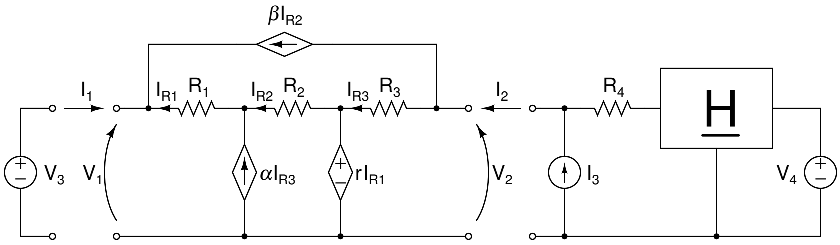
Esame di Teoria dei Circuiti – 23 Febbraio 2012 (Soluzione)

Esercizio 1



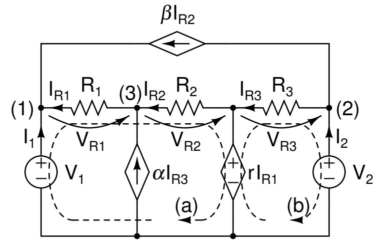
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 6\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $\underline{H} = \begin{pmatrix} 5\,\mathrm{k\Omega} & 2 \\ -1 & 11/2\,\mathrm{m\Omega^{-1}} \end{pmatrix}$, $r = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$, $V_3 = 16\,\mathrm{V}$, $V_4 = 4\,\mathrm{V}$, $I_3 = 1\,\mathrm{mA}$.

Determinare:

- la descrizione del doppio bipolo evidenziato in figura tramite matrice conduttanza $\underline{G}$;
- si consideri un doppio bipolo $\underline{R}$ equivalente al doppio bipolo $\underline{G}$ appena trovato. È possibile ottenere un bipolo equivalente costituito da sole 4 resistenze di valore pari a $2\,\mathrm{k\Omega}$?
- Si assuma di connettere alla porta di sinistra del doppio bipolo $\underline{G}$ sopra calcolato il generatore di tensione V_3 e alla porta di destra la resistenza R_4, il doppio bipolo $\underline{H}$ e i generatori I_3 e V_4, come mostrato in figura. Determinare la potenza $P_{\underline{G}}$ e la potenza $P_{\underline{H}}$ dissipata dai due doppi bipoli.

Soluzione

Per determinare la descrizione del sottocircuito in esame tramite matrice conduttanza $\underline{G}$ si supponga di collegare alla porta di sinistra il generatore ideale di tensione V_1 e alla porta di destra il generatore ideale di tensione V_2. Si calcoli quindi le correnti I_1 e I_2 generate, rispettivamente, da V_1 e da V_2.



Le due correnti cercate I_1 e I_2 possono essere determinate dai bilanci ai nodi indicati con (1) e (2), una volta note le correnti sulle tre resistenze.

$$(1):\; I_1 + I_{R1} + \beta\, I_{R2} = 0\,\mathrm{A}, \quad I_1 = -I_{R1} - \beta\, I_{R2}$$

$$(2):\; I_2 = I_{R3} + \beta\, I_{R2}$$

Per determinare le tre correnti I_{R1}, I_{R2} e I_{R3}, si può procedere calcolando I_{R2} e I_{R3} in funzione di I_{R1} dai bilanci delle tensioni alle maglie indicate con (a) e (b)

$$(a):\; V_1 + R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} = r\, I_{R1}, \quad I_{R2} = \frac{r - R_1}{R_2} I_{R1} - \frac{V_1}{R_2}$$

$$(b)\colon\; r\,I_{R1} + R_3 I_{R3} = V_2, \quad I_{R3} = -\frac{r}{R_3} I_{R1} + \frac{V_2}{R_3}$$

