

POLITECNICO di MILANO  
FACOLTÀ di INGEGNERIA  
CAMPUS LEONARDO

CORSO di LAUREA  
in INGEGNERIA ELETTRONICA

Fondamenti  
di  
CIRCUITI  
ELETTRICI

MARZO 2000

appunti del corso di  
ELETTROTECNICA

Docente: Amedeo Premoli

Anno Accademico 1999/2000 , Secondo Semestre

chimica docimastica, 25/30, : "L'esame [...] fu bellissimo, fu un vero trionfo, e non posso riferire il meschino esito che alla malignità de' professori, che avrebbero dovuto essere o più coscientosi o meno inattenti".

... da una lettera del 1868

continua nell'ultima pagina

### *alle allieve e agli allievi del corso*

Avevo iniziato a raccogliere questi appunti, mentre prestavo servizio presso l'Università di Trieste, con l'intento di stendere una lista detagliata degli argomenti facenti parte del corso che mi fosse d'aiuto per la sua organizzazione. Di anno in anno questo indice è stato esteso e approfondito fino a raggiungere le dimensioni, ma non la completezza, di un testo. Come prassi abituale, anche questa versione (a.a. 1999-2000) è cambiata rispetto a quella passata (a.a. 1998-99) : il contenuto, ampliato in modo limitato, è ristrutturato e suddiviso in ventitre capitoli. Per la prima volta il testo è corredato da numerose figure, realizzate mediante macro-istruzioni operanti in ambiente PSTRIKCS. L'inserimento delle figure ha anche consentito di aggiungere numerosi esempi significativi per illustrare i concetti teorici. Le figure mancanti, per cui sono stati lasciati degli appositi spazi, possono essere tracciate, prendendo spunto da quelle tracciate sulla lavagna.

Gli appunti sono messi a disposizione delle allieve e degli allievi con il consiglio di non considerarli come un testo esauriente. Essi hanno lo scopo di evitare la necessità di prendere appunti frenetici con carta e penna e di dedicare una maggiore attenzione ai ragionamenti concettuali. Inoltre confido che l'incompletezza, i punti oscuri e gli inevitabili errori suggeriscano alle allieve e agli allievi più attenti, come negli anni passati, osservazioni e critiche, che saranno ben accette.

Saranno disponibili anche appunti contenenti lo svolgimento dettagliato degli esercizi assegnati nelle prove scritte degli esami degli ultimi tre anni, insieme ad altri esercizi di interesse : essi dovrebbero consentire un'auto-verifica diretta della preparazione teorica e pratica.

Auguro a tutti buon studio e di superare l'esame di profitto con successo, benché le informazioni ricevute dai colleghi che li hanno preceduti possano indurre ad un certo pessimismo.

Dipartimento di Elettronica e Informazione,  
Campus Leonardo, Politecnico di Milano.

Milano, Marzo 2000

Amedeo Premoli

## PREMESSA

**Aggiornamento del corso** : Lo sviluppo tumultuoso in questi decenni delle *discipline elettriche* (o meglio dire *elettroniche* oppure *elettromagnetiche* ?) ha costretto alla revisione di un corso di base come questo, che ha ormai acquisito i connotati tipici di un corso propedeutico e svolge un ruolo analogo a quello del corso di Meccanica Razionale nell'ambito delle discipline meccaniche. Nell'esaminare i contenuti occorre tener presente che esso è stato progettato per i Corsi di Laurea del Settore dell'Ingegneria dell'Informazione e che quindi :

1. **Campi elettromagnetici** : Lo studio dei campi elettromagnetici è divenuto così importante che è oggetto di un apposito corso. Questo rende ridondante lo studio dei campi, quasi stazionari, facente parte un tempo del corso di Elettrotecnica. D'altra parte i principi dei campi stazionari (Elettrostatica, Magnetostatica, Fenomeni Elettromeccanici, ...) vengono sviluppati nel corso di Fisica II.
2. **Macchine elettriche** : I principi di macchine elettriche fanno parte di questo corso limitatamente alle macchine statiche (trasformatori reali).
3. **Circuiti a parametri concentrati** : L'analisi dei circuiti a parametri concentrati, le cui applicazioni sono molto importanti per molte discipline elettriche / elettroniche, richiede un maggior approfondimento che per il passato, anticipando nozioni la cui conoscenza risulta necessaria già in corsi del terzo anno.

**Propedeuticità al corso** : I seguenti cinque corsi del primo biennio di studi della Facoltà di Ingegneria sono di fatto, benché non formalmente, propedeutici a questo corso. Qui di seguito elenchiamo gli argomenti di interesse contenuti in questi corsi :

1. **Analisi I** : Introduzione alla Teoria degli Insiemi. Numeri reali. Funzioni reali: esponenziale, logaritmo, seno, coseno, tangente e loro inverse, polinomi. Numeri complessi. Il concetto di limite, derivata e integrale. Funzioni continue e derivabili. Differenziali. Massimi e minimi di una funzione. Sviluppi in serie di una funzione.
2. **Geometria** : Vettori, spazi e sottospazi vettoriali. Applicazioni lineari, matrici e sistemi lineari. Determinante, matrice inversa di una matrice quadrata. Range di una matrice. Autorotatori, autovettori, diagonalizzazione e triangolarizzazione di una matrice quadrata. Matrici di JORDAN. Prodotto scalare tra vettori. Forme quadratiche. Geometria analitica nel piano. Rette curve piane, coniche. Geometria analitica nello spazio : rette, curve, superfici. Quadriche.
3. **Analisi II** : Funzioni di più variabili, limiti, continuità, derivate parziali e direzionali, sviluppi in serie, formula di TAYLOR, Serie di FOURIER. Campi vettoriali, campi irrotazionali e conservativi, potenziale, forme differenziali lineari. Teorema di STOKES e Teorema della divergenza. Funzioni di variabile complessa : Logaritmo, esponenziale, formula di EULER. Funzioni implicite di una o più variabili : Teorema di DINI. Equazioni differenziali e sistemi di equazioni differenziali. Riduzione di un'equazione differenziale di ordine qualsiasi a un sistema di primi ordine. Forme differenziali localmente e globalmente esatte.
4. **Fisica I** : Misure di grandezza. Analisi dimensionale. Lavoro, energia ed energia potenziale. Campi conservativi. Principio di conservazione dell'energia. Sistemi dinamici. Equilibrio, stabilità e oscillazioni libere e forzate. Risonanza.

5. **Fisica II** : Carica elettrica, campo elettrico, legge di Coulomb, potenziale elettrostatico. Condensatore : capacità ed energia immagazzinata. Legge di GAUSS nei dielettrici, il vettore dell'induzione elettrica. Densità di energia del campo elettrico. Tensione elettrica. Densità di corrente, conducibilità e resistività. Corrente elettrica, resistore, resistenza. Legge di OHM. Leggi di KIRCHHOFF. Legge di JOULE. Campo magnetico, solenoide. Legge di FARADAY-NEUMANN-LENZ. Induttore, induttanza, flusso concatenato. Energia immagazzinata in un induttore. Autoinduzione e mutua induzione. Ciclo di isteresi, magneti permanenti. Legge di FARADAY e di LENZ. Corrente di spostamento, legge di AMPERE-MAXWELL ed Equazioni di MAXWELL.

**Campi e circuiti** : È sempre aperto un dibattito e un confronto riguardante l'insegnamento dei campi elettrici e magnetici e i circuiti elettrici nelle Facoltà di Ingegneria. I campi stazionari e gli apparati assumono un modello dei fenomeni fisici derivato dalle Equazioni di MAXWELL, in cui le variabili descrittive sono vettori e/o scalari, detti *campi vettoriali* o *scalari*, definiti in ogni punto dello spazio fisico (*modello distribuito*). Al contrario, i circuiti assumono un modello dei fenomeni fisici derivato dalle Leggi di KIRCHHOFF in cui le variabili descrittive (tensioni e correnti elettriche) sono definite solamente in alcuni punti, detti *terminali*, dello spazio fisico (*modello concentrato*). Viene spontanea la domanda : quali relazioni esistono tra i due modelli ? La risposta dipende da diversi punti di vista :

**Punto di vista storico** : Le due Leggi di KIRCHHOFF sono state formulate prima delle Equazioni di MAXWELL. Queste sono state ottenute dalle Leggi di KIRCHHOFF e da altre Leggi riguardanti i campi elettrici e magnetici quasi-stazionari già note in precedenza e riassumono e riunificano tutto quello che si sapeva sui fenomeni elettrici e magnetici, che apparivano all'inizio del diciannovesimo secolo come fenomeni fisici indipendenti. Inoltre le equazioni di MAXWELL contengono la descrizione di fenomeni elettro-magnetici a quel tempo scarsamente conosciuti, per esempio la propagazione delle onde elettromagnetiche.

**Punto di vista didattico** : Le Equazioni di MAXWELL sono più generali e più difficili da interpretare delle Leggi di KIRCHHOFF. Esse richiedono la conoscenza delle equazioni differenziali alle derivate parziali, mentre il modello circuitale richiede la conoscenza delle equazioni algebriche e/o differenziali ordinarie. Quando le variabili descrittive del fenomeno non variano troppo rapidamente rispetto al tempo, le Equazioni di MAXWELL possono essere approssimate con un modello circuitale (concentrato), meno ostico da comprendere e da trattare matematicamente.

**Punto di vista professionale** : La soluzione transitoria di un modello distribuito anche se lineare è molto più difficile della soluzione transitoria di un modello circuitale. La soluzione di un modello distribuito nonlineare è in molti casi impossibile o comunque molto difficile. Questo spinge l'ingegnere ad usare un modello circuitale anche quando esso è piuttosto carente. In particolare, nei problemi di progetto, il modello circuitale, qualora possa essere usato, permette di giungere a soluzioni molto più semplici, mentre le Equazioni di MAXWELL raramente consentono di giungere a procedure semplici per la progettazione.

Spesso anche la sola analisi con modelli distribuiti richiede elevate risorse di calcolo. Queste considerazioni fanno pensare che al giorno d'oggi i modelli circuitali siano indispensabili per la formazione professionale di qualsiasi ingegnere elettrico, elettronico, informatico, biomedico, delle telecomunicazioni, ... , mentre il modello campistico (microonde, antenne, propagazione, ...) è indispensabile ad una larga minoranza che si dedica alle linee di trasmissione, alla propagazione, alle guide d'onda, antenne, macchine elettriche, ...

