

## Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 28 gennaio 2003

### 1-a)

Per calcolare l'equivalente di Thevenin occorre calcolare la tensione  $V_{th} = V_{AB}^{(C.A.)}$  a circuito aperto e la resistenza equivalente  $R_{th}$  ottenuta considerando spenti tutti i generatori indipendenti.

1) Calcolo di  $V_{th} = V_{AB}^{(C.A.)}$

si nota facilmente che  $V_{AB}^{(C.A.)} = (1 + \alpha)V_2$  e  $I_1 = \frac{V_0 - V_2}{R_1}$ . Dalla legge di Kirchhoff delle correnti applicata al nodo cui e' collegato il morsetto B, si ottiene  $I_1 - \frac{V_2}{R_2} + \beta I_1 - \frac{(1+\alpha)V_2}{R_3} = 0$  da cui, sostituendo, si ottiene  $\frac{(1+\beta)}{R_1}V_0 = \left(\frac{1+\beta}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1+\alpha}{R_3}\right)V_2$  e quindi  $V_2 = \frac{9}{7}V$ ,  $V_{th} = \frac{27}{7}V$ .

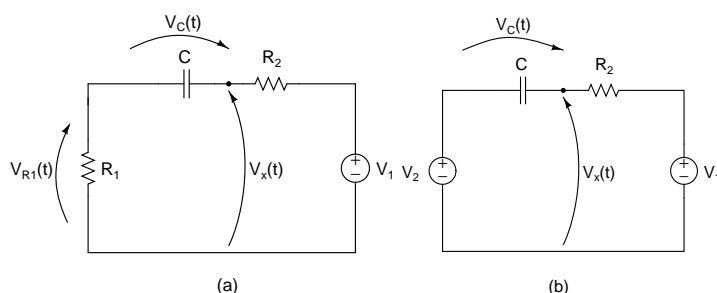
2) Calcolo di  $R_{th}$

Si sostituisca il generatore indipendente  $V_0$  con un cortocircuito e si imponga al morsetto A una corrente  $I_0$  costante nota e con verso entrante; dalla legge delle correnti di Kirchhoff applicata al nodo B si ottiene  $I_0 - \frac{V_2}{R_1} - \frac{(1+\alpha)V_2}{R_3}V_2 = 0$ , essendo la tensione ai capi della resistenza  $R_3$  pari a  $(1 + \alpha)V_2$  e la tensione ai capi del parallelo resistivo  $R_1, R_2$  pari a  $V_2$ .

La resistenza equivalente si ottiene come  $R_{th} = \frac{V_{AB}}{I_0} = \frac{(1+\alpha)V_2}{I_0}$  ossia, sostituendo la relazione ricavata in precedenza  $R_{th} = \frac{(1+\alpha)R_1R_2R_3}{\beta R_2R_3 + (1+\alpha)R_1R_2 + (R_1+R_2)R_3} = \frac{9}{7}k\Omega$ .

### 1-b)

Per  $t < t_0 = 0$ sec essendo l'interruttore aperto, la tensione del nodo  $x$  vale  $V_x(t) = V_1$ , visto che non puo' circolare corrente sulla resistenza  $R_2$ .

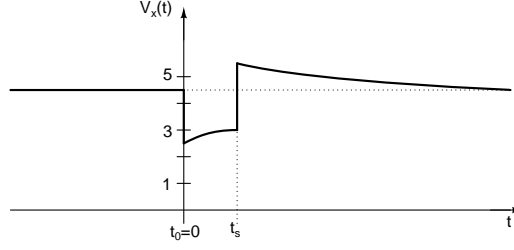


Quando l'interruttore  $T_1$  si chiude, la tensione del nodo  $x$  passa istantaneamente al valore  $V_x(0) = V_{R1}(0)$  (vedi figura a) essendo il condensatore scarico inizialmente; si ha quindi  $V_x(0) = V_{R1}(0) = V_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 2.25V$ . Vale inoltre la relazione  $V_x(t) = V_{R1}(t) + V_C(t) \forall t_0 < t < t_s$ , dove  $V_{R1}(t) = I_{R1}(t)R_1 = \frac{V_1 - V_C(t)}{R_1 + R_2}R_1$  e  $V_C(t) = V_C(+\infty) - (V_C(+\infty) - V_C(0^+))e^{-t/\tau}$ . Si ottiene facilmente che  $\tau = (R_1 + R_2)C = 4msec$ ,  $V(+\infty) = V_1$  e naturalmente  $V(0^+) = 0V$  come da ipotesi per cui  $V_x(t) = \frac{V_1 + V_C(t)}{2} = 2.25(2 - e^{-250t}) \forall t_0 < t < t_s$ .

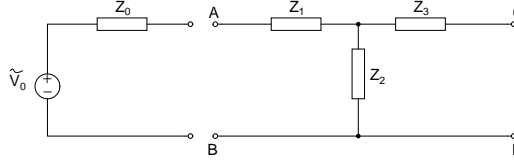
All'istante  $t_s$  si avra' pertanto  $V_x(t_s) = 2.25(2 - e^{-t_s/\tau}) = 3V$  da cui si ottiene  $t_s = -\tau \ln \frac{2}{3} \cong 1.62msec$ . Inoltre, dalla relazione ricavata in precedenza, si ottiene  $V_x(t_s) = \frac{V_1 + V_C(t_s)}{2}$  e quindi  $V_C(t_s) = 2V_x(t_s) - V_1 = 6 - 4.5 = 1.5V$ .

