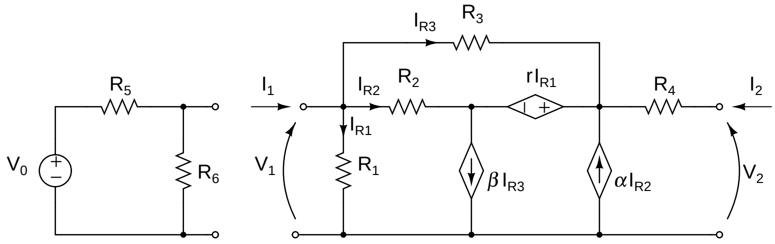
<u>**Esame di Teoria dei Circuiti - 27 giugno 2008 - Soluzione**</u>

Esercizio 1

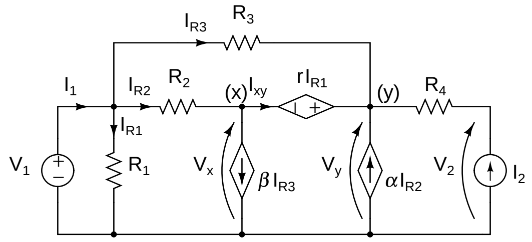


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 2$ kΩ, $R_3 = 1$ kΩ, $R_4 = 1$ kΩ, $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $r = 2$ kΩ, $R_5 = 200$ Ω, $R_6 = 666$ Ω $= 2/3$ kΩ, $V_0 = 1.5$ V. Calcolare:

- la matrice ibriba H del due-porte, definita come $\begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$
- l'equivalente di Thevenin alla porta 2 quando alla porta 1 vengono collegati il generatore ideale di tensione V_0 e le due resistenze R_5, R_6 come indicato in figura.

Soluzione

Per trovare la matrice ibrida H si supponga di collegare il generatore di tensione V_1 alla porta 1 e il generatore di corrente I_2 alla porta 2:



La corrente I_1 e la tensione V_2 si ottengono come

$$I_1 = I_{R1} + I_{R2} + I_{R3}$$

$$V_2 = V_y + R_4 I_2$$

Le tre variabili di controllo I_{R1}, I_{R2} e I_{R3} si possono esprimere come:

$$I_{R1} = \frac{V_1}{R_1}$$

$$I_{R2} = \frac{V_1 - V_x}{R_2}$$

$$I_{R3} = \frac{V_1 - V_y}{R_3}$$

Inoltre, poiché $V_y = V_x + rI_{R1}$, si possono riesprimere V_2 e I_{R3} come $V_2 = V_x + \frac{r}{R1}V_1 + R_4 I_2$ e $I_{R3} = \left(1 - \frac{r}{R1}\right)\frac{V_1}{R_3} - \frac{V_x}{R_3}$.

Bilanciando le correnti ai nodi (x) e (y), e sommando membro a membro le due equazioni ottenute, la I_{xy} si semplifica

$$\begin{array}{rl}
(x) & I_{R2} = \beta I_{R3} + I_{xy} \\
(y) & I_{xy} + \alpha I_{R2} + I_2 + I_{R3} = 0 \\
\hline
 & I_{R2} + \alpha I_{R2} + I_2 + I_{R3} = \beta I_{R3}
\end{array}$$

Sostituendo in questa espressione le espressioni per I_{R2} e I_{R3} trovate sopra, si pu esplicitare la tensione V_x

$$(1+\alpha)I_{R2} + (1-\beta)I_{R3} + I_2 = 0$$

$$(1+\alpha)\frac{V_1}{R_2} - (1+\alpha)\frac{V_x}{R_2} + (1-\beta)\left(1 - \frac{r}{R1}\right)\frac{V_1}{R_3} - (1-\beta)\frac{V_x}{R_2} + I_2 = 0$$

$$V_x = \frac{\dfrac{1+\alpha}{R_2} + \dfrac{(1-\beta)(1-r/R_1)}{R_3}}{\dfrac{1+\alpha}{R_2} + \dfrac{1-\beta}{R_3}} V_1 + \frac{1}{\dfrac{1+\alpha}{R_2} + \dfrac{1-\beta}{R_3}} I_2$$

che permette di risolvere il circuito.

