

Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 9 giugno 2003

1-a)

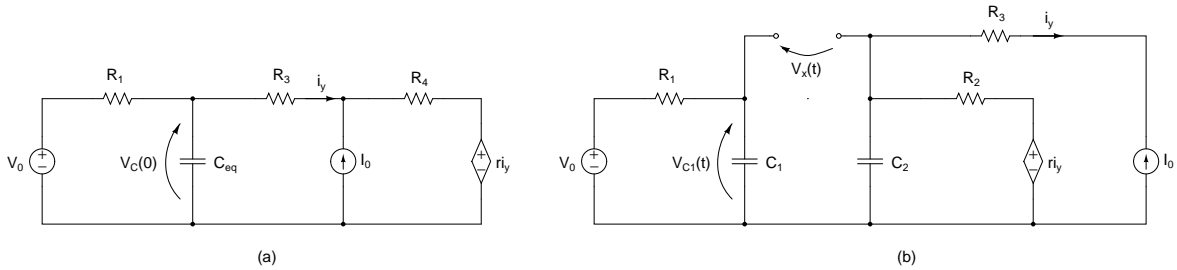
Conviene calcolare l'equivalente di Thevenin a monte del resistore R_3 . Scollegando il resto del circuito, si ha che la corrente i_1 si può scrivere come $i_1 = \frac{V_0 - r_1 i_2}{R_1}$ e analogamente $i_2 = \frac{V_1 - r_1 i_2}{R_2}$, da cui $V_{eq} = V_1 + r_2 i_1 = \left[1 - \frac{r_2 r_1}{R_1(R_2 + R_1)}\right] V_1 + \frac{r_2}{r_1} V_0 = 6V$. La resistenza equivalente è nulla poiché spegnendo i generatori indipendenti R_1 , R_2 e il generatore dipendente $r_1 i_2$ formano un sottocircuito inerte, da cui si ottiene $i_1 = i_2 = 0A$, ossia $R_{eq} = 0\Omega$.

Essendo tale equivalente di Thevenin un unico generatore indipendente di tensione, la resistenza R_3 può essere rimossa ai fini del calcolo della corrente i_x . Si ottiene banalmente $i_x = \frac{V_2 - V_{eq}}{R_x} = 2mA$, che ovviamente implica $P_{Rx} = R_x i_x^2 = 12mW$.

(Nota: il generatore I_0 e il due porte non sono stati considerati nella soluzione. Per capirne i motivi, è sufficiente applicare il principio di rilocalizzazione delle sorgenti impresse sia a V_0 sia a V_1 , così da poter eliminare I_0 , mentre per \underline{R} è sufficiente notare che essa non vincola in alcun modo le tensioni alle porte, al massimo le correnti, per cui non può concorrere alla determinazione della corrente i_x ; analogamente, si può applicare il principio di rilocalizzazione a V_{eq} e V_2 , eliminando il due porte).

1-b)

Per $t < t_0 = 0sec$ essendo l'interruttore T_1 chiuso si ha banalmente $v_x(t) = 0V$. Occorre determinare la condizione iniziale sulle due capacità. La situazione è mostrata in figura (a).



La capacità $C_{eq} = C_1 + C_2$ è equivalente ad un circuito aperto, essendo il circuito a regime; procurandosi ad esempio l'equivalente di Thevenin a valle della capacità C_{eq} si ottiene banalmente $V_{eq} = R_4 I_0$ (essendo $i_y = 0$ in condizioni di circuito aperto) e $R_{eq} = R_3 + R_4 + r$, da cui si ricava immediatamente (tramite il teorema di Millmann) $v_{Ceq}(0) = \frac{V_0/R_1 + V_{eq}/R_{eq}}{1/R_1 + 1/R_{eq}} = 3V$.

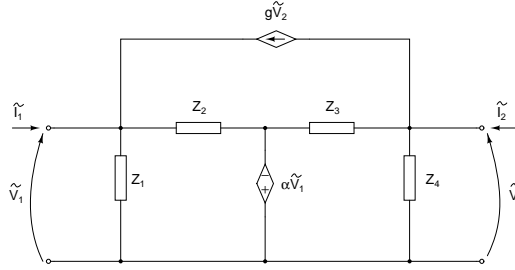
Per $t > 0$ la situazione è quella di figura (b); la tensione incognita può essere scritta come $v_x(t) = v_{C1}(t) - v_{C2}(t)$.

La tensione $v_{C1}(t)$ può essere ricavata banalmente essendo $v_{C1}(t) = v_{C1\infty} - (v_{C1\infty} - v_{C1}(0))e^{-t/\tau_1} = V_0 - (V_0 - v_{Ceq}(0))e^{-t/R_1 C_1} = 5 - 2e^{-t/6}V$.

Per quanto riguarda il transitorio di C_2 , ci si può procurare l'equivalente di Thevenin ai capi del condensatore, considerando che $i_y = -I_0$, ottenendo $V_{eq} = r i_y - R_2 i_y = -(r - R_2)I_0 = 1V$ e $R_{eq} = R_2$, da cui $v_{C2}(t) = v_{C2\infty} - (v_{C2\infty} - v_{C2}(0))e^{-t/\tau_2} = V_{eq} - (V_{eq} - v_{Ceq}(0))e^{-t/R_2 C_2} = 1 + 2e^{-t/5}V$.

