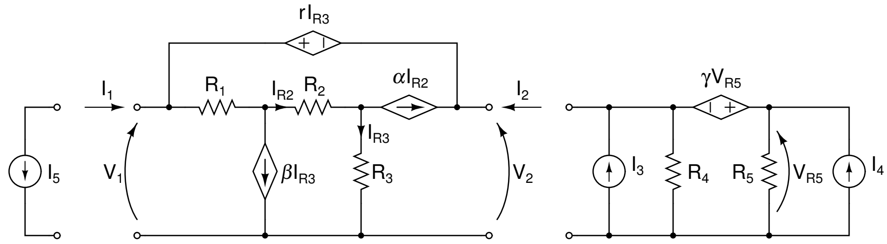
Esame di Teoria dei Circuiti – 31 Gennaio 2013 (Soluzione)

Esercizio 1



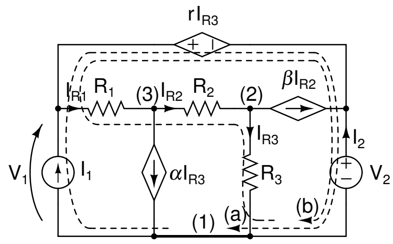
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_5 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $r = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 3/2$, $I_3 = 3\,\mathrm{mA}$, $I_4 = 7\,\mathrm{mA}$, $I_5 = 1\,\mathrm{mA}$.

Determinare:

- la descrizione del doppio bipolo evidenziato in figura tramite matrice ibrida $\underline{H}$, definita come $\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \underline{H} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$;
- il circuito equivalente di Thevenin alla porta 1 del doppio bipolo $\underline{H}$ calcolato sopra, quando alla porta 2 vengono collegate le resistenze R_4 e R_5, i generatori ideali di corrente I_3 e I_4 ed il generatore di tensione comandato $\gamma\, V_{R5}$, come indicato in figura;
- la potenza $P_{\underline{H}}$ dissipata dal doppio bipolo $\underline{H}$ collegando il generatore I_5 alla porta 1 di $\underline{H}$ ed il sottocircuito considerato sopra formato da R_4, R_5, I_3, I_4 e $\gamma\, V_{R5}$ alla porta 2.

Soluzione

Per determinare la descrizione del sottocircuito in esame tramite matrice ibrida $\underline{H}$ si supponga di collegare alla porta di sinistra il generatore ideale di corrente I_1 e alla porta di destra il generatore ideale di tensione V_2. Si calcoli quindi la tensione V_1 ai capi di I_1 e la corrente I_2 generata da V_2.



Dalla maglia indicata con (a) e dal nodo indicato con (1) si ha

$$(a):\;\; V_1 = r\, I_{R3} + V_2$$

$$(1):\;\; I_{R3} + \alpha\, I_{R3} = I_1 + I_2, \qquad I_2 = (1+\alpha) I_{R3} - I_1$$

Si proceda quindi determinando la correndo I_{R3}.

Dal bilancio ai nodi (2) e (3) è possibile ricavare sia I_{R1} che I_{R2} in funzione di I_{R3}

$$(2):\;\; I_{R2} = I_{R3} + \beta\, I_{R2}, \qquad I_{R2} = \frac{1}{1-\beta} I_{R3}$$

$$(3):\ I_{R1} = I_{R2} + \alpha\, I_{R3} = \frac{1+\alpha-\alpha\beta}{1-\beta} I_{R3}$$

Si sono quindi espresse le correnti I_{R1} e I_{R2} in funzione dell'incognita, unica al momento, I_{R3}. La determinazione del valore di di I_{R3} in funzione di sole grandezze note (in particolare di I_1 e V_2) è possibile considerando il bilancio delle tensioni alla maglia (b).

