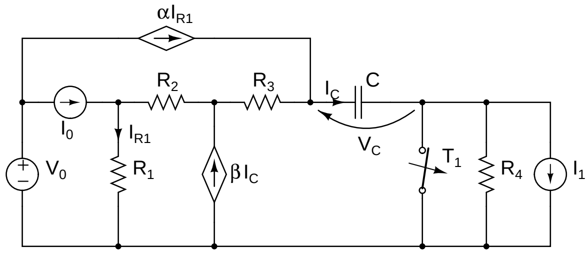
Esame di Teoria dei Circuiti - 4 settembre 2009 (Soluzione)

Esercizio 1

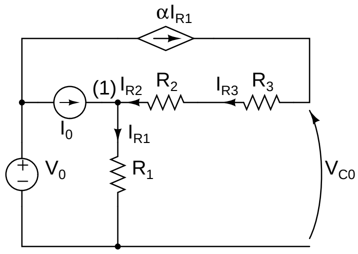


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $R_2 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $R_3 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $R_4 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $C = 1\,\mu\mathrm{F} = 10^{-9}\,\mathrm{F}$, $\alpha = 3$, $\beta = \frac{1}{3}$, $V_0 = 5\,\mathrm{V}$, $I_0 = 1\,\mathrm{mA}$, $I_1 = 5\,\mathrm{mA}$.

Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{sec}$ l'interruttore T è chiuso ed il circuito è a regime. All'istante $t = t_0$ l'interruttore T si apre. Determinare l'andamento della tensione $V_C(t)$.

Soluzione

Per $t < 0$ l'interruttore T_1 è chiuso ed il circuito a regime, ovvero $I_C = 0$. Il generatore di corrente controllato βI_C si può quindi sostituire con un circuito aperto. Il circuito si semplifica come segue:

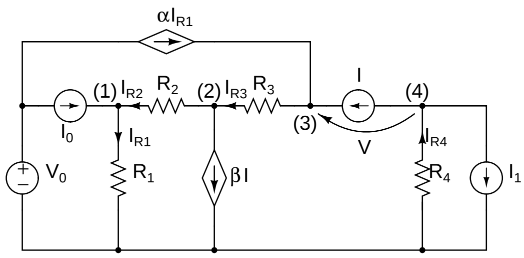


Si nota subito che $I_{R2} = I_{R3} = \alpha I_{R1}$. Dal bilancio delle correnti al nodo (1) si ha che

$$I_0 + \alpha I_{R1} = I_1, \quad I_{R1} = \frac{I_0}{1-\alpha}$$

$$V_{C0} = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} + R_3 I_{R3} = \frac{R_1 + \alpha\,(R_2 + R_3)}{1-\alpha} I_0 = -5\,\mathrm{V}$$

All'istante $t = t_0 = 0\,\mathrm{sec}$ l'interruttore T_1 si apre e comincia il transitorio di carica/scarica di C. Per il calcolo di tale transitorio, si ricorra all'equivalente di Thevenin del circuito conneso alla capacità. Si supponga quindi di sostituire alla capacità stessa un generatore ideale di corrente I e di calcolare la tensione V ai suoi capi. Il circuito da esaminare diventa il seguente:



dove, poiché $I_C = -I$, il generatore di corrente controllato βI_C è stato sostituito dal generatore di corrente controllato βI con verso oppopsto.

Dal bilancio delle correnti al nodo (4) è possibile ricavare I_{R4}

$$I_{R4} = I_1 + I$$

mentre per determinare I_{R1}, I_{R2} e I_{R3} si deve risolvere il sistema composto dal bilancio delle correnti ai nodi (1), (2) e (3)

$$\begin{aligned}
&(1) \quad I_0 + I_{R2} = I_{R1} \\
&(2) \quad I_{R3} = I_{R2} + \beta I \\
&(3) \quad \alpha I_{R1} + I = I_{R3}
\end{aligned}$$