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_x}{R_2} + \frac{V_1(1-r/R_1) - V_x}{R_3}$$

$$= \left(\underbrace{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1-r/R_1}{R_3} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\dfrac{1+\alpha}{R_2} + \dfrac{(1-\beta)(1-r/R_1)}{R_3}}{\dfrac{1+\alpha}{R_2} + \dfrac{1-\beta}{R_3}}}_{H_{11}}\right) V_1 +$$

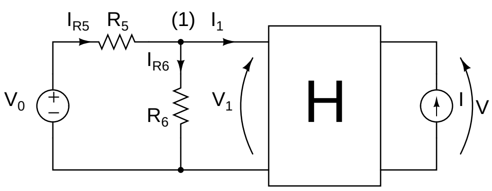
$$+ \left(\underbrace{-\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{\dfrac{1+\alpha}{R_2} + \dfrac{1-\beta}{R_3}}}_{H_{12}}\right) I_2$$

$$V_2 = \left(\underbrace{\frac{r}{R_1} + \frac{\dfrac{1+\alpha}{R_2} + \dfrac{(1-\beta)(1-r/R_1)}{R_3}}{\dfrac{1+\alpha}{R_2} + \dfrac{1-\beta}{R_3}}}_{H_{21}}\right) V_1 + \left(\underbrace{R_4 + \frac{1}{\dfrac{1+\alpha}{R_2} + \dfrac{1-\beta}{R_3}}}_{H_{22}}\right) I_2$$

Numericamente

$$H_{11} = -4\ \mathrm{m}\Omega^{-1}, \quad H_{12} = -\frac{3}{2}, \quad H_{21} = 5, \quad H_{22} = 2\ \mathrm{k}\Omega$$

Per trovare l'equivalente di Thevenin richiesto dal secondo punto si supponga di collegare al circuito il generatore di corrente I e di calcolare la tensione V ai suoi capi:



Bbilanciando le correnti al nodo (1) si ha $I_{R5} = I_1 + I_{R6}$, cioè

$$\frac{V_0 - V_1}{R_5} = I_1 + \frac{V_1}{R_6}$$

Inoltre considerando le equazioni del due porte:

$$\begin{cases} I_1 = H_{11}V_1 + H_{12}I \\ V = H_{21}V_1 + H_{22}I \end{cases}$$

Confrontando l'espressione di I_1 ricavata dalla prima equazione con quella trovata implicitamente poco sopra si ha $I_1 = H_{11}V_1 + H_{12}I = \frac{V_0}{R_5} - \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right) V_1$, quindi

$$V_1 = \frac{\frac{V_0}{R_5} - H_{12}I}{\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + H_{11}}$$

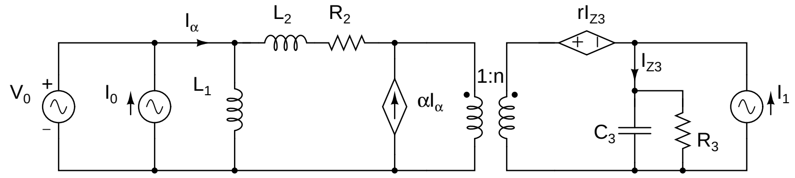
da cui

$$V = \underbrace{\frac{H_{21}\frac{V_0}{R_5}}{\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + H_{11}}}_{V^{eq}} + \left(\underbrace{H_{22} - \frac{H_{21}H_{12}}{\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + H_{11}}}_{R^{eq}}\right) I$$

con

$$V^{eq} = 15 \text{ V}, \quad R^{eq} = 5 \text{ k}\Omega$$

Esercizio 2

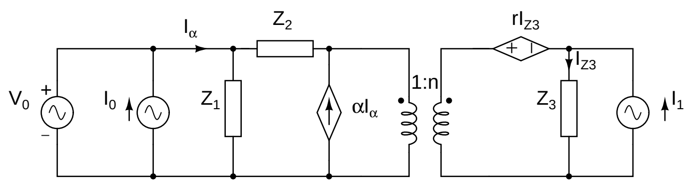


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $\omega = 1$ krad/s, $L_1 = L_2 = 0.2$ H, $R_2 = 200\ \Omega$, $L_1 = 0.2$ H, $R_3 = 50$ kΩ, $C_3 = 40$ nF $= 4 \times 10^{-8}$ F, $r = 10$ kΩ, $\alpha = 2$, $n = 10$, $V_0 = 2\cos(\omega t)$ V, $I_0 = 6\cos(\omega t - \pi/2)$ mA, $I_1 = 1\cos(\omega t + \pi/2)$ mA.

Calcolare la corrente erogata dal generatore ideale di tensione V_0.

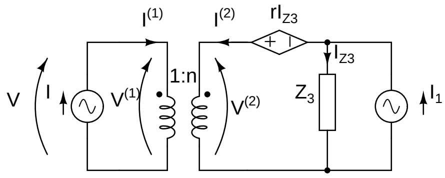
Soluzione

Nel dominio dei fasori si può ridisegnare il circuito come



con $Z_1 = 200j\ \Omega$, $Z_2 = 200 + 200j\ \Omega$, $Z_3 = (10 - 20j) \cdot 10^3\ \Omega$, $V_0 = 2$ V, $I_0 = -6j \cdot 10^{-3}$ A, $I_1 = j \cdot 10^{-3}$ A.

