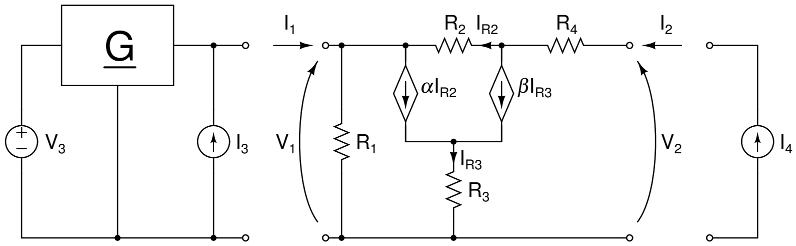
Esame di Teoria dei Circuiti – 15 Gennaio 2015 (Soluzione)

Esercizio 1



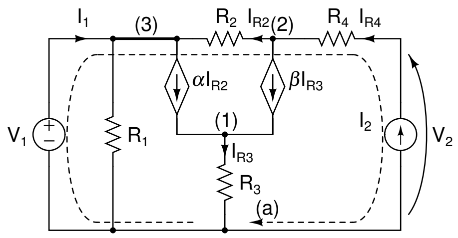
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = 1\,\text{k}\Omega$, $R_3 = R_4 = 3\,\text{k}\Omega$, $\underline{G} = \begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 3/2 & -3/2 \end{pmatrix} \text{m}\Omega^{-1}$, $\alpha = 2/5$, $\beta = 2$, $V_3 = 3\,\text{V}$, $I_3 = 2\,\text{mA}$.

Calcolare:

- la descrizione del doppio bipolo evidenziato in figura tramite la matrice ibrida $\underline{H}$, definita come $\begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \underline{H} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$;
- il circuito equivalente di Thevenin alla porta 2 del doppio bipolo $\underline{H}$ calcolato sopra, quando alla porta 1 vengono collegati il generatore ideale di tensione V_3, il generatore ideale di corrente I_3 ed il doppio bipolo $\underline{G}$, come indicato in figura;
- quanto deve valere la corrente I_4 del generatore collegato alla porta 2 di $\underline{H}$, affinché la potenza dissipata dal doppio bipolo $\underline{G}$ sia $-6\,\text{mW}$, quando alla porta 1 sono collegati i generatori V_3 e I_3 ed il doppio bipolo $\underline{G}$, come indicato in figura.

Soluzione

Per determinare la descrizione del sottocircuito considerato tramite matrice ibrida $\underline{H}$ si supponga di collegare alla porta 1 (di sinistra) il generatore ideale di tensione V_1 e alla porta 2 (di destra) il generatore ideale di corrente I_2. Si calcoli quindi la corrente I_1 erogata da V_1 e la tensione V_2 ai capi di I_2.



Come prima cosa si può osservare che $I_{R1} = V_1/R_1$ e che $I_{R4} = I_2$. Quindi, dai nodi indicati con (1) e (2) si ha

$$(1):\ \alpha\, I_{R2} + \beta\, I_{R3} - I_{R3} = 0, \quad I_{R3} = \frac{\alpha}{1-\beta} I_{R2}$$

$$(2):\ I_{R4} - I_{R2} - \beta\, I_{R3} = 0, \quad I_2 - I_{R2} - \beta \frac{\alpha}{1-\beta} I_{R2} = 0$$

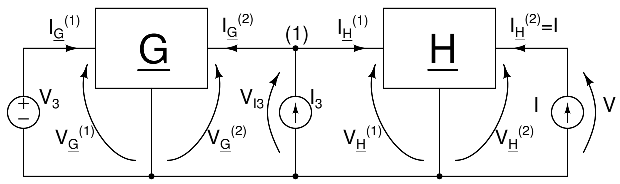
$$I_{R2} = \frac{I_2}{1 + \dfrac{\alpha\beta}{1-\beta}} = \frac{1-\beta}{1-\beta+\alpha\beta} I_2$$

I valori della corrente e della tensione cercati si possono ottenere dal bilancio delle correnti al nodo (3) e dal bilancio delle tensioni alla maglia (a).