$$(b):\ V_2 + r\, I_{R3} = V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} + R_3 I_{R3}$$

$$V_2 + r\, I_{R3} = R_1 \frac{1+\alpha-\alpha\beta}{1-\beta} I_{R3} + R_2 \frac{1}{1-\beta} I_{R3} + R_3 I_{R3}$$

$$I_{R3} = \frac{1-\beta}{R_1 + R_2 + (1-\beta)(\alpha R_1 + R_3 - r)} V_2$$

da cui si ricava

$$V_1 = \underbrace{\left(\frac{(1-\beta)r}{R_1 + R_2 + (1-\beta)(\alpha R_1 + R_3 - r)} + 1\right)}_{H_{12}=3} V_2$$

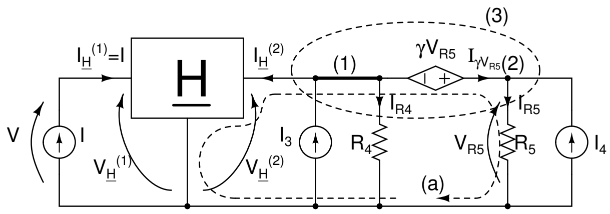
con $H_{11} = 0\,\Omega$, e

$$I_2 = \underbrace{-1}_{H_{21}=-1} I_1 + \underbrace{\frac{(1+\alpha)(1-\beta)r}{R_1 + R_2 + (1-\beta)(\alpha R_1 + R_3 - r)}}_{H_{22}=4\,\mathrm{m}\Omega^{-1}} V_2$$

ovvero

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} 0\,\Omega & 3 \\ -1 & 4\,\mathrm{m}\Omega^{-1} \end{pmatrix}$$

Per il secondo punto dell'esercizio, il circuito da esaminare diventa il seguente. Per calcolare il circuito equivalente di Thevenin alla porta 1 si è connesso, sempre alla porta 1 di $\underline{H}$, un generatore di corrente I, in modo da calcolarne la tensione V ai capi.



Indicando con $V_{\underline{H}}^{(1)}$ e $I_{\underline{H}}^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{H}$, e con $V_{\underline{H}}^{(2)}$ e $I_{\underline{H}}^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2, si ha $V_{\underline{H}}^{(1)} = V$ e $I_{\underline{H}}^{(1)} = I$.

La tensione V è determinata dalla prima equazione costitutiva di $\underline{H}$, ovvero

$$V = V_{\underline{H}}^{(1)} = H_{11} I + H_{12} V_{\underline{H}}^{(2)}$$

ed è nota una volta nota $V_{\underline{H}}^{(2)}$.

Dalla maglia (a) si ha

$$(a):\ V_{\underline{H}}^{(2)} + \gamma\, V_{R5} = V_{R5}, \quad V_{R5} = \frac{V_{\underline{H}}^{(2)}}{1-\gamma}, \quad I_{R5} = \frac{V_{R5}}{R_5} = \frac{V_{\underline{H}}^{(2)}}{(1-\gamma) R_5}$$

Inoltre

$$I_{R4} = \frac{V_{R4}}{R_4} = \frac{V_{\underline{H}}^{(2)}}{R_4}, \quad I_{\underline{H}}^{(2)} = H_{21} I + H_{22} V_{\underline{H}}^{(2)}$$

Il sistema è risolto considerando i bilanci delle correnti ai nodi (1) e (2)

$$(1):\ I_3 = I_{\gamma V_{R5}} + I_{R4} + I_{\underline{H}}^{(2)}$$

$$(2):\ I_4 + I_{\gamma V_{R5}} = I_{R5}$$

$$(1)+(2):\ I_3 + \cancel{I_{\gamma V_{R5}}} + I_4 = I_{R4} + \cancel{I_{\gamma V_{R5}}} + I_{R5} + I_{\underline{H}}^{(2)}$$

Equivalentemente la stessa equazione si poteva ricavare considerando il bilancio delle correnti al taglio indicato con (3)

