

## Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 15 settembre 2003

**1-a)**

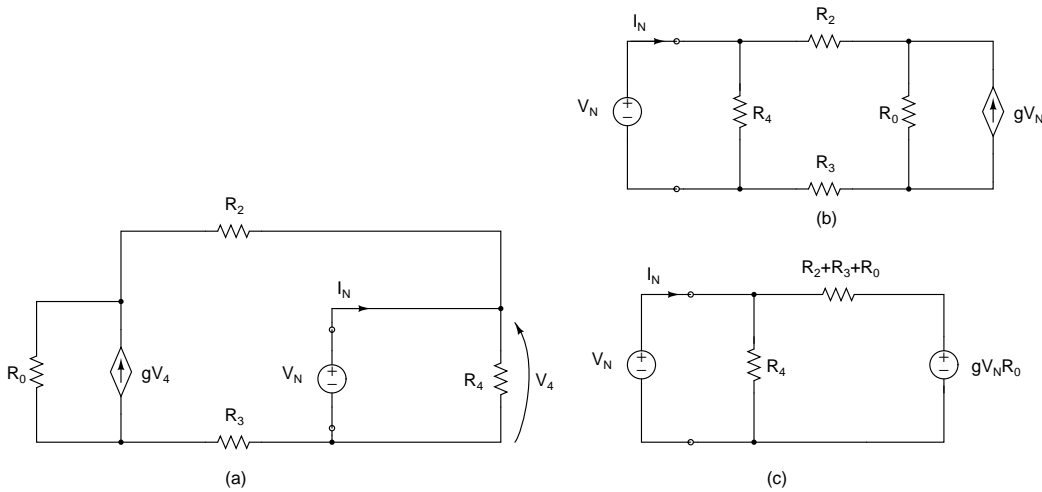
Risulta evidente che  $i_0 = \frac{V_x}{R_0}$  ed inoltre vale  $V_x = V_0 - r i_0 = V_0 - r \frac{V_x}{R_0}$  da cui segue  $V_x = \frac{R_0}{R_0 + r} V_0 = 5V$ . La conoscenza della tensione  $V_x$  consente di calcolare immediatamente la tensione  $V_3$  applicando il teorema di Millmann:  $V_3 = \frac{V_x/R_1 + V_0/R_2}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3} = 5V$ .

La potenza dissipata dalla resistenza  $R_1$  vale  $P_{R1} = V_{R1}^2/R_1 = (V_x - V_3)^2/R_1 = \frac{(5-5)^2}{1000} = 0W$ . Analogamente  $P_{R3} = \frac{V_3^2}{R_3} = 12.5mW$ . La potenza erogata dal generatore dipendente di corrente vale  $P_{GDC} = V_{GDC} I_{GDC} = (gV_x)V_x = gV_x^2 = 5mW$  (con  $V_{GDC}$  e  $I_{GDC}$  scelte secondo la convenzione del generatore). Analogamente  $P_{GDT} = V_{GDT} I_{GDT} = (r i_0)(gV_x - i_0 - \frac{V_x - V_3}{R_1}) = r \frac{V_x}{R_0} (gV_x - \frac{V_x}{R_0} - \frac{V_x}{R_1} + \frac{V_3}{R_1}) = 0W$ .

**1-b)**

Per  $t < 0$ sec il condensatore e' scarico per cui  $v_C(0) = 0V$ . Per  $0 < t < t_1$  il condensatore si trova in serie ad un generatore di corrente; si ha una carica a corrente costante per cui  $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = I_0$  da cui  $v_C(t) = \frac{I_0}{C} t = 5t$ . Poiche' per ipotesi  $v_C(t_1) = 5V$  si ottiene  $t_1 = \frac{v_C(t_1)C}{I_0} = 1sec$ .

Per  $t > t_1$  il parallelo  $I_0, R_1$  non influisce sull'andamento del resto del circuito per cui puo' essere rimosso (circuito incernierato, ossia grafo semplicemente connesso). Conviene calcolare l'equivalente di Thevenin ai capi del condensatore. Essendo il circuito inerte (privo di generatori indipendenti) risulta ovviamente  $V_{eq} = v_C(\infty) = 0V$ .

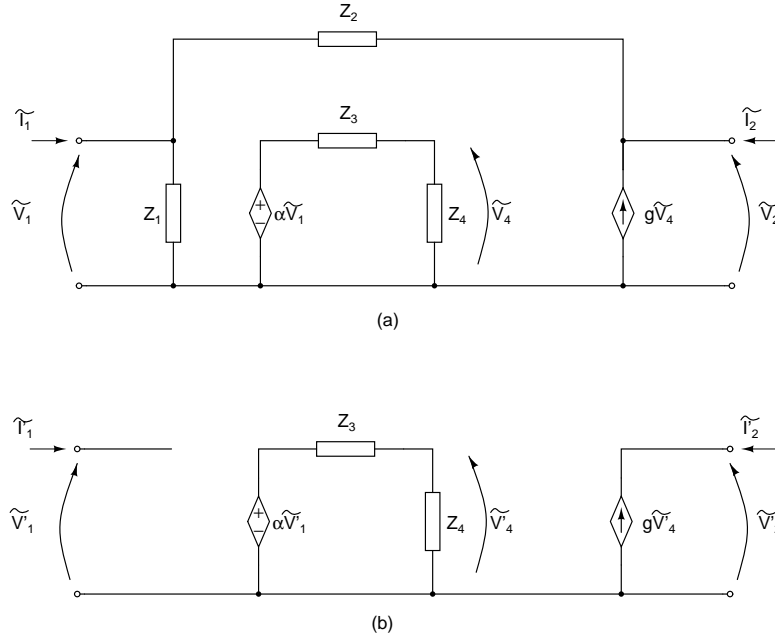


Per il calcolo della resistenza equivalente il circuito risulta quello di figura (a). Poiche' l'unico generatore dipendente e' controllato dalla tensione ai morsetti, conviene imporre una tensione nota  $V_N$  tramite un generatore indipendente di tensione e calcolare la corrente  $I_N$ .