$$(3):\ I_1 = I_{R1} + \alpha I_{R2} - I_{R2} = \underbrace{\frac{1}{R_1}}_{H_{11}=1\,\mathrm{m}\Omega^{-1}} V_1 + \underbrace{(\alpha-1)\frac{1-\beta}{1-\beta+\alpha\beta}}_{H_{12}=-3} I_2$$

$$(a):\ V_2 = V_1 + R_2 I_{R2} + R_4 I_{R4} = \underbrace{1}_{H_{21}=1} \cdot V_1 + \underbrace{\left(\frac{1-\beta}{1-\beta+\alpha\beta} + R_4\right)}_{H_{22}=8\,\mathrm{k}\Omega} I_2$$

Per il secondo punto dell'esercizio, si connetta il doppio bipolo $\underline{G}$ e il generatore I_3 al circuito appena esaminato. Si noti che, per quanto riguarda quest'ultimo, è conveniente sostituirlo con la sua rappresentazione tramite matrice $\underline{H}$, come nel circuito qui rappresentato. Per calcolare il circuito equivalente di Thevenin si è connesso alla porta 2 di $\underline{H}$ un generatore di corrente I, e si vuole calcolare la tensione V ai suoi capi.



Si indichino con $V_{\underline{G}}^{(1)}$ e $I_{\underline{G}}^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{G}$, e con $V_{\underline{G}}^{(2)}$ e $I_{\underline{G}}^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2. Si indichino inoltre con $V_{\underline{H}}^{(1)}$ e $I_{\underline{H}}^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{H}$, e con $V_{\underline{H}}^{(2)}$ e $I_{\underline{H}}^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2. È immediato notare che $V_{\underline{G}}^{(1)} = V_3$ è una tensione nota, $V_{\underline{G}}^{(2)} = V_{\underline{H}}^{(1)} = V_{I3}$, e $V_{\underline{H}}^{(2)} = V$ è la tensione da calcolare. Inoltre $I_{\underline{H}}^{(2)} = I$.

Dal bilancio delle correnti al nodo indicato con (1) si ha

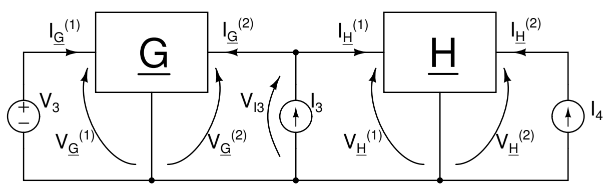
$$(1):\ I_3 - I_{\underline{G}}^{(2)} - I_{\underline{H}}^{(1)} = 0, \quad I_3 - G_{21}V_3 - G_{22}V_{I3} - H_{11}V_{I3} - H_{12}I = 0$$

$$V_{I3} = \frac{I_3 - G_{21}V_3 - H_{12}I}{G_{22} + H_{11}}$$

La tensione V è determinata osservando che $V_{\underline{H}}^{(2)} = V$, ovvero

$$V = V_{\underline{H}}^{(2)} = H_{21}V_{I3} + H_{22}I = \underbrace{H_{21}\frac{I_3 - G_{21}V_3}{G_{22}+H_{11}}}_{V^{(eq)}=5\,\mathrm{V}} + \underbrace{\left(H_{22} - \frac{H_{12}H_{21}}{G_{22}+H_{11}}\right)}_{R^{(eq)}=2\,\mathrm{k}\Omega} I$$

Nel terzo ed ultimo punto si chiede di calcolare, quando il circuito è configurato come riportato più sotto, per quale valore di I_4 la potenza dissipata dal doppio bipolo $\underline{G}$ vale $P_{\underline{G}} = 6\,\mathrm{mW}$.



Procedendo esattamente come nel caso precedente, si ha

$$V_{I3} = \frac{I_3 - G_{21}V_3 - H_{12}I_4}{G_{22} + H_{11}}$$

da cui

$$I_4 = \frac{I_3 - G_{21}V_3 - (G_{22} + H_{11})V_{I3}}{H_{12}}$$

mentre $P_{\underline{G}}$ può essere calcolata come

$$P_{\underline{G}} = V_{\underline{G}}^{(1)} I_{\underline{G}}^{(1)} + V_{\underline{G}}^{(2)} I_{\underline{G}}^{(2)} = V_{\underline{G}}^{(1)} \left(G_{11}V_{\underline{G}}^{(1)} + G_{12}V_{\underline{G}}^{(2)} \right) + V_{\underline{G}}^{(2)} \left(G_{21}V_{\underline{G}}^{(1)} + G_{22}V_{\underline{G}}^{(2)} \right) =$$

$$= G_{11}{V_3}^2 + (G_{12} + G_{21})\, V_3 V_{I3} + G_{22}{V_{I3}}^2$$

Il modo più semplice per rispondere al quesito è quello di considerare per quale valore di V_{I3} la potenza $P_{\underline{G}}$ è quella cercare, e quindi determinare quale valore di I_4 fa sì che la tensione V_{I3} sia quella desiderata.

