

Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 30 giugno 2003

1-a)

Applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni alla porta 2 si ricava $v_2 = ri_1 - \alpha v_2 - R_2(\alpha i_1 - i_2) + R_3 i_2$ da cui si ottiene $v_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2 = \frac{r - \alpha R_2}{1 + \alpha} i_1 + \frac{R_3 + R_2}{1 + \alpha} i_2$.

Analogamente, alla porta 1 si può scrivere $v_1 = R_1 i_1 - \alpha v_2 + r i_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2 = \left(R_1 - \alpha \frac{r - \alpha R_2}{1 + \alpha} + r \right) i_1 - \alpha \frac{R_3 + R_2}{1 + \alpha} i_2$.

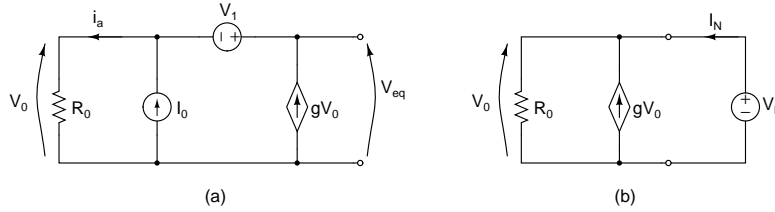
Quindi, la matrice delle resistenze del due porte vale:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_1 - \alpha \frac{r - \alpha R_2}{1 + \alpha} + r & -\alpha \frac{R_3 + R_2}{1 + \alpha} \\ \frac{r - \alpha R_2}{1 + \alpha} & \frac{R_3 + R_2}{1 + \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.5 & -2.25 \\ -0.5 & 0.75 \end{bmatrix} \text{ k}\Omega.$$

Collegando il bipolo aggregato alla porta 1, si ha $i_1 = I_0$, mentre, essendo la porta 2 in corto si ottiene $v_2 = 0$; alla porta 2 quindi si può scrivere $i_2 = -\frac{R_{21}}{R_{22}} i_1 = -\frac{R_{21}}{R_{22}} I_0 = 2\text{mA}$, e quindi $i_{cc} = -i_2 = -2\text{mA}$.

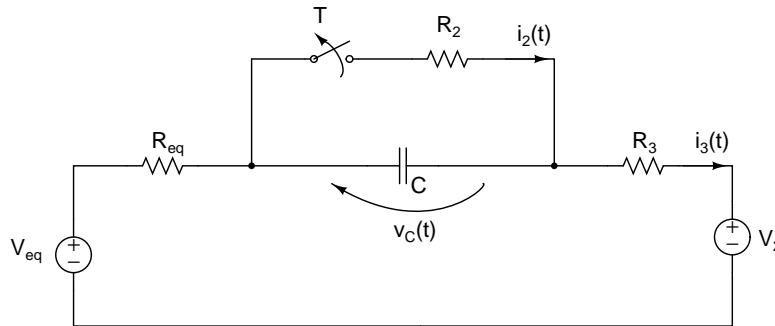
1-b)

Conviene calcolare l'equivalente di Thevenin a monte del condensatore.



Per il calcolo della tensione equivalente si considera il circuito di figura (a), in cui si ha $i_a = gV_0 + I_0$ e quindi $V_0 = R_0 i_a = R_0(gV_0 + I_0)$, da cui $V_0 = \frac{R_0 I_0}{1 - gR_0}$ e quindi $V_{eq} = V_1 + V_0 = 5\text{V}$.

Per il calcolo della resistenza equivalente il circuito è mostrato in figura (b). Si ha ovviamente $I_N = \frac{V_N}{R_0} - gV_N$ da cui $R_{eq} = \frac{R_0}{1 - gR_0} = -2\text{k}\Omega$. La condizione iniziale del condensatore può essere ricavata come $v_C(0^-) = (V_{eq} - V_2) \frac{R_2}{R_{eq} + R_2 + R_3} = 2\text{V}$.



Il circuito diventa quindi quello di figura. Per $t < 0$ il circuito è a regime, e il condensatore è assimilabile ad un circuito aperto. La corrente $i_3(t)$ sarà data quindi da $i_3(t) = \frac{V_{eq} - V_2}{R_{eq} + R_2 + R_3} = 2\text{mA}$. Per $t > 0$ l'interruttore si apre; la capacità inizia un transitorio per cui $v_C(t) = v_{C\infty} - (v_{C\infty} - v_C(0))e^{-t/\tau}$, dove $v_{C\infty} = V_{eq} - V_2$, $\tau = R_{eq}C = (R_{eq} + R_3)C = 2\text{sec}$ e ovviamente $v_C(0) = 2\text{V}$. Quindi $v_C(t) = 4 - 2e^{-t/2}\text{V}$.

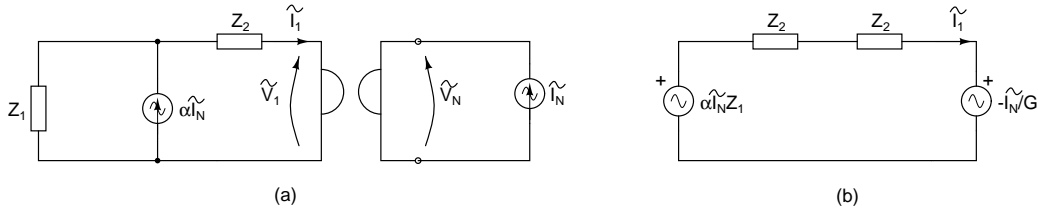
Poiché ovviamente $i_3(t) = i_C(t)$ si ha $i_3(t) = C \frac{dv_C}{dt} = 2e^{-t/2}\text{mA}$.