Per  $t > t_s$ , la tensione ai capi del condensatore evolve secondo la relazione  $V_C(t) = V_C''(+\infty) - (V_C''(+\infty) - V_C(t_s))e^{-(t-t_s)/\tau_2}$  dove  $V_C''(+\infty) = V_1 - V_2 = 0.5V$ ,  $\tau_2 = R_2C = 2msec$  e ovviamente  $V_C(t_s^+) = 1.5V$  per cui  $V_C(t) = 0.5 + e^{-500(t-t_s)}$ . Ne segue immediatamente che  $V_x(t) = V_2 + V_C(t) = 4.5 + e^{-500(t-t_s)}$ , ossia la tensione  $V_x(t)$  evolve da una tensione iniziale  $V_x(t_s) = 5.5V$  fino ad una tensione di regime pari a  $V_x(+\infty) = V_1 = 4.5V$ .

In figura e' mostrato il grafico qualitativo dell'andamento della tensione  $V_x(t)$ .



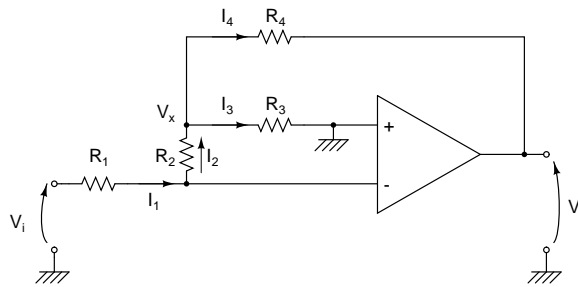
**1-c)**



Passando al dominio dei fasori si ha:  $\tilde{V}_0 = 9e^{-j\frac{3}{4}\pi}$ ,  $\omega = 1\text{ rad/sec}$ ,  $Z_0 = j\omega L_0 = j\ \Omega$ ,  $Z_{L1} = Z_{L2} = Z_{L3} = j$ ,  $Z_{C1} = Z_{C4} = 1/j\omega C_1 = -j\ \Omega$ ,  $Z_{C2} = Z_{C3} = 1/j\omega C_2 = -2j\ \Omega$ ,  $Z_{R1} = Z_{R2} = 1\ \Omega$ . Indicando con  $Z_1$  l'impedenza parallelo  $Z_1 = Z_{R1} // Z_{L1} // Z_{C1} = 1\ \Omega$ , con  $Z_2 = Z_{R2} // Z_{C2} // Z_{C3} // (Z_{L2} + Z_{L3}) = \frac{1+j}{2}\ \Omega$  e con  $Z_3 = Z_{C4} = -j\ \Omega$  si ottiene il circuito di figura.

Essendo un circuito stella, la determinazione della matrice di impedenze e' semplice:  $\bar{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_3 + Z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3+j & 1+j \\ 1+j & 1-j \end{bmatrix} \Omega$ . Collegando il generatore reale, e indicando con  $\tilde{V}_1, \tilde{I}_1$  la tensione ai morsetti AB e la corrente entrante nel morsetto A, e con  $\tilde{V}_2, \tilde{I}_2$  la tensione ai morsetti CD e la corrente entrante nel morsetto C, si puo' scrivere  $\begin{bmatrix} \tilde{V}_1 \\ \tilde{V}_2 \end{bmatrix} = \bar{Z} \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix}$ , ed essendo  $\tilde{V}_1 = \tilde{V}_0 - Z_0 \tilde{I}_1$  si ha  $Z_{11} \tilde{I}_1 + Z_{12} \tilde{I}_2 = \tilde{V}_0 - Z_0 \tilde{I}_1$  che, insieme alla relazione alla porta di uscita  $Z_{12} \tilde{I}_1 + Z_{22} \tilde{I}_2 = \tilde{V}_2$  fornisce  $\tilde{V}_2 = \frac{Z_{21}}{Z_{11} + Z_0} \tilde{V}_0 - \left( \frac{Z_{21} Z_{12}}{Z_{11} + Z_0} - Z_{22} \right) \tilde{I}_2 = \frac{\tilde{V}_0}{3} + \frac{1}{3}(1-2j)\tilde{I}_2$ . Quindi,  $Z_{th} = \frac{1-2j}{3}\ \Omega$  e  $\tilde{V}_{th} = \tilde{V}_0/3 = 3e^{-j\frac{3}{4}\pi}\text{V}$ .

**2-a)**



Essendo l'operazionale ideale, vale  $V_- = V_+ = 0\text{V}$ ; ne segue che  $I_1 = I_2 = \frac{V_i}{R_1}$  e quindi  $V_x = V_- - R_2 I_2 = -\frac{R_2}{R_1} V_i = -V_i$ . Ne consegue che la corrente  $I_3 = \frac{V_x}{R_3} = \frac{-V_i}{R_3}$  e pertanto  $I_4 = I_2 - I_3 = \frac{V_i}{R_1} - \frac{-V_i}{R_3} = 2\frac{V_i}{R}$  avendo indicato con  $R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4$ . La tensione di uscita dell'operazionale sara' pertanto  $V_o = V_x - R_4 I_4 = -V_i - R(2V_i/R) = -3V_i$  da cui segue immediatamente  $\frac{V_o}{V_i} = -3$ .