**Circuiti o reti ?** : Come nella lingua inglese, anche nella lingua italiana si usano due termini per indicare lo stesso oggetto : "circuiti (circuits)", con l'eventuale aggiunta dell'aggettivo "elettrico (electric)" o "elettronico (electronic)", ovvero "rete (network)", con l'eventuale aggiunta dell'aggettivo "elettrica (electric)". La parola circuito in realtà dovrebbe essere il sinonimo di maglia, mentre la parola rete denota un insieme di maglie quindi sarebbe il termine da preferire. Infatti i piloti di formula uno corrono sui circuiti e non sulle reti e i pescatori pescano i pesci con le reti e non con i circuiti. Comunque, la rapida crescita della "cultura elettronica", sta favorendo il nome, etimologicamente meno corretto, di "circuiti", mentre la ancor più rapida "cultura informatica" si sta impadronendo della parola "rete". ■

**Circuiti elettrici e/o elettronici ?** : Seguendo quanto detto e come d'altra parte seguito in altre Università, l'analisi dei circuiti elettrici è svolta ponendo sullo stesso piano di interesse i circuiti per l'energia (cioè per la generazione, trasmissione e utilizzazione dell'energia), tipici dell'Ingegneria Elettrica (una volta era detta Elettrotecnica ma è stato perso per strada un *otecn*), e i circuiti per l'informazione (cioè per l'acquisizione, trasmissione ed elaborazione dei segnali), tipici dell'Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni.

Da una parte l'aggettivo "elettrico" dovrebbe comprendere sia i circuiti per l'energia sia quelli per l'informazione. A livello nazionale è stata fatta l'infelice scelta di ribattezzare l'Ingegneria Elettronica con "Ingegneria Elettrica", suggerendo implicitamente che le discipline elettriche non comprendano le discipline elettroniche. Questo ha causato altre risposte errate come la tipica "invensione italiana" di un corso dal titolo "Teoria dei circuiti elettronici": dal momento che la distinzione tra circuiti elettrici e circuiti elettronici ha significato solamente da un punto di vista fisico e professionale ma non certo da un punto di vista teorico e propedeutico.

L'impostazione del corso parte proprio dal rifiuto di fare una scelta tra circuiti per l'energia o circuiti per l'informazione dal momento che il contenuto del corso è di tipo metodologico e propedeutico rispetto ai successivi corsi applicativi, dove la distinzione tra circuiti per l'energia e circuiti per l'informazione è inevitabile.

Comunque il corso non pretende di fornire elementi per il progetto di questi circuiti ma solo di dare gli strumenti metodologici per la loro analisi, che risulteranno utili per affrontare la progettazione nei corsi successivi. Comunque ho risolto il dilemma introducendo i CIRCUITI ELETTROFISICI. ■

**Circuiti fisici discreti e integrati** : I circuiti fisici più diffusi possono essere divisi in due classi : quelli discreti in cui ciascun componente è costruito per proprio conto e connesso agli altri in una seconda fase e quelli integrati costituiti da un numero anche molto elevato di componenti, che vengono costruiti in un unico blocco. Questa seconda tecnica costruttiva è molto diffusa per i circuiti per il trattamento dell'informazione ed è alla base del basso costo e diffusione, per esempio, dei *personal computer*, *telefoni*, .... ■

**Circuiti fisici analogici e digitali** : I circuiti digitali (a semiconduttore) (tempo-discreto) impiegati nei calcolatori elettronici, non sono affrontati direttamente in questo corso. Ma è da tener presente che una loro analisi accurata, che esamini, per esempio, la loro dinamica, non può fare a meno di un'analisi di tipo analogico (tempo-continuo). I circuiti digitali sono generalmente costruiti in forma integrata, mentre quelli analogici sono costruiti con tecnologie sia discrete che integrate. ■

**Iniziazione del corso** : Il corso è intitolato "Elettrotecnica". Al momento attuale questo nome molto tradizionale non rende bene il contenuto del corso ma non ne esiste per ora uno più adatto. Infatti, prima degli anni 1960, il nome *elettrotecnica* comprendeva di fatto tutte le discipline elettriche, per lo meno quelle più applicative tipiche dell'Ingegneria, mentre al giorno d'oggi esso tende a significare solamente le discipline elettriche in cui sono studiati dispositivi e sistemi elettrici per la generazione, trasmissione e utilizzazione dell'energia.

In pratica il corso è suddiviso in due parti di ampiezza disuguali :

1. La prima parte, preponderante, ha un carattere propedeutico : il titolo più adatto sarebbe "Fondamenti di CIRCUITI ELETTROFISICI", che è giustappunto il titolo di questi appunti.

2. La seconda, molto più ridotta, ha un carattere più applicativo : riguarda la "Generazione, Trasmissione e Utilizzazione dell'Energia Elettrica", che è il titolo di appunti monografici complementari a questi.

**Corso ideale** : Il progetto di un "corso ideale" sui **Fondamenti dei CIRCUITI ELETTROFISICI** dovrebbe mettere sullo stesso piano :

<i>Grafi (monopartiti)</i>	<i>Grafi bipartiti (bigrafi)</i>
<i>Leggi di KIRCHHOFF</i>	<i>Teorema di TELERGEN</i>
<i>bipoli, multipoli</i>	<i>terminali, porte</i>
<i>porta propria</i>	<i>porta impropria</i>
<i>doppi bipoli tripolari</i>	<i>doppi bipoli propri</i>
<i>componenti lineari, nonlineari</i>	<i>componenti adinamici, dinamici</i>
<i>componenti passivi, attivi</i>	<i>componenti dissipativi, conservativi</i>
<i>sorgenti impulsive (indipendenti)</i>	<i>sorgenti pilotate (dipendenti)</i>
<i>corto circuito, circuito aperto</i>	<i>nullatore, noratore</i>
<i>trasformatore ideale, giratore</i>	<i>nullore (amplificatore operazionale)</i>
<i>serie e parallelo di bipoli</i>	<i>cascata di doppi bipoli</i>
<i>metodo dei nodi</i>	<i>metodo totale (sparse tableau)</i>
<i>sinusoidi</i>	<i>cisoidi (esponenziali complessi)</i>
<i>fascori di sinusoidi</i>	<i>fascori di cisoidi</i>
<i>pulsazione reale <math>\omega</math></i>	<i>pulsazione complessa <math>\sigma + j\omega</math></i>
<i>regime sinusoidale</i>	<i>pseudoregime cisoidale</i>
<i>forme d'onda sinusoidali</i>	<i>forme d'onda rettangolari</i>
<i>impulsi nonideali</i>	<i>impulsi ideali</i>
<i>circuiti dinamici nondegeneri</i>	<i>circuiti dinamici degeneri</i>
<i>trasformata di LAPLACE</i>	<i>pulsazioni e modi naturali</i>
<i>funzione di rete</i>	<i>equazione di stato</i>
<i>poli e zeri</i>	<i>variabili di stato</i>

Inoltre la preparazione più approfondita in alcuni settori della matematica attualmente impartita nei corsi propedeutici, ha consentito un maggior rigore nella presentazione di alcuni argomenti. Per esempio i concetti di "spazio lineare" e "spazio affine" e quello di sottospazio lineare consente di introdurre in modo più esauriente e sintetico le Leggi di KIRCHHOFF e le rappresentazioni dei doppi bipoli, anche se alcuni tradizionalisti non sono d'accordo. ■

**Corso reale** : Nella realtà il "corso reale" non riesce a soddisfare tutte le precedenti esigenze per svariate motivi :

- I circuiti nonlineari sono troppo impegnativi per essere trattati a fondo all'interno di questo corso. Un'analisi approfondita richiederebbe un apposito corso. Al momento attuale, qualche nozione elementare sui circuiti nonlineari viene fornita nei corsi successivi dove si rende necessaria.
- D'altra parte, chi si impegna a studiare i circuiti lineari dopo poco tempo si illude di conoscere quasi tutto di questa classe di circuiti, mentre chi si impegna a studiare i circuiti nonlineari dopo molto tempo si rassegna ad ammettere di capire quasi niente di questa classe di circuiti.

• L'analisi del transitorio non è approfondita in tutti i suoi risvolti teorici, dal momento che questo aspetto è parte integrante di un corso successivo. In particolare, l'analisi dei circuiti mediante la Trasformazione di LAPLACE non viene affrontata. D'altra parte l'autore ritiene che l'uso della Trasformazione di LAPLACE debba essere successivo e non contemporaneo allo studio dei transistori nel dominio del tempo e che, a maggior ragione, questo studio non può essere sviluppato limitandoci alla Trasformazione di Laplace.

Lo scopo del corso è di fornire la capacità di analizzare i modelli a parametri concentrati dei circuiti fisici, senza fare un specifico riferimento alla costituzione fisica dei dispositivi stessi. Quindi il contenuto è presentato in modo assiomatico.

**Esercitazioni cartaeppenna** : Le esercitazioni del corso sono esclusivamente di tipo numerico. Esse hanno lo scopo di far prendere confidenza agli studenti con i concetti teorici spiegati nelle lezioni applicandoli a casi specifici e di metterli in grado di comprendere i circuiti che si troveranno di fronte nei corsi successivi. Per integrare le esercitazioni numeriche e completare la preparazione all'esame di profitto, questi appunti sono accompagnati, in separata sede, da altri appunti contenenti gli esercizi assegnati nelle prove scritte degli appelli degli anni accademici 1995-96, 1996-97 e 1997-98 : essi sono sviluppati nei minimi dettagli per consentire alle allieve e agli allievi un'auto-verifica diretta della loro preparazione.

**Esercitazioni col calcolatore** : Esse sarebbero senz'altro utili per affrontare la soluzione di circuiti di maggiori dimensioni, ma per il momento la mancanza di uno spazio attrezzato e di personale adeguato al numero di studenti non consente di organizzarle.

**Esercitazioni in laboratorio** : Per lo stesso motivo anche esercitazioni sperimentali (in laboratorio) non sono possibili. D'altra parte in molti dipartimenti universitari i laboratori didattici sperimentali sono inesistenti e i tecnici di laboratorio sono una razza in via di estinzione. Rimane l'auspicio che alcune esercitazioni sperimentali trovino uno spazio nei corsi meno affollati (se lo sono ...) del triennio.

**Ringraziamenti** : L'autore non può concludere questa premessa senza ricordare le persone, ormai scomparse, che più hanno contribuito alla sua formazione universitaria : il Prof. Mario Soldi, Docente di Teoria delle Reti Elettriche presso il Politecnico di Torino e Relatore della sua Tesi di Laurea. Di lui voglio ricordare la sua onestà intellettuale e il rifiuto, piuttosto raro negli ambienti accademici, di essere un "uomo di potere". L'autore si rammarica di non averlo potuto ringraziare nel momento in cui egli ha intrapreso la carriera universitaria.

Il Prof. Rinaldo Sartori, Docente di Elettrotecnica presso il medesimo Politecnico e già Direttore dell'Istituto Elettrotecnico Galileo Ferraris in Torino, presso cui l'autore ha lavorato per vent'anni.

Tra i colleghi e amici egli vuole ricordare la lunga e fruttuosa collaborazione scientifica con il Prof. Mario Biey del Politecnico di Torino e il Prof. Martin Hasler del Politecnico Federale di Losanna : molto più che una traccia di questa collaborazione è rimasta in questi appunti.

Tra i colleghi del Politecnico di Milano egli vuole ricordare le stimolanti chiacchierate con gli Ingeg. Giancarlo Storti Gajani, Paolo Mattezzoni, Claudio Santacesarea e Daniele Demattreis e i Prof. Angelo Brambilla e Dario d'Amore. Tra i colleghi del Politecnico di Torino quelle con i Prof. PierPaolo Civalleri, Marco Gilli e Ivan Maio.

