

Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 18 luglio 2003

1-a)

Applicando la legge di Kirchoff delle tensioni alla porta 1 si ricava $V_1 = R_1 i_1 + R_2(i_1 - gV_1)$ da cui si ottiene $V_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 = \frac{R_1+R_2}{1+gR_2}i_1$.

Analogamente, alla porta 2 si puo' scrivere $V_2 = (gV_1 + i_2)R_3 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 = \left(gR_3 \frac{R_1+R_2}{1+gR_2}\right)i_1 + R_3i_2$.

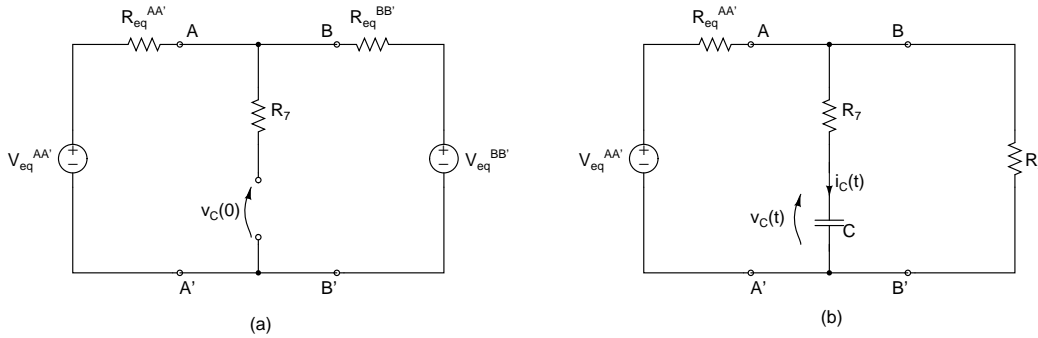
Quindi, la matrice delle resistenze del due porte vale:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \frac{R_1+R_2}{1+gR_2} & 0 \\ gR_3 \frac{R_1+R_2}{1+gR_2} & R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ \frac{10}{3} & 4 \end{bmatrix} \text{ k}\Omega = \begin{bmatrix} 1.667 & 0 \\ 3.333 & 4 \end{bmatrix} \text{ k}\Omega.$$

Collegando il bipolo aggregato alla porta 2, e il generatore di corrente alla porta 1 si ha $i_1 = I_A$, e $V_2 = V_b$; alla porta 2 quindi si puo' scrivere $i_2 = \frac{V_B - R_{21}I_A}{R_{22}} = 1.833\text{mA}$, e quindi $i_B = i_2 + \frac{V_B}{R_B} = 3.833\text{mA}$.

1-b)

Conviene calcolare l'equivalente di Thevenin a monte del condensatore.



$t < 0$

Equivalentente di Thevenin a monte della sezione AA': la tensione equivalente risulta essere $V_{eq}^{AA'} = V_1 \frac{R_2}{R_1+R_2} = 9\text{V}$ essendo le resistenze R_3 e R_4 non percorse da corrente. La resistenza equivalente risulta invece $R_{eq}^{AA'} = R_3 + R_4 + R_1 // R_2 = 6\text{k}\Omega$.

Equivalentente di Thevenin a valle della sezione BB': la tensione equivalente risulta essere $V_{eq}^{BB'} = I_0 R_8 = 21\text{V}$ essendo le resistenze R_5 e R_6 non percorse da corrente. La resistenza equivalente risulta invece $R_{eq}^{BB'} = R_5 + R_6 + R_8 = 6\text{k}\Omega$.

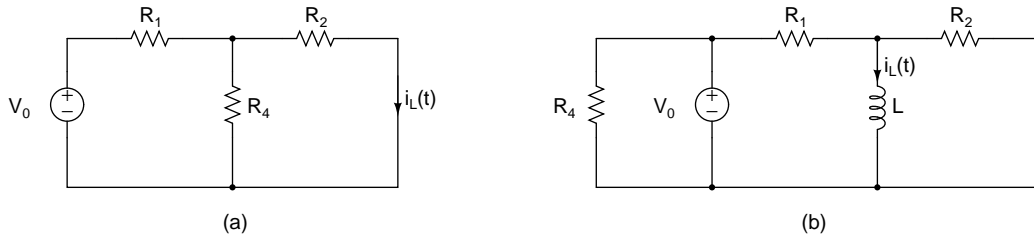
La situazione e' mostrata in figura (a). La tensione iniziale sul condensatore vale, dal teorema di Millmann $v_C(0) = \frac{V_{eq}^{AA'} / R_{eq}^{AA'} + V_{eq}^{BB'} / R_{eq}^{BB'}}{1/R_{eq}^{AA'} + 1/R_{eq}^{BB'}} = 15\text{V}$. La corrente $i_C(t)$ e' ovviamente nulla essendo il condensatore a regime, quindi assimilabile ad un circuito aperto.

