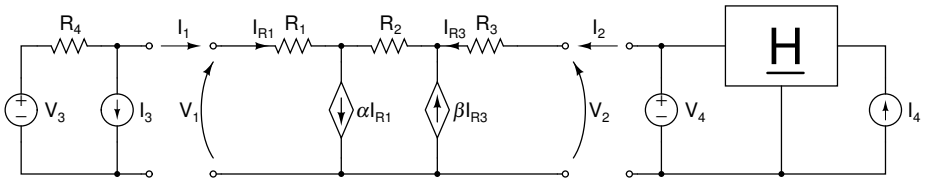
Esame di Teoria dei Circuiti – 4 Luglio 2012 (Soluzione)

Esercizio 1



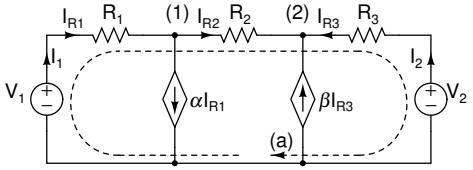
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = R_3 = 1\,\text{k}\Omega$, $R_4 = 5\,\text{k}\Omega$, $\underline{H} = \begin{pmatrix} 0\,\Omega^{-1} & 1 \\ -1 & 2\,\text{k}\Omega \end{pmatrix}$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$, $V_3 = V_4 = 5\,\text{V}$, $I_3 = 4\,\text{mA}$, $I_4 = 2{,}5\,\text{mA}$.

Determinare:

- la descrizione del doppio bipolo evidenziato in figura tramite matrice conduttanza $\underline{G}$;
- se esiste, ed eventualmente calcolare, una rappresentazione del due porte sopra calcolato tramite matrice delle resistenze $\underline{R}$ partendo dalla rappresentazione $\underline{G}$ calcolato. È possibile ottenere tale rappresentazione in un circuito composto da sole tre resistenze?
- la potenza P_{V3}, P_{V4}, P_{I3} e P_{I4} dei quattro generatori ideali, rispettivamente, V_3, V_4, I_3 e I_4, qualora si assuma di connettere alla porta di sinistra del doppio bipolo $\underline{G}$ sopra calcolato i generatori V_3 e I_3 e la resistenza R_4, e alla porta di destra i generatori V_4 e I_4 e il doppio bipolo $\underline{H}$, come mostrato in figura.

Soluzione

Per determinare la descrizione tramite matrice conduttanza $\underline{G}$ del circuito in esame si supponga di collegare al doppio bipolo i due generatori ideali di tensione V_1 e V_2 e calcolarne le correnti I_1 e I_2. Si definisca inoltre un verso arbitrario per la corrente I_{R2}.



Dal bilancio delle correnti al nodo (1) si ha

$$(1):\ I_{R1} = \alpha I_{R1} + I_{R2}, \quad I_{R2} = (1-\alpha)\, I_{R1}$$

mentre dal bilancio delle correnti al nodo indicato con (2) si ha

$$(2):\ I_{R2} + I_{R3} + \beta\, I_{R3} = 0\,\text{A}, \quad I_{R3} = -\frac{I_{R2}}{1+\beta} = -\frac{1-\alpha}{1+\beta} I_{R1}$$

La corrente incognita I_{R1} può essere ricavata dal bilancio delle tensioni alla maglia (a)

$$(a):\ V_1 - R_1 I_{R1} - R_2 I_{R2} + R_3 I_{R3} - V_2 = 0\,\text{V}$$

$$V_1 - R_1 I_{R_1} - R_2\,(1-\alpha)\, I_{R1} - R_3 \frac{1-\alpha}{1+\beta} I_{R1} - V_2 = 0\,\text{V}$$

$$I_{R1} = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2(1-\alpha) + R_3\dfrac{1-\alpha}{1+\beta}}$$

Segue che

$$I_1 = I_{R1} = \underbrace{\frac{1}{R_1 + R_2(1-\alpha) + R_3\dfrac{1-\alpha}{1+\beta}}}_{G_{11} = 3/5\,\mathrm{m\Omega^{-1}}} V_1 \underbrace{-\frac{1}{R_1 + R_2(1-\alpha) + R_3\dfrac{1-\alpha}{1+\beta}}}_{G_{12} = -3/5\,\mathrm{m\Omega^{-1}}} V_2$$

$$I_2 = I_{R3} = -\frac{1-\alpha}{1+\beta} I_{R1} =$$

$$= \underbrace{-\frac{1-\alpha}{1+\beta}\frac{1}{R_1 + R_2(1-\alpha) + R_3\dfrac{1-\alpha}{1+\beta}}}_{G_{11} = -1/10\,\mathrm{m\Omega^{-1}}} V_1 + \underbrace{\frac{1-\alpha}{1+\beta}\frac{1}{R_1 + R_2(1-\alpha) + R_3\dfrac{1-\alpha}{1+\beta}}}_{G_{12} = 1/10\,\mathrm{m\Omega^{-1}}} V_2$$