In particolare la mia più sincera gratitudine va a Ivan Maio per la sua permanente consulenza, fornita con infinita pazienza, nella realizzazione delle figure del testo e per la costruzione delle macro-istruzioni operanti in ambiente PSTRIKES. Un semplice colpo di telefono mi ha spesso consentito di superare problemi informatici per me insormontabili.

Egli vuol ricordare la lunga e costruttiva collaborazione scientifica e didattica col Prof. Stefano Pastore dell'Università di Trieste. Tra i colleghi della Università di Roma egli vuol ricordare il Prof. Giuseppe Martinelli e Mario Salerno, che per primi hanno intrapreso il rinnovo degli aspetti circuitali nell'ambito dei corsi di Elettrotecnica. Infine egli vuole ricordare alcune stimolanti chiacchierate con il prof. Antonino Sommariva dell'Università di Brescia, comprendenti la segnalazione di alcuni errori.

Dipartimento di Elettronica e Informazione,  
Campus Leonardo, Politecnico di Milano.

Milano, marzo 2000

Amedeo Premoli

## CONTENUTI

**Cap. 1 :** L'introduzione ai circuiti richiede un "richiamo filosofico" alla relazione tra la realtà fisica e la sua descrizione tramite un modello matematico nella consapevolezza che qualsiasi modello non potrà mai descrivere esattamente la realtà fisica. Un buon modello è il risultato di un compromesso tra la realtà fisica e la semplicità del modello, richiesta dagli ingegneri che intendono avere a disposizione modelli sufficientemente semplici per eseguire "buoni progetti". In genere, la topologia dei circuiti viene introdotta ricorrendo ai cosiddetti *grafi*, costituiti da *nod*i e *rami*. Questa scelta è superata dall'attuale tecnologia che mette a disposizione molti componenti fisici con più di due terminali: transistori, amplificatori operazionali, ....

Lo spazio fisico, al cui interno ha luogo il fenomeno fisico che noi intendiamo studiare, costituisce il *circuito fisico*. Esso è scomposto in un certo numero di *regioni equipotenziali* (rappresentate da *nod*i) e *nonequipotenziali* (rappresentate da *noccioli*), tra loro connesse tramite *varchi* (rappresentati da *archi*). I *grafi bipartiti* (detti brevemente *bigrati*) costituiti dai suddetti nodi, noccioli e archi descrivono in modo naturale l'insieme delle connessioni tra queste regioni. All'interno dei bigraf vengono definiti i *componenti semplici* (*bipoli*, *tripoli*, *quadripoli*, ...) costituiti da un nocciolo e degli archi incidenti: a loro volta i componenti semplici possono essere aggregati per formare i *componenti composti*.

**Cap. 2 :** Sui bigraf vengono introdotte in modo assiomatico le grandezze elettriche: il *potenziale*, la *tensione* e la *corrente* sono, rispettivamente, applicazioni degli insiemi dei nodi, delle coppie di nodi e degli archi sull'insieme delle funzioni reali del tempo. Infine, vengono presentate le proprietà delle tensioni e correnti note come *Leggi di KIRCHHOFF delle tensioni e delle correnti*. La *potenza virtuale* e il *lavoro virtuale* vengono definiti come applicazioni degli insiemi dei noccioli sull'insieme delle funzioni reali del tempo. Essi soddisfanno ai *teoremi della potenza virtuale e del lavoro virtuale* e ai loro rispettivi corollari. Le due leggi di KIRCHHOFF e il teorema della potenza virtuale, consentono di descrivere ogni multipolo mediante le *porte*, cioè come se fosse costituito da un'aggregazione di *bipoli fittizi*. Siccome all'interno del circuito compaiono solo bipoli, introduciamo i *grafi*, formati dai nodi, già presenti nei bigraf, e dai *rami*, che rappresentano i bipoli sia effettivi sia fittizi.

**Cap. 3 :** È dedicato allo studio dei grafi: inizialmente sono introdotti i concetti intuitivi di *percorsa*, *albero* e *colbero*. I grafi vengono suddivisi in *sconnessi*, *connessi* (caratterizzati dalla presenza di *nod*i *cruciali*) e *strettamente connessi*. Vengono introdotte le *maglie* e i *tagli* come particolari sottoinsiemi di nodi e rami. Essi, congiuntamente ai rami, vengono orientati e, conseguentemente, rappresentati dai *vettori topologici*, che consentono di dimostrare l'*ortogonalità* tra ciascuna maglia e ciascun taglio. I *grafi piani* e i loro grafi duali vengono discussi, introducendo il concetto di *anello*. I vettori topologici intervengono anche nella definizione delle *basi di maglie* e delle *basi di tagli*. Essi sono rappresentati dalle rispettive *matrici delle basi*, che consentono la definizione dei *sottospazi inerti delle tensioni e delle correnti* tra loro ortogonali.

**Cap. 4 :** L'introduzione dei grafi consente di formulare le due Leggi di KIRCHHOFF in una forma molto semplice e compatta. Infine, anche il teorema e il corollario della potenza virtuale assumono forme molto semplici, note come *Teorema e Corollario di TELDGEN*. Le basi di questi sottospazi, rispettivamente chiamate *tensioni di taglio* e *correnti cicliche*, conducono ad una formulazione alternativa delle due Leggi di KIRCHHOFF. Tra le tensioni di taglio hanno un ruolo specifico ma molto diffuso le *tensioni di nodo*. I *Teoremi di non-amplificazione*, preceduti dal *Lemma del potenziale di nodo*, consentono di stabilire delle relazioni tra le tensioni e correnti di ramo.

**Cap. 5 :** Le relazioni costitutive sono equazioni matematiche coinvolgenti le tensioni e correnti di un componente e costituiscono il modello esterno dei fenomeni elettro-fisici che hanno sede all'interno del componente fisico. Tre diverse classificazioni, indipendenti l'una dall'altra, sono di interesse: componenti *adattivi* o *dinamici*, *tempo-invarianti* o *tempo-varianti*, *inerti* o *noninerti*. In realtà, siccome le caratteristiche di un componente fisico non sono mai "esatte", esso può essere considerato adattivo o dinamico, tempo-invariante o tempo-variante, lineare o nonlineare a seconda del circuito fisico in cui opera.

Per analizzare il circuito, viene costruito un unico sistema di equazioni facendo un *colleg*e tra le Leggi di KIRCHHOFF e le relazioni costitutive. Analogamente, viene costruito un unico sistema sottodeterminato di equazioni per costruire le relazioni costitutive di un qualsiasi componente composto. Il *Teorema di Sostituzione* risulta utile per semplificare il suddetto sistema.

La *potenza elettrica (effettiva)* e il *lavoro elettrico (effettivo)* sono derivati da quelli virtuali, agguinando le relazioni costitutive che vincolano tra loro le tensioni e le correnti di ramo che compaiono nella potenza virtuale: i *teoremi della potenza virtuale e del lavoro virtuale* e i rispettivi corollari risultano validi anche per la potenza e il lavoro effettivi.

**Cap. 6 :** Le relazioni costitutive di particolari componenti si confondono con le equazioni topologiche: tra i bipoli di questo tipo vi sono il *corto circuito*, il *circuito aperto*, il *nullatore* e il *noratore*, che consentono di semplificare il grafo. Tra i multipoli questa "particolarità" ha come conseguenza che il numero di terminali e/o porte può essere diverso da quello originale. I concetti di porta propria e impropria ci consentono di classificare i *doppi bipoli* in: *impropri*, *tripolari* e *propri*. Infine, sulla base di alcune peculiarità, vengono introdotti i bipoli *bilaterali* e i doppi bipoli *simmetrici*, *unidirezionali* e *zerodirezionali*.

Le aggregazioni più usate di componenti semplici in componenti composti sono esaminate da un punto di vista topologico: Serie, parallelo, stella e triangolo di bipoli; doppio bipolo chiuso su un bipolo, bipolo connesso trasversalmente a un DBT, bipolo connesso in serie al terminale comune di un DBT, cascata, parallelo e serie di doppi bipoli.

**Cap. 7 :** Dalle rappresentazioni esplicite dei bipoli impressivi / nonimpressivi, omogenei / nonomogenei definiamo il c.c., il c.a., le sVi, le sIi, i resistori e i modelli di THÉVENIN e di NORTON. L'analisi della potenza effettiva stabilisce che il resistore è *dissipativo*, il c.c. e il c.a. sono *inerti*, mentre i bipoli nonomogenei sono *attivi*. I bipoli composti dalla serie e parallelo di bipoli sono analizzati insieme alle regole dei partitori di tensione e corrente. Tre metodi per analizzare circuiti costituiti da strutture semplici di bipoli sono descritti: i due *Teoremi di MILLMANN* danno delle regole per circuiti formati, rispettivamente, dal parallelo o serie di bipoli, mentre il *metodo della falsa posizione* consente di analizzare circuiti con struttura a scala. Vengono infine discussi i generatori fisici, i loro rendimenti reali e i rendimenti del loro modello.

**Cap. 8 :** I *k*-porte adattivi, tempo-invarianti e lineari sono distinti in *omogenei* o *nonomogenei* e in *impressivi* o *nonimpressivi*. Le loro rappresentazioni esplicite sono distinte in *cardinali* e *non-cardinali* e il concetto di *controllabilità*, discutendo il significato fisico dei parametri omogenei e impressivi presenti in ciascuna di esse. Il *Primo teorema di equivalenza* dimostra che ciascun *k*-porta lineare nonomogeneo è equivalente al *k*-porta omogeneo associato e a *k* sorgenti impressivo connesse in serie o parallelo alle porte. Le proprietà della forma quadratica che esprime la potenza effettiva in funzione delle grandezze indipendenti, consente di individuare i componenti adattivi, tempo-invarianti e lineari in *dissipativi*, *inerti*, *strettamente attivi* e *attivi*.

La definizione di *componente reciproco* viene introdotta per mezzo delle *potenze virtuali incrociate* insieme col *teorema di reciprocità* che stabilisce che la reciprocità dei componenti composti è assicurata da quella dei componenti aggregati. Sono discusse le condizioni a cui devono soddisfare i parametri di ciascuna rappresentazione cardinale affinché un *k*-porta sia reciproco.

**Cap. 9.** Le rappresentazioni esplicite dei doppi bipoli dinamici, tempo-invarianti e lineari sono suddivise in quattro cardinali e due noncardinali: il significato fisico dei parametri omogenei e impressivi sono evidenziati. Vengono derivate le formule per passare dai parametri di una rappresentazione a quelli di un'altra.

La potenza risulta una forma quadratica rispetto alla grandezza indipendenti: i doppi bipoli vengono distinti in *dissipativi*, *meriti*, *strettamente attivi* e *attivi*. Le condizioni a cui deve soddisfare ciascuna rappresentazione esplicita affinché un doppio bipolo sia reciproco, antireciproco, unidirezionale, zerodirezionale, simmetrico, equilibrato sono discusse.