Come prima cosa è possibile calcolare l'equivalente di Thevenin del circuito a destra del trasformatore inserendo un generatore si corrente I e calcolando la tensione V ai suoi capi:



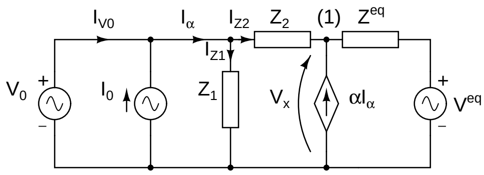
$$I_{Z3} = I_1 = I^{(2)}$$

$$V^{(2)} = Z_3 I_{Z3} + r I_{Z3} = (Z_3 + r)\left(I_1 - I^{(2)}\right) = (Z_3 + r)\left(I_1 + \frac{I}{n}\right)$$

$$V = V^{(1)} = \frac{V^{(2)}}{n} = \underbrace{\frac{Z_3 + r}{n} I_1}_{V^{eq}} + \underbrace{\frac{Z_3 + r}{n^2}}_{Z^{eq}} I$$

$$V^{eq} = 2 + 2j \text{ V}; \qquad Z^{eq} = 200 - 200j \ \Omega$$

Sostituendo ora la parte del circuito a destra del trasformatore con il suo equivalente di Thevenin si ha:



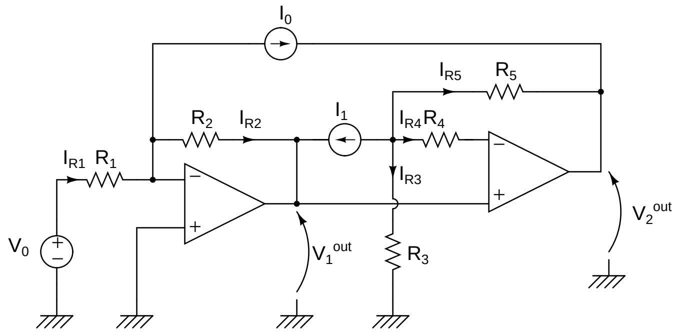
Si osservi che $I_{V0} = I_\alpha - I_0$, $I_\alpha = I_{Z1} + I_{Z2} = \dfrac{V_0}{Z_1} + \dfrac{V_0 - V_x}{Z_2}$. Con il bilancio delle correnti al nodo (1) è possibile trovare V_x

$$\frac{V_0 - V_x}{Z_2} + \alpha \left(\overbrace{\frac{V_0}{Z_1} + \frac{V_0 - V_x}{Z_2}}^{I_\alpha}\right) + \frac{V^{eq} - V_x}{Z^{eq}} = 0$$

$$V_x = \frac{\dfrac{\alpha V_0}{Z_1} + \dfrac{(1+\alpha)V_0}{Z_2} + \dfrac{V^{eq}}{Z^{eq}}}{\dfrac{1+\alpha}{Z_2} + \dfrac{1}{Z^{eq}}}$$

$$I_{V0} = \frac{V_0}{Z_1} + \frac{V_0 - V_x}{Z_2} - I_0 = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right) V_0 - \frac{\dfrac{\alpha V_0}{Z_1} + \dfrac{(1+\alpha)V_0}{Z_2} + \dfrac{V^{eq}}{Z^{eq}}}{1 + \alpha + \dfrac{Z_2}{Z^{eq}}} - I_0 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $R_1 = 2$ kΩ, $R_2 = 3$ kΩ, $R_3 = 4$ kΩ, $R_4 = 1$ kΩ, $R_5 = 4$ kΩ, $V_0 = 3$ V, $I_0 = 2.5$ mA, $I_1 = 2$ mA. Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Calcolare le tensioni V_1^{out} e V_2^{out}.

Soluzione

Ricordando che gli ingressi degli operazionali non assorbono corrente si può scrivere

$$V_1^{+} = 0 = V_1^{-}; \quad I_{R1} = \frac{V_0}{R_1}; \quad V_1^{out} = V_1^{-} - R_2 I_{R2} = -R_2(I_{R1} - I_0) = I_0 R_2 - V_0 \frac{R_2}{R_1} = 3 \text{ V}$$

V_2^{out} può essere ricavata dal bilancio delle correnti al nodo in cui confluiscono I_1,R_3, R_4 e R_5 (e che si trova a potenziale $V_2^{-} = V_2^{+} = V_1^{out}$ dato che $I_{R4} = 0$)

$$I_1 + I_{R3} + I_{R4} + I_{R5} = 0$$

$$I_1 + \frac{V_1^{out}}{R_3} + 0 + \frac{V_1^{out} - V_2^{out}}{R_5} = 0$$

$$V_2^{out} = R_5 \left(I_1 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) V_1^{out} \right) = 14 \text{ V}$$