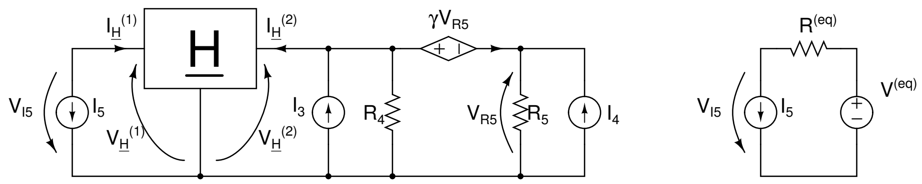
$$(3):\ I_3 + I_4 = I_{R4} + I_{R5} + I_{\underline{H}}^{(2)}$$

$$I_3 + I_4 = \frac{V_{\underline{H}}^{(2)}}{R_4} + \frac{V_{\underline{H}}^{(2)}}{(1-\gamma)R_5} + H_{21} I + H_{22} V_{\underline{H}}^{(2)}$$

$$V_{\underline{H}}^{(2)} = \frac{I_3 + I_4 - H_{21} I}{H_{22} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{(1-\gamma)R_5}}$$

$$V = \underbrace{H_{12} \frac{I_3 + I_4}{H_{22} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{(1-\gamma)R_5}}}_{V^{(eq)} = 10\,\mathrm{V}} + \left(\underbrace{H_{11} - \frac{H_{12} H_{21}}{H_{22} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{(1-\gamma)R_5}}}_{R^{(eq)} = 1\,\mathrm{k}\Omega} \right) I$$

Nel terzo ed ultimo punto il circuito da esaminare è sostanzialmente lo stesso del punto precedente, in cui il generatore I è sostituito da un generatore I_5 con verso opposto rispetto al precedente. In alternativa, si può sfruttare il circuito equivalente di Thevenin appena calcolato e collegare ad esso il generatore ideale di corrente I_5 (come nel circuito di destra in figura).



Si chiede di calcolare la potenza $P_{\underline{H}}$ dissipata da $\underline{H}$, definita come

$$P_{\underline{H}} = V_{\underline{H}}^{(1)} I_{\underline{H}}^{(1)} + V_{\underline{H}}^{(2)} I_{\underline{H}}^{(2)}$$

con $I_{\underline{H}}^{(1)} = -I_5 = -1\,\mathrm{mA}$, mentre le altre grandezze sono da calcolare.

Per quanto riguarda la tensione $V_{\underline{H}}^{(1)} = -V_{I5}$, può essere utile sfruttare il circuito equivalente di Thevenin appena calcolato (si veda il circuito di destra in figura).

$$V_{\underline{H}}^{(1)} = -V_{I5} = V^{(eq)} - R^{(eq)} I_5 = 9\,\mathrm{V}$$

La tensione $V_{\underline{H}}^{(2)}$ può essere determinata sfruttando quanto trovato nel punto precedente, ricordando che $I = -I_5$, ovvero

$$V_{\underline{H}}^{(2)} = \frac{I_3 + I_4 + H_{21} I_5}{H_{22} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{(1-\gamma)R_5}} = 3\,\mathrm{V}$$

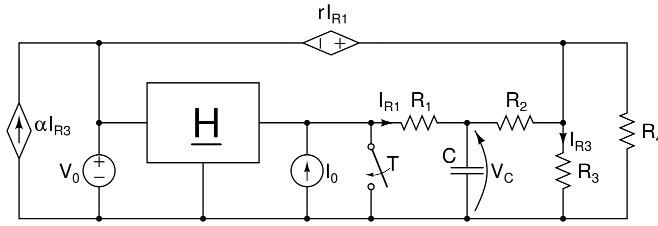
A questo punto la corrente $I_{\underline{H}}^{(2)}$ (così come anche $V_{\underline{H}}^{(1)}$, nel caso in cui non si sia usato l'equivalente di Thevenin) si determina tramite le equazioni costitutive di $\underline{H}$.