Vengono introdotti i DBT costituiti dall'aggregazione a  $Y^m$  (stella) e a  $Y^T$  (triangolo) di tre resistori insieme alle formule per trasformare un tripolo a  $Y^m$  in un tripolo a  $Y^T$  equivalente. L'analisi dei doppi bipoli impropri, costituiti da quattro resistori (*porti resistivi*), sottolineando le condizioni per l'equilibrio, chiude il capitolo.

**Cap. 10.** L'unico doppio bipolo impressivo non-banale è il *nullore* (modello super-idealizzato dell'amplificatore operazionale). Vengono discusse le condizioni per inserirlo correttamente in un circuito e la sua scomposizione in una coppia *nullatore-noratore*. Le quattro sorgenti *pilotate*, un circuito ai bipoli, sono in grado di realizzare un modello di qualsiasi  $k$ -porta dinamico, tempo-invariante e lineare. Questi *modelli cardinali* sono derivati da una rappresentazione cardinale. La serie e il parallelo delle due porte della medesima sorgente pilotata vengono esaminate. Le sorgenti pilotate nonideali sono un modello più aderente alla realtà che non quelle ideali. Si assume che la resistenza alla porta d'ingresso e quella interna alla porta d'uscita siano né nulle né infinite. Infine, sono introdotti due doppi bipoli omogenei e nonimpressivi il *trasformatore ideale* e il *giratore*. Essi sono gli unici doppi bipoli, che istante per istante trasferiscono potenza da una porta all'altra lasciando invariata. Mentre il trasformatore ideale è reciproco, il giratore è antireciproco. Infine vengono discusse alcune delle trasformazioni circuitali più significative coinvolgenti questi doppi bipoli.

**Cap. 11.** L'analisi dei circuiti costituiti da componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari richiede la costruzione di un sistema di equazioni algebriche lineari e nonomogenee mediante il *metodo totale*. La matrice del sistema lineare può risultare singolare a causa dall'interazione della struttura con i componenti: il modello può essere accettato o rifiutato. Qualora il modello sia consistente, possiamo enunciare il *principio di sovrapposizione*.

L'analisi dei componenti composti da componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari richiede la costruzione di un sistema sottodeterminato di equazioni algebriche lineari e nonomogenee. Alcune proprietà, in particolare il secondo e terzo teorema di equivalenza per i componenti formati dall'aggregazione di componenti dinamici tempo-invarianti e lineari vengono stabilite. Tra questi i ben noti teoremi di THÉVENIN e NORTON.

**Cap. 12.** Tra i metodi semplificati di analisi il *metodo nodale puro* considera come incognite le tensioni di nodo purché tutti i componenti siano controllabili in tensione. Il metodo viene esteso ai componenti noncontrollabili in tensione, aggiungendo le correnti di questi tra le incognite (*metodo nodale modificato*). I *metodi puri delle maglie* e *degli anelli* richiedono come incognite le correnti cicliche, purché tutti i componenti siano controllabili in corrente. Il metodo viene esteso ai componenti noncontrollabili in corrente, aggiungendo le tensioni di questi tra le incognite (*metodo delle maglie modificato*).

**Cap. 13.** La connessione in cascata di doppi bipoli viene analizzata per mezzo del prodotto delle matrici di trasmissione: vengono discussi i casi più interessanti di connessioni in cascata coinvolgenti sorgenti pilotate ideali, trasformatori ideali, giratori e nullori.

Viene analizzato il bipolo composto costituito dalla prima porta di un generico doppio bipolo con la seconda porta chiusa su un generico bipolo.

Limitatamente alla rappresentazione controllata in tensione, vengono calcolate le relazioni costitutive di un  $k$ -porte ( $k = 2, 3, \dots$ ) costituito dal parallelo di due  $k$ -porte. Inoltre, viene discussa la connessione di un nullore tripolare con un generico DBT.

La connessione trasversale di un bipolo e un DBT controllabile in tensione, viene facilmente analizzata. Nel caso in cui il DBT non sia controllabile in tensione, il primo Teorema di MILLER consente di calcolare rapidamente le relazioni costitutive del DBT composto. Nel caso in cui il DBT sia un nullore il DBT composto è equivalente a una  $sVpI$ .

La connessione di un bipolo generico in serie al terminale comune di un DBT controllabile in corrente viene: nel caso in cui il DBT non sia controllabile in corrente, il secondo Teorema di MILLER consente di calcolare rapidamente le relazioni costitutive del DBT composto, mentre nel caso in cui il DBT sia un nullore il DBT composto è equivalente a una  $sIpV$ .

La metodologia "te aggregata e rimpiata" consiste nell'aggregare i componenti del circuito in un numero inferiore di componenti composti e considerare come incognite le grandezze definite alle porte dei componenti composti.

**Cap. 14.** Introduciamo i più significativi bipoli dinamici, tempo-varianti e lineari: tra essi le sorgenti impressivi la cui grandezza impressa varia col tempo, gli interruttori (ideali e nonideali) e i resistori dipendenti dal tempo. Il fatto che le tensioni e correnti impressi e resistenze siano tempo-varianti apre la strada al concetto di segnale, a cui viene associata una *quantità d'informazione*. Viene fatto un breve cenno ai circuiti dinamici, tempo-varianti e lineari. Gli *impulsi* sono funzioni (forme d'onda, segnali) diffusissimi nei circuiti elettronici più disparati: vengono discussi quelli ideali (*della di DIRAC*) e quelli nonideali.

**Cap. 15.** Le rappresentazioni *pseudostatiche*, *integrali* e *differenziali*, dei condensatori e degli induttori sono introdotte insieme ai modelli equivalenti, che tengono conto delle condizioni iniziali. Viene dimostrato che essi sono *conservativi* nel senso che sono in grado di immagazzinare energia senza dissiparla. Vengono discusse le aggregazioni serie e parallelo di condensatori e induttori e la loro connessione alla porta di un giratore. Viene discussa la scrittura delle equazione differenziale per i circuiti dinamici elementari (di prim'ordine) e la loro soluzione.

**Cap. 16.** Si dimostra intuitivamente che un generico componente dinamico, tempo-invariante e lineare può essere descritto da un componente composto da condensatori, induttori e componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari. La potenza e il lavoro effettivi vengono rivisti per i componenti dinamici tempo-invarianti e lineari. In particolare vengono discussi i componenti dinamici conservativi e il concetto di *energia immagazzinata*. Inoltre vengono definiti i componenti passivi e attivi e le proprietà energetiche dei circuiti e dei componenti composti derivate dai Teoremi della potenza e lavoro effettivi e dai rispettivi corollari. La definizione e il teorema di reciprocità vengono estesi ai componenti dinamici, introducendo i *lavori virtuali incrociati*. Gli induttori accoppiati sono un doppio bipolo fisico, il cui modello è dinamico e conservativo in prima approssimazione. Per esempio il trasformatore può essere modellato in prima approssimazione dagli induttori accoppiati. Inoltre viene introdotto il *coefficiente di accoppiamento* per descrivere l'accoppiamento tra due induttori fisici.

**Cap. 17.** Scriviamo il sistema di equazioni dei circuiti dinamici lineari costituiti da componenti dinamici tempo-invarianti e lineari di qualsiasi tipo, da sorgenti impressi tempo-invarianti e tempo-varianti, da interruttori ideali, da condensatori, da induttori e da induttori accoppiati mediante il *metodo dei componenti complementari*: nel sistema compaiono le grandezze candidate di stato, mentre le grandezze impressi contribuiscono a formare i termini noti. Limitatamente ai circuiti *dinamici nondegenerati*, il sistema viene trasformato direttamente nell'*equazione di stato*, in cui tutte le grandezze candidate assumono il ruolo di *variabili di stato*. Esso viene affiancato da un sistema algebrico, detto *equazione di uscita*, in cui sono presenti le tensioni e correnti di ramo di interesse oltre alle variabili di stato e alle grandezze impressi: a questo fine viene costruito un *circuito dinamico ausiliario*.

Viene discussa la scrittura delle equazioni di stato per i circuiti dinamici degeneri; anche in questo caso per calcolare le grandezze d'uscita occorre introdurre un opportuno circuito dinamico ausiliario.

Successivamente si mostra, tramite un esempio, come l'equazione differenziale (vettoriale) di stato con  $n$  variabili di stato possa essere ridotta a un'unica equazione (scalare) differenziale di ordine  $n$  con un'unica funzione incognita. Partendo dall'analisi dell'equazione di stato, si dimostra in quali circuiti dinamici le candidate di stato verificano la continuità / discontinuità analitica. I problemi che nascono nei circuiti dinamici con interruptori ideali vengono discussi.

**Cap. 18 :** Le cisoide, benché definite da una coppia di quantità complesse, il fasore e la pulsazione complessa, sono funzioni reali di argomento reale che unificano in un'unica classe gli esponenziali, le sinusoidi e le funzioni costanti e funzioni meno note, quali le sinusoidi con sviluppo esponenziale. Esse sono suddivise in sottoclassi isofrequenziali, ciascuna caratterizzata da una specifica pulsazione complessa e costituente uno spazio lineare. Esse intervengono nelle soluzioni analitiche dei sistemi di equazioni differenziali lineari. Vengono introdotti gli *esponenziali di matrice* : essi sono costituiti da un'opportuna combinazione di matrici cisoideali isofrequenziali e vengono calcolati ricorrendo agli autovalori e autovettori. **WWWWW???** DIRE DI PIU

Per la loro importanza, lo studio delle sinusoidi, che sono appunto le cisoide con pulsazione complessa puramente immaginaria  $s = j\omega$ , viene approfondito. La loro periodicità comporta delle proprietà non condivise dalle altre sottoclassi di cisoide. Inoltre lo *sviluppo in serie di FOURIER* consente di approssimare qualsiasi funzione periodica mediante una somma di sinusoidi.

**Cap. 19 :** La soluzione generale dell'equazione di stato dei circuiti dinamici, sia nondegeneri sia degeneri, viene espressa mediante l'esponenziale di matrice e risulta scomposta nella somma della *soluzione libera* e della *soluzione forzata*. Essa costituisce uno spazio affine, le cui dimensioni coincidono col numero di variabili di stato, caratterizzato dalle *pulsazioni naturali* e dai *modi naturali*.

La soluzione generale dell'equazione di stato nonomogenea coincide con la soluzione generale dell'equazione omogenea associata sommata a una soluzione particolare qualsiasi del circuito originario. In pratica, quando le funzioni forzanti sono cisoide conviene scegliere come soluzione particolare la *soluzione similare*. Vengono esaminate le condizioni di esistenza delle soluzioni similari associate alle specifiche sottoclassi di cisoide e i metodi analitici adatti al loro calcolo.

La soluzione viene scomposta nella somma della *soluzione transitoria* e della *soluzione a regime*. Viene introdotto il concetto di *stabilità* per i circuiti dinamici lineari, comune a qualsiasi sistema dinamico lineare. Esso conduce a notevoli semplificazioni e proprietà importanti sia dal punto di vista concettuale sia dal punto di vista ingegneristico. Il problema della continuità analitica delle candidate di stato viene interpretato da un punto di vista fisico.