Sostituendo in (3) il valore di I_{R1} dalla (1) e di I_{R3} dalla (2) si ha

$$\alpha I_0 + \alpha I_{R2} + I = I_{R2} + \beta I, \quad I_{R2} = \frac{\alpha I_0 + (1-\beta)I}{1-\alpha}$$

$$I_{R1} = I_0 + I_{R2} = \frac{I_0 + (1-\beta)I}{1-\alpha}$$

$$I_{R3} = I_{R2} + \beta I = \frac{\alpha I_0 + (1-\alpha\beta)I}{1-\alpha}$$

da cui segue

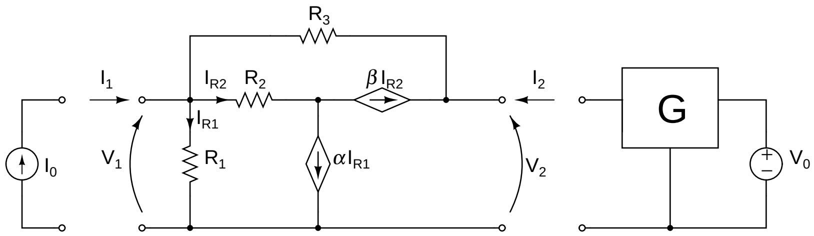
$$\begin{aligned}
V &= R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} + R_3 I_{R3} + R_4 I_{R4} = \\
&= R_1 \frac{I_0 + (1-\beta)I}{1-\alpha} + R_2 \frac{\alpha I_0 + (1-\beta)I}{1-\alpha} + R_3 \frac{\alpha I_0 + (1-\alpha\beta)I}{1-\alpha} + R_4(I_1 + I) \\
&= \underbrace{\frac{R_1 + \alpha(R_2 + R_3)}{1-\alpha} I_0 + R_4 I_1}_{V^{(eq)} = 5\,\mathrm{V}} + \left(\underbrace{\frac{(R_1 + R_2)(1-\beta) + R_3(1-\alpha\beta)}{1-\alpha} + R_4}_{R^{(eq)} = 1\,\mathrm{k}\Omega} \right) I
\end{aligned}$$

Per $t > t_0 = 0\,\mathrm{sec}$ la tensione $V_C(t)$ è data quindi da

$$V_C(t) = V^{(eq)} + \left(V_{C0} - V^{(eq)} \right) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

con $\tau = R^{(eq)}C = 1\,\mathrm{msec}$.

Esercizio 2

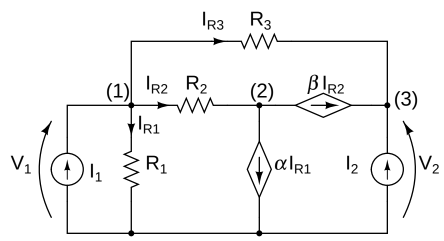


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 6\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $G = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\,\mathrm{m\Omega^{-1}}$, $V_0 = 2\,\mathrm{V}$, $I_0 = 1\,\mathrm{mA}$.
Calcolare:

- la matrice R delle resistenze del due porte indicato in figura;
- la potenza dissipata dal due porte calcolato al punto precedente, quando alla porta 1 viene collegato il generatore ideale di corrente I_0, e alla porta 2 il doppio bipolo schematizzabile come una matrice G e il generatore ideale di tensione V_0, come mostrato in figura.

Soluzione

Per trovare la matrice delle resistenze R si supponga di collegare al due porte i due generatori ideali di corrente I_1 e I_2 e di calcolare le tensioni V_1 e V_2 ai loro capi.



Considerando I_{R1}, I_{R2} e I_{R3} le tre incognite del sistema, è sufficiente considerare il bilancio delle correnti ai nodi indicati con (1), (2) e (3) per risolvere il circuito.

$$\begin{aligned} (1):& \qquad I_1 = I_{R1} + I_{R2} + I_{R3} \\ (2):& \qquad I_{R2} = \alpha I_{R1} + \beta I_{R2} \\ (3):& \qquad I_{R3} + \beta I_{R2} + I_2 = 0 \end{aligned}$$

Dalla (2)

$$I_{R2} = -\frac{\alpha}{\beta - 1} I_{R1}$$

che sostituito nella (3)

$$I_{R3} - \beta \frac{\alpha}{\beta - 1} I_{R1} + I_2 = 0$$

$$I_{R3} = \frac{\alpha\beta}{\beta - 1} I_{R1} - I_2$$

Sostituendo i valori così calcolati di I_{R2} e I_{R3} nella (1) si può ricavare I_{R1}

$$I_1 = I_{R1} - \frac{\alpha}{\beta - 1} I_{R1} + \frac{\alpha\beta}{\beta - 1} I_{R1} - I_2$$

$$I_{R1} = \frac{I_1 + I_2}{1 - \dfrac{\alpha}{\beta - 1} + \dfrac{\alpha\beta}{\beta - 1}} = \frac{I_1 + I_2}{1 + \alpha}$$

