

1-a)

Dal circuito risulta evidente che $V_\alpha = R_2 i_{R2} + R_4 i_{R4}$ dove $i_{R2} = i_1$ mentre $i_{R4} = i_{R2} - gV_\alpha = i_1 - gV_\alpha$; sostituendo si ottiene $V_\alpha = R_2 i_1 + R_4(i_1 - gV_\alpha)$ che consente di calcolare $V_\alpha = \frac{R_2 + R_4}{1 + gR_4} i_1$.

Risulta evidente che $V_1 = V'_1 + (R_1 + R_2)i_1 + R_4(i_1 - gV_\alpha)$, dove V'_1 e' la tensione alla porta 1 del due porte \underline{R}' , per cui

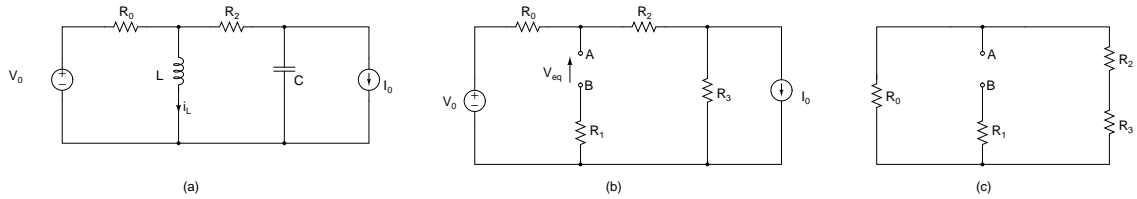
$$V_1 = \left[\frac{R_1 + R'_{11} + R_2 + R_4 - gR'_{12}R_2 + g(R_1 + R'_{11} - R_{12})R_4}{1 + gR_4} \right] i_1 = R_{11}i_1$$

Alla porta 2 invece si può scrivere $V_2 = R_5(i_2 + gV_\alpha) = \frac{gR_5(R_2 + R_4)}{1 + gR_4} i_1 + R_5 i_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2$, per cui si ottiene

$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ \frac{gR_5(R_2 + R_4)}{1 + gR_4} & R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ k}\Omega$ (dove R_{11} è data dall'espressione ricavata nell'espressione di V_1).

Collegando il generatore reale $\{V_0, R_0\}$ alla porta 2, poichè vale $V_1 = R_{11}i_1$ ($R_{12} = 0$), la porta 1 non viene influenzata da questa connessione (la porta 2 non influenza la porta 1 in alcun modo, il due porte si dice unidirezionale). Ne segue immediatamente $V_{eq} = 0\text{V}$ e $R_{eq} = R_{11} = -1\text{k}\Omega$.

1-b)



Per $t \leq 0\text{sec}$ il circuito è a regime e la capacità si comporta come un circuito aperto, mentre l'induttore si comporta come un cortocircuito e la situazione è mostrata in figura (a). Applicando la legge di Kirchhoff al nodo cui sono collegati R_0, R_2, L , si ottiene $i_L(t) = i_{R0} - I_0 = \frac{V_0}{R_0} - I_0 = 2\text{mA}$.

Per $t > 0$ conviene calcolare l'equivalente di Thevenin ai capi dell'induttore. La tensione equivalente si ricava dal circuito di figura (b). Per il principio di sovrapposizione degli effetti si ha $V_{eq} = V'_{AB} + V''_{AB}$ dove $V'_{AB} = V_0 \frac{R_2 + R_3}{R_0 + R_2 + R_3}$ e $V''_{AB} = \left(-I_0 \frac{R_3}{R_0 + R_2 + R_3} \right) R_0$, ossia $V_{eq} = \frac{(R_2 + R_3)V_0 - R_3 R_0 I_0}{R_0 + R_2 + R_3} = 2\text{V}$. Per il calcolo della resistenza equivalente, una volta spenti i generatori indipendenti, si ottiene il circuito di figura (c).

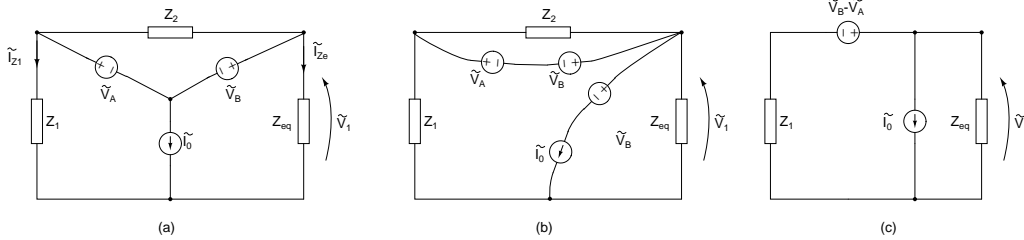
Si ricava immediatamente $R_{eq} = R_1 + (R_2 + R_3) // R_0 = R_1 + \frac{R_0(R_2 + R_3)}{R_0 + R_2 + R_3} = 2\text{k}\Omega$.

Si può scrivere quindi $i_L(t) = i_\infty - (i_\infty - i_L(0^+))e^{-t/\tau}$ dove $i_\infty = \frac{V_{eq}}{R_{eq}} = 1\text{mA}$, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$ e $\tau = L/R_{eq} = 1\mu\text{sec}$. Sostituendo si ricava $i_L(t) = [1 + e^{-10^6 t}]\text{mA}$.

1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha ($\omega = 1\text{rad/sec}$): $Z_1 = Z_{R1}/Z_{L1} = \frac{2 \cdot 2j}{2+2j} = (1+j)\Omega$, $Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = 2(1+j)\Omega$, $Z_3 = R_3 + j\omega L_3 = 4(1+j)\Omega$, $\tilde{V}_A = (1+j)V$, $\tilde{V}_B = 3(1+j)V$, $\tilde{I}_0 = 2(1+j)A$.

Convien calcolare l'equivalente di Thevenin a valle della porta 1 del trasformatore. Brevemente, poichè al secondario del trasformatore è presente una sola impedenza, l'equivalente di Thevenin sarà una impedenza ($\tilde{V}_{eq} = 0$). Essendo $\tilde{V}_1 = \tilde{V}_2/n = -\tilde{I}_2 Z_3/n = -(-\tilde{I}_1/n)Z_3/n = \frac{Z_3}{n^2}\tilde{I}_1$, si ottiene immediatamente $Z_{eq} = \frac{Z_3}{n^2} = (1+j)\Omega$.



Il circuito è mostrato in figura (a). Valgono le seguenti relazioni $\tilde{V}_1 = Z_{eq}\tilde{I}_{Ze}$, $\tilde{I}_{Ze} = -(\tilde{I}_{Z1} + I_0)$, $\tilde{I}_{Z1} = \frac{\tilde{V}_1 - \tilde{V}_B + \tilde{V}_A}{Z_1}$. Sostituendo si ottiene $\tilde{V}_1 = (\tilde{V}_B - \tilde{V}_A) \frac{Z_{eq}}{Z_1 + Z_{eq}} - \frac{Z_1 Z_{eq}}{Z_1 + Z_{eq}} I_0 = (1-j)V$.

(Un altro modo per giungere al precedente risultato, consiste nell'applicare il principio di rilocazione delle sorgenti impresse ad uno qualsiasi dei tre generatori della stella, con l'intento di spezzare la stella nel suo nodo comune. La figura (b) mostra la rilocazione della sorgente \tilde{V}_B rispetto a tale nodo. Notare come Z_2 possa essere ignorata (rimossa) poichè in parallelo ad un generatore di tensione, mentre la serie \tilde{V}_B , \tilde{I}_0 risulta equivalente al solo generatore di corrente; la situazione è mostrata in figura (c). A questo punto, l'applicazione diretta del teorema di Millmann consente di calcolare $\tilde{V}_1 = \frac{(\tilde{V}_B - \tilde{V}_A)/Z_1 - \tilde{I}_0}{1/Z_1 + 1/Z_{eq}}$ che porta ovviamente al risultato precedente.

La rilocazione delle sorgenti \tilde{V}_A oppure \tilde{I}_0 porta a situazioni circuitali molto simili, ovviamente equivalenti ai fini del calcolo di \tilde{V}_1 .)

Tornando nel dominio dei tempi si può quindi scrivere $v_1(t) = \sqrt{2}\cos(t - \pi/4)V$.

2-a) Essendo gli operazionali ideali, e operanti sempre nella zona ad alto guadagno, numerandoli coerentemente con le denominazioni delle tensioni di uscita, vale $V_-^{(i)} = V_+^{(i)}$ e $i_-^{(i)} = i_+^{(i)} = 0A$ con $i = 1, 2$.

Indicando con V_x la tensione al nodo cui sono collegate R_2, R_3, R_4 , si può scrivere $V_x = V_-^{(1)} - R_2 i_{R1} = -\frac{R_2}{R_1} V_0 = -5V$. Essendo $i_{R5} = i_+^{(2)} = 0$ si ha $V_{o1} = V_x - R_4 i_{R4} = V_x - R_4(i_{R2} - i_{R3}) = V_x - R_4(V_0/R_1 - V_x/R_3) = -15V$.

Essendo $V_-^{(2)} = V_+^{(2)} = V_x$, si ha $i_{R6} = (V_{o1} - V_x)/R_6$ e $i_{R7} = i_{R6} - i_{R8}$ dove $i_{R8} = V_x/R_8$. Infine quindi $V_{o2} = V_x - R_7 i_{R7} = V_x(1 + \frac{R_7}{R_6} + \frac{R_7}{R_8}) - \frac{R_7}{R_6} V_{o1} = 5V$.

2-b)

Il bipolo presenta una corrente nulla qualsiasi sia la tensione ai suoi capi, quindi è equivalente ad un circuito aperto. Per ottenere il suo duale, ossia un corto-circuito, basta imporre una tensione nulla qualsiasi sia la corrente del bipolo, collegando il nullatore e il noratore in parallelo.