**Cap. 20 :** Lo pseudoregime cisoideale, importante dal punto di vista concettuale, comprende come caso particolare, il *regime sinusoidale* molto importante anche a livello applicativo. Le condizioni necessarie e sufficienti in cui un circuito opera in pseudoregime cisoideale (ovvero in regime sinusoidale) cioè tutte le tensioni e correnti sono cisoide (sinusoidi) della stessa sottoclassi. L'analisi di questi circuiti consiste nella sostituzione delle grandezze cisoideali coi rispettivi fasori e si riduce alla soluzione di un sistema di equazioni algebriche nel dominio complesso. Vengono discusse le relazioni costitutive dei bipoli composti di tipo generale e i concetti di *impedenza e ammettenza* di un bipolo. Esse risultano, in genere, funzioni della pulsazione complessa  $s$ .

Vengono discusse le relazioni costitutive di doppi bipoli composti di tipo generale e i concetti di matrice impedenza e matrice ammettenza insieme alle matrici delle rimanenti rappresentazioni esplicite. Le regole, proprietà e metodi dei circuiti dinamici sono estesi, senza alcun sforzo, all'analisi dei circuiti dinamici operanti in pseudoregime cisoideale e in regime sinusoidale.

**Cap. 21 :** Le funzioni di rete sono definite, in un generico pseudoregime cisoideale, come rapporto tra il fasore di una grandezza qualsiasi e il fasore di una grandezza impressa e risultano funzioni razionali nella pulsazione complessa  $s$ . Esse si suddividono in *funzioni immittenza* e *funzioni di trasferimento*. Le radici del numeratore e del denominatore sono reali e/o complesse coniugate e sono chiamate rispettivamente *zeri* e *poli* della funzione di rete e hanno un significato fisico molto importante.

La periodicità del regime sinusoidale mette in evidenza le proprietà dell'ampiezza, fase e parti reale e immaginaria e *diagramma polare* della funzione di rete  $F(j\omega)$ . Successivamente vengono discusse le funzioni di rete elementari incontrate più frequentemente.

I valori numerici dei parametri fisici e delle grandezze elettriche di un circuito assumono molto spesso valori molto più piccoli e/o molto più grandi della rispettiva unità di misura. Per rimediare conviene *normalizzare* questi valori numerici.

Le grandezze che caratterizzano una funzione di rete non sono appropriate per tracciare diagrammi o per eseguire calcoli ; in questi casi si preferisce sostituirle con grandezze logaritmiche, che consentono di rendere più leggibili i diagrammi dell'ampiezza e della fase, più amichevoli i valori numerici in gioco e di scomporre in addendi semplici l'ampiezza della funzione.

**Cap. 22 :** La valutazione della potenza e/o lavoro che si sviluppano in un circuito dinamico e lineare in regime sinusoidale tiene conto della periodicità del regime stesso condivisa da tutte le tensioni, correnti e dalle potenze istantanee. Questo suggerisce l'introduzione della *potenza attiva*, che coincide con la media della potenza istantanea.

L'introduzione della *potenza complessa* e *potenza reattiva* è ampiamente giustificata dalle loro proprietà (*Teorema e Corollario di BOUCHEROT*). L'analisi della potenza complessa e reattiva è estesa ai doppi bipoli.

Spesso ci si trova di fronte a circuiti dinamici lineari con soggetti impressivi sinusoidali con pulsazioni  $\omega$  diverse : in mancanza della soluzione transitoria il circuito opera in *regime multi-frequenziale*. Lo studio di questo regime si basa sul principio di sovrapposizione delle soluzioni similari, che vale anche per le potenze attive ma non per le potenze istantanee.

La *potenza attiva disponibile* di una sorgente sinusoidale non-ideale (con impedenza interna) viene definita : un semplice teorema consente di calcolarla.

**Cap. 23 :** Molti componenti dinamici composti, conservativi e nonconservativi, di interesse sono considerati ; Essi aggregano condensatori e/o induttori e componenti dinamici. Innanzitutto vengono considerati alcuni componenti composti dinamici e conservativi tra cui i risonatori serie e parallelo ideali e alcuni doppi bipoli che funzionano da trappole.

Molti componenti fisici di largo uso sono conservativi solamente in prima approssimazione per la presenza di una limitata dissipazione : sono esaminati i modelli quasi-conservativi del condensatore e dell'induttore fisici introducendo il loro fattore di qualità.

Nei risonatori quasi-conservativi l'analisi alla frequenza di risonanza può essere eseguita, se assumiamo che il risonatore non sia ideale, cioè che la sua impedenza sia piccola ma non nulla (risonatore serie) ovvero la sua ammettenza sia piccola ma non nulla (risonatore parallelo).

Vengono presi in considerazione i partitori dinamici costituiti da due bipoli dinamici, che a loro volta caratterizzano la funzione di rete del partitore. I quadripoli a ponte dinamici sono molto interessanti per le loro proprietà. Infine un modello dinamico dell'amplificatore operazionale nonideale e due doppi bipoli chiamati integratore e derivatore.



## INDICE WWW?? INSERIRE numeri pagine ??WWW

1	Realta' fisica e bigrafi	1
1.1	Circuiti nella realta'	2
1.2	Modello di un fenomeno fisico	4
1.3	Modello di un circuito fisico	6
1.4	Scomposizione dello spazio fisico	8
1.5	Bigrafi	12
1.6	Componenti di un bigrafo	16
1.7	Scomposizioni parziali di un bigrafo	19
1.8	Componenti fisici	23
2	Grandezze elettriche	25
2.1	Convergenza e divergenza	26
2.2	Grandezze elettriche e Leggi di KIRCHHOFF	30
2.3	Potenza e lavoro virtuali : teoremi e corollari	39
2.4	Tensioni e correnti indipendenti in un multipolo	42
3	Teoria elementare dei grafi	53
3.1	Generalita'	54
3.2	Maglie e tagli	59
3.3	Relazioni tra maglie e tagli	65
3.4	Dualita' tra grafi planari	70
3.5	Basi di maglie e tagli	74
4	Tensioni e correnti di ramo	83
4.1	Sottospazi delle tensioni e correnti	84
4.2	Basi di tensioni e correnti	89
4.3	Teoremi di non-amplificazione	96
5	Relazioni costitutive	101
5.1	Motivazioni e definizioni	102
5.2	Classificazioni	105
5.3	Relazioni costitutive nella realta'	112
5.4	Analisi di circuiti	115
5.5	Analisi di componenti composti	118
5.6	Teorema di sostituzione	121
5.7	Potenza e lavoro effettivi	123
6	Interazione tra topologia e relazioni costitutive	125
6.1	Interazione di bipoli con la topologia	126
6.2	Interazione di multipoli con la topologia	131
6.3	Doppi bipoli	137
6.4	Invarianza al ribaltamento e direzionalità	144
6.5	Aggregazioni di componenti	147
7	Bipoli e circuiti semplici dinamici, tempo-invarianti e lineari	157
7.1	Bipoli generici	158
7.2	Bipoli notevoli	161
7.3	Serie e parallelo di bipoli	166
7.4	Analisi di circuiti semplici	172
7.5	Generatori fisici : rendimento	176

8	Generici multiporte dinamici, tempo-invarianti e lineari	181
8.1	Generalita'	182
8.2	Rappresentazioni esplicite	184
8.3	Grandezze impresse e primo teorema di equivalenza	188
8.4	Parametri omogenei	192
8.5	Potenza effettiva	193
8.6	Reciprocita'	195
8.7	Appendice sulle forme quadratiche omogenee	199
9	Generici doppi bipoli dinamici, tempo-invarianti e lineari	203
9.1	Rappresentazioni esplicite	204
9.2	Grandezze impresse	208
9.3	Parametri omogenei	212
9.4	Proprietà dei doppi bipoli	216
9.5	Tripoli resistivi "a stella" e "a triangolo"	222
9.6	Ponti resistivi	228
10	Nullore, sorgenti pilotate, trasformatore ideale e giratore	231
10.1	Doppi bipoli impressivi con rappresentazione cardinale	232
10.2	Nullore	*
10.3	Le quattro sorgenti pilotate	*
10.4	Modelli cardinali e noncardinali di $k$ -porte generici	*
10.5	Sorgenti pilotate nonideali	*
10.6	Trasferitori ideali	*
11	Proprietà dei circuiti dinamici, tempo-invarianti e lineari	*
11.1	Metodo totale	*
11.2	Circuiti patologici	*
11.3	Ricollocazione delle sorgenti impresse	*
11.4	Teorema di sovrapposizione	*
11.5	Analisi dei componenti composti	*
11.6	Proprietà dei componenti composti	*
11.7	Proprietà energetiche	*
11.8	Appendice sui sistemi algebrici	*
12	Metodi di analisi semplificati dei circuiti dinamici, tempo-invarianti e lineari	*
12.1	Semplificazione dell'analisi	*
12.2	Metodo nodale puro	*
12.3	Metodo nodale modificato	*
12.4	Metodi puri delle maglie e degli anelli	*
12.5	Metodo delle maglie modificato	*
12.6	Consigli pratici per l'analisi	*
13	Componenti composti dinamici, tempo-invarianti e lineari	*
13.1	Cascata di doppi bipoli	*
13.2	DB chiuso su bipolo	*
13.3	Parallelo di $k$ -porte e doppi bipoli	*
13.4	Serie di doppi bipoli	*
13.5	Connessione trasversale di un bipolo e un DBT	*
13.6	Bipolo in serie al terminale comune di un DBT	*
13.7	Metodologia aggregata&impiazza	*

14	Componenti e circuiti dinamici, tempo-varianti e lineari	*
14.1	Componenti dinamici, tempo-varianti e lineari	*
14.2	Segnali e informazione	*
14.3	Circuiti dinamici, tempo-varianti e lineari	*
14.4	Impulsi nonideali e ideali	*
15	Bipoli e circuiti, dinamici e lineari elementari	*
15.1	Condensatori e induttori	*
15.2	Energia e stato	*
15.3	Aggregazioni di bipoli dinamici elementari	*
15.4	Equazioni dei circuiti dinamici elementari	*
15.5	Soluzione generale dei circuiti dinamici elementari	*
15.6	Soluzioni similari dei circuiti dinamici elementari	*
16	Componenti dinamici e lineari nonelementari	*
16.1	Componenti dinamici generici	*
16.2	Potenza effettiva, lavoro effettivo ed energia	*
16.3	Reciprocità	*
16.4	Induttori accoppiati	*
16.5	Modelli degli induttori accoppiati	*
16.6	Appendice	*
17	Equazioni dei circuiti dinamici e lineari	*
17.1	Metodo totale	*
17.2	Metodo dei componenti complementari	*
17.3	Equazione di stato e di uscita dei circuiti nondegeneri	*
17.4	Sistemi degeneri di equazioni differenziali-algebriche	*
17.5	Equazione di stato e di uscita dei circuiti degeneri	*
17.6	Equazione differenziale scalare di ordine $n$	*
17.7	Sulla continuità analitica delle candidate di stato	*
17.8	Circuiti dinamici con interruptori ideali	*
18	Cisoidi, sinusoidi ed esponenziali di matrice	*
18.1	Cisoidi	*
18.2	Sottoclassi isofrequenziali di cisoidi	*
18.3	Soluzione di un sistema differenziale	*
18.4	Esponenziale di matrice	*
18.5	Calcolo degli esponenziali di matrice	*
18.6	Sinusoidi	*
18.7	Funzioni periodiche	*
18.8	Appendice sui numeri complessi, autovalori e autovettori	*
19	Soluzioni dei circuiti dinamici e lineari	*
19.1	Soluzione dell'equazione di stato	*
19.2	Soluzioni particolari e similari	*
19.3	Determinazione delle soluzioni similari	*
19.4	Stabilità, soluzione transitoria e a regime	*
19.5	Interpretazione della discontinuità analitica delle candidate	*
19.6	Procedura cartacea	*