Risolvendo in V_{I3} l'equazione $P_{\underline{G}} = -6\,\mathrm{mW}$, ovvero

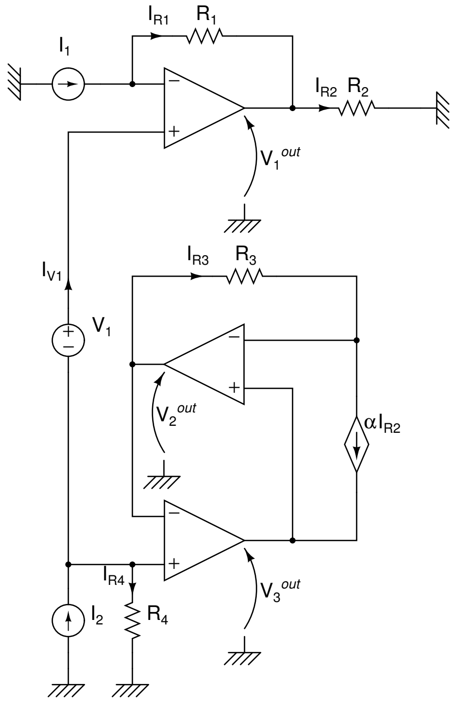
$$G_{22}{V_{I3}}^2 + (G_{12} + G_{21})\, V_3 V_{I3} + G_{11}{V_3}^2 + 6\,\mathrm{mW} = 0$$

si hanno le soluzioni

$$V_{I3} = -\frac{G_{12} + G_{21}}{2G_{22}} V_3 \pm \sqrt{\left(\frac{G_{12} + G_{21}}{2G_{22}} V_3\right)^2 - \frac{G_{11}{V_3}^2 + 6\,\mathrm{mW}}{G_{22}}}$$

ovvero $V_{I3} = 1\,\mathrm{V}$ e $V_{I3} = 5\,\mathrm{V}$. Queste soluzioni corrispondono, rispettivamente, ai due valori $I_4 = \frac{2}{3}\,\mathrm{mA} \approx 1{,}66\,\mathrm{mA}$ e $I_4 = 0\,\mathrm{mA}$.

Esercizio 2



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = \ldots = R_4 = 5\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 2$, $V_1 = 10\,\mathrm{V}$, $I_1 = 2\,\mathrm{mA}$, $I_2 = 1\,\mathrm{mA}$.

Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Determinare le tensioni V_1^{out}, V_2^{out} e V_3^{out} di uscita degli amplificatori operazionali.

Soluzione

Si considerino i versi delle tensioni e delle correnti come indicato in figura. Si consideri inoltre che per tutti gli amplificatori operazionali la corrente agli ingressi sia nulla e che la tensione ai due ingressi sia uguale per via del corto circuito virtuale.

Dall'ipotesi che gli ingressi degli operazionali assorbano corrente nulla, si ha $I_{V1} = 0\,\mathrm{A}$. Dal bilancio delle correnti al nodo (1) si ha quindi $I_{R4} = I_2$, da cui

$$V_{R4} = R_4 I_{R4} = R_4 I_2 = V_3^+$$

Dalla condizione di corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 3 si può ricavare V_2^{out}, che vale

$$V_2^{out} = V_3^- = V_3^+ = R_4 I_2 = 5\,\mathrm{V}$$

Per l'operazionale 1, si ha $V_1^+ = V_{R4} + V_0$, e $I_{R1} = I_1$. La condizione di corto circuito virtuale ai suoi ingressi permette di trovare la tensione di uscita dell'operazionale.

