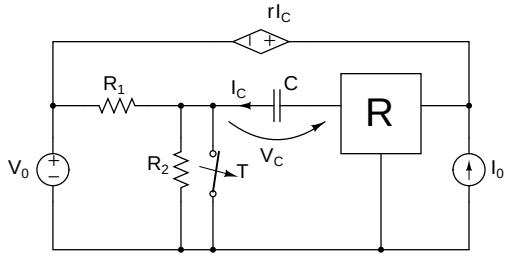
Esame di Teoria dei Circuiti - 18 giugno 2009 (Soluzione)

Esercizio 1

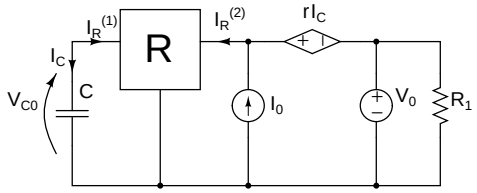


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = 24\,\mathrm{k\Omega}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\,\mathrm{k\Omega}$, $r = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 1\,\mu\mathrm{F} = 10^{-6}\,\mathrm{F}$, $V_0 = 2\,\mathrm{V}$, $I_0 = 7\,\mathrm{mA}$.

Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{sec}$ l'interruttore T è chiuso ed il circuito è a regime. All'istante $t = t_0$ l'interruttore T si apre. Determinare l'andamento della tensione $V_C(t)$.

Soluzione

Per $t < 0$ l'interruttore T_1 è chiuso; il circuito si semplifica come segue:



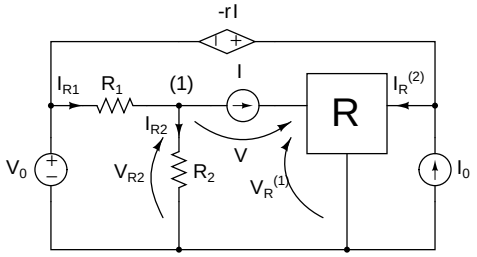
Per via dell'ipotesi che il circuito sia a regime, $I_C = 0$ e la tensione $V_C(t) = V_{C0}$ è costante, può essere determinata tramite il bilancio delle tensioni alla maglia alla sinistra di R e ad una qualunque maglia alla destra di R che non contenga I_0.

$$V_{C0} = R_{11} I_R^{(1)} + R_{12} I_R^{(2)}$$
$$V_0 + r I_C = R_{21} I_R^{(1)} + R_{22} I_R^{(2)}$$

Poiché $I_R^{(1)} = -I_C = 0$, tale sistema si risolve in

$$I_R^{(2)} = \frac{V_0}{R_{22}}, \quad V_{C0} = R_{12} I_R^{(2)} = \frac{R_{12}}{R_{22}} V_0 = 6\,\mathrm{V}$$

All'istante $t = t_0 = 0\,\mathrm{sec}$ l'interruttore T si apre. Per calcolare il transitorio di carica, si ricorra all'equivalente di Thevenin del circuito conneso alla capacità. Si supponga quindi di sostituire alla capacità stessa un generatore ideale di corrente I e di calcolare la tensione V ai suoi capi.



Si noti che, poiché $I_C = -I$, il generatore di corrente comandato rI_C è stato sostituito con un generatore $-rI$. Dal bilancio delle correnti al nodo (1) è possibile ricavare V_{R2}

$$I_{R1} = I + I_{R2}$$

$$\frac{V_0 - V_{R2}}{R_1} = I + \frac{V_{R2}}{R_2}$$

$$V_{R2} = \frac{\dfrac{V_0}{R_1} - I}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} = R_2 \frac{V_0 - R_1 I}{R_1 + R_2}$$

Dal bilancio delle tensioni alla maglia composta dalla porta 2 di R, da V_0 e da $-rI$ si ha $V_0 - rI = R_{21}I + R_{22}I_R^{(2)}$ da cui

$$I_R^{(2)} = \frac{V_0}{R_{22}} - \frac{rI}{R_{22}} - \frac{R_{21}}{R_{22}} I$$

$$V_R^{(1)} = R_{11}I + R_{12}I_R^{(2)} = R_{11}I + \frac{R_{12}}{R_{22}}V_0 - r\frac{R_{12}}{R_{22}}I - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{22}}I$$