20	Circuiti in pseudoregime cisoidale e in regime sinusoidale	*
20.1	Pseudoregime cisoidale e regime sinusoidale	*
20.2	Relazioni topologiche e costitutive	*
20.3	Bipoli composti	*
20.4	Doppi bipoli composti	*
20.5	Estensione di regole, proprietà e metodi dei circuiti dinamici	*
21	Funzioni di rete	*
21.1	Generalità	*
21.2	Zeri e poli	*
21.3	Funzioni di rete in regime sinusoidale	*
21.4	Normalizzazione	*
21.5	Grandezze logaritmiche	*
22	Potenza in regime sinusoidale	*
22.1	Potenza istantanea e potenza attiva	*
22.2	Potenza complessa nei bipoli	*
22.3	Potenza complessa nei doppi bipoli	*
22.4	Regime multifrequenziale	*
22.5	Potenza attiva disponibile di una sorgente sinusoidale	*
23	Componenti composti dinamici, tempo-invarianti e lineari	*
23.1	Componenti conservativi composti	*
23.2	Modelli quasi-conservativi dei condensatori e induttori fisici	*
23.3	Modelli quasi-conservativi dei risonatori fisici	*
23.4	Partitori dinamici	*
23.5	Ponti dinamici	*
23.6	Doppi bipoli dinamici composti attivi	*

## TESTI CONSIGLIATI PER CONSULTAZIONE

## Fondamenti di Circuiti

- L. O. CHUA, C. A. DESOER, E. S. KUH : Linear and Nonlinear Circuits, McGraw-Hill, New York, 1987.
- I. O. CHUA, C. A. DESOER, E. S. KUH : Circuiti Lineari e Nonlineari, Gruppo Editoriale Jackson, Milano, 1989. (traduzione in italiano del precedente testo)
- D. E. SCOTT : An introduction to Circuit Analysis: a Systems Approach, McGraw-Hill, New York, 1987.
- P. P. CIVALLERI : Elettrotecnica, Levrotto&Bella, Torino, 1998.
- G. MARTINELLI, M. SALERNO : Fondamenti di Elettrotecnica : Circuiti Lineari e Permanenti. Siderera, Roma, due volumi, 1996 (seconda edizione).
- P. GHIRGI : Lezioni di Elettrotecnica : Circuiti Elettrici, UTET, Torino, 1999.
- C. A. DESOER, E. S. KUH : Fondamenti di Teoria dei Circuiti, Franco Angeli, Milano, 1972, (traduzione in italiano) (original english edition 1969).
- V. DANIELE, A. LIBERATORE, R. GRAGLIA, S. MANETTI : Elettrotecnica, Monduzzi Editore, Bologna, 1996 (seconda edizione).
- M. GUARNIERI, G. MALISANI : Elementi di Elettrotecnica : Reti Elettriche, Edizioni Progetto, Padova, 1999.
- G. BIORCI : Fondamenti di Elettrotecnica : Circuiti, UTET, Torino, 1984 (seconda edizione).

## Esercizi

- R. D. STRUM, J. R. WARD : Electric Circuits and Networks, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 2nd edition 1985.
- S. A. NASAR : 3000 solved problems in electric circuits, Schaum's solved problems series, McGraw-Hill, New York, 1988.
- J. O'MALLEY : Basic Circuit Analysis, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1992, 3rd edition, Wiley, New York, 1988.
- M. BIEV : Esercizi di Elettrotecnica, CLUT, Torino, 1988.
- A. LIBERATORE, S. MANETTI, M. C. PICCHILLI E A. REATTI : Circuiti elettrici ed elettronici, Collana Tutor, ETAS Libri, Milano, 1996.
- S. BOBBIO : Esercizi di Elettrotecnica, CUEN, Napoli, 1995 (seconda edizione).
- AURORI VARI : The Electric Circuits Problem Solver, Research and Education Association (REA), New York, 1987.

- J. A. EDWINSTER : Teoria e Applicazioni dei Circuiti Elettrici, Collana Schaum, ETAS Libri, 1973 (original english edition 1965).
- E. C. LOWENBERG : Teoria e Applicazioni dei Circuiti Elettronici Collana Schaum, ETAS Libri, 1974 (original english edition 1967).
- A. PREMOLI : WWWWW????200???? Esercizi di CIRCUITI ELETTRICI da distribuire a cura dell'autore, Aprile 2000.

## Altri testi

- N. BALABANIAN : Electric Circuits, McGraw-Hill, New York, 1994.
- M. D. CILBERTI : Introduction to Circuit Analysis and Design, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1987.
- S. KARNI : Applied Circuit Analysis, Wiley, New York, 1988.
- J. W. NISSON : Electric Circuits, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1990.
- G. H. HOSTETTER : Engineering Network Analysis, Harper and Row, New York, 1984.
- L. S. BOBROW : Elementary Linear Circuit Analysis, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1987.
- A. BUDAK : Circuit Theory Fundamentals and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- P. M. CHIRLIAN : Fundamentals of Electrical Engineering Analysis, Matrix Publishers, Beaverton, Oregon, 1984.
- W. K. CHEN : Linear Networks and Systems: Fundamentals (Volume 1) and Fourier Analysis and State Variables (Volume 2), World Scientific, Singapore, 1990.
- D. F. MIX AND N. M. SCHMITT : Circuit Analysis for Engineers : continuous and discrete time systems, Wiley, New York, 1985.
- G. R. PAUL : Analysis of Linear Circuits, McGraw-Hill, New York, 1989.
- R. C. DORF : Electric Circuits, Wiley, New York, 1989.
- R. E. THOMAS AND A. J. ROSA : The Analysis and Design of Linear Circuits, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1998.

## Principali notazioni e definizioni usate nel testo

1. Esempio 14.1.3A → Esempio A del Paragrafo 3 della Sezione 1 del Capitolo 14.
  2. Par. 4.2.5 → Paragrafo 5 della Sezione 2 del Capitolo 4.
  3. Sez. 8.6 → Sezione 6 del Capitolo 8.
  4. Cap. 13 → Capitolo 13.
  5. *Componente composto*: componente composto da altri componenti. (CCap. 1.4.11-FCE). I terminali accessibili dei componenti composti sono distinti da piccole circonferenze nere (Interno bianco) — 0 mentre i nodi interni degli stessi sono distinti da pallini neri — 1 — quelle indipendenti.
  6. *Rappresentazione* ( $y_1, y_2, y_3, \dots$ )  $\leftarrow$  ( $x_1, x_2, x_3, \dots$ ): Indica la rappresentazione esplicita di un componente in cui  $y_1, y_2, y_3, \dots$  costituiscono le grandezze dipendenti e  $x_1, x_2, x_3, \dots$  quelle indipendenti.
  7. DBT → doppio bipolo tripolare, DBP → doppio bipolo proprio, DBI → doppio bipolo improprio, DB → generico doppio bipolo: può essere tripolare o proprio o improprio.
  8. c.c. → corto circuito, c.a. → circuito aperto.
  9.  $\hat{V}$  ovvero  $sV_i$  → sorgente impressiva di tensione.  $\hat{V}(10\text{ V})$  indica la sorgente di tensione impressiva con tensione impressa 10 V,  $\hat{V}(\hat{v}_1)$  indica la sorgente di tensione impressiva con tensione impressa  $\hat{v}_1$ .
  10.  $\hat{I}$  ovvero  $sI_i$  → sorgente impressiva di corrente.  $\hat{I}(5\text{ mA})$  indica la sorgente di corrente impressiva con corrente impressa 5 mA.  $\hat{I}(\hat{i}_1)$  indica la sorgente di corrente impressiva con corrente impressa  $\hat{i}_1$ .
  11.  $\mathcal{R}$  → generico resistore.  $\mathcal{R}(r_1)$  indica il resistore di resistenza  $r_1$ ,  $\mathcal{R}(100\ \Omega)$  indica il resistore di resistenza 100  $\Omega$ .
  12.  $^s sV_i$  → c.c." significa sostituzione di una  $sV_i$  con un c.c.".  $^s sI_i$  → c.a." significa "sostituzione di una  $sI_i$  con un c.a.".
  13. int.id. → interruttore ideale
  14. *Maglia- $sV_i$*  ovvero *Maglia- $\hat{V}$* : maglia di un circuito formata esclusivamente da  $sV_i$  ovvero  $\hat{V}$
  15. *Maglia- $sI_i$*  ovvero *Maglia- $\hat{I}$* : maglia di un circuito formata esclusivamente da  $sV_i$  ovvero  $\hat{I}$
  16. *Taglio- $sV_i$*  ovvero *Taglio- $\hat{V}$* : taglio di un circuito formata esclusivamente da  $sV_i$  ovvero  $\hat{V}$
  17. *Taglio- $sI_i$*  ovvero *Taglio- $\hat{I}$* : taglio di un circuito formata esclusivamente da  $sV_i$  ovvero  $\hat{I}$
  18. *Maglia- $\hat{I}$*  uniforme: maglia di un circuito formata esclusivamente da  $\hat{I}$  con le stesse correnti impressa.
  19. *Taglio- $\hat{V}$*  uniforme: taglio di un circuito formata esclusivamente da  $\hat{V}$  con le stesse tensioni impressa.
  20.  $sV_{PI}$  ovvero  $\hat{V}_I$  → generica sorgente di tensione pilotata in corrente,  $\hat{V}_I(r_m i_2)$  indica la sorgente di tensione pilotata in corrente con tensione pilotata  $r_m i_2$ .
21.  $sI_{PV}$  ovvero  $I_V$  → generica sorgente di corrente pilotata in tensione.  $I_V(g_m v_3)$  indica la sorgente di corrente pilotata in tensione con corrente pilotata  $g_m v_3$ .
  22.  $sI_{PI}$  ovvero  $I_I$  → generica sorgente di corrente pilotata in corrente.  $I_I(\beta i_4)$  indica la sorgente di corrente pilotata in corrente con corrente pilotata  $\beta i_4$ .
  23.  $sV_{PV}$  ovvero  $V_V$  → generica sorgente di tensione pilotata in tensione.  $V_V(\alpha v_5)$  indica la sorgente di tensione pilotata in tensione con tensione pilotata  $\alpha v_5$ .
  24. *Nullore*: è il doppio bipolo che costituisce il modello, idealizzato al massimo, dell'amplificatore operazionale. (Cap. 8-FCE)
  25. tr.id. → trasformatore ideale
  26.  $C$  → generico condensatore.  $C(C_1)$  indica il condensatore di capacità  $C_1$ ,  $C(10\ \mu F)$  indica il condensatore di capacità 10  $\mu F$
  27.  $\mathcal{L}$  → generico induttore.  $\mathcal{L}(L_1)$  indica l'induttore di induttanza  $L_1$ ,  $\mathcal{L}(10\text{ mH})$  indica l'induttore di induttanza 10 mH
  28. *Cisoidi*: una generica cisoida è una sinusoida con inviluppo esponenziale. Essa è caratterizzata dalla *pulsazione complessa* e dal *fasore*. Sono particolari cisoidi gli esponenziali (pulsazione complessa puramente reali), le sinusoidi (pulsazione complessa puramente immaginaria) e le funzioni costanti (pulsazione complessa nulla e fasore puramente reale). (Cap. 16-FCE)
  29. *Pseudoregime cisoidale*: si ha qualora le grandezze impressa delle  $sV_i$  e  $sI_i$  sono cisoidi isofrequenziali e il transistorio è assente (Cap. 18-FCE). In questo caso tutte le tensioni e correnti sono cisoidi isofrequenziali.
  30. *Regime sinusoidale*: le grandezze impressa delle  $sV_i$  e  $sI_i$  sono sinusoidi isofrequenziali e il transistorio è assente (Cap. 18-FCE).

