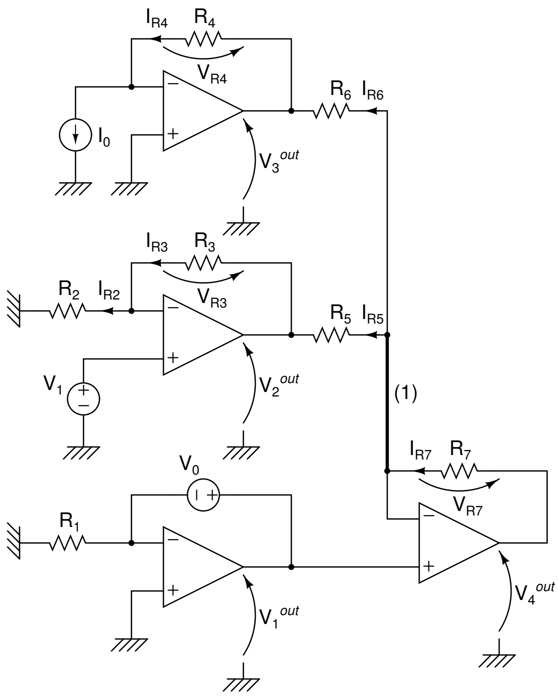
Esame di Teoria dei Circuiti – 19 Dicembre 2012 (Soluzione)

Esercizio 1



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = \ldots = R_7 = 5\,\mathrm{k\Omega}$, $V_0 = 5\,\mathrm{V}$, $V_1 = 2{,}5\,\mathrm{V}$, $I_0 = 1\,\mathrm{mA}$.

Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Determinare le quattro tensioni V_1^{out}, V_2^{out}, V_3^{out} e V_4^{out} di uscita degli amplificatori operazionali.

Soluzione

Si considerino i versi delle tensioni e delle correnti come indicato in figura. Si consideri inoltre che per tutti gli amplificatori operazionali la corrente agli ingressi sia nulla e che la tensione ai due ingressi sia uguale per via del corto circuito virtuale.

Per l'operazionale 1, si ha $V_1^- = V_1^+ = 0\,\mathrm{V}$. Segue che

$$V_1^{out} = V_1^- + V_0 = V_0 = 5\,\mathrm{V}$$

Per l'operazionale indicato con 2, si ha $V_2^- = V_2^+ = V_1$. Dato che la corrente di ingresso dell'amplificatore operazione è nulla, si ha

$$I_{R2} = \frac{V_2^-}{R_2} = \frac{V_1}{R_2} = I_{R3}$$

$$V_2^{out} = V_2^- + V_{R3} = V_1 + R_3 I_{R3} = V_1 + R_3 \frac{V_1}{R_2} = V_1 \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) = 5\,\mathrm{V}$$

Come per l'operazionale 1, anche per l'operazionale 3, si ha $V_3^- = V_3^+ = 0\,\mathrm{V}$. Inoltre $I_{R4} = I_0$, da cui

$$V_3^{out} = V_3^- + V_{R4} = R_4 I_{R4} = R_4 I_0 = 5\,\mathrm{V}$$

Per l'operazionale 4, osservando che $V_4^- = V_4^+ = V_1^{out}$, è possibile ricavare le correnti I_{R5} e I_{R6}

$$I_{R5} = \frac{V_4^- - V_2^{out}}{R_5} = \frac{V_1^{out} - V_2^{out}}{R_5} = 0\,\mathrm{A}$$

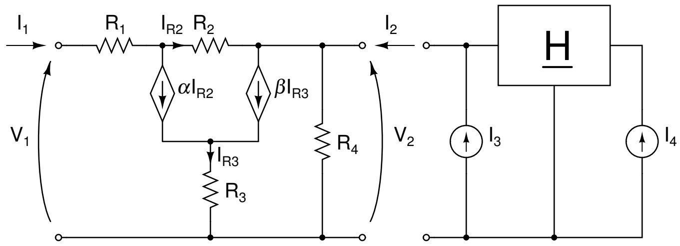
$$I_{R6} = \frac{V_4^- - V_3^{out}}{R_6} = \frac{V_1^{out} - V_3^{out}}{R_6} = 0\,\mathrm{A}$$