Quindi, infine, si ottiene $v_x(t) = v_{C1}(t) - v_{C2}(t) = 4 - 2(e^{-t/6} + e^{-t/5})V$ per $t > 0$.

1-c)



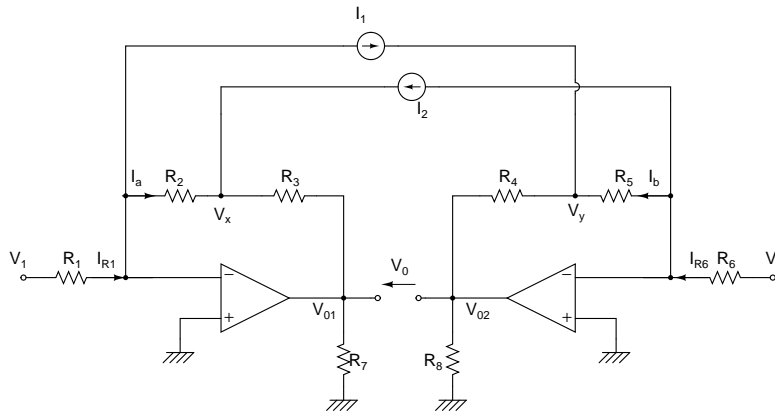
Passando al dominio dei fasori si ha: $v_0(t) = 2 \sin(t - \pi/4) = 2 \cos(t - 3\pi/4) \text{V}$, da cui $\tilde{V}_0 = 2e^{-j\frac{3}{4}\pi} \text{V}$, $\omega = 1 \text{ rad/sec}$, $Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = (1 + j)\Omega$, $Z_2 = R_2 + 1/j\omega C_2 = (1 - j)\Omega$, $Z_4 = R_4 + j\omega L_4 = (1 + j)\Omega$, $Z_3 = R_3 + 1/j\omega C_3 = (1 - j)\Omega$. Il circuito del due porte nel dominio dei fasori e' mostrato in figura.

Si puo' scrivere $\tilde{I}_1 = \frac{\tilde{V}_1}{Z_1} + \frac{\tilde{V}_1 + \alpha \tilde{V}_1}{Z_2} - g\tilde{V}_2 = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1+\alpha}{Z_2}\right) \tilde{V}_1 - g\tilde{V}_2$ e $\tilde{I}_2 = \frac{\tilde{V}_2}{Z_4} + \frac{\tilde{V}_2 + \alpha \tilde{V}_1}{Z_3} + g\tilde{V}_2 = \frac{\alpha}{Z_3} \tilde{V}_1 + \left(\frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_3} + g\right) \tilde{V}_2$. Ricordando che le equazioni del due porte possono essere scritte come $\tilde{I}_1 = Y_{11}\tilde{V}_1 + Y_{12}\tilde{V}_2$ e

$$\tilde{I}_2 = Y_{21}\tilde{V}_1 + Y_{22}\tilde{V}_2 \text{ si ricava quindi : } \bar{Y} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1+\alpha}{Z_2}\right) & -g \\ \frac{\alpha}{Z_3} & \left(\frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_3} + g\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+j & -3 \\ 1+j & 4 \end{bmatrix} \Omega^{-1}.$$

Collegando il generatore di tensione alla porta 1, e lasciando aperta la porta 2, si ottiene $\tilde{I}_2 = 0$ da cui $\tilde{V}_2 = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}}\tilde{V}_1$ e quindi $\tilde{I}_1 = Y_{11}\tilde{V}_1 - Y_{12}\frac{Y_{21}}{Y_{22}}\tilde{V}_1 = Y_{eq}\tilde{V}_0$; infine $P = \frac{1}{2}\text{Re}\{\tilde{V}_0\tilde{I}_1^*\} = \frac{1}{2}\text{Re}\{\tilde{V}_0 Y_{eq}^* \tilde{V}_0^*\} = \frac{1}{2}|\tilde{V}_0|^2 \text{Re}\{Y_{eq}^*\} = 5.5 \text{W}$.

2-a)



Essendo gli operazionali ideali, vale $V_- = V_+ = 0 \text{V}$, $I_- = I_+ = 0 \text{A}$; ne segue che $I_{R1} = \frac{V_1}{R_1}$ e $I_a = \left(\frac{V_1}{R_1} - I_1\right)$ da cui $V_x = -I_a R_2 = -\frac{R_2}{R_1} V_1 + R_2 I_1$. L'uscita del primo operazionale sara' dunque $V_{01} = V_x - (I_a + I_2) R_3 = -\frac{R_2 + R_3}{R_1} V_1 + (R_2 + R_3) I_1 - R_3 I_2$.

Analogamente per l'altro operazionale si puo' scrivere $V_y = -R_5 I_b = -R_5 \left(\frac{V_2}{R_6} - I_2\right)$ da cui si ricava $V_{02} = V_y - R_4 (I_b + I_1) = -\frac{R_5 + R_4}{R_6} V_2 + (R_4 + R_5) I_2 - R_4 I_1$.

Infine $V_0 = V_{01} - V_{02} = -\frac{R_2 + R_3}{R_1} V_1 + \frac{R_4 + R_5}{R_6} V_2 + (R_2 + R_3 + R_4) I_1 - (R_3 + R_4 + R_5) I_2$ da cui sostituendo i valori numerici si ottiene $V_0 = (V_2 - V_1 + 3) \text{V}$.