La soluzione cercata è

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} & -\dfrac{3}{5} \\ -\dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{10} \end{pmatrix} \mathrm{m\Omega^{-1}}$$

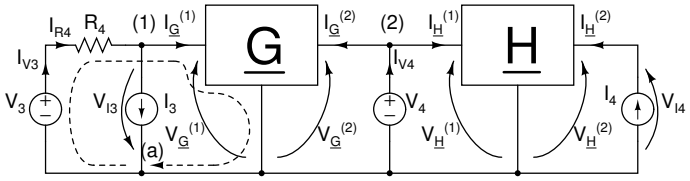
Nel secondo punto dell esercizio si chiede di calcolare la descrizione dello stesso doppio bipolo tramite matrice $\underline{R}$, data da $\underline{R} = \underline{G}^{-1}$. Tuttavia, poiché

$$\det \underline{G} = \frac{3}{5}\frac{1}{10} - \frac{1}{10}\frac{3}{5} = 0\,\mu\Omega^{-2}$$

la rappresentazione del doppio bipolo tramite matrice $\underline{R}$ non esiste, ovvero il circuito non è un doppio bipolo controllabile in corrente.

Per quanto riguarda la seconda domanda, ovvero se sia possibile ottenere un circuito descritto dalla stessa matrice $\underline{G}$, la risposta è no. Una matrice composta da soli componenti passivi deve essere simmetrica e semidefinita positiva. Non essendo la matrice $\underline{G}$ simmetrica, non è possibile ottenerla con sole resistenze.

Per l'ultimo punto dell'esercizio si consideri il seguente circuito, dove sono state indicate con $V_{\underline{G}}^{(1)}$ e $I_{\underline{G}}^{(1)}$ tensione e corrente alla porta 1 di $\underline{G}$, con $V_{\underline{G}}^{(2)}$ e $I_{\underline{G}}^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2 di $\underline{G}$, con $V_{\underline{H}}^{(1)}$ e $I_{\underline{H}}^{(1)}$ tensione e corrente alla porta 1 di $\underline{H}$, ed infine con $V_{\underline{H}}^{(2)}$ e $I_{\underline{H}}^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2 di $\underline{H}$, con $V_{\underline{G}}^{(2)} = V_{\underline{H}}^{(1)} = V_4$ e $I_{\underline{H}}^{(2)} = I_4$.



Si noti che le equazioni costitutive di $\underline{H}$ sono quelle dimensionalmente compatibili con la matrice, ovvero

$$I_{\underline{H}}^{(1)} = H_{11} V_{\underline{H}}^{(1)} + H_{12} I_{\underline{H}}^{(2)}$$
$$V_{\underline{H}}^{(2)} = H_{21} V_{\underline{H}}^{(1)} + H_{22} I_{\underline{H}}^{(2)}$$

Dalla maglia (a) si ha

$$(a):\ V_3 = R_4 I_{R4} + V_{\underline{G}}^{(1)}, \quad I_{R4} = \frac{V_3 - V_{\underline{G}}^{(1)}}{R_4}$$

che, grazie alla prima equazione costitutiva di $\underline{G}$ e dal bilancio delle correnti al nodo indicato con (1), porta a

$$(1):\ I_{R4} = I_3 + I_{\underline{G}}^{(2)}$$

$$\frac{V_3 - V_{\underline{G}}^{(1)}}{R_4} = I_3 + G_{11} V_{\underline{G}}^{(1)} + G_{12} V_4$$

da cui

$$V_{\underline{G}}^{(1)} = \frac{V_3 - R_4 I_3 - R_4 G_{12} V_4}{1 + R_4 G_{11}} = 0\,\mathrm{V}$$

