^- + V_1 = V_1 = 1\,\mathrm{V}$$

Poiché $V_2^- = 0$, si ha

$$V_3^- = V_3^+ = V_0\,\frac{R_4}{R_4 + R_5}$$

$$I_{R9} = I_{R10} = I_{R11} = \frac{V_3^-}{R_9} = V_0\,\frac{R_4}{R_{11}\,(R_4 + R_5)}$$

$$V_4^{out} = R_9 I_{R9} + R_{10} I_{R10} + R_{11} I_{R11} = V_0\,\frac{R_4\,(R_9 + R_{10} + R_{11})}{R_{11}\,(R_4 + R_5)} = 4.5\,\mathrm{V}$$

Infine, per ricavare V_3^{out} si osservi che $V_4^- = V_4^+ = V_0\,\dfrac{R_4\,(R_{10} + R_{11})}{R_{11}\,(R_4 + R_5)} = 3\,\mathrm{V}$ e che

$$I_{R12} + I_{R8} + I_{R6} = I_{R7}$$

$$\frac{V_3^{out} - V_4^+}{R_{12}} + \frac{V_2^{out} - V_4^+}{R_8} + \frac{V_1^{out} - V_4^+}{R_6} = \frac{V_4^+}{R_7}$$

$$V_3^{out} = V_4^+ + \frac{R_{12}}{R_7} V_4^+ - \frac{V_2^{out} - V_4^+}{R_8} - \frac{V_1^{out} - V_4^+}{R_6} = 1\,\mathrm{V}$$