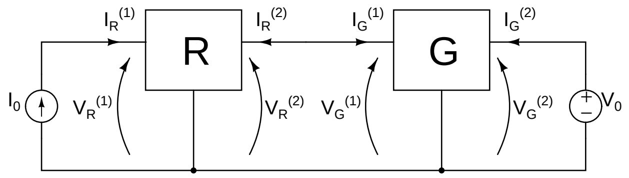
A questo punto osservando che che $V_1 = R_1 I_{R1}$ e che $V_2 = R_1 I_{R1} - R_3 I_{R3}$ si possono calcolare i quattro coefficienti della matrice R.

$$V_1 = R_1 I_1 = \underbrace{\frac{R_1}{1+\alpha}}_{R_{11} = 2\,\mathrm{k}\Omega} I_1 + \underbrace{\frac{R_1}{1+\alpha}}_{R_{12} = 2\,\mathrm{k}\Omega} I_2$$

$$V_2 = \frac{R_1}{1+\alpha} - R_3 \left(\alpha\beta \frac{I_1 + I_2}{(\beta-1)(1+\alpha)} - I_2 \right) =$$

$$= \left(\underbrace{\frac{R_1}{1+\alpha} - R_3 \frac{\alpha\beta}{(\beta-1)(1+\alpha)}}_{R_{21} = 1\,\mathrm{k}\Omega} \right) I_1 + \left(\underbrace{\frac{R_1}{1+\alpha} - R_3 \frac{\alpha\beta}{(\beta-1)(1+\alpha)} + R_3}_{R_{22} = 2\,\mathrm{k}\Omega} \right) I_2$$

Per il secondo punto dell'esercizio, si consideri il seguente circuito:



Indicando con $V_R^{(1)}$ e $I_R^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di R, e con $V_R^{(2)}$ e $I_R^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2, la potenza dissipata da R è data da

$$P_R = V_R^{(1)} I_R^{(1)} + V_R^{(2)} I_R^{(2)} = \left(R_{11} I_R^{(1)} + R_{12} I_R^{(2)} \right) I_R^{(1)} + \left(R_{21} I_R^{(1)} + R_{22} I_R^{(2)} \right) I_R^{(2)} =$$

$$= R_{11} \left(I_R^{(1)} \right)^2 + (R_{12} + R_{21}) I_R^{(1)} I_R^{(2)} + R_{22} \left(I_R^{(2)} \right)^2$$

Si determinino quindi $I_R^{(1)}$ e $I_R^{(2)}$.

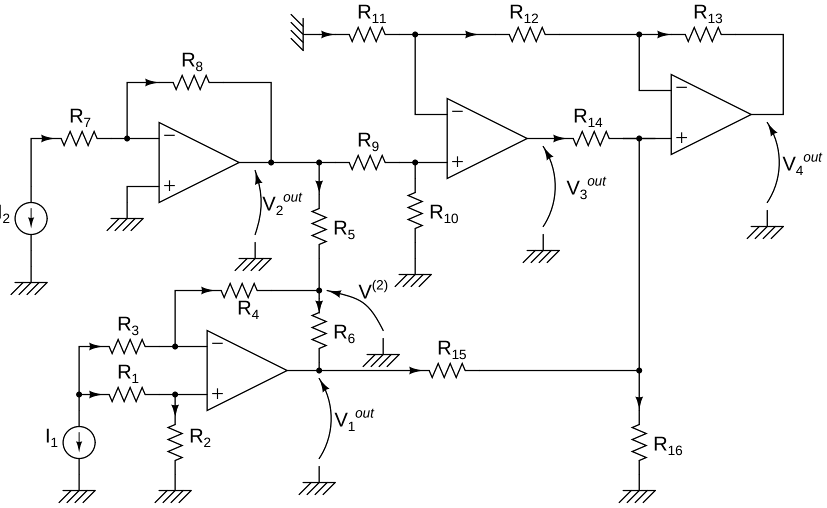
Per via della topologia circuitale, $I_R^{(1)} = I_0$; per quanto riguarda $I_R^{(2)}$ si ha

$$I_R^{(2)} = -I_G^{(1)} = -\left(G_{11} V_G^{(1)} + G_{12} V_G^{(2)} \right) = -G_{12} V_0$$

essendo $G_{11} = 0$, e dove si sono indicati con $V_G^{(1)}$ e $I_G^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di G, e con $V_G^{(2)}$ e $I_G^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2. Segue che

$$P_R = R_{11} I_0^2 - (R_{12} + R_{21}) G_{12} I_0 V_0 + R_{22} (G_{12} V_0)^2 = 16\,\mathrm{mW}$$

Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $R_1 = R_2 = \ldots = R_{16} = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $I_1 = 12\,\mathrm{mA}$, $I_2 = 3\,\mathrm{mA}$. Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Calcolare le tensioni di uscita degli operazionali V_1^{out}, V_2^{out}, V_3^{out} e V_4^{out}.