Le potenze P_{V3} e P_{I3} sono date da

$$P_{V3} = V_3 I_{V3} = V_3 I_{R4} = V_3 \frac{V_3 - V_{\underline{G}}^{(1)}}{R_4} = 5\,\mathrm{mW}$$

$$P_{I3} = V_{I3} I_3 = -V_{\underline{G}}^{(1)} I_3 = 0\,\mathrm{W}$$

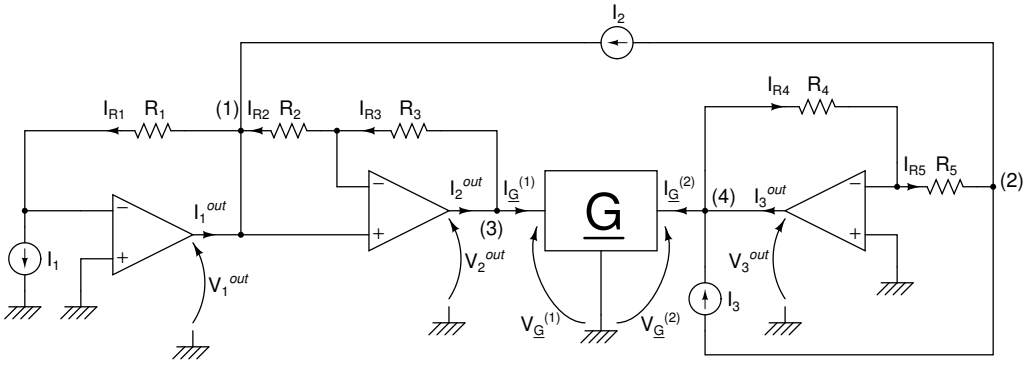
mentre per quanto riguarda P_{V4} si ha, sfruttando il bilancio delle correnti al nodo (2)

$$P_{V4} = V_4 I_{V4} = V_4 \left(I_{\underline{G}}^{(2)} + I_{\underline{H}}^{(1)} \right) = V_4 \left(G_{11} V_{\underline{G}}^{(1)} + G_{12} V_4 + H_{11} V_{\underline{H}}^{(1)} + H_{12} I_4 \right) = 15\,\mathrm{mW}$$

e per P_{I4}

$$P_{I4} = V_{I4} I_4 = V_{\underline{H}}^{(2)} I_4 = \left(H_{21} V_4 + H_{22} I_4 \right) I_4 = 0\,\mathrm{mW}$$

Esercizio 2



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = \ldots = R_5 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $\underline{G} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix} \mathrm{m\Omega^{-1}}$, $I_1 = 5\,\mathrm{mA}$, $I_2 = 4\,\mathrm{mA}$, $I_3 = 1\,\mathrm{mA}$.

Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Determinare le tre correnti I_1^{out}, I_2^{out} e I_3^{out} di uscita degli amplificatori operazionali.

Soluzione

Si considerino i versi delle tensioni e delle correnti come indicato in figura. Si consideri inoltre che per tutti gli amplificatori operazionali la corrente agli ingressi sia nulla e che la tensione ai due ingressi sia uguale per via del corto circuito virtuale.

Per l'operazionale 1, si ha $V_1^- = V_1^+ = 0\,\mathrm{V}$. Inoltre, $I_{R1} = I_1$, da cui

$$V_1^{out} = V_1^- + R_1 I_{R1} = R_1 I_{R1} = 5\,\mathrm{V}$$

Dagli ingressi dell'operazionale 2 si ha $V_2^- = V_2^+ = V_1^{out}$, da cui $I_{R2} = 0\,\mathrm{A}$. A questo punto la corrente I_1^{out} può essere ricavata dal bilancio delle correnti al nodo (1)

$$(1):\ I_2 + I_{R2} + I_1^{out} - I_{R1} = 0\,\mathrm{A}, \quad I_1^{out} = I_{R1} - I_2 - I_{R2} = 1\,\mathrm{mA}$$

Inoltre, $I_{R3} = I_{R2} = 0\,\mathrm{A}$, da cui

$$V_2^{out} = V_2^- + R_3 I_{R3} = V_1^{out} = 5\,\mathrm{V}$$

Per l operazionale 3, $V_3^- = V_3^+ = 0\,\mathrm{V}$; inoltre dal nodo (2)

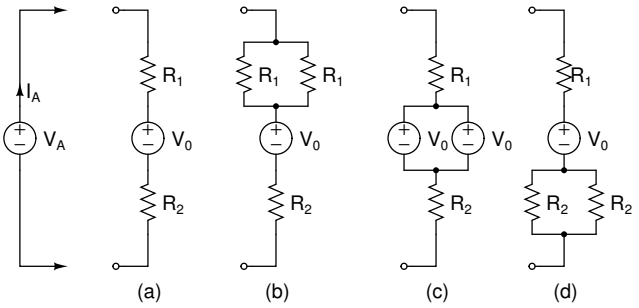
$$(2):\ I_{R5} = I_2 + I_3, \quad V_3^{out} = V_3^- + R_4 I_{R4} = V_3^- + R_4 I_{R5} = R_4(I_2 + I_3) = 5\,\mathrm{V}$$

Ora, osservando che $V_{\underline{G}}^{(1)} = V_2^{out}$ e $V_{\underline{G}}^{(2)} = V_3^{out}$, è possibile ricavare, attraverso il bilanco delle correnti ai nodi (3) e (4), le correnti I_2^{out} e I_3^{out}.

$$(3):\ I_2^{out} = I_{\underline{G}}^{(1)} + I_{R3} = G_{11} V_2^{out} + G_{12} V_3^{out} + I_{R3} = 1\,\mathrm{mA}$$

$$(3):\ I_3^{out} + I_3 = I_{R4} + I_{\underline{G}}^{(2)}, \quad I_3^{out} = I_{R4} + I_{\underline{G}}^{(2)} - I_3 = I_2 + \cancel{I_3} + G_{21} V_2^{out} + G_2 2 V_3^{out} - \cancel{I_3} = 5\,\mathrm{mA}$$

Esercizio 3

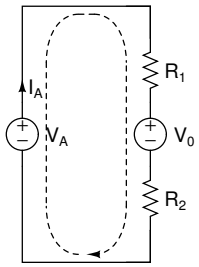


Si consideri il generatore ideale di corrente V_A, a cui vengono collegati uno alla volta i bipoli indicati con (a), (b), (c) e (d), con $V_A = 12\,\mathrm{V}$, $V_0 = 1\,\mathrm{V}$. Restano ignoti i valori delle resistenze R_1 e R_2.

Si determini:

- la corrente I_A (in funzione dei valori di R_1 e R_2) nel caso in cui sia collegato il bipolo (a);
- se nei casi (b), (c) e (d) il valore di tale correnti aumenti, diminuisca oppure se rimanga costante rispetto al caso precedente.

Soluzione

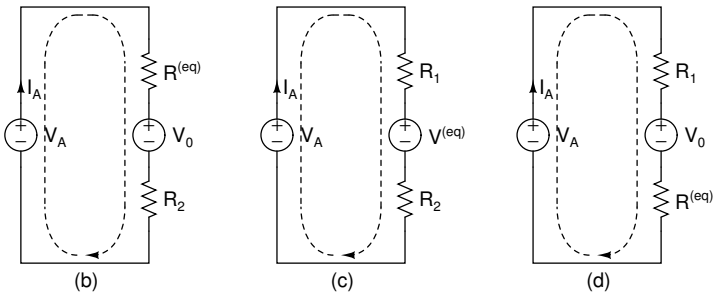


Si consideri il caso (a). Tutti i bipoli sono collegati in serie e quindi attraversati dalla stessa corrente I_A. Considerando il bilancio delle tensioni all'unica maglia si ha

$$V_A - R_1 I_A - V_0 - R_2 I_A = 0$$

da cui

$$I_A = \frac{V_A - V_0}{R_1 + R_2} = \frac{11\,\mathrm{V}}{R_1 + R_2}$$



Nel caso (b) la resistenza R_1 è stata sostituita dal parallelo di due resistenze uguali alla R_1. Tale parallelo si può considerare equivalente ad una sola resistenza di valore $R^{(eq)} = R_1/2$. La corrente del circuito in questo caso si può esprimere come

$$I_A^{(b)} = \frac{V_A - V_0}{R_1/2 + R_2} = \frac{11\,\mathrm{V}}{R_1/2 + R_2}$$

e, poiché $R_1/2 + R_2 < R_1 + R_2$, si ha

$$I_A^{(b)} > I_A$$

Nel caso (c) il generatore ideale di tensione V_0 è sostituito dal parallelo di due generatori ideali di tensione. Sebbene nel caso generale il parallelo di più generatori non sia possibile, in questo caso il fatto che entrambi i generatori abbiano la stessa tensione V_0 rende il parallelo possibile, ed al parallelo si può sostituire un unico generatore $V^{(eq)} = V_0$. La corrente del circuito diventa

$$I_A^{(c)} = \frac{V_A - V^{(eq)}}{R_1 + R_2} = \frac{11\,\mathrm{V}}{R_1/2 + R_2}$$

e, poiché $V_A - V^{(eq)} = V_A - V_0$, si ha

$$I_A^{(c)} = I_A$$

Infine, nel caso (d) è la resistenza R_2 ad essere sostituita dal parallelo di due resistenze uguali. Il parallelo può essere considerato equivalente ad una sola resistenza di valore $R^{(eq)} = R_2/2$. La corrente del circuito è

$$I_A^{(d)} = \frac{V_A - V_0}{R_1 + R_2/2} = \frac{11\,\mathrm{V}}{R_1 + R_2/2}$$

e, poiché $R_1 + R_2/2 < R_1 + R_2$, si ha

$$I_A^{(d)} > I_A$$