1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha: $i_0(t) = \sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - t - \frac{\pi}{2}) = \cos(t)A$ da cui $\omega = 1\text{rad/sec}$, $\tilde{I}_0 = 1A$; inoltre $\tilde{V}_0 = 3V$, $Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = (1 + j)\Omega$, $Z_2 = R_2 + 1/j\omega C_2 = (1 - j)\Omega$, $Z_3 = 1/j\omega C_3 = -2j\Omega$, $Z_4 = 4\Omega$.

Conviene calcolare l'equivalente di Thevenin a monte della porta 2 del giratore.

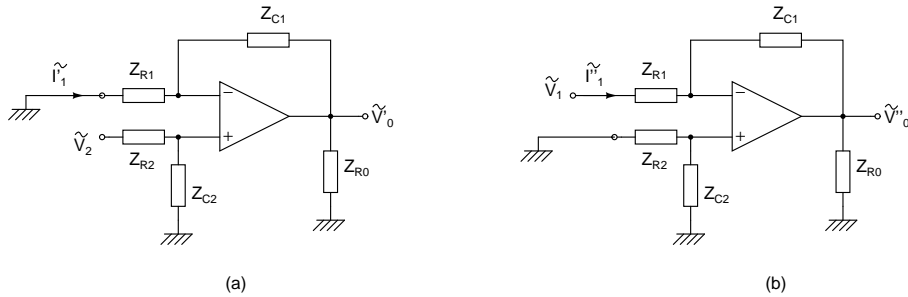
Per il calcolo della tensione equivalente, dalle equazioni del giratore si ha $\tilde{I}_2 = -G\tilde{V}_1 = 0$ (essendo la porta 2 aperta) da cui $\tilde{V}_1 = 0$, ossia la porta 1 del giratore e' equivalente ad un corto circuito. Essendo inoltre $\tilde{I}_3 = \tilde{I}_2 = 0$ il generatore dipendente e' spento e quindi la corrente $\tilde{I}_1 = \frac{\tilde{V}_0}{Z_1 + Z_2}$ da cui, sfruttando nuovamente le equazioni del giratore $\tilde{V}_{eq} = \tilde{V}_2 = \frac{1}{G}\tilde{I}_1 = \frac{1}{G}\frac{\tilde{V}_0}{Z_1 + Z_2} = 3V$.



Per il calcolo della impedenza equivalente, si consideri la figura (a); il generatore dipendente puo' essere sostituito con uno indipendente in quanto la corrente imposta e' costante e nota. Dalle equazioni del giratore si ottiene $\tilde{V}_N = \frac{1}{G}\tilde{I}_1$ e $\tilde{V}_1 = -\frac{1}{G}\tilde{I}_N$. Il circuito puo' essere ridisegnato come in figura (b) da cui si ottiene immediatamente $\tilde{I}_1 = \frac{\alpha\tilde{I}_N Z_1 + \tilde{I}_N/G}{Z_1 + Z_2}$ e quindi $\tilde{V}_N = \frac{1}{G}\frac{\alpha\tilde{I}_N Z_1 + \tilde{I}_N/G}{Z_1 + Z_2}\tilde{I}_N$ da cui $Z_{eq} = \frac{1}{G}\frac{\alpha\tilde{I}_N Z_1 + \tilde{I}_N/G}{Z_1 + Z_2} = 2(2 + j)\Omega$.

Con tale equivalente di Thevenin, la tensione \tilde{V}_4 si puo' ricavare sfruttando il teorema di Millmann: $\tilde{V}_4 = \frac{\tilde{V}_4/(Z_{eq} + Z_3) + \tilde{I}_0}{1/Z_{eq} + 1/Z_4} = 3.5V$. Quindi $v_4(t) = 3.5\cos(t)V$.

2-a)



Essendo l'operazionale ideale, vale $V_- = V_+ = 0V$, $I_- = I_+ = 0A$. Passando al dominio dei fasori con $\omega = 1\text{rad/sec}$ si ha $Z_{R0} = Z_{R1} = Z_{R2} = 1\Omega$, $Z_{C1} = Z_{C2} = -j\Omega$.

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ottengono i circuiti di figura.

a) $\tilde{V}'_+ = \tilde{V}_2 \frac{Z_{C2}}{Z_{R2} + Z_{C2}}$ quindi $\tilde{I}'_1 = -\frac{\tilde{V}'_+}{Z_{R1}}$ e $\tilde{V}'_0 = \tilde{V}'_+ - Z_{C1}\tilde{I}'_1 = \tilde{V}_2 \frac{Z_{C2}}{Z_{R2} + Z_{C2}} \left(1 + \frac{Z_{C1}}{Z_{R1}}\right) = -j\tilde{V}_2$.

b) Le impedenze Z_{R2} e Z_{C2} non sono percorse da corrente (essendo la corrente che entra nell'operazionale nulla), per cui $\tilde{V}''_+ = 0V$; ne segue che $\tilde{I}''_1 = \frac{\tilde{V}_1}{Z_{R1}}$ e $\tilde{V}''_0 = -Z_{C1}\tilde{I}''_1 = -Z_{C1}\frac{\tilde{V}_1}{Z_{R1}} = j\tilde{V}_1$.

Infine si ottiene quindi $\tilde{V}_0 = \tilde{V}'_0 + \tilde{V}''_0 = j(\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2)$.