Il circuito puo' essere ridisegnato come in figura (b), e, poiche' il generatore dipendente e' equivalente ad uno indipendente, si puo' passare all'equivalente generatore reale di tensione, e quindi alla configurazione di figura (c) (si noti che, poiche' l'incognita e' la corrente  $I_N$  la resistenza  $R_4$  non puo' essere rimossa anche se in parallelo con un generatore di tensione). Ne segue che  $I_N = \frac{V_N}{R_4} + \frac{V_N - gR_0 V_N}{R_2 + R_0} = \frac{R_3 + R_2 + R_0 + R_4 - gR_0 R_4}{R_4(R_2 + R_0 + R_3)}$  da cui  $R_{eq} = \frac{R_4(R_2 + R_0 + R_3)}{R_3 + R_2 + R_0 + R_4 - gR_0 R_4} = 2k\Omega$ .

Quindi  $\tau = R_{eq}C = 1sec$  e  $v_C(t) = v_C(\infty) - (v_C(\infty) - v_C(t_1))e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} = 5e^{-(t-1)}V$ , e  $v_C(t_2) = 5e^{-(2-1)} = 1.84V$ .

1-c)



Si ha  $\omega = 1 \text{ rad/sec}$  e passando al dominio dei fasori si ottiene:  $Z_1 = j\omega L_1 // R_1 = \frac{1+j}{2} \Omega$ ,  $Z_2 = 1/j\omega C = -j\Omega$ ,  $Z_3 = j\omega L_3 + R_3 = \frac{1+j}{2} \Omega$ ,  $Z_4 = (1/j\omega C_4) // R_4 = \frac{1-j}{2} \Omega$ ,  $\widetilde{I}_0 = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{3}} A$ ,  $\widetilde{V}_0 = \sqrt{2}V$ .

La situazione e' mostrata in figura (a). Poiche' e' richiesta la matrice delle ammettenze, le impedenze  $Z_1$  e  $Z_2$  possono essere inizialmente rimosse essendo collegate rispettivamente alla porta 1 e tra la porta 1 e la porta 2 per calcolare la matrice  $Y'$  relativa alla figura (b). In questo caso banalmente  $\widetilde{I}_1' = 0A$  e  $\widetilde{I}_2' = -g\widetilde{V}_4' = -g[\alpha\widetilde{V}_1' \frac{Z_4}{Z_4+Z_3}]$

da cui  $\widetilde{Y}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -g\alpha \frac{Z_4}{Z_4+Z_3} & 0 \end{bmatrix}$ . Applicando le proprieta' delle matrici dei due porte si ottiene quindi  $\widetilde{Y} = \widetilde{Y}' + \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \\ -\frac{1}{Z_2} & \frac{1}{Z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_1} & -\frac{1}{Z_2} \\ -[\frac{1}{Z_2} + g\alpha \frac{Z_4}{Z_4+Z_3}] & \frac{1}{Z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -1 & j \end{bmatrix} \Omega^{-1}$ .

Dalla prima relazione del due porte si ottiene  $\widetilde{I}_1 = Y_{11}\widetilde{V}_1 + Y_{12}\widetilde{V}_2$  e quindi  $\widetilde{V}_1 = \widetilde{I}_1 + j\widetilde{V}_2$ ; dalla seconda relazione del due porte si ottiene invece  $\widetilde{I}_2 = -[\widetilde{I}_1 + j\widetilde{V}_2] + j\widetilde{V}_2 = -\widetilde{I}_1 = -\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{j\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{-j\frac{2\pi}{3}} A$  e quindi  $i_2(t) = \sqrt{2} \cos(t - \frac{2}{3}\pi) A$ .

2-a)

Essendo gli operazionali ideali, vale  $V_- = V_+$  e  $I_- = I_+ = 0A$ . Indicando con  $I_{R1}$  la corrente che scorre in  $R_1$  si ha  $I_{R1} = \frac{V_i - V_-}{R_1} = V_i/R_1$  essendo  $V_- = V^+ = R_8 i^+ = 0V$  e analogamente  $I_{R2} = V^-/R_2 = 0A$ . Vale inoltre  $I_{R1} = -\frac{V_{01}}{R_3} - \frac{V_{02}}{R_x}$ .

Per il secondo operazionale, vale  $I_{R5} = 0A$ ,  $V^- = V^+ = i^+ R_7 = 0V$  e  $I_{R4} = V_{01}/R_4 = -\frac{V_{02}}{R_6}$  da cui si ricava  $V_{01} = -\frac{R_4}{R_6} V_{02}$  che sostituito nella relazione calcolata in precedenza per il primo operazionale fornisce  $\frac{V_i}{R_1} = V_{02} \frac{R_4}{R_3 R_6} - \frac{V_{02}}{R_x}$  da cui  $V_{02} = \frac{1}{R_1} \left[ \frac{R_3 R_6 R_x}{R_4 R_x - R_3 R_6} \right] V_i$  e  $V_{01} = -\frac{R_4}{R_1} \left[ \frac{R_3 R_x}{R_4 R_x - R_3 R_6} \right] V_i$  ossia  $V_{01} = -V_i$  e  $V_{02} = \frac{V_i}{2}$ .