Dal bilancio delle correnti al nodo (1), è possibile ricavare la I_{R7} e quindi la tensione V_4^{out}

$$I_{R7} = I_{R5} + I_{R6} = 0\,\mathrm{A}$$

$$V_4^{out} = V_4^- + V_{R7} = V_1^{out} + R_7 I_{R7} = V_1^{out} = 5\,\mathrm{V}$$

Esercizio 2



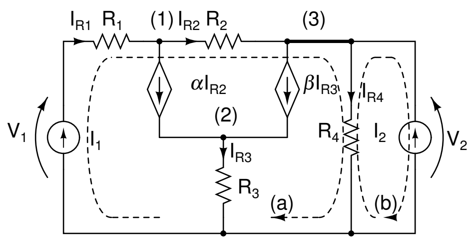
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 5\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$, $\underline{H} = \begin{pmatrix} 1\,\mathrm{m\Omega^{-1}} & 3 \\ -4 & 1\,\mathrm{k\Omega} \end{pmatrix}$, $I_3 = 5\,\mathrm{mA}$, $I_4 = 1\,\mathrm{mA}$.

Determinare:

- la descrizione del doppio bipolo evidenziato in figura tramite matrice resistenza $\underline{R}$;
- il circuito equivalente di Thevenin alla porta 1 del doppio bipolo $\underline{R}$ calcolato sopra, quando alla porta 2 si connettono i generatori I_3 e I_4 e il doppio bipolo $\underline{H}$, come mostrato in figura;
- la potenza $P_{\underline{R}}$ e $P_{\underline{H}}$ dissipata rispettivamente dai due doppi bipoli $\underline{R}$ e $\underline{H}$ quando la porta 1 di $\underline{R}$ viene lasciata in circuito aperto.

Soluzione

Per determinare la descrizione tramite matrice resistenze $\underline{R}$ del circuito in esame si supponga di collegare al doppio bipolo i due generatori ideali di corrente I_1 e I_2 e calcolare le tensione V_1 e V_2 ai loro capi. Si definisca inoltre un verso arbitrario per le correnti I_{R1} e I_{R4}.



La corrente I_{R1} è data da $I_{R1} = I_1$. La corrente I_{R2} si può ricavare dal bilancio delle correnti al nodo (1)

$$(1): \; I_{R1} = I_{R2} + \alpha I_{R2}, \quad I_{R2} = \frac{I_{R1}}{1+\alpha} = \frac{I_1}{1+\alpha}$$

mentre la corrente I_{R3} si ottiene dal bilancio delle correnti al nodo indicato con (2)

$$(2): \ \alpha I_{R2} + \beta I_{R3} = I_{R3}, \quad I_{R3} = \frac{\alpha I_{R2}}{1-\beta} = \frac{\alpha I_1}{(1+\alpha)(1-\beta)}$$

Infine, dal bilancio al nodo (3) si ha I_{R4}

$$(4): \ I_{R2} + I_2 = \beta I_{R3} + I_{R4}, \quad I_{R4} = I_{R2} - \beta I_{R3} + I_2 = \frac{I_1}{1+\alpha} - \frac{\alpha \beta I_1}{(1+\alpha)(1-\beta)} + I_2$$

Dalle correnti calcolate è ora possibile ricavare le due tensioni V_1 e V_2 tramite il bilancio delle tensioni rispettivamente alle maglie (a) e (b).