$t > 0$

La situazione e' mostrata in figura (b) dove $R_s = R_5 + R_6 = 3\text{k}\Omega$. Calcolando l'equivalente di Thevenin ai capi del condensatore, si ottiene $V_{eq} = V_1 \frac{R_s}{R_s + R_{eq}^{AA'}} = 3\text{V}$ e $R_{eq} = R_s // R_{eq}^{AA'} + R_7 = 2.5\text{k}\Omega$. Quindi si ottiene

$v_C(t) = v_{C\infty} - (v_{C\infty} - v_C(0))e^{-t/\tau}$, dove $v_{C\infty} = V_{eq}$, $\tau = R_{eq}C = 0.25\text{msec}$ e ovviamente $v_C(0) = 15\text{V}$. Quindi $v_C(t) = 3 + 12e^{-4000t}\text{V}$ da cui si ricava $i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} = -4.8e^{-4000t}\text{mA}$.

1-c)



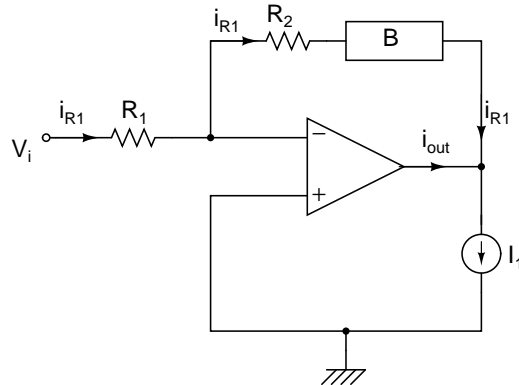
$t < 0$

La situazione e' mostrata in figura (a). La corrente $i_L(t)$ vale $i_L(t) = \frac{V_{R2}}{R_2} = \left(V_0 \frac{R_2 // R_4}{R_3 + R_2 // R_4} \right) \frac{1}{R_2} = 0.75 \text{mA}$.

$t > 0$

La situazione e' mostrata in figura (b), dove R_4 risulta ininfluente ai fini del calcolo di $i_L(t)$ essendo in parallelo ad un generatore di tensione. La corrente dell'induttore segue l'equazione $i_L(t) = i_{L\infty} - (i_{L\infty} - i_L(0))e^{-t/\tau}$, dove $i_{L\infty} = \frac{V_0}{R_1} = 2 \text{mA}$, $R_{eq} = R_1 // R_2 = 1 \text{k}\Omega$, $\tau = L/R_{eq} = 1 \mu\text{sec}$ e ovviamente $i_L(0) = 0.75 \text{mA}$. Quindi $i_L(t) = 2 - 1.25e^{-10^6 t} \text{mA}$.

2-a)



Essendo l'operazionale ideale, vale $V_- = V_+ = 0 \text{V}$, $I_- = I_+ = 0 \text{A}$. Indicando con I_{R1} la corrente che scorre in R_1 si ha $I_{R1} = \frac{V_1 - V_-}{R_1} = V_1/R_1$ e, poiche' $I_- = 0 \text{A}$ tale corrente sara' la stessa che scorre sulla resistenza R_2 e, una volta attraversato il bipolo aggregato B (composto dal parallelo I_0, R_3), sara' la corrente che incide sul nodo di uscita dell'operazionale, per cui $i_{out} = I_1 - I_{R1}$ da cui $7.5 \cdot 10^{-3} = I_1 - \frac{5}{1000}$ e quindi $I_1 = 12.5 \text{mA}$.

2-b)

Essendo il circuito a regime, l'induttore e' assimilabile ad un corto circuito mentre i condensatori sono assimilabili a circuiti aperti; si ha quindi che la corrente che scorre (a regime) nel circuito vale $i = \frac{V_1}{R_2 + R_3} = 1 \text{A}$. Ne segue che $i_{L1} = i = 1 \text{A}$ e $v_{C2} = iR_2 = 5 \text{V}$ e quindi $W_{L1} = \frac{1}{2} Li_{L1}^2 = 1.5 \text{J}$, $W_{C2} = \frac{1}{2} C v_{C2}^2 = 75 \mu\text{J}$.