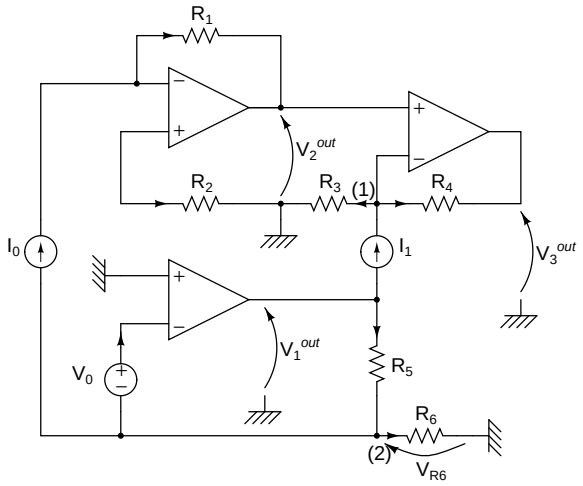
$$V = V_R^{(1)} - V_{R2} = \underbrace{\frac{R_{12}}{R_{22}}V_0 - \frac{R_2}{R_1 + R_2}V_0}_{V^{(eq)} = 5\,\mathrm{V}} + \left(\underbrace{R_{11} - r\frac{R_{12}}{R_{22}} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{22}} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}_{R^{(eq)} = 1\,\mathrm{k\Omega}} \right) I$$

Per $t > t_0 = 0$ la tensione $V_C(t)$ è data quindi da

$$V_C(t) = V^{(eq)} + \left(V_{C0} - V^{(eq)} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

con $\tau = R^{(eq)}C = 1\,\mathrm{msec}$.

Esercizio 2



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = \ldots = R_6 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $V_0 = 6\,\mathrm{V}$, $I_0 = 4\,\mathrm{mA}$, $I_1 = 1\,\mathrm{mA}$. Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Calcolare le tensioni di uscita degli operazionali V_1^{out}, V_2^{out} e V_3^{out}.

Soluzione

Si considerino i versi delle tensioni e delle correnti come indicato in figura. Dato che gli ingressi degli operazionali non assorbono corrente, si ha $I_{R2} = 0$, quindi

$$V_2^+ = R_2 I_{R2} = 0 = V_2^-$$

Da questo, ed osservando che $I_{R1} = I_0$, si può ricavare V_2^{out}:

$$V_2^{out} = V_2^- - R_1 I_{R1} = -R_1 I_0 = -4\,\mathrm{V}$$

Inoltre $V_3^+ = V_2^{out} = V_3^-$, e quindi $I_{R3} = V_3^-/R_3 = V_2^{out}/R_3$. Dal bilancio delle correnti al nodo (1) è possibile ricavare V_3^{out}

$$I_1 = I_{R4} + I_{R3}$$

$$V_3^{out} = V_3^- - R_4 I_{R4} = V_2^{out} - R_4 \left(I_1 - \frac{V_2^{out}}{R_3} \right) = -9\,\mathrm{V}$$

Per determinare V_1^{out} bisogna ricorrere al bilancio delle correnti al nodo (2)

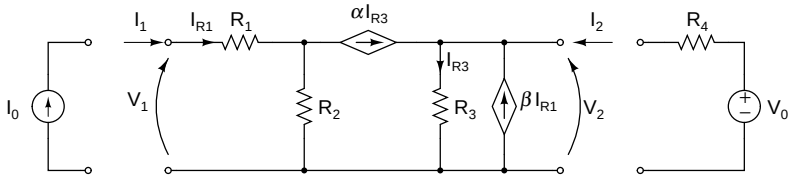
$$I_{R5} = I_{R6} + I_{V0} + I_0$$

$$\frac{V_1^{out} - V_{R6}}{R_5} = \frac{V_{R6}}{R_6} + I_{V0} + I_0$$

Poiché per via dell'operazionale 1 si ha $I_{V0} = 0$ e $V_1^- = V_1^+ = 0$, quindi $V_{R6} = V_1^- - V_0 = -V_0$, segue che

$$V_1^{out} = -\left(1 + \frac{R_5}{R_6}\right) V_0 + R_5 I_0 = -8\,\mathrm{V}$$

Esercizio 3

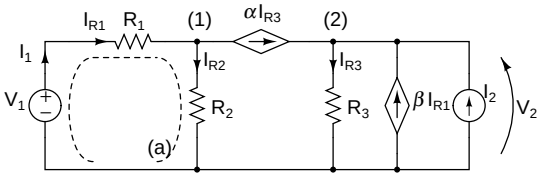


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $R_4 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $V_0 = 5\,\mathrm{V}$, $I_0 = 4\,\mathrm{mA}$. Calcolare:

- la descrizione del due porte tramite matrice ibrida H, definita come $\begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$
- la potenza erogata da un generatore di corrente I_0 connesso alla porta 1, quando alla porta 2 vengono connessi il generatore di tensione V_0 e la resistenza R_4, come mostrato in figura.

Soluzione

Per calcolare la matrice ibrida H si supponga di collegare al due porte il generatore ideale di tensione V_1 e il generatore ideale di corrente I_2 e di calcolarne rispettivamente la corrente I_1 e la tensione V_2.