Programma ufficiale del Corso di Elettrotecnica per Elettronici  
Amedeo Premoli : Anno Accademico 1999-2000, Novembre 1999

- 1 - *Scomposizione dei circuiti fisici*. Bigrafi, bipoli e multipoli. Componenti semplici e composti. Tensioni e correnti elettriche. Leggi di Kirchhoff. Potenza e lavoro virtuali. Teorema e corollario di Tellegen. Tensioni e correnti indipendenti in un multipolo. Grafi : alberi e alberi, maglie e tagli. Grafi planari e duali. Basi di maglie e tagli. Sottospazi delle tensioni e correnti di ramo : tensioni di nodo e correnti cicliche. I teoremi di non-amplificazione.
- 2 - *Relazioni costitutive* : Componenti adinamici o dinamici, tempo-invarianti o tempo-varianti, lineari o nonlineari. Analisi dei circuiti e dei componenti composti. Teorema di sostituzione. Potenza e lavoro effettivi. Interazione tra componenti e topologia. Doppi bipoli tripolari, propri e impropri. Invarianza al ribaltamento e direzionalità dei doppi bipoli. Componenti composti di interesse.
- 3 - *Bipoli e circuiti semplici adinamici, tempo-invarianti e lineari*. Corto circuito, circuito aperto, sorgenti impulsive, resistore. Potenza. Serie e parallelo di bipoli e regole di partizione. Analisi di circuiti semplici : Teoremi di Millmann. Generatori fisici.
- 4 - *Multipoli adinamici, tempo-invarianti e lineari*. Rappresentazioni cardinali e non-cardinali e primo teorema di equivalenza. Potenza e reciprocità. Proprietà dei doppi bipoli. Doppi bipoli resistivi a stella, a triangolo e a ponte. Trasformazioni stella-triangolo. Nullore, sorgenti pilotate, trasformatore ideale e giratore. Modelli di  $k$ -porte generici.
- 5 - *Circuiti adinamici, tempo-invarianti e lineari generici*. Metodo totale. Circuiti patologici. Ricollocazione delle sorgenti impulsive. Principio di sovrapposizione. Analisi e proprietà dei componenti composti : secondo e terzo teorema di equivalenza (teoremi di Thévenin e Norton). Metodo puro e modificato dei nodi, metodi puri e modificati delle maglie (anelli). Componenti composti : cascata, parallelo e serie di doppi bipoli, connessioni di un doppio bipolo con un bipolo : i teoremi di Miller.
- 6 - *Componenti e circuiti adinamici, tempo-varianti e lineari*. Sorgenti impulsive tempo-varianti, interruptori ideali e nonideali e resistori tempo-varianti. Segnali e informazione. Impulsi ideali e nonideali.
- 7 - *Bipoli e semplici circuiti, dinamici e lineari*. Condensatori e induttori : energia e stato. Analisi di circuiti semplici. Componenti dinamici e lineari generici. Potenza, lavoro, energia e reciprocità. Induttori accoppiati.
- 8 - *Circuiti dinamici e lineari generici*. Metodo dei componenti complementari. Equazione di stato e di uscita dei circuiti nondegeneri e degeneri. Circuiti dinamici con interruptori ideali. Cisoide ed esponenziale di matrice. Sinusoidi, Funzioni periodiche. Soluzione dell'equazione di stato : soluzione similita (a regime), soluzione transitoria, pulsazioni naturali e stabilita.
- 9 - *Pseudoregime cisoidale e regime sinusoidale*. Leggi di Kirchhoff. Relazioni costitutive dei bipoli e doppi bipoli semplici e composti. Funzioni di rete. Zerri e poli. Normalizzazione. Potenza istantanea, minima e massima nei bipoli in regime sinusoidale. Potenza attiva, reattiva e complessa nei bipoli e doppi bipoli. Teorema di Boucherot. Potenza attiva in regime multibiquenziale. Potenza disponibile nelle sorgenti nonideali. Modelli quasi-conservativi dei condensatori e induttori fisici. Risonatori ideali. Modelli quasi-conservativi dei risonatori fisici. Partitori e doppi bipoli a ponte dinamici.
- 10 - *Generazione, trasmissione e utilizzazione dell'energia elettrica*. Linee monofase e trifase, perdite in trasmissione, rendimento e rifasamento. Circuiti magnetici : le leggi di Kirchhoff delle tensioni e flussi magnetici. Concatenatore magneto-elettrico. La legge di Hopkinson e sua estensione al trafilero. Materiali ferromagnetici reali : isteresi, correnti parassite e larmizzazione. Trasformatore fisico : costruzione, circuito equivalente e rendimento. Prove a vuoto e in corto circuito.

# 1 REALTÀ FISICA e BIGRAFI

WWWW? FIGURA EMBLEMATICA spazio fisico diviso in regioni e/o bigrafo ????WW

Tradizionalmente, la *topologia* dei circuiti viene introdotta ricorrendo ai *grafi*, costituiti da *nod*i e *trami*. Questa scelta risale all'inizio del ventesimo secolo quando i componenti fisici disponibili erano quasi esclusivamente bipoli, quali resistori, generatori di tensione, induttori, condensatori, ... , con l'eccezione degli induttori mutuamente accoppiati. Successivamente, la tecnologia ha messo a disposizione componenti con più di due terminali (*multipoli*), per esempio i transistori e gli amplificatori operazionali. La loro presenza ha suggerito l'introduzione dei *grafi bipartiti*, che consentono una descrizione più adeguata del fenomeno fisico.

**Sez. 1.1 : Circuiti nella realtà :** I fenomeni elettrici più noti si suddividono in fenomeni naturali e artificiali. I secondi a loro volta sono stati inventati dall'uomo con il duplice scopo di alleviare la fatica fisica (*circuiti fisici per l'energia*) e di alleggerire la fatica mentale (*circuiti fisici per l'informazione*).

**Sez. 1.2 : Modello di un fenomeno fisico :** Il modello di un fenomeno fisico è il risultato di un compromesso tra la complessità della realtà fisica e la semplicità del modello stesso.

**Sez. 1.3 : Modello di un circuito fisico :** Per i fenomeni elettrici artificiali i possibili modelli si suddividono in modelli a parametri concentrati, più noti come circuiti, e modelli a parametri distribuiti.

**Sez. 1.4 : Scomposizione dello spazio fisico :** Il fenomeno elettrico avviene all'interno di quello che noi chiamiamo *circolo fisico*. La costruzione del suo modello richiede la caratterizzazione geometrica ed elettrica del circuito fisico, scomponendolo in un numero adeguato di *regioni equipotenziali e nonequipotenziali*, tra loro connesse tramite dei *varchi*.

**Sez. 1.5 : Bigrafi : I grafi bipartiti** (detti brevemente *bigrafi*) descrivono in un modo naturale l'insieme di queste regioni e le loro connessioni, cioè la *topologia* del circuito elettrico. Le regioni equipotenziali sono rappresentate dai *nod*i, le regioni nonequipotenziali dai *noccioli* e i varchi dagli *archi*. La loro unione costituisce il bigrafo.

**Sez. 1.6 : Componenti semplici e composti :** I bigrafi sono scomposti in *componenti semplici*, costituiti da un nocciolo e dagli archi incidenti, che prendono il nome di *terminali* del componente. A loro volta i componenti semplici possono essere aggregati per formare i *componenti composti*, dotati di *terminali semplici e composti*.

**Sez. 1.7 : Scomposizioni parziali di un bigrafo :** Diverse scomposizioni di un bigrafo in componenti semplici e/o composti sono possibili. Alcuni esempi illustrano le più interessanti tra queste scomposizioni.

**Sez. 1.8 : Componenti fisici :** Questa sezione mette in relazione i precedenti concetti sui componenti e le scomposizioni di un bigrafo con i componenti e le scomposizioni fisiche incontrati nella realtà di ogni giorno.

Premoli, *Fondamenti di CIRCUITI ELETTRICI*. Cap. 1, mar-2000

2

## 1.1 CIRCUITI NELLA REALTÀ

Anche il lettore che per la prima volta apre un testo di questo tipo ha una idea, seppur vaga, di quanto i fenomeni elettrici siano importanti nella realtà quotidiana. Questa sezione richiama questa realtà.

### 1.1.1 Fenomeni elettrici

I fenomeni elettrici possono essere suddivisi in :

**Fenomeni elettrici naturali organici :** Essi sono presenti nel corpo umano e in quello degli animali: muscoli, cervello, cuore, sistema nervoso, ... È curioso constatare che nella prima metà del secolo scorso molti studiosi dei fenomeni elettrici erano dei medici alla ricerca di cure miracolose basate su qualche misterioso fenomeno elettrico per il progresso dell'umanità... e del proprio portafoglio. Basta pensare all'uso degli *electroshock* per curare alcune malattie mentali, in auge fino a non molto tempo fa.

**Fenomeni elettrici naturali inorganici :** Essi sono presenti nei corpi celesti : tra questi, il campo magnetico terrestre, l'attività elettrica presente nelle stelle ...

**Fenomeni elettrici artificiali :** Si sviluppano all'interno di oggetti costruiti appositamente dall'uomo. Proprio a questi fenomeni rivolgono la loro attenzione gli ingegneri, in particolare gli ingegneri elettrici, elettronici, informatici, delle telecomunicazioni e biomedici.