$$V_1^{out} = V_1^- - R_1 I_{R1} = R_4 I_2 + V_0 - R_1 I_1 = 5\,\mathrm{V}$$

Inoltre, poiché $V_{R2} = V_1^{out}$, è possibile anche determinare la corrente I_{R2}

$$I_{R2} = \frac{V_{R2}}{R_2} = \frac{V_1^{out}}{R_2} = 1\,\mathrm{mA}$$

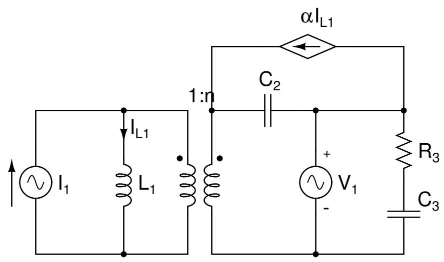
A questo punto, poiché $I_{R3} = \alpha\, I_{R2}$, si ha anche

$$V_2^- = V_2^{out} - R_3 I_{R3} = V_2^{out} - \alpha\, R_3 I_{R2}$$

e grazie al corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 2 è possibile determinare anche la terza tensione di uscita.

$$V_3^{out} = V_2^+ = V_2^- = V_2^{out} - \alpha\, R_3 I_{R2} = -5\,\mathrm{V}$$

Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$L_1 = 5\,\mathrm{mH}$, $C_2 = 500\,\mathrm{nF}$, $R_3 = 166{,}6\,\Omega$, $C_3 = 3\,\mu\mathrm{F}$, $n = 10$, $\alpha = 1/10$, $V_1(t) = 10\cos(\omega t + \pi/2)$ V, $I_1(t) = 100\cos(\omega t + \pi)$ mA, $\omega = 2\,\mathrm{krad/s}$.

Determinare la potenza complessa erogata dal generatore ideale di tensione V_1 e dal generatore ideale di corrente I_1.

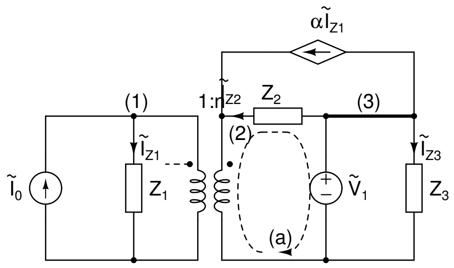
Soluzione

Nel dominio dei fasori alla pulsazione $\omega = 2\,\mathrm{krad/s}$ i due generatori indipendenti sono rappresentati attraverso i fasori

$$\tilde{V}_1 = 10\, e^{j\pi/2}\,\mathrm{V} = j10\,\mathrm{V}$$
$$\tilde{I}_1 = 100\, e^{j\pi}\,\mathrm{mA} = -100\,\mathrm{mA}$$

mentre a L_1, a C_2 e alla serie di R_3 e C_3 si possono sostituire, rispettivamente, le impedenze Z_1, Z_2 e Z_3 (quest'ultima pari alla serie delle impedenze associate a R_3 e C_3)

$$Z_1 = j\Omega L_1 = j10\,\Omega$$
$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2} = -j1000\,\Omega$$
$$Z_3 = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} = 166{,}6\,\Omega - j166{,}6\,\Omega$$



Si consideri il circuito di figura, in cui per coerenza con il cambio di notazione, il generatore di corrente comandato $\alpha\, I_{L1}$ è stato sostituito con un generatore comandato $\alpha\, \tilde{I}_{Z1}$.

L'esercizio chiede di determinare le due potenze complesse $\tilde{N}_{V1}$ e $\tilde{N}_{I1}$, definite come

$$\tilde{N}_{V1} = \frac{1}{2}\tilde{V}_1\tilde{I}^*_{V1}, \quad \tilde{N}_{I1} = \frac{1}{2}\tilde{V}_{I1}\tilde{I}^*_1,$$

dove $\tilde{I}^*_{V1}$ e $\tilde{I}^*_1$ sono i complessi coniugati delle correnti $\tilde{I}_{V1}$ e $\tilde{I}_1$.

Per la presenza del generatore comandato $\alpha\,\tilde{I}_{Z1}$ non è possibile risolvere il circuito mediante semplificazione con circuiti equivalenti di Thevenin o Norton. Pertanto è necessario procedere con l'analisi circuitale completa, indicando con $\tilde{V}_T^{(1)}$ e $\tilde{I}_T^{(1)}$ tensione e corrente alla porta di sinistra del trasformatore, e con $\tilde{V}_T^{(2)}$ e $\tilde{I}_T^{(2)}$ tensione a corrente alla porta di destra. Considerando il circuito a sinistra del trasformatore, dal nodo (1) si ha

$$(1):\ \tilde{I}_1 - \tilde{I}_{Z1} - \tilde{I}_T^{(1)}, \quad \tilde{I}_T^{(1)} = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_{Z1}$$