$$I_{\underline{H}}^{(2)} = H_{21} I_{\underline{H}}^{(1)} + H_{22} V_{\underline{H}}^{(2)} = -H_{21} I_5 + H_{22} V_{\underline{H}}^{(1)} = 13\,\mathrm{mA}$$

$$V_{\underline{H}}^{(1)} = H_{11} I_{\underline{H}}^{(1)} + H_{12} V_{\underline{H}}^{(2)} = -H_{11} I_5 + H_{12} V_{\underline{H}}^{(1)} = 9\,\mathrm{V}$$

La potenza cercata vale $P_{\underline{H}} = 30\,\mathrm{mW}$

Esercizio 2



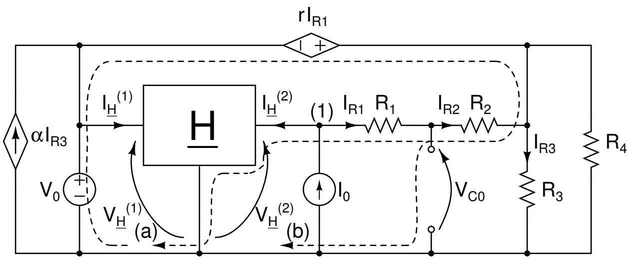
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$\underline{H} = \begin{pmatrix} 1\,\mathrm{m}\Omega^{-1} & -3 \\ 3 & -8\,\mathrm{k}\Omega \end{pmatrix}$, $R_1 = 3\,\mathrm{k}\Omega$, $R_2 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $R_3 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $R_4 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $r = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $C = 1\,\mu\mathrm{F}$, $\alpha = 1/3$, $V_0 = 10\,\mathrm{V}$, $I_0 = 1{,}25\,\mathrm{mA}$.

Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T è aperto ed il circuito è a regime. All'istante $t = t_0$ l'interruttore T si chiude. Determinare:

- l'andamento della tensione $V_C(t)$ ai capi del condensatore;
- quale valore dovrebbe avere V_0 affinché la tensione $V_C(t)$ resti costante per qualunque t, cioè non si verifichi alcun tipo di transitorio alla chiusura dell'interruttore.

Soluzione

Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T è aperto e, per via dell'ipotesi che il circuito sia a regime, si ha $I_C = 0\,\mathrm{A}$; sia la capacità C che l'interruttore T sono assimilabili a circuiti aperti. Il circuito da considerare è il seguente.



Si indichino con $V_{\underline{H}}^{(1)}$ e $I_{\underline{H}}^{(1)}$ tensione e corrente alla porta 1 di $\underline{H}$, e con $V_{\underline{R}}^{(2)}$ e $I_{\underline{H}}^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2. Osservazione dimensionalmente i termini della matrice $\underline{H}$, è facile ricavare quali siano le sue equazioni costitutive:

$$I_{\underline{H}}^{(1)} = H_{11} V_{\underline{H}}^{(1)} + H_{12} I_{\underline{H}}^{(2)}$$

$$V_{\underline{H}}^{(2)} = H_{21} V_{\underline{H}}^{(1)} + H_{22} I_{\underline{H}}^{(2)}$$

Si assuma I_{R1} come incognita del problema. È immediato osservare che $I_{R1} = I_{R2}$; inoltre dal nodo (1) si ha

$$(1):\ I_0 = I_{\underline{H}}^{(2)} + I_{R1}, \quad I_{\underline{H}}^{(2)} = I_0 - I_{R1}$$

Il problema è risolto considerando il bilancio delle tensioni alla maglia indicata con (a).