Con I_{R1} rimasta unica incognita del circuito, l'equazione risolvente è il bilancio delle correnti al nodo (3)

$$(3)\colon\; \alpha\, I_{R3} + I_{R2} = I_{R1}, \quad -\alpha\frac{r}{R_3} I_{R1} + \alpha\frac{V_2}{R_3} + \frac{r - R_1}{R_2} I_{R1} - \frac{V_1}{R_2} = I_{R1}$$

$$I_{R1} = \frac{-\dfrac{V_1}{R_2} + \alpha\dfrac{V_2}{R_3}}{1 + \alpha\dfrac{r}{R_3} - \dfrac{r - R_1}{R_2}} = \frac{-R_3 V_1 + \alpha R_2 V_2}{R_1 R_3 + R_2 R_3 + \alpha\, r R_2 - r R_3}$$

da cui

$$I_{R2} = \frac{-\left(\alpha\, r + R_3\right) V_1 + \alpha\left(r - R_1\right) V_2}{R_1 R_3 + R_2 R_3 + \alpha\, r R_2 - r R_3}$$

$$I_{R3} = \frac{r\, V_1 + \left(R_1 + R_2 - r\right) V_2}{R_1 R_3 + R_2 R_3 + \alpha\, r R_2 - r R_3}$$

Le due correnti I_1 e I_2 sono quindi date da

$$I_1 = -I_{R1} - \beta\, I_{R2} = \underbrace{\frac{\alpha\,\beta\, r + (1+\beta) R_3}{R_1 R_3 + R_2 R_3 + \alpha\, r R_2 - r R_3}}_{G_{11} = 3/8\,\mathrm{m}\Omega^{-1}} V_1 \underbrace{-\alpha\frac{\beta(r - R_1) + R_2}{R_1 R_3 + R_2 R_3 + \alpha\, r R_2 - r R_3}}_{G_{12} = -1/8\,\mathrm{m}\Omega^{-1}} V_2$$

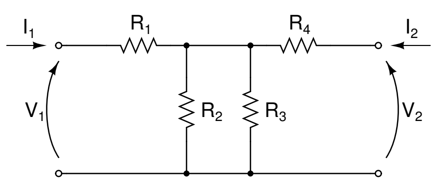
e da

$$I_2 = I_{R3} + \beta\, I_{R2} = \underbrace{\frac{r - \alpha\,\beta\, r - \beta R_3}{R_1 R_3 + R_2 R_3 + \alpha\, r R_2 - r R_3}}_{G_{21} = -1/8\,\mathrm{m}\Omega^{-1}} V_1 + \underbrace{\frac{R_1 + R_2 - r + \alpha\,\beta(r - R_1)}{R_1 R_3 + R_2 R_3 + \alpha\, r R_2 - r R_3}}_{G_{22} = 3/8\,\mathrm{m}\Omega^{-1}} V_2$$

Nel secondo punto dell'esercizio, si chiede di determinare un doppio bipolo $\underline{R}$ equivalente al doppio bipolo $\underline{G}$ appena determinato. Tale doppio bipolo è descritto da

$$\underline{R} = \underline{G}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{G})}\begin{pmatrix} G_{22} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{11}\end{pmatrix} = \frac{1}{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}}\begin{pmatrix} G_{22} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3\end{pmatrix}\mathrm{k}\Omega$$

che può essere effettivamente costruita con quattro resistenze da $2\,\mathrm{k}\Omega$ se si assume una topologia come nel doppio bipolo rappresentato in figura

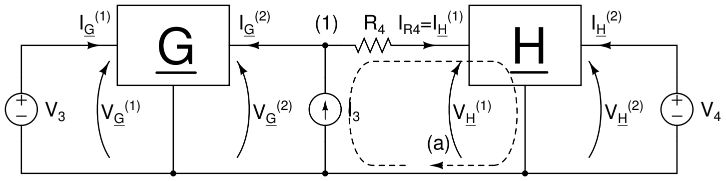


Per doppio bipolo sopra rappresentato è semplice calcolare la descrizione tramite matrice resistenza

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} & \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \\ \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} & \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_4 \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2\,\mathrm{k}\Omega$ il valore di $\underline{R}$ è esattamente quello calcolato sopra.

Per l'ultimo punto dell'esercizio si consideri il doppio bipolo $\underline{G}$ calcolato in precedenza, assieme ai generatori V_3, V_4 e I_3, e alla resistenza R_4 e al doppio bipolo $\underline{H}$, nel seguente circuito.