mentre l'induttanza L_1 è in parallelo al trasformatore, e quindi condivide la stessa tensione

$$\tilde{V}_T^{(1)} = \tilde{V}_{Z1} = Z_1\tilde{I}_{Z1}$$

Nella parte a destra del trasformatore, si considerino invece i bilanci delle correnti al nodo (2) e delle tensioni alla maglia (a)

$$(2):\ \alpha\,\tilde{I}_{Z1} + I_{Z_2} - \tilde{I}_T^{(2)} = 0, \quad \tilde{I}_T^{(2)} = \alpha\,\tilde{I}_{Z1} + I_{Z_2}$$

$$(a):\ \tilde{V}_T^{(2)} + \tilde{V}_{Z2} = \tilde{V}_1, \quad \tilde{V}_T^{(2)} = \tilde{V}_1 - \tilde{V}_{Z2} = \tilde{V}_1 - Z_2\tilde{I}_{Z2}$$

Considerando ora le equazioni del trasformatore

$$\begin{cases} \tilde{V}_T^{(2)} = n\,\tilde{V}_T^{(1)} \\ \tilde{I}_T^{(1)} = -n\,\tilde{I}_T^{(2)} \end{cases}$$

è possibile determinare il valore di $\tilde{I}_{Z1}$ e di $\tilde{I}_{Z2}$. Dalla prima equazione

$$\tilde{V}_1 - Z_2\tilde{I}_{Z2} = nZ_1\tilde{I}_{Z1}, \quad \tilde{I}_{Z2} = \frac{\tilde{V}_1 - nZ_1\tilde{I}_{Z1}}{Z_2}$$

mentre dalla seconda

$$\tilde{I}_1 - \tilde{I}_{Z1} = -n\left(\alpha\,\tilde{I}_{Z1} + I_{Z_2}\right), \quad \tilde{I}_1 - \tilde{I}_{Z1} = -n\,\alpha\,\tilde{I}_{Z1} - n\frac{\tilde{V}_1}{Z_2} + n^2\frac{Z_1}{Z_2}\tilde{I}_{Z1}$$

$$I_{Z1} = \frac{\tilde{I}_1 + n\dfrac{\tilde{V}_1}{Z_2}}{1 - n\,\alpha + n^2\dfrac{Z_1}{Z_2}} = \frac{Z_2\tilde{I}_1 + n\tilde{V}_1}{(1-n\,\alpha)Z_2 + n^2 Z_1} = 200\,\text{mA}$$

$$\tilde{I}_{Z2} = \frac{\tilde{V}_1}{Z_2} - n\frac{Z_1}{Z_2}\tilde{I}_{Z1} = \frac{1}{Z_2}\left(\frac{Z_2\tilde{V}_1 - n\,\alpha\,Z_2\tilde{V}_1 + \cancel{n^2 Z_1\tilde{V}_1} - n\,Z_1Z_2\tilde{I}_1 - \cancel{n^2 Z_1\tilde{V}_1}}{(1-n\,\alpha)Z_2 + n^2 Z_1}\right) =$$

$$= \frac{(1-n\,\alpha)\tilde{V}_1 - n\,Z_1\tilde{I}_1}{(1-n\,\alpha)Z_2 + n^2 Z_1} = 10\,\text{mA}$$

Per determinare le potenze richieste, è sufficiente considerare che il generatore I_1 e Z_1, in parallelo, condividono la stessa tensione

$$\tilde{N}_{Z1} = \frac{1}{2}V_{I1}I^*_1 = \frac{1}{2}\tilde{V}_{Z1}I^*_1 = \frac{1}{2}Z_1\tilde{I}_{Z1}I^*_1 = -j100\,\text{mVA}$$

mentre il bilancio al nodo (3), osservando anche che $\tilde{V}_{Z3} = \tilde{V}_1$, porta a

$$(3):\ \tilde{I}_{V1} = \tilde{I}_{Z2} + \alpha\,\tilde{I}_{Z1} + \tilde{I}_{Z3} = \tilde{I}_{Z2} + \alpha\,\tilde{I}_{Z1} + \frac{\tilde{V}_1}{Z_3} = j30\,\text{mA}$$

$$\tilde{N}_{V_1} = \frac{1}{2}\tilde{V}_1\tilde{I}^*_{V1} = 150\,\text{mVA}$$