$$(a): \ V_1 = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} + R_4 I_{R4} =$$

$$= \underbrace{\left(R_1 + \frac{R_2}{1+\alpha} + \frac{R_4}{1+\alpha} - \frac{\alpha \beta R_4}{(1+\alpha)(1-\beta)} \right)}_{R_{11} = 3\,\mathrm{k}\Omega} I_1 \quad + \underbrace{R_4}_{R_{12} = 1\,\mathrm{k}\Omega} I_2$$

$$(b): \ V_2 = R_4 I_{R4} = \underbrace{\left(\frac{R_4}{1+\alpha} - \frac{\alpha \beta R_4}{(1+\alpha)(1-\beta)} \right)}_{R_{21} = \frac{4}{3}\,\mathrm{k}\Omega} I_1 \quad + \underbrace{R_4}_{R_{22} = 1\,\mathrm{k}\Omega} I_2$$

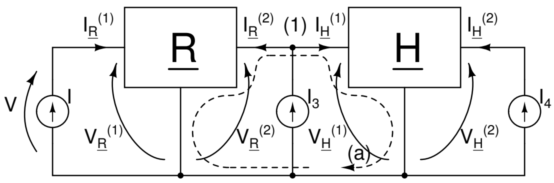
La soluzione cercata è

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \mathrm{k}\Omega$$

Per il secondo punto dell'esercizio si connetta al doppio bipolo appena calcolato il circuito formato da I_3, I_4 e dal doppio bipolo $\underline{H}$. Si noti che le equazioni costitutive di $\underline{H}$ sono quelle dimensionalmente compatibili con la matrice, ovvero

$$I_{\underline{H}}^{(1)} = H_{11} V_{\underline{H}}^{(1)} + H_{12} I_{\underline{H}}^{(2)}$$
$$V_{\underline{H}}^{(2)} = H_{21} V_{\underline{H}}^{(1)} + H_{22} I_{\underline{H}}^{(2)}$$

Si calcoli l'equivalente di Thevenin del circuito complessivo collegando alla porta 1 di $\underline{R}$ un generatore ideale di corrente I e calcolandone la tensione V ai capi.



Si indichino con $V_{\underline{R}}^{(1)}$ e $I_{\underline{R}}^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{R}$, e con $V_{\underline{R}}^{(2)}$ e $I_{\underline{R}}^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2. Siano inoltre $V_{\underline{H}}^{(1)}$ e $I_{\underline{H}}^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{H}$, e $V_{\underline{H}}^{(2)}$ e $I_{\underline{H}}^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2.

Si ha immediatamente che $V_{\underline{R}}^{(1)} = V$, $I_{\underline{R}}^{(1)} = I$ e $I_{\underline{H}}^{(2)} = I_4$; inoltre, dal bilancio delle correnti al nodo indicato con (1), si ha

$$(1): \ I_3 = I_{\underline{R}}^{(2)} + I_{\underline{H}}^{(1)}$$

$$I_3 = I_{\underline{R}}^{(2)} + H_{11} V_{\underline{H}}^{(1)} + H_{12} I_4$$

È possibile determinare la corrente $I_{\underline{R}}^{(2)}$ osservando dal bilancio delle tensioni alla maglia (a) che $V_{\underline{H}}^{(1)} = V_{\underline{R}}^{(2)} = R_{11} I_{\underline{R}}^{(1)} + R_{12} I_{\underline{R}}^{(2)}$, e quindi

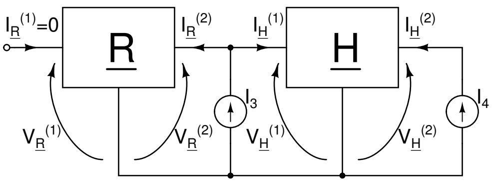
$$I_3 = I_{\underline{R}}^{(2)} + H_{11}\left(R_{21} I + R_{22} I_{\underline{R}}^{(2)}\right) + H_{12} I_4$$

$$I_{\underline{R}}^{(2)} = \frac{I_3 - H_{12} I_4 - R_{21} H_{11} I}{1 + R_{22} H_{11}}$$

Segue che

$$V = V_{\underline{R}}^{(1)} = R_{11} I + R_{12} I_{\underline{R}}^{(2)} = \underbrace{R_{12}\frac{I_3 - H_{12} I_4}{1 + R_{22} H_{11}}}_{V^{(eq)} = 1\,\mathrm{V}} + \Bigg(\underbrace{R_{11} - \frac{R_{12} R_{21} H_{11}}{1 + R_{22} H_{11}}}_{R^{(eq)} = \frac{7}{3}\,\mathrm{k}\Omega}\Bigg) I$$

Nel terzo punto, si chiede di calcolare le potenze $P_{\underline{R}}$ e $P_{\underline{H}}$ dissipate dai due doppi bipoli quando la porta 1 di $\underline{R}$ è in circuito aperto, ovvero $I_{\underline{R}}^{(1)} = 0\,\mathrm{A}$, come dal circuito in figura.