L'esercio chiede di calcolare la potenza $P_{\underline{G}}$ dissipata dal doppio bipolo $\underline{G}$ e la potenza $P_{\underline{H}}$ dissipata dal doppio bipolo $\underline{H}$, definite come

$$P_{\underline{G}} = V_{\underline{G}}^{(1)} I_{\underline{G}}^{(1)} + V_{\underline{G}}^{(2)} I_{\underline{G}}^{(2)} = V_3 I_{\underline{G}}^{(1)} + V_{\underline{G}}^{(2)} I_{\underline{G}}^{(2)}$$

$$P_{\underline{H}} = V_{\underline{H}}^{(1)} I_{\underline{H}}^{(1)} + V_{\underline{H}}^{(2)} I_{\underline{H}}^{(2)} = V_{\underline{H}}^{(1)} I_{\underline{H}}^{(1)} + V_4 I_{\underline{H}}^{(2)}$$

Per determinare le grandezze mancanti, devono essere considerate le equazioni costitutive dei due doppi bipoli

$$\begin{aligned}
I_{\underline{G}}^{(1)} &= G_{11} V_{\underline{G}}^{(1)} + G_{12} V_{\underline{G}}^{(2)} = G_{11} V_3 + G_{12} V_{\underline{G}}^{(2)} \\
I_{\underline{G}}^{(2)} &= G_{21} V_{\underline{G}}^{(1)} + G_{22} V_{\underline{G}}^{(2)} = G_{21} V_3 + G_{22} V_{\underline{G}}^{(2)} \\
V_{\underline{H}}^{(1)} &= H_{11} I_{\underline{H}}^{(1)} + H_{12} V_{\underline{H}}^{(2)} = H_{11} I_{\underline{H}}^{(1)} + H_{12} V_4 \\
I_{\underline{H}}^{(2)} &= H_{21} I_{\underline{H}}^{(1)} + H_{22} V_{\underline{H}}^{(2)} = H_{21} I_{\underline{H}}^{(1)} + H_{22} V_4
\end{aligned}$$

che sostituite sopra permettono di determinare le due potenze richieste attraverso le due sole incognite $V_{\underline{G}}^{(2)}$ e $I_{\underline{H}}^{(1)}$.

Si consideri il bilancio delle tensioni alla maglia (a)

$$(a):\ V_{\underline{G}}^{(2)} = R_4 I_{R4} + V_{\underline{H}}^{(1)} = (R_4 + H_{11}) I_{\underline{H}}^{(1)} + H_{12} V_4$$

da cui $I_{\underline{G}}^{(2)} = G_{21} V_3 + G_{22}(R_4 + H_{11}) I_{\underline{H}}^{(1)} + G_{22} H_{12} V_4$. Il valore di $I_{\underline{H}}^{(1)}$ è determinato dal bilancio delle correnti al nodo (1)

$$(1):\ I_3 = I_{\underline{G}}^{(2)} + I_{\underline{H}}^{(1)} = G_{21} V_3 + G_{22}(R_4 + H_{11}) I_{\underline{H}}^{(1)} + G_{22} H_{12} V_4 + I_{\underline{H}}^{(1)}$$

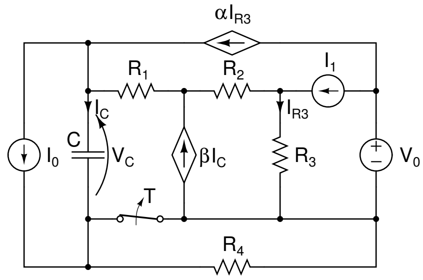
$$I_{\underline{H}}^{(1)} = \frac{I_3 - G_{21} V_3 - G_{22} H_{12} V_4}{1 + G_{22}(R_4 + H_{11})} = 0\,\mathrm{A}$$

$$V_{\underline{G}}^{(2)} = \frac{(R_4 + H_{11})(I_3 - G_{21} V_3) + H_{12} V_4}{1 + G_{22}(R_4 + H_{11})} = 8\,\mathrm{V}$$

da cui $I_{\underline{G}}^{(1)} = 5\,\mathrm{mA}$, $I_{\underline{G}}^{(2)} = 1\,\mathrm{mA}$, $V_{\underline{H}}^{(1)} = 8\,\mathrm{V}$, e $I_{\underline{H}}^{(2)} = 22\,\mathrm{mA}$. È ora possibile calcolare le due potenze richieste come

$$P_{\underline{G}} = 88\,\mathrm{mW}, \quad P_{\underline{H}} = 88\,\mathrm{mW}$$

Esercizio 2



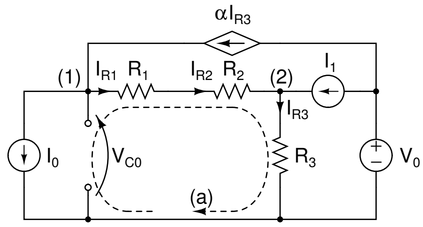
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 100\,\mathrm{nF}$, $\alpha = 3$, $\beta = 1/3$, $V_0 = 7\,\mathrm{V}$, $I_0 = 5\,\mathrm{mA}$, $I_1 = 1\,\mathrm{mA}$.

Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T è chiuso ed il circuito è a regime. All'istante $t = t_0$ l'interruttore T si apre.

Determinare l'andamento della tensione $V_C(t)$ ai capi del condensatore.

Soluzione

Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T chiude in corto circuito la resistenza R_4, che quindi non influenza il circuito. Inoltre, per via dell'ipotesi che il circuito sia a regime, si ha $I_C = 0\,\mathrm{A}$ e quindi anche $\beta\, I_C = 0\,\mathrm{A}$; sia la capacità C che il generatore di corrente $\beta\, I_C$ sono assimilabili a circuiti aperti. Il circuito può essere ridisegnato come segue.



Dal nodo (1)

$$(1):\ \alpha\, I_{R3} = I_0 + I_{R1}, \quad I_{R1} = \alpha\, I_{R3} - I_0$$

con $I_{R2} = I_{R1}$; dal bilancio al nodo (2) è possibile ricavare le correnti sulle tre resistenze

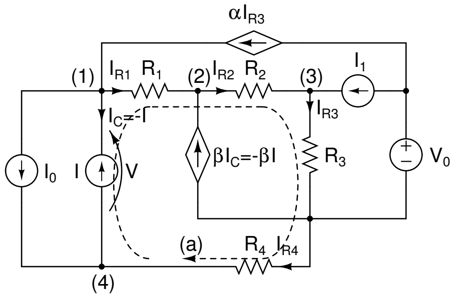
$$(2):\ I_1 + I_{R2} = I_{R3}, \quad I_1 + \alpha\, I_{R3} - I_0 = I_{R3}$$

$$I_{R3} = \frac{I_0 - I_1}{\alpha - 1}, \quad I_{R1} = I_{R2} = \frac{I_0 - \alpha I_1}{\alpha - 1}$$

Note le correnti sulle resistenze, è possibile determinare la tensione V_{C0} dal bilancio della maglia (a)

$$(a):\ V_{C0} = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} + R_3 I_{R3} = \frac{(R_1 + R_2 + R_3) I_0 - (\alpha R_1 + \alpha R_3 + R_3) I_1}{\alpha - 1} = 5\,\mathrm{V}$$

All'istante $t = t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T si apre e comincia il transitorio di carica (o scarica) di C. Per il calcolo di tale transitorio, si ricorra all'equivalente di Thevenin del circuito connesso alla capacità. Si supponga quindi di sostituire alla capacità stessa un generatore ideale di corrente I e di calcolare la tensione V ai suoi capi. Il circuito da esaminare diventa il seguente.



Poiché $I = -I_C$, il generatore di corrente comandato $\beta\,I_C$ può essere sostituito da un generatore comandato $-\beta\,I$, o equivalentemente, da un generatore $\beta\,I$ con verso opposto. La soluzione del circuito è ottenibile in modo molto simile al caso precedente, considerando il bilancio delle correnti ai vari nodi e infine il bilancio delle tensioni alla maglia (a).

$$(1)\colon\;\; I + \alpha\,I_{R3} = I_0 + I_{R1}, \quad I_{R1} = I + \alpha\,I_{R3} - I_0$$

$$(2)\colon\;\; I_{R1} + (-\beta\,I) = I_{R2}, \quad I_{R2} = I_{R1} - \beta\,I = \alpha\,I_{R3} - I_0 - (\beta-1)I$$

$$(3)\colon\;\; I_{R2} + I_1 = I_{R3}, \quad I_{R1} - \beta\,I = \alpha\,I_{R3} - I_0 - (\beta-1)I + I_1 = I_{R3}$$

$$I_{R3} = \frac{I_0 - I_1 + (\beta-1)I}{\alpha-1}$$

$$I_{R2} = \frac{I_0 - \alpha I_1 + (\beta-1)I}{\alpha-1}, \quad I_{R1} = \frac{I_0 - \alpha I_1 + (\alpha\,\beta-1)I}{\alpha-1}$$

