

Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 9 marzo 2006

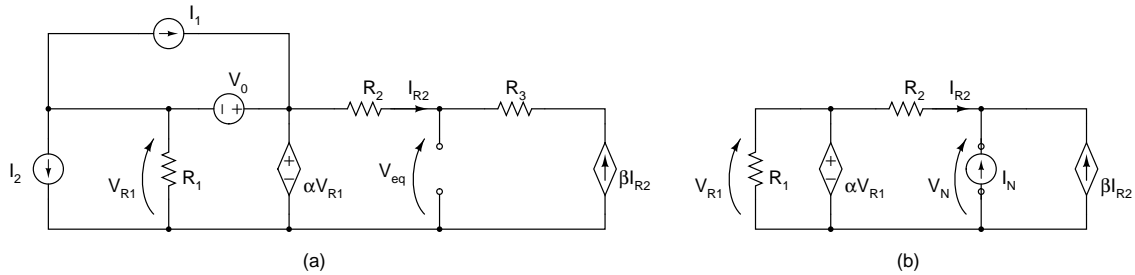
1-a)

Analizzando il circuito, si ricava $I_1 = \frac{V_1 - rI_{R2}}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_3}$ e $I_2 = -gV_{R3} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_2 - V_1}{R_3}$ dove $I_{R2} = \frac{V_2}{R_2}$ e $V_{R3} = V_1 - V_2$ da cui si ottiene

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} & -\left(\frac{r}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \\ -\left(\frac{1}{R_3} + g\right) & \frac{1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_3} + g\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{m}\Omega^{-1}.$$

Collegando il generatore ideale I_0 alla porta 2, si ha $I_0 = G_{21}V_1 + G_{22}V_2$ da cui si ricava $V_2 = \frac{I_0}{G_{22}} - \frac{G_{21}V_1}{G_{22}}$. Dalla relazione alla porta 1 si ottiene $I_1 = \frac{G_{12}}{G_{22}}I_0 + (G_{11} - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{22}})V_1$ da cui segue direttamente $I_{eq} = -\frac{G_{12}}{G_{22}}I_0 = 2\text{mA}$ e $G_{eq} = G_{11} - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{22}} = 0.666\text{m}\Omega^{-1}$, ossia $R_{eq} = 1.5\text{k}\Omega$.

1-b)



Per $t < 0$ sec il circuito è a regime e il condensatore si comporta come un circuito aperto. Valgono le relazioni $\alpha V_{R1} = V_{R1} + V_0$ e $I_{R2} = -(\beta I_{R2} + I_1)$ da cui si ottiene rispettivamente $V_{R1} = \frac{V_0}{\alpha - 1}$ e $I_{R2} = -\frac{I_1}{1 + \beta}$. Infine, $V_C(t) = \alpha V_{R1} - I_{R2}R_2 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}V_0 + \frac{R_2 I_1}{1 + \beta} = 12\text{V}$.

Per $t > 0$ conviene calcolare l'equivalente di Thevenin ai capi del condensatore. La tensione equivalente si ricava dal circuito di figura (a), dove per V_{R1} vale ancora la relazione ottenuta precedentemente $V_{R1} = \frac{V_0}{\alpha - 1}$. Inoltre, essendo $I_{R2} = -\beta I_{R2}$ si ottiene $I_{R2} = 0$, da cui si ricava immediatamente $V_{eq} = \alpha V_{R1} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}V_0 = 10\text{V}$.

Per il calcolo della resistenza equivalente, una volta spenti i generatori indipendenti, si ottiene il circuito di figura (b) (la resistenza R_3 è stata omessa in quanto in serie ad un generatore di corrente). Si ha $I_{R2} = -I_N - \beta I_{R2}$ da cui $I_{R2} = -\frac{1}{1 + \beta}I_N$. Poiché inoltre vale $V_N = -R_2 I_{R2} = \frac{R_2}{1 + \beta}I_N$ si ottiene $R_{eq} = \frac{R_2}{1 + \beta} = 1\text{k}\Omega$.

Si può scrivere quindi $v_C(t) = v_{C\infty} - (v_{C\infty} - v_C(0^+))e^{-t/\tau}$ dove $v_{C\infty} = V_{eq} = 10\text{V}$, $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 12\text{V}$ e $\tau = R_{eq}C = 1\text{msec}$. Sostituendo si ricava $v_C(t) = [10 + 2e^{-1000t}]\text{V}$.

1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha ($\omega = 1\text{rad/sec}$): $Z_3 = R_3 + j\omega L_3 = (1 + j)\Omega$, $Z_4 = R_4(1/j\omega C_4)/(R_4 + (1/j\omega C_4)) = (1 - j)/2\Omega$, $Z_a = R_a = 1\Omega$, $\tilde{V}_3 = \tilde{V}_4 = (1 + j)V$.

Poiché R_a e R_b (e quindi di conseguenza anche Z_a e Z_b) sono in serie, sono percorse dalla stessa corrente; ne segue immediatamente $V_{Ra} = V_{Rb} \Leftrightarrow R_b = R_a = 1\Omega$ (considerati i versi delle tensioni).

Dalle equazioni del giratore si ha $\tilde{I}_2 = -G\tilde{V}_4$. Banalmente, questa è la corrente che entra nella porta due del trasformatore per cui $\tilde{I}_1^{(trasf)} = -n\tilde{I}_2^{(trasf)} = -n\tilde{I}_2 = nG\tilde{V}_4 = (1 + j)A$.

Essendo per definizione $P_{V3} = \frac{1}{2}\text{Re}\{\tilde{V}_3\tilde{I}_{V3}^*\}$ con $\tilde{I}_{V3} = \tilde{I}_1^{(trasf)}$ si ricava $P_{V3} = \frac{1}{2}\text{Re}\{(1 + j)(1 - j)\} = 1W$.

2-a)

Essendo gli operazionali ideali, e operanti sempre nella zona ad alto guadagno, numerandoli coerentemente con le denominazioni delle tensioni di uscita, vale $V_-^{(i)} = V_+^{(i)}$ e $I_-^{(i)} = I_+^{(i)} = 0A$ con $i = 1, 2$.

Si può scrivere $V_-^{(2)} = V_+^{(2)} = R_4 I_0 = 1V$, $V_-^{(1)} = V_+^{(1)} = (R_3 + R_4)I_0 = 2V$ ed inoltre devono valere le relazioni $V_{o1} = V_-^{(1)} - R_1 I_{R5}$ e $V_{o2} = V_-^{(2)} - R_2(-I_{R5} - I_0)$ con $I_{R5} = \frac{V_-^{(2)} - V_-^{(1)}}{R_5}$. Sostituendo si ottiene $V_{o1} = \left(R_3 + R_4 + \frac{R_1 R_3}{R_5}\right) I_0 = 3V$ e $V_{o2} = \left(R_2 + R_4 - \frac{R_2 R_3}{R_5}\right) I_0 = 1V$.

2-b)

Se il circuito α ammette equivalente di Norton, ma non quello di Thevenin, allora è equivalente ad un generatore ideale di corrente, ossia $G_{eq} = 0$ (infatti in questo caso, volendo ricavare l'equivalente di Thevenin da quello di Norton, sia la resistenza equivalente che la tensione equivalente risultano non calcolabili a causa della divisione per zero). Poiché dunque α è equivalente ad un generatore ideale di corrente che collegato a $R = 1k\Omega$ provoca una dissipazione di potenza sulla resistenza pari a $P_R = RI_{eq}^2 = 6.25mW$, si ricava banalmente $I_{eq} = \sqrt{\frac{P_R}{R}} = 2.5mA$. Sapendo che la tensione V_α è negativa, si deduce infine che il verso del generatore di corrente I_{eq} è entrante nel morsetto B (e di conseguenza uscente dal morsetto A).