Si ricorda che $P_{\underline{R}}$ e $P_{\underline{H}}$ sono definite come

$$P_{\underline{R}} = V_{\underline{R}}^{(1)} I_{\underline{R}}^{(1)} + V_{\underline{R}}^{(2)} I_{\underline{R}}^{(2)}$$

$$P_{\underline{H}} = V_{\underline{H}}^{(1)} I_{\underline{H}}^{(1)} + V_{\underline{H}}^{(2)} I_{\underline{H}}^{(2)}$$

Per determinare $I_{\underline{R}}^{(2)}$ è sufficiente considerare il caso precedente imponendo $I = 0\,\mathrm{A}$, ovvero

$$I_{\underline{R}}^{(2)} = \frac{I_3 - H_{12} I_4}{1 + R_{22} H_{11}} = 1\,\mathrm{mA}, \quad V_{\underline{R}}^{(2)} = R_{11} I_{\underline{R}}^{(1)} + R_{12} I_{\underline{R}}^{(2)} = 1\,\mathrm{V}$$

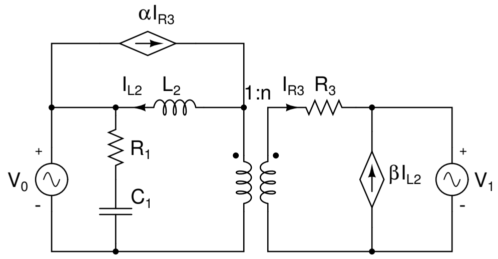
da cui $P_{\underline{R}} = 1\,\mathrm{mW}$ indipendentemente dalla tensione $V_{\underline{R}}^{(1)}$. Per quanto riguarda $P_{\underline{H}}$ si ha

$$I_{\underline{H}}^{(1)} = I_3 - I_{\underline{R}}^{(2)} = 4\,\mathrm{mA}, \quad V_{\underline{H}}^{(1)} = V_{\underline{R}}^{(2)} = 1\,\mathrm{V}$$

$$I_{\underline{H}}^{(2)} = I_4 = 1\,\mathrm{mA}, \quad V_{\underline{H}}^{(2)} = H_{21} V_{\underline{H}}^{(1)} + H_{22} I_{\underline{H}}^{(2)} = -3\,\mathrm{V}$$

da cui $P_{\underline{H}} = 1\,\mathrm{mW}$.

Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 100\,\Omega$, $C_1 = 10\,\mu\text{F} = 10 \cdot 10^{-6}\,\text{F}$, $L_2 = 125\,\text{mH}$, $R_3 = 10\,\text{k}\Omega$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{2}$, $n = 10$, $V_0(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t - \pi/4)$ V, $V_1(t) = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/4)$ V, $\omega = 1\,\text{krad/s} = 10^3\,\text{rad/s}$.

Determinare:

- la potenza complessa erogata dai generatori ideali V_0 e V_1;
- quale valore dovrebbe assumere β affinché la potenza attiva erogata da V_0 sia uguale alla potenza attiva erogata da V_1.

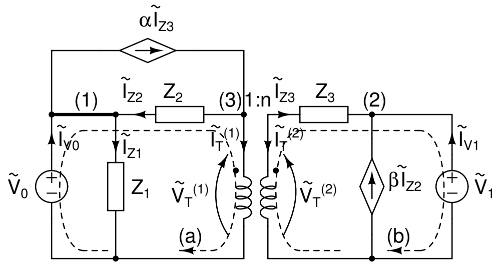
Soluzione

Nel dominio dei fasori alla pulsazione $\omega = 1\,\text{krad/s}$ i due generatori indipendenti sono rappresentati attraverso i fasori

$$\tilde{V}_0 = \sqrt{2}e^{-j\pi/4}\,\text{V} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,\text{V} = 1 - 1\,j\,\text{V}$$
$$\tilde{V}_1 = 10\sqrt{2}e^{j\pi/4}\,\text{V} = 10\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,\text{V} = 10 + 10\,j\,\text{V}$$

mentre alla serie di R_1 e C_1, a L_2 e a R_3 si possono sostituire, rispettivamente, le impedenze Z_1 (pari alla serie delle impedenze associate a R_1 e C_1), Z_2 e Z_3

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = 100\,\Omega - 100\,j\,\Omega$$
$$Z_2 = j\Omega L_2 = 125\,j\,\Omega$$
$$Z_3 = R_3 = 10\,\text{k}\Omega$$



Il circuito da considerare è quello in figura. Si noti che per coerenza con il cambio di notazione, il generatore di corrente comandato $\alpha\, I_{R3}$ è stato sostituito con un generatore comandato $\alpha\, \tilde{I}_{Z3}$, ed il generatore $\beta\, I_{L2}$ è stato sostituito con un generatore comandato $\beta\, \tilde{I}_{Z2}$.

L'esercizio chiede di determinare le due potenze complesse $\tilde{N}_{V0}$ e $\tilde{N}_{V1}$, definite come

$$\tilde{N}_{V0} = \frac{1}{2}\tilde{V}_0\tilde{I}^*_{V0}, \quad \tilde{N}_{V1} = \frac{1}{2}\tilde{V}_1\tilde{I}^*_{V1}$$

La corrente $\tilde{I}_{Z1}$ è data da $\tilde{I}_{Z1} = \dfrac{\tilde{V}_0}{Z_1} = 10\,\mathrm{mA}$; inoltre dai bilanci di corrente ai nodi (1) e (2) si ha

$$(1):\ \tilde{I}_{V0} + \tilde{I}_{Z2} - \alpha\tilde{I}_{Z3} - \tilde{I}_{Z1} = 0\,\mathrm{A}, \quad \tilde{I}_{V0} = \alpha\tilde{I}_{Z3} + \frac{\tilde{V}_0}{Z_1} - \tilde{I}_{Z2}$$

$$(2):\ \tilde{I}_{V1} + \tilde{I}_{Z3} + \beta\tilde{I}_{Z1} = 0\,\mathrm{A}, \quad \tilde{I}_{V1} = -\tilde{I}_{Z3} - \beta\tilde{I}_{Z2}$$

Si determinino quindi $\tilde{I}_{Z2}$ e $\tilde{I}_{Z3}$.

Per la presenza dei due generatori comandati non è possibile risolvere il circuito mediante semplificazione con circuiti equivalenti di Thevenin o Norton. Pertanto è necessario procedere con l'analisi circuitale completa, considerando tra le varie equazioni del circuito anche quella del trasformatore:

$$\begin{cases} \tilde{V}_T^{(2)} = n\,\tilde{V}_T^{(1)} \\ \tilde{I}_T^{(1)} = -n\,\tilde{I}_T^{(2)} \end{cases}$$

Dal nodo (3) si ha $\alpha\,\tilde{I}_{Z3} - \tilde{I}_{Z2} - \tilde{I}_T^{(1)} = 0$, mentre è immediato che $I_T^{(2)} = -\tilde{I}_{Z3}$. Considerando la relazione tra le correnti al trasformatore si ha

$$\alpha\,\tilde{I}_{Z3} - \tilde{I}_{Z2} = \tilde{I}_T^{(1)} = -n\,\tilde{I}_T^{(2)} = n\,\tilde{I}_{Z3}$$

$$\tilde{I}_{Z2} = -\left(n - \alpha\right)\tilde{I}_{Z3}$$

Dai bilanci di tensione alle maglie (a) e (b) invece

$$(a):\ \tilde{V}_0 + Z_2\tilde{I}_{Z2} - V_T^{(1)} = 0\,\mathrm{V}$$

$$(b):\ \tilde{V}_1 + Z_3\tilde{I}_{Z3} - V_T^{(2)} = 0\,\mathrm{V}$$

da cui

$$\tilde{V}_1 + Z_3\tilde{I}_{Z3} = V_T^{(2)} = n\,\tilde{V}_T^{(1)} = n\,\tilde{V}_0 + n\,Z_2\tilde{I}_{Z2}$$

$$\tilde{V}_1 + Z_3\tilde{I}_{Z3} = n\,\tilde{V}_0 - n\,Z_2\left(n - \alpha\right)\tilde{I}_{Z3}$$

$$\tilde{I}_{Z3} = \frac{n\,\tilde{V}_0 - \tilde{V}_1}{Z_3 + n\,Z_2\left(n - \alpha\right)} = -(1+j)\,\mathrm{mA}, \quad \tilde{I}_{Z2} = -\left(n - \alpha\right)\frac{n\,\tilde{V}_0 - \tilde{V}_1}{Z_3 + n\,Z_2\left(n - \alpha\right)} = 8 + 8\,j\,\mathrm{mA}$$

Segue che

$$\tilde{I}_{V0} = \frac{\tilde{V}_0}{Z_1} + n\frac{n\,\tilde{V}_0 - \tilde{V}_1}{Z_3 + n\,Z_2\left(n - \alpha\right)} = -10j\,\mathrm{mA}$$

$$\tilde{I}_{V1} = \left(-1 + \beta\left(n - \alpha\right)\right)\frac{n\,\tilde{V}_0 - \tilde{V}_1}{Z_3 + n\,Z_2\left(n - \alpha\right)} = -3(1+j)\,\mathrm{mA}$$

Le potenze complesse sono date da

$$\tilde{N}_{V0} = \frac{1}{2}\tilde{V}_0\tilde{I}_{V0}^* = 5 + 5\,j\,\mathrm{mVA}, \quad \tilde{N}_{V1} = \frac{1}{2}\tilde{V}_1\tilde{I}_{V1}^* = 30\,\mathrm{mVA}$$

ovvero $P_{V0} = 5\,\mathrm{mW}$ e $Q_{V0} = 5\,\mathrm{mVAR}$, $P_{V1} = -30\,\mathrm{mW}$ e $Q_{V1} = 0\,\mathrm{VAR}$.

Il secondo punto dell'esercizio chiede di dimensionare il parametro β affinché la potenza attiva P_{V0} erogata dal generatore V_0 sia uguale alla potenza attiva P_{V0} erogata dal generatore V_1.

Secondo quando calcolato nel punto precedente, P_{V0} non dipende da β e quindi, qualunque sai il valore di β, vale $P_{V0} = 5\,\mathrm{mW}$.

La potenza P_{V1} dipende invece da β, e può essere scritta come

$$P_{V1} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\tilde{V}_1 \tilde{I}_{V1}^*\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\tilde{V}_1 \left(-\tilde{I}_{Z3} + \beta(n-\alpha)\tilde{I}_{Z3}\right)^*\right)$$

dove $\tilde{I}_{Z3}$ non dipende da β. Inoltre, essendo i tre parametri n, α e β reali, la potenza cercata può essere semplificata in

$$P_{V1} = (-1 + \beta(n-\alpha))\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\tilde{V}_1 \tilde{I}_{Z3}^*\right)$$

Affinché $P_{V0} = P_{V1}$ deve essere

$$-1 + \beta(n-\alpha) = \frac{P_{V1}}{\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\tilde{V}_1 \tilde{I}_{Z3}^*\right)}$$

ovvero

$$\beta = \left(1 + \frac{P_{V1}}{\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\tilde{V}_1 \tilde{I}_{Z3}^*\right)}\right)\frac{1}{n-\alpha} = \frac{1}{16}$$