L'unica differenza con il caso precedente è che ora è necessario considerare anche il nodo (4) per determinare la corrente sulla resistenza R_4.

$$(4)\colon\;\; I_0 + I_{R4} = I, \quad I_{R4} = I - I_0$$

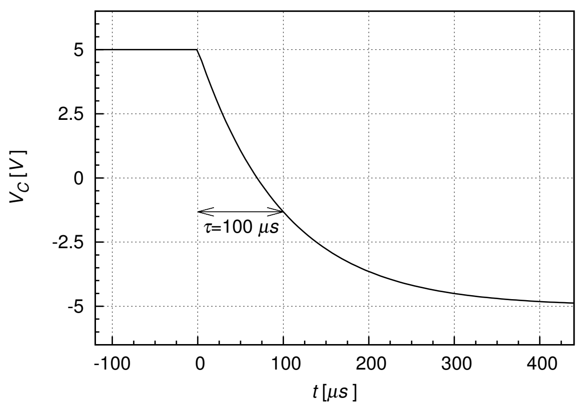
$$(a)\colon\;\; V_{C0} = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} + R_3 I_{R3} + R_4 I_{R4}$$

$$V_{C0} = \underbrace{\frac{(R_1+R_2+R_3)I_0-(\alpha R_1+\alpha R_2+R_3)I_1}{\alpha-1} - R_4 I_0}_{V^{(eq)}=-5\,\mathrm{V}} + \underbrace{\left(\frac{(\alpha\beta-1)R_1+(\beta-1)(R_2+R_3)}{\alpha-1} + R_4\right)}_{R^{(eq)}=1\,\mathrm{k}\Omega} I$$

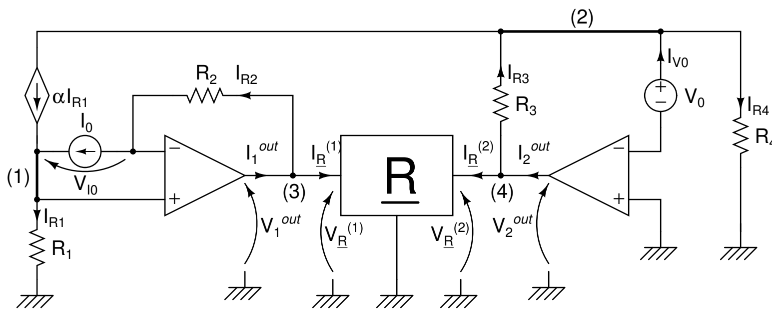
La tensione $V_c(t)$ può essere ricavate dalla formula del transitorio del primo ordine

$$V_c(t) = \begin{cases} V_{C0} = 5\,\mathrm{V}, & t < t_0 = 0\,\mathrm{s} \\ V^{(eq)} + \left(V_{C0} - V^{(eq)}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = -5 + 10 e^{-\frac{t}{\tau}}\,\mathrm{V}, & t \geq t_0 = 0\,\mathrm{s} \end{cases}$$

con $\tau = R^{(eq)}C = 100\,\mu\mathrm{s}$. L'andamento della tensione nel tempo è quello dato dalla figura seguente.



Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = \ldots = R_4 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $\underline{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathrm{k}\Omega$, $I_0 = 2\,\mathrm{mA}$, $V_0 = 2\,\mathrm{V}$, $\alpha = 2/3$.

Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Determinare:

- le tensioni V_1^{out} e V_2^{out} di uscita degli amplificatori operazionali;
- le correnti I_1^{out} e I_2^{out} di uscita degli amplificatori operazionali;
- la regione di funzionamento (attiva o passiva) dei generatori ideali di corrente I_0 e V_0;
- la potenza dissipata dal doppio bipolo $\underline{R}$.

Soluzione

Si considerino i versi delle correnti come indicati in figura. Si consideri inoltre che per tutti gli amplificatori operazionale la corrente sugli ingressi sia nulla e che la tensione ai due ingressi sia uguale per via del corto circuito virtuale.