Considerando I_{R1}, I_{R2} e I_{R3} le tre incognite del sistema, si ha $I_1 = I_{R1}$ e $V_2 = R_3 I_{R3}$. Il circuito si risolve considerando il bilancio delle tensioni alla maglia (a) e quello delle correnti ai nodi (1) e (2).

$$(a): \qquad V_1 = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2}$$

$$(1): \qquad I_{R1} = I_{R2} + \alpha I_{R3}$$

$$(2): \qquad I_2 + \alpha I_{R3} + \beta I_{R1} = I_{R3}$$

Dalla (1) si può ricavare I_{R2}

$$I_{R2} = I_{R1} - \alpha I_{R3}$$

che sostituito nella (a) dà

$$V_1 = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R1} - R_2 \alpha I_{R3}$$

$$I_{R3} = \frac{(R_1 + R_2)\, I_{R1} - V_1}{\alpha R_2}$$

che sostituito a sua volta nella (2) permette di esplicitare I_{R1} e quindi di calcolare I_1

$$I_2 + \alpha \frac{(R_1 + R_2)\, I_{R1} - V_1}{\alpha R_2} + \beta I_{R1} = \frac{(R_1 + R_2)\, I_{R1} - V_1}{\alpha R_2}$$

$$I_1 = I_{R1} = \frac{(\alpha - 1)\, V_1 - \alpha R_2 I_2}{(R_1 + R_2)\,(\alpha - 1) + \alpha\beta R_2} =$$

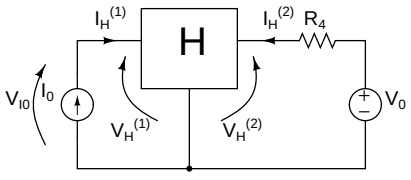
$$= \underbrace{\frac{\alpha - 1}{(R_1 + R_2)\,(\alpha - 1) + \alpha\beta R_2}}_{H_{11} = \frac{1}{4}\,\mathrm{m\Omega^{-1}}} V_1 \underbrace{- \frac{\alpha R_2}{(R_1 + R_2)\,(\alpha - 1) + \alpha\beta R_2}}_{H_{12} = -\frac{1}{2}} I_2$$

$$V_2 = R_3 I_{R3} = R_3 \frac{(R_1 + R_2)\, I_{R1} - V_1}{\alpha R_2} =$$

$$= -\frac{R_3 V_1}{\alpha R_2} + \frac{R_3\,(R_1 + R_2)\,(\alpha - 1)\, V_1}{\alpha R_2\,((R_1 + R_2)\,(\alpha - 1) + \alpha\beta R_2)} - \frac{\alpha R_2 R_3\,(R_1 + R_2)\, I_2}{\alpha R_2\,((R_1 + R_2)\,(\alpha - 1) + \alpha\beta R_2)} =$$

$$= \underbrace{- \frac{\beta R_3}{(R_1 + R_2)\,(\alpha - 1) + \alpha\beta R_2}}_{H_{21} = -1} V_1 \underbrace{- \frac{R_3\,(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)\,(\alpha - 1) + \alpha\beta R_2}}_{H_{22} = -2\,\mathrm{k\Omega}} I_2$$

Per il secondo punto dell'esercizio, il circuito da considerare è il seguente:



Indicando con $V_H^{(1)}$ e $I_H^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di H, e con $V_H^{(2)}$ e $I_H^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2, si ha $P_{I0} = I_0 V_{I0} = I_0 V_H^{(1)}$.

Dal bilancio delle tensioni alla maglia composta dalla porta 2 di H, da V_0 e da R_4 si ottiene

$$V_0 = V_H^{(2)} + R_4 I_H^{(2)} = H_{21} V_H^{(1)} + H_{22} I_H^{(2)} + R_4 I_H^{(2)}$$

$$I_H^{(2)} = \frac{V_0 - H_{21} V_H^{(1)}}{H_{22} + R_4}$$

ed osservando che $I_H^{(1)} = I_0$ è possibile ricavare $V_H^{(1)}$:

$$I_0 = I_H^{(1)} = H_{11} V_H^{(1)} + H_{12} I_H^{(2)} = H_{11} V_H^{(1)} + H_{12} \frac{V_0 - H_{21} V_H^{(1)}}{H_{22} + R_4}$$

$$V_H^{(1)} = \frac{I_0 - \dfrac{H_{12} V_0}{H_{22} + R_4}}{H_{11} - \dfrac{H_{12} H_{21}}{H_{22} + R_4}} = 2\,\mathrm{V}$$

Segue che $P_{I0} = I_0 V_H^{(1)} = 8\,\mathrm{mW}$.