Una definizione esauriente e nello stesso tempo semplice dei fenomeni elettrici artificiali non è facile. Possiamo dire che i fenomeni elettrici artificiali si sviluppano entro circuiti fisici, facenti parte di apparati, strumenti, dispositivi, macchine, impianti, ecc., costruiti dall'uomo. L'interesse dell'umanità verso questi apparati è nella possibilità di realizzare l'ancestrale desiderio di vivere sfuggendo alla fatica del corpo (alla base della rivoluzione industriale dal settecento fino ai giorni nostri) e della mente (alla base della rivoluzione informatica di quest'ultimo mezzo secolo). Essi sono suddivisi in due vaste classi, corrispondenti alle due diverse fatiche/evoluzioni, di cui daremo alcuni esempi nei paragrafi seguenti.

### 1.1.2 Apparati per l'energia

Gli apparati per l'energia elettrica sono costruiti dall'uomo con lo scopo di limitare la fatica fisica (muscolare). Il successo di queste applicazioni dell'Elettricità è dovuto principalmente al fatto che l'energia elettrica può essere trasportata facilmente (tramite cavi) senza inquinamenti chimici, acustici, ... , a parte qualche incendio sporadico e ai campi elettromagnetici, i cui possibili effetti negativi sull'uomo sono molto discussi, benché poco conosciuti.

Questi apparati sono dedicati alla produzione (generazione), trasporto (trasferimento), e consumo (utilizzazione) di energia (potenza) elettrica. Tra essi ricordiamo :

**Produzione :** generatori, alternatori, dinamo, celle fotovoltaiche.

Essi sono presenti nelle centrali elettriche di qualsiasi dimensione, a bordo delle navi, aerei, automobili, satelliti artificiali, biciclette, ...

**Trasporto :** elettrodotti (cavi aerei), cavi sottomarini, trasformatori.

Essi costituiscono gli impianti elettrici distribuiti su tutto il territorio in cui ci sia una qualche attività umana moderna.

**Consumo** : motori elettrici, foni elettrici, stufe elettriche, lampade, alimentazione di apparecchiature elettroniche, calcolatori, sedie elettriche (ancora in uso presso alcune tribù incivili di visi pallidi) . . . .

Essi sono presenti in edifici pubblici, stabilimenti industriali, appartamenti privati, a bordo dei navi, treni, automobili, aerei, satelliti artificiali, biciclette, . . . . Anche una modesta bicicletta ha a bordo una lampadina elettrica per illuminare la strada. . . .

### 1.1.3 Apparati per l'informazione

Gli apparati per l'informazione sono costruiti dall'uomo con lo scopo di limitare la fatica mentale (del cervello). Il successo di queste applicazioni dell'Elettricità è dovuto principalmente al fatto che questi apparati sono poco ingombranti, consumano poca energia, non sono rumorosi, sono molto rapidi e, se prodotti su larga scala, poco costosi. In qualche caso essi sono usati con lo scopo di condizionare l'uomo, dando un'idea superficiale se non effimera della realtà (Televisione). Essi costituiscono l'*hardware* che è sede della :

<i>generazione</i>	,	<i>acquisizione</i>	,	<i>memorizzazione</i>
<i>trasmissione</i>	,	<i>elaborazione</i>	,	<i>utilizzazione</i>

di segnali elettrici, o più precisamente, del loro contenuto d'informazione.

Essi sono presenti nei calcolatori, *personal computer*, telecamere, televisori, *monitor*, microfoni, radio, altoparlanti, registratori dell'immagine e del suono, strumenti musicali, strumenti di misura, impianti di telecomunicazione digitale e/o analogica, autostrade informatiche, sistemi di controllo, apparecchiature biomedicali, ponti radio, linee telefoniche, telefoni cellulari (telefonini), impianti radar, . . . .

Ricordiamo qui la mutua interazione esistente tra i circuiti elettronici e i calcolatori. La progettazione di calcolatori sempre più potenti richiede la disponibilità di circuiti elettronici (*chip*) sempre più complessi e sofisticati, ma nello stesso tempo la progettazione di circuiti sempre più complessi necessita la disponibilità di calcolatori sempre più potenti.

### 1.1.4 Percezione di un fenomeno

L'introduzione ai circuiti richiede un "richiamo filosofico" alla relazione intercorrente tra la realtà fisica e la sua descrizione tramite un modello matematico nella consapevolezza che qualsiasi modello non potrà mai descrivere esattamente la realtà fisica. Un buon modello è il risultato di un compromesso tra la realtà fisica, dovuta al *Padratermo* e/o al *big bang*, e la semplicità del modello, richiesta dagli ingegneri che intendono avere a disposizione modelli sufficientemente semplici per eseguire "buoni progetti".

La distinzione dei fenomeni fisici in elettrici, meccanici, termici, chimici, biologici, . . . è motivata dalla necessità di semplificare la loro descrizione piuttosto che dalla effettiva realtà fisica del fenomeno. In genere i fenomeni elettrici sono sempre presenti congiuntamente ad altri fenomeni non-elettrici, quali quelli appena citati. Essi non sono percepibili direttamente da parte dell'uomo per mezzo dei cinque sensi di cui è dotato : I nostri occhi ci consentono di osservare da un ponte la corrente impetuosa di un torrente che scorre sotto i nostri piedi ma non le migliaia di ampere che scorrono nei cavi di un elettrodotto sopra la nostra testa. Quindi lo studio dei fenomeni elettrici richiede una sviluppata capacità

di immaginazione e astrazione. Questa mancanza di percepibilità è la causa principale di molti "incidenti di natura elettrica" a cui sono soggetti gli esseri viventi (scarica elettrica a elevate tensioni) con esiti spesso letali. Il lettore avrà sicuramente bloccato almeno una volta un bambino che corre a quattro gambe a infilare due dita in una presa di corrente domestica non protetta dagli appositi "tappi".

## 1.2 MODELLO DI UN FENOMENO FISICO

Facciamo alcune considerazioni di carattere molto generale sulla costruzione di un modello di un generico (cioè non necessariamente elettrico) fenomeno fisico.

### 1.2.1 Significato del modello di un fenomeno

Per modello si intende un insieme di regole logico-matematiche, che ci consentono di descrivere e rappresentare quantitativamente un fenomeno fisico in modo sufficientemente adeguato. Questo modello non può tener conto di tutto quello che avviene entro la porzione di spazio fisico e di tutte le interazioni con l'ambiente circostante. Anche se fosse possibile costruire un modello completo, esso sarebbe così complicato che sarebbe impossibile usarlo con profitto. Quindi il modello fornisce una descrizione approssimata del fenomeno. Ogni modello deve soddisfare due requisiti "contraddittori" :

*Essere sufficientemente semplice da interpretare e usare.*  
*Essere sufficientemente aderente al fenomeno fisico che intende descrivere.*

Parafrasando il vecchio proverbio "Tra il dire e il fare, c'è di mezzo il mare", possiamo affermare :

*Tra l'intenzione di costruire un modello adeguato di un fenomeno fisico e la sua effettiva realizzazione può esserci di mezzo un oceano.*

Alcune considerazioni possono essere fatte:

- Qualsiasi modello, anche se complesso, non può mai essere esatto. D'altra parte un modello più complicato, anche se più accurato di uno più semplice, può richiedere tempi di simulazione troppo lunghi e risultare difficile da interpretare e identificare.
- La costruzione di un modello è un'arte che consiste nel fare un compromesso tra le diverse esigenze specifiche dell'applicazione di nostro interesse. Lo stesso modello di un sistema/dispositivo fisico può essere adatto in alcune situazioni e inadatto in altre. Un modello semplice può essere appropriato in certe applicazioni "facili", mentre un modello sofisticato può essere insufficiente in certe applicazioni "difficili".
- Si dice *parassita* un effetto osservabile su un dispositivo fisico non previsto dal suo modello (che in questo caso è risultato troppo semplice), ovvero non desiderato dal progettista e da chi intende impiegare il dispositivo e che in genere non può essere eliminato dal dispositivo per ragioni fisiche.

### 1.2.2 Costruzione di un modello

La costruzione di un modello di un fenomeno fisico richiede:

- La caratterizzazione delle grandezze fisiche misurabili del fenomeno, cioè rappresentabili da numeri reali, funzioni reali di variabili reali, ... e la disponibilità di strumenti in grado di misurare queste grandezze.
- Lo studio della leggi fisiche, descritte da equazioni matematiche, che vincolano reciprocamente le grandezze fisiche, e la verifica di queste leggi mediante adeguati esperimenti.

• La generazione di un modello completo (sistema di equazioni) del fenomeno e la simulazione (con cartakxpenna o col calcolatore) dell'evoluzione temporale del fenomeno facendo quindi delle previsioni dello stesso, che possono essere ulteriormente verificate. Spesso, questa procedura viene ripetuta più volte. Non sempre il fenomeno fisico sotto studio coinvolge il tempo in quanto il fenomeno può essere stazionario.

Comunque la difficoltà di costruire un modello adeguato del fenomeno sotto studio è comune a moltissimi campi delle scienze esatte e delle scienze non esatte. Moltissimi fenomeni fisici presenti nella realtà di ogni giorno sono così complessi che è difficile:

- Definire tutte le grandezze fisiche di interesse, con attenzione particolare a quelle misurabili per mezzo di strumenti.
- Caratterizzare i possibili vincoli fisici tra le grandezze misurabili e quelle non misurabili e analizzare il modello completo, nonostante la disponibilità dei moderni calcolatori.

### 1.2.3 Esempi di fenomeni difficili da modellare

Diamo una lista non certo esaustiva ma comunque significativa di fenomeni naturali, anche se spesso influenzati dall'uomo, di cui è molto difficile costruire dei modelli adeguati:

- Evoluzione e previsione dello stato di salute di un essere umano.
- Evoluzione del corpo umano soggetto a una determinata dieta.
- Evoluzione delle cellule cancerose.
- Sviluppo di una epidemia.
- Evoluzione dei sentimenti tra un poeta e la sua musa ispiratrice.
- Previsioni meteorologiche a medio e lungo termine.
- Diffusione di nubi tossiche (radioattive) nell'atmosfera.
- Dinamica del buco nell'ozono.
- Dinamica dell'effetto serra.
- Dinamica di un uragano.
- Traiettorie dei fulmini.
- Evoluzione dell'economia di un paese allo sbando.
- Dinamica di una scossa tellurica.
- Avanzamento di una colata lavica.
- Progressione dell'erosione del fianco di una montagna (frana).

- Progressione di una slavina su un ripido pendio innevato.
- Progressione del ritiro-avanzamento dei ghiacciai.
- Inquinamento di una falda acquifera da parte di pesticidi.
- Dinamica di una alluvione.
- Formazione della mucillagine nel mare Adriatico.

Da questa lista qualcuno potrebbe dedurre che l'uomo non è capace a modellare i fenomeni naturali. Non per niente, si suole affermare che le cosiddette scienze naturali non sono scienze esatte. Comunque, la strada da percorrere per "rendere quasi esatte" le scienze naturali è ancora molto lunga.

Si può aggiungere che molti problemi di inquinamento sono difficili da risolvere, oltