

Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 23 luglio 2007

1-a)

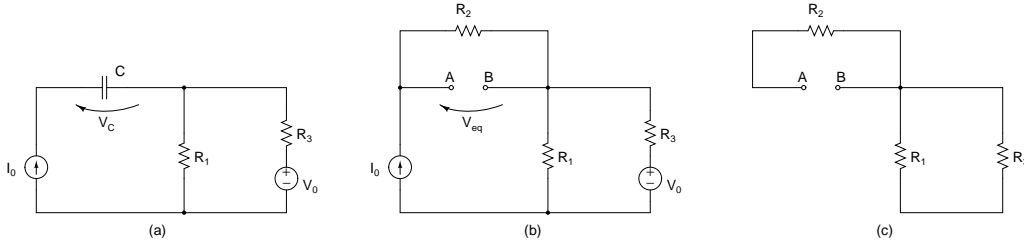
Valgono le relazioni $V_1 = R_1 i_{R1} + R_2 i_{R2} = R_1(i_1 - \alpha i_2) + R_2 i_1$ e $V_2 = \beta V_{R2} + R_4 i_{R4} = \beta(R_2 i_1) + R_4(i_2 - \frac{V_2}{R_5})$, da cui si ricava $V_1 = (R_1 + R_2)i_1 - \alpha R_1 i_2$ e $V_2 = \frac{\beta R_2 R_5}{R_4 + R_5} i_1 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} i_2$.

Si deduce quindi

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -\alpha R_1 \\ \frac{\beta R_2 R_5}{R_4 + R_5} & \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ k}\Omega.$$

Collegando il generatore reale $\{V_0, R_0\}$ alla porta 2, si ha $V_2 = R_{21}I_1 + R_{22}I_2 = V_0 - R_0 I_2$ da cui si ricava $I_2 = \frac{V_0 - R_{21}I_1}{R_0 + R_{22}}$. Dalla relazione alla porta 1 si ottiene $V_2 = \frac{R_{12}V_0}{R_0 + R_{22}} + \left(R_{11} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{22} + R_0}\right) I_1$ da cui segue direttamente $V_{eq} = \frac{R_{21}}{R_0 + R_{22}} V_0 = -1\text{V}$ e $R_{eq} = R_{11} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{22} + R_0} = 3.5\text{k}\Omega$.

1-b)



Per $t < 0\text{sec}$ il circuito è a regime e la capacità si comporta come un circuito aperto, mentre l'induttore si comporta come un cortocircuito. Banalmente, $v_C(t) = v_{R2} = R_2 I_0 = 5\text{V}$.

Per $0 < t < t_1$ l'induttore è in parallelo ad un corto-circuito, per cui il parallelo stesso è equivalente ad un corto-circuito (la L può essere rimossa ai fini del calcolo della tensione sul condensatore). La situazione è mostrata in figura (a). La capacità C si trova in serie ad un generatore di corrente, per cui si ha una carica a corrente costante; ne segue, dalla relazione $i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} = I_0$, $v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I_0 d\tau + v_C(0^+) = \frac{I_0}{C} t + v_C(0^+) = [5 + t]\text{V}$.

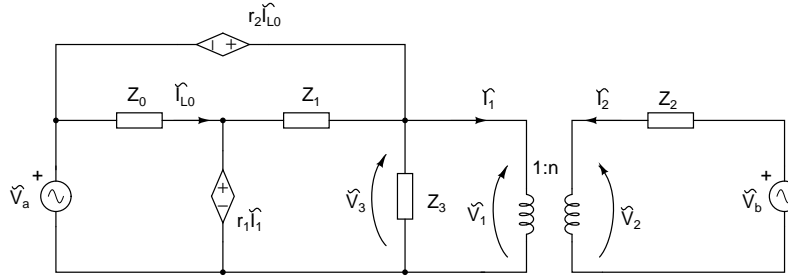
Per $t > t_1$, ricordando che $v_C(t_1) = [5 + t_1] = 12\text{V}$, conviene calcolare l'equivalente di Thevenin ai capi del condensatore. La tensione equivalente si ricava dal circuito di figura (b). Essendo la corrente ai morsetti nulla, la corrente I_0 scorre tutta sulla resistenza R_2 ; quindi, si ricava immediatamente $V_{eq} = V_{R2} = R_2 I_0 = 5\text{V}$.

Per il calcolo della resistenza equivalente, una volta spenti i generatori indipendenti, si ottiene il circuito di figura (c), in cui risulta ovvio che $R_{eq} = R_2 = 5\text{k}\Omega$.

Si può scrivere quindi $v_C(t) = v_{C\infty} - (v_{C\infty} - v_C(t_1^+))e^{-(t-t_1)/\tau}$ dove $v_{C\infty} = V_{eq} = 5\text{V}$, $v_C(t_1^+) = 12\text{V}$ e $\tau = R_{eq}C = 5\text{sec}$. Sostituendo si ricava $v_C(t) = [5 + 7e^{-0.2(t-7)}]\text{V}$.

1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha ($\omega = 1\text{rad/sec}$): $Z_0 = j\omega L_0 = 2j\Omega$, $Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = (1 + j)\Omega$, $Z_2 = R_2 = 8\Omega$, $Z_3 = R_3 - j(1/\omega C_3) = (1 - j)\Omega$, $\tilde{V}_b = (1 + j)\text{V}$, $\tilde{V}_a = 0.5j\text{V}$ (essendo $v_a(t) = -0.5 \sin(t) = 0.5 \sin(t + \pi) = 0.5 \cos(\pi/2 - t - \pi) = 0.5 \cos(t + \pi/2)\text{V}$).



Dal circuito si nota che $\tilde{V}_{Z3} = \tilde{V}_a + r_2 \tilde{I}_{L0} = \tilde{V}_a + r_2 \left(\frac{\tilde{V}_a - r_1 \tilde{I}_1}{Z_0} \right)$, dove $\tilde{I}_1 = -n \tilde{I}_2$ e $\tilde{I}_2 = \frac{\tilde{V}_b - \tilde{V}_2}{Z_2}$. Ricordando che $\tilde{V}_2 = n \tilde{V}_1 = n \tilde{V}_{Z3}$ e sostituendo si ricava

$$\tilde{V}_{Z3} = \frac{(Z_0 + r_2)Z_2 \tilde{V}_a + n r_1 r_2 \tilde{V}_b}{Z_0 Z_2 + n^2 r_1 r_2} = 0.5(1 + j) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\pi/4} \text{V}$$

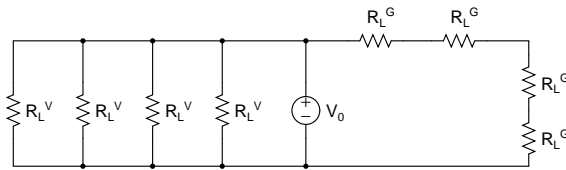
Passando nel dominio dei tempi $v_3(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(t + \pi/4)\text{V}$.

2-a)

Essendo gli operazionali ideali, e operanti sempre nella zona ad alto guadagno, numerandoli coerentemente con le denominazioni delle tensioni di uscita, vale $V_-^{(i)} = V_+^{(i)}$ e $I_-^{(i)} = I_+^{(i)} = 0\text{A}$ con $i = 1, 2$.

Indicando con V_x il potenziale del nodo cui sono collegati V_0 , R_3 e I_0 , si può scrivere $i_{R3} = \frac{V_x}{R_1 + R_3}$, $i_{R2} = \frac{V_x - V_0}{R_2}$ ed inoltre $i_{R2} + i_{R3} = -I_0$ da cui si ricava $V_x = (V_0 - R_2 I_0) \frac{R_1 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 2\text{V}$. Ne segue $V_-^{(1)} = V_+^{(1)} = V_x - V_0 = -3\text{V}$, $V_-^{(2)} = V_+^{(2)} = V_x \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 1\text{V}$ e quindi $V_{o1} = V_-^{(1)} - R_4 I_0 = -5\text{V}$. Inoltre, $i_{R6} = i_{R5} = \frac{V_{o1} - V_-^{(2)}}{R_5} = -6\text{mA}$ da cui $V_{o2} = V_-^{(2)} - R_6 i_{R6} = 7\text{V}$.

2-b)



La soluzione è mostrata nel circuito di figura. Se una lampadina verde si brucia, il comportamento del resto del circuito rimane immutato. Se una lampadina gialla si brucia, la serie impone corrente nulla su tutte le altre lampadine gialle, mentre le lampadine verdi non ne risentono in quanto in parallelo al generatore indipendente di tensione.