

Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 6 luglio 2007

1-a)

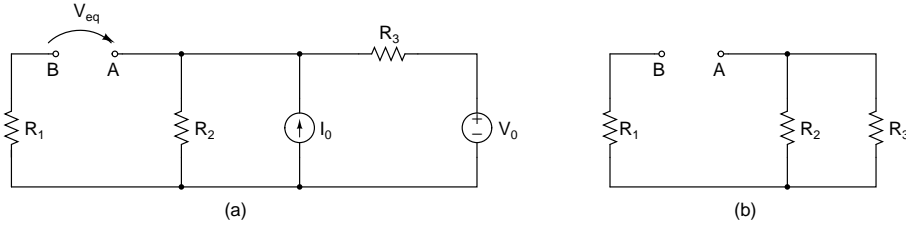
Analizzando il circuito, si ha che le matrici sono in serie, per cui $V_1 = V'_1 + R_1 I'_1 + V''_1 + R_2 I'_1$, e $V_2 = r I_{R2} + R_4 I_{R4} = r I'_1 + R_4 (I_2 - I'_2) = r I'_1 + R_4 (I_2 + \beta I'_1)$. Vale inoltre $I'_1 = I_1 - \alpha I_2$ e $I'_2 = I''_2 = -\beta I_{R2} = -\beta I'_1$.

Si ha quindi $V_1 = (R_1 + R_2 + R'_{11} + R''_{11} - \beta(R'_{12} + R''_{12}))I_1 - \alpha(R_1 + R_2 + R'_{11} + R''_{11} - \beta(R'_{12} + R''_{12}))I_2$ e $V_2 = (r + \beta R_4)I_1 + (R_4 - \alpha(r + \beta R_4))I_2$ da cui, posto $R_T = (R_1 + R_2 + R'_{11} + R''_{11} - \beta(R'_{12} + R''_{12})) = 1\text{k}\Omega$ si deduce

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_T & -\alpha R_T \\ (r + \beta R_4) & (R_4 - \alpha(r + \beta R_4)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \text{k}\Omega.$$

Collegando il generatore reale $\{V_0, R_0\}$ alla porta 1, si ha $V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2 = V_0 - R_0I_1$ da cui si ricava $I_1 = \frac{V_0 - R_{12}I_2}{R_0 + R_{11}}$. Dalla relazione alla porta 2 si ottiene $V_2 = \frac{R_{21}V_0}{R_0 + R_{11}} + \left(R_{22} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{11} + R_0}\right)I_2$ da cui segue direttamente $V_{eq} = \frac{R_{21}V_0}{R_0 + R_{11}} = 3.33\text{V}$ e $R_{eq} = R_{22} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{11} + R_0} = -2\text{k}\Omega$.

1-b)



Per $t < 0\text{sec}$ il circuito è a regime e la capacità si comporta come un circuito aperto, mentre l'induttore si comporta come un cortocircuito. L'induttore risulta in serie ad un circuito aperto, quindi $i_L(0^-) = 0$.

Per $t > 0$ conviene calcolare l'equivalente di Thevenin ai capi dell'induttore. La tensione equivalente si ricava dal circuito di figura (a). Dal teorema di Millmann $V_{eq} = \frac{(V_0/R_3) + I_0}{(1/R_2) + (1/R_3)} = 3\text{V}$.

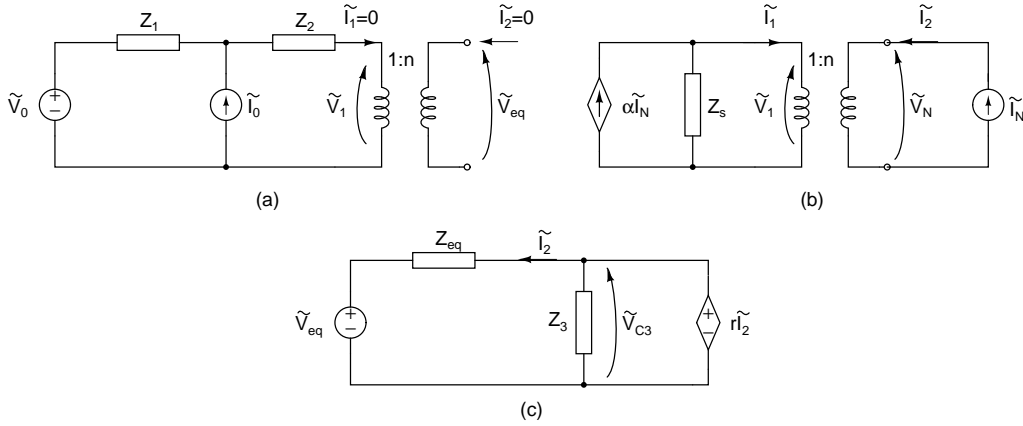
Per il calcolo della resistenza equivalente, una volta spenti i generatori indipendenti, si ottiene il circuito di figura (b).

Si ricava immediatamente $R_{eq} = R_1 + R_2 // R_3 = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 1.5\text{k}\Omega$.

Si può scrivere quindi $i_L(t) = i_\infty - (i_\infty - i_L(0^+))e^{-t/\tau}$ dove $i_\infty = \frac{V_{eq}}{R_{eq}} = 2\text{mA}$, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$ e $\tau = L/R_{eq} = 1\mu\text{sec}$. Sostituendo si ricava $i_L(t) = 2(1 - e^{-10^6 t})\text{mA}$.

1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha ($\omega = 1\text{rad/sec}$): $Z_1 = R_1 + 1/(j\omega C_1) = (1 - j)\Omega$, $Z_2 = R_4 + j\omega L_2 = (1 + j)\Omega$, $Z_3 = -j(1/\omega C_3) = -j\Omega$, $\tilde{V}_0 = (1 + j)\text{V}$, $\tilde{I}_0 = j\text{A}$ (essendo $i_0(t) = -\sin(t) = \sin(t + \pi) = \cos(\pi/2 - t - \pi) = \cos(t + \pi/2)\text{A}$).



Conviene calcolare l'equivalente di Thevenin a monte della porta 2 del trasformatore. Per il calcolo della tensione equivalente si consideri il circuito di figura (a). Essendo $\tilde{I}_2 = 0$ si ha $\tilde{I}_1 = 0$ che porta a $\tilde{V}_1 = \tilde{V}_0 + Z_1\tilde{I}_0$, da cui $\tilde{V}_{eq} = n\tilde{V}_1 = n(\tilde{V}_0 + Z_1\tilde{I}_0) = 4(1 + j)\text{V}$.

Per il calcolo della Z_{eq} si consideri il circuito di figura (b), dove $Z_s = Z_1 + Z_2 = 2\Omega$. Risulta $\tilde{V}_1 = (\alpha\tilde{I}_N - \tilde{I}_1)Z_s = (\alpha\tilde{I}_N + n\tilde{I}_N)Z_s$ da cui $\tilde{V}_N = n\tilde{V}_1 = n(n + \alpha)Z_s\tilde{I}_N$ ossia $Z_{eq} = n(n + \alpha)Z_s = 16\Omega$.

Ricorrendo all'equivalente di Thevenin al circuito, si giunge infine al circuito equivalente di figura (c), dove risulta evidente $\tilde{V}_{C3} = r\tilde{I}_2 = r\frac{\tilde{V}_{C3} - \tilde{V}_{eq}}{Z_{eq}}$ da cui si ricava $\tilde{V}_{C3} = \frac{r}{r - Z_{eq}}\tilde{V}_{eq} = 36(1 + j)\text{V}$, ossia, passando nel dominio dei tempi $v_{C3}(t) = 36\sqrt{2}\cos(t + \pi/4)\text{V}$.

2-a)

Essendo gli operazionali ideali, e operanti sempre nella zona ad alto guadagno, numerandoli coerentemente con le denominazioni delle tensioni di uscita, vale $V_-^{(i)} = V_+^{(i)}$ e $I_-^{(i)} = I_+^{(i)} = 0\text{A}$ con $i = 1, 2, 3$.

Si puo' scrivere $i_{R1}(t) = V_1(t)/R_1 = i_{C1}(t) = C_1 \frac{dv_{C1}}{dt}$ da cui si ricava $v_{C1}(t) = \frac{1}{R_1 C_1} \int_{-\infty}^t V_1(\tau) d\tau$, e quindi $V_{o1}(t) = V_-^{(1)} - v_{C1}(t) = -\frac{1}{R_1 C_1} \int_{-\infty}^t V_1(\tau) d\tau$.

Analogamente $i_{C2}(t) = C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} = C_2 \frac{dV_2}{dt}$ e $i_{C2}(t) = \frac{V_-^{(2)} - V_{o2}(t)}{R_2}$ da cui si ricava $V_{o2}(t) = -R_2 C_2 \frac{dV_2}{dt}$.

Inoltre, $V_-^{(3)} = V_+^{(3)} = V_{o2}(t) \frac{R_4}{R_3 + R_4}$ e $i_{R4} = (V_{o1}(t) - V_-^{(3)})/R_3$.

Si ha quindi infine $V_o(t) = V_-^{(3)} - R_4 i_{R4} = \frac{R_4}{R_3} (V_{o2}(t) - V_{o1}(t))$.

2-b)

Si nota immediatamente che $i_1^R = I_1$ e $i_2^R = I_3 - I_2$, per cui $V_{I3} = v_2^R = R_{21}i_1^R + R_{22}i_2^R = R_{21}I_1 + R_{22}(I_3 - I_2) = 12\text{V}$. Quindi, $P_{I3} = V_{I3}I_3 = 24\text{mW}$.