Dal bilancio delle correnti al nodo (1), si ha

$$\alpha\, I_{R1} + I_0 = I_{R1}, \quad I_{R1} = \frac{I_0}{1-\alpha}$$

che, considerando $I_{R2} = I_0$ permette di determinare V_1^{out}

$$V_1^{out} = V_1^- + R_2 I_{R2} = V_1^+ + R_2 I_0 = R_1 \frac{I_0}{1-\alpha} + R_2 I_0 = 8\,\mathrm{V}.$$

Passando all'operazionale 2, per il corto circuito virtuale si ha $V_2^+ = V_2^- = 0\,\mathrm{V}$, e quindi

$$V_{R4} = V_2^- + V_0 = V_0, \quad I_{R4} = \frac{V_0}{R_4}$$

e, osservando che $I_{V0} = 0\,\mathrm{A}$, la tensione V_2^{out} è determinata considerando il bilancio delle correnti al nodo (2)

$$I_{R3} + I_{V0} = I_{R4} + \alpha\, I_{R1}, \quad I_{R3} = -I_{V0} + I_{R4} + \alpha\, I_{R1} = \frac{V_0}{R_4} + \frac{\alpha}{1-\alpha} I_0$$

$$V_2^{out} = V_2^- + V_0 + R_3 I_{R3} = V_0 + \frac{R_3}{R_4} V_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha} R_3 I_0 = 8\,\mathrm{V}$$

Per determinare le correnti I_1^{out} e I_2^{out} (si veda il bilancio delle correnti ai nodi (3) e (4)), si ha

$$I_1^{out} = I_{R2} + I_{\underline{R}}^{(1)}, \quad I_2^{out} = I_{R3} + I_{\underline{R}}^{(2)}$$

dove le correnti I_{R2} e I_{R3} sono già state calcolate, le correnti del doppio bipolo $\underline{R}$ ancora no. Per determinarle è sufficiente considerare le equazioni costitutive di $\underline{R}$

$$\begin{matrix} V_1^{out} = V_{\underline{R}}^{(1)} = R_{11} I_{\underline{R}}^{(1)} + R_{12} I_{\underline{R}}^{(2)} \\ V_2^{out} = V_{\underline{R}}^{(2)} = R_{21} I_{\underline{R}}^{(1)} + R_{22} I_{\underline{R}}^{(2)} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} I_{\underline{R}}^{(1)} = \dfrac{R_{22} V_1^{out} - R_{12} V_2^{out}}{R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21}} = 2\,\mathrm{mA} \\ I_{\underline{R}}^{(2)} = \dfrac{R_{11} V_1^{out} - R_{21} V_2^{out}}{R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21}} = 2\,\mathrm{mA} \end{matrix}$$

In alternativa, si sarebbe potuto invertire la matrice $\underline{R}$ per avere la descrizione del doppio bipolo tramite matrice conduttanza, con

$$\underline{G} = \underline{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/8 & -1/8 \\ -1/8 & 3/8 \end{pmatrix} \mathrm{m}\Omega^{-1}$$

con $I_1^{out} = G_{11} V_1^{out} + G_{12} V_2^{out}$ e $I_2^{out} = G_{21} V_1^{out} + G_{22} V_2^{out}$.

Le due correnti cercate valgono quindi

$$I_1^{out} = 4\,\mathrm{mA}, \quad I_2^{out} = 8\,\mathrm{mA}$$

Questo permette anche di rispondere immediatamente al quarto quesito, dove si chiede la potenza dissipata da $\underline{R}$, che vale

$$P_{\underline{R}} = V_{\underline{R}}^{(1)} I_{\underline{R}}^{(1)} + V_{\underline{R}}^{(2)} I_{\underline{R}}^{(2)} = V_1^{out} I_{\underline{R}}^{(1)} + V_2^{out} I_{\underline{R}}^{(2)} = 32\,\mathrm{mW}$$

Il terzo punto chiede invece di determinare la regione di funzionamento dei due generatori V_0 e I_0. Per entrambi è semplice determinare che hanno potenza nulla, e quindi regione di funzionamento neutra. Per I_0 si ha

$$V_{I0} = V_1^+ - V_1^- = 0\,\mathrm{V}, \quad P_{I0} = V_{I0} I_0 = 0\,\mathrm{W}$$

mentre per V_0 si è già calcolato che

$$I_{V0} = 0\,\mathrm{A}, \quad P_{V0} = V_0 I_{V0} = 0\,\mathrm{W}$$