Soluzione

Si considerino i versi delle correnti indicati in figura. Dato che gli ingressi degli operazionali non assorbono corrente, si ha $I_{R7} = I_{R8} = -I_2$. Inoltre per il corto circuito virtuale sugli ingressi dell'operazionale 2 si ha

$$V_2^+ = 0 = V_2^-$$

$$V_2^{out} = V_2^- - R_8 I_{R8} = R_8 I_2 = 6\,\mathrm{V}$$

Per quanto riguarda l'operazionale 1 si ha $I_{R1} = I_{R2}$ e $I_{R3} = I_{R4}$. Inoltre, per via del corto circuito virtuale, si ha $V_{R1} = V_{R3}$, ovvero

$$R_1 I_{R1} = R_3 I_{R3}$$

Inoltre (nodo (1)) $I_1 + I_{R1} + I_{R3} = 0$, quindi

$$I_1 + I_{R1} + \frac{R_1}{R_3} I_{R1} = 0$$

$$I_{R1} = I_{R2} = -\frac{R_3}{R_1 + R_3} I_1$$

$$V_1^+ = R_2 I_{R2} = -\frac{R_2\, R_3}{R_1 + R_3} I_1 = V_1^-$$

Inoltre, indicando con con $V^{(2)}$ la tensione tra il nodo (2) e massa, si ha

$$V^{(2)} = V_1^- - R_4 I_{R4} = V_1^- - R_4 I_{R3} = V_1^- - R_4 \frac{R_1}{R_3} I_{R1} = \frac{R_1\, R_4 - R_2\, R_3}{R_1 + R_3} I_1$$

Dal bilancio delle correnti al nodo (2), $I_{R4} + I_{R5} = I_{R6}$ si ricava quindi V_1^{out}

$$V_1^{out} = V^{(2)} - R_6 I_{R6} = V^{(2)} - R_6 \left(I_{R4} + I_{R5}\right) =$$

$$= \frac{R_1\, R_4 - R_2\, R_3}{R_1 + R_3} I_1 + \frac{R_1\, R_6}{R_1 + R_3} I_1 - R_6 \frac{V_2^{out} - \dfrac{R_1\, R_4 - R_2\, R_3}{R_1 + R_3}}{R_5} = 6\,\mathrm{V}$$

NOTA: V_1^{out} si poteva calcolare più agevolmente osservando che, dato che $V_{R3} = V_{R4}$ e $R_3 = R_4$, anche $I_{R3} = I_{R4} = -\frac{I_1}{2}$. Ne segue che $V_1^- = V_1^+ = -R_2\frac{I_1}{2}$ e quindi $V^{(2)} = -R_2\frac{I_1}{2} + R_4\frac{I_1}{2} = 0$.

$$V_1^{out} = V^{(2)} - R_6\left(I_{R4} + I_{R5}\right) = R_6\frac{I_1}{2} - R_6\frac{V_2^{out}}{R_5} = 6\,\mathrm{V}$$

Imponendo il corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 3 si ricava V_4^{out}

$$V_3^+ = \frac{R_{10}}{R_9 + R_{10}}V_2^{out} = V_3^-$$

$$\begin{aligned} V_4^{out} &= -R_{11}I_{R11} - R_{12}I_{R12} - R_{13}I_{R13} = -\left(R_{11} + R_{12} + R_{13}\right)I_{R11} = \\ &= \left(R_{11} + R_{12} + R_{13}\right)\frac{V_3^-}{R_{11}} = \frac{R_{10}}{R_9 + R_{10}}\frac{R_{11} + R_{12} + R_{13}}{R_{11}}V_2^{out} = 9\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

mentre la condizione di corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 4, unitamente al bilancio delle correnti al nodo (3), $I_{R14} + I_{R15} = I_{R16}$, permette di ricavare V_3^{out}

$$V_4^- = \frac{R_{10}}{R_9 + R_{10}}\frac{R_{11} + R_{12}}{R_{11}}V_2^{out} = V_4^+$$

$$\frac{V_3^{out} - V_4^+}{R_{14}} + \frac{V_1^{out} - V_4^+}{R_{15}} = \frac{V_4^+}{R_{16}}$$

$$V_3^{out} = \left(1 + \frac{R_{14}}{R_{15}} + \frac{R_{14}}{R_{16}}\right)V_4^+ - \frac{R_{14}}{R_{15}}V_1^{out} = 12\,\mathrm{V}$$