$$(a):\ V_0 + r\,I_{R1} + R_2 I_{R2} + R_1 I_{R1} = V_{\underline{H}}^{(2)}$$

$$V_0 + r\,I_{R1} + R_2 I_{R1} + R_1 I_{R1} = H_{21} V_0 + H_{22} I_0 - H_{22} I_{R1}$$

$$I_{R1} = \frac{(H_{21} - 1)\,V_0 + H_{22} I_0}{r + R_1 + R_2 + H_{22}} = -5\,\mathrm{mA}$$

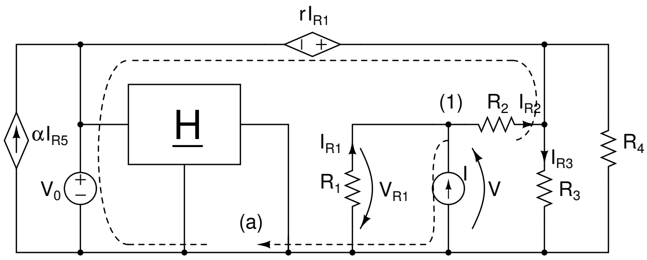
La tensione V_{C0} si può ottenere dal bilancio delle tensioni alla maglia (b)

$$(b):\ V_0 + r\,I_{R1} + R_4 I_{R2} = V_{C0}$$

$$V_{C0} = V_0 + (r + R_2)\,I_{R3} = V_0 + (r + R_2)\,\frac{(H_{21} - 1)\,V_0 + H_{22} I_0}{r + R_1 + R_2 + H_{22}} =$$

$$= \frac{(R_1 + H_{22} + rH_{21} + R_2 H_{21})\,V_0 + H_{22}\,(r + R_2)\,I_0}{r + R_1 + R_2 + H_{22}} = -5\,\mathrm{V}$$

All'istante $t = t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T si chiude e comincia il transitorio di carica (o scarica) di C. Per il calcolo di tale transitorio, si ricorra all'equivalente di Thevenin del circuito connesso alla capacità. Si supponga quindi di sostituire alla capacità stessa un generatore ideale di corrente I e di calcolare la tensione V ai suoi capi. Il circuito da considerare è il seguente, dove il generatore di corrente I_0 è stato omesso in quanto chiuso in corto circuito dall'interruttore T, e quindi non influisce su alcuna grandezza elettrica del circuito.



La tensione cercata V è uguale e $V = -V_{R1} = -R_1 I_{R1}$. Dal nodo (1) si ha

$$(1):\ I_{R1} + I = I_{R2}$$

mentre considerando il bilancio delle tensioni alla maglia (a) è possibile risolvere il circuito.

$$(a):\ V_0 + r\,I_{R1} + R_2 I_{R2} + R_1 I_{R1} = 0\,\mathrm{V}$$

$$V_0 + r\,I_{R1} + R_2 I_{R1} + R_2 I + R_1 I_{R1} = 0\,\mathrm{V}$$

$$I_{R1} = -\frac{V_0 + R_2 I}{r + R_1 + R_2}$$

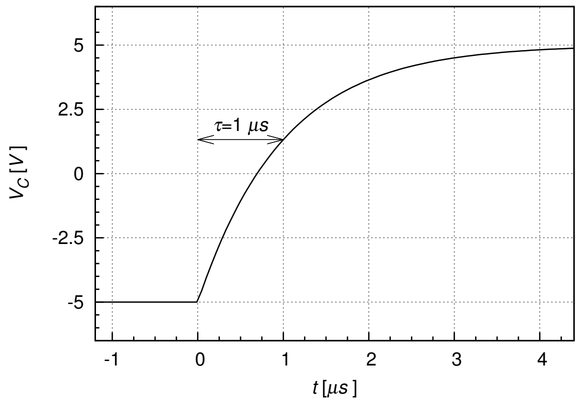
da cui

$$V = -R_1 I_{R1} = \underbrace{\frac{R_1}{r + R_1 + R_2}}_{V^{(eq)} = 5\,\mathrm{V}} V_0 + \underbrace{\frac{R_1 R_2}{r + R_1 + R_2}}_{R^{(eq)} = 1\,\mathrm{k\Omega}} I$$

La tensione $V_c(t)$ può essere ricavate dalla formula del transitorio del primo ordine

$$V_c(t) = \begin{cases} V_{C0} = -5\,\text{V}, & t < t_0 = 0\,\text{s} \\ V^{(eq)} + \left(V_{C0} - V^{(eq)}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = 5 - 10 e^{-\frac{t}{\tau}}\,\text{V}, & t \geq t_0 = 0\,\text{s} \end{cases}$$

con $\tau = R^{(eq)}C = 1\,\mu\text{s}$. L'andamento della tensione nel tempo è quello dato dalla figura seguente.



Il secondo punto dell'esercizio chiede di dimensionare la tensione V_0 affinché alla chiusura del transitorio non avvenga alcun transitorio.

Perché non ci sia transitorio è sufficiente che la tensione iniziale e la tensione finale del transitorio siano identiche, cioè la tensione V_{C0} calcolata con l interruttore aperto sia uguale alla $V^{(eq)}$ calcolata con l interruttore chiuso. Il valore di V_0 per il quale si ha $V_{C0} = V^{(eq)}$ è la soluzione cercata.

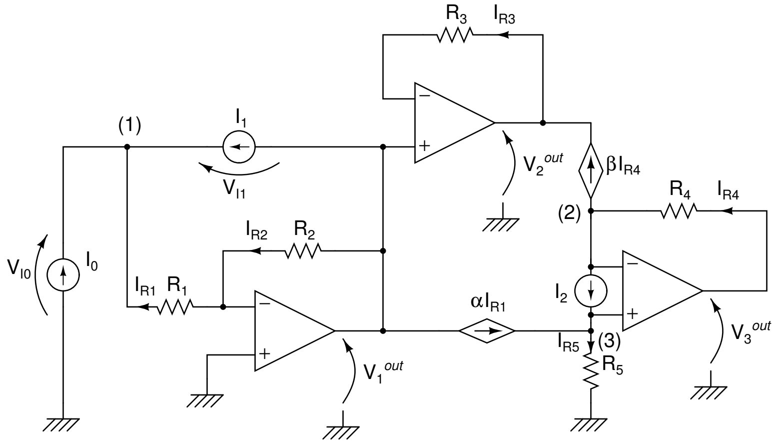
$$V_{C0} = V^{(eq)}$$

$$\frac{(R_1 + H_{22} + rH_{21} + R_2H_{21})\,V_0 + H_{22}\,(r + R_2)\,I_0}{r + R_1 + R_2 + H_{22}} = \frac{R_1}{r + R_1 + R_2} V_0$$

$$V_0 = \frac{\dfrac{H_{22}\,(r + R_2)\,I_0}{r + R_1 + R_2 + H_{22}}}{\dfrac{R_1}{r + R_1 + R_2} + \dfrac{R_1 + H_{22} + rH_{21} + R_2H_{21}}{r + R_1 + R_2 + H_{22}}} = 6\,\text{V}$$

Si noti che con tale valore per V_0, la tensione sulla capacità è $V_C(t) = 3\,\text{V}$.

Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $R_1 = R_2 = \ldots = R_5 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $I_0 = 1{,}5\,\mathrm{mA}$, $I_1 = 3{,}5\,\mathrm{mA}$, $I_2 = 7\,\mathrm{mA}$, $\alpha = 1/5$, $\beta = 4/3$.

Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Determinare:

- le tensioni V_1^{out}, V_2^{out} e V_3^{out} di uscita degli amplificatori operazionali;
- la regione di funzionamento (attiva o passiva) dei generatori ideali di corrente I_0, I_1 e I_2.

Soluzione

Si considerino i versi delle tensioni e delle correnti come indicato in figura. Si consideri inoltre che per tutti gli amplificatori operazionali la corrente agli ingressi sia nulla e che la tensione ai due ingressi sia uguale per via del corto circuito virtuale.

Per l'operazionale 1, si ha $V_1^{out} = V_1^- + R_2 I_{R2}$. Per il corto circuito virtuale si ha $V_1^- = V_1^+ = 0\,\mathrm{V}$. Inoltre dal nodo (1)

$$(1){:}\;\; I_{R1} + I_1 + I_0 = 0\,\mathrm{A}, \quad I_{R1} = -I_0 - I_1 = -5\,\mathrm{mA}$$

Poiché, per via del fatto che gli ingressi dell'operazione non assorbono corrente, si ha $I_{R2} = I_{R1}$, segue che

$$V_1^{out} = V_1^- + V_{R2} = V_1^- + R_2 I_{R2} = V_0 = -5\,\mathrm{V}$$

Sebbene non richiesta, si può calcolare anche la corrente di uscita come

$$I_1^{out} = \alpha\, I_{R1} + I_{R2} + I_1 = -2{,}5\,\mathrm{mA}$$

Per l'operazionale indicato con 2, si ha $V_2^- = V_2^+ = V_1^{out}$. Dato che la corrente di ingresso dell'amplificatore operazione è nulla, la corrente I_{R3} è nulla. Segue che

$$V_2^{out} = V_2^- + V_{R3} = V_1^{out} + R_3 I_{R3} = V_1^{out} = -5\,\mathrm{V}$$

e (anche se non richiesta) la corrente di uscita vale $I_2^{out} = I_{R3} - \beta\, I_{R4}$. La corrente I_{R4} si può ricavare dal bilancio delle correnti al nodo (2)

$$(2){:}\;\; I_{R4} = \beta\, I_{R4} + I_2, \quad I_{R4} = \frac{I_2}{1-\beta} = -21\,\mathrm{mA}$$

$$I_2^{out} = I_{R3} - \beta\, I_{R4} = -\beta\, I_{R4} = 28\,\mathrm{mA}$$

Per l'operazionale 3, si ha $V_3^- = V_3^+ = R_5 I_{R5}$. Inoltre dal nodo (3) si ha $I_{R5} = \alpha\, I_{R1} + I_2 = I_2 - \alpha\, I_1 - \alpha\, I_0$, da cui

$$V_3^{out} = V_3^- + V_{R4} = R_4 I_{R4} = R_5(I_2 - \alpha\, I_1 - \alpha\, I_0) + R_4 \frac{I_2}{1-\beta} = -15\,\mathrm{V}$$

mentre la corrente di uscita vale

$$I_3^{out} = I_{R4} = -21\,\mathrm{mA}$$

Per risolvere il secondo punto dell'esercizio è necessario calcolare le tensioni ai capi dei tre generatori di corrente. Per quanto riguarda il primo si ha

$$V_{I0} = -V_{R1} = -R_1(-I_0 - I_1) = R_1 I_0 + R_1 I_1 = 5\,\mathrm{V}, \quad P_{I0} = V_{I0} I_0 = 7{,}5\,\mathrm{mW}$$

Poiché $P_{I0} > 0\,\mathrm{W}$, il generatore I_0 sta funzionando in regione attiva, ovvero sta cedendo energia al circuito.

Per I_1 si ha

$$V_{I1} = -V_{R1} - V_{R2} = (R_1 + R_2)(I_0 + I_1) = 10\,\mathrm{V}, \quad P_{I1} = V_{I1} I_1 = 35\,\mathrm{mW}$$

Anche in questo caso la regione di funzionamento è quella attiva, essendo $P_{I1} > 0\,\mathrm{W}$.

Infine, per I_2 si ha semplicemente che

$$V_{I2} = V_2^+ - V_2^- = 0\,\mathrm{V}, \quad P_{I2} = V_{I2} I_2 = 0\,\mathrm{W}$$

e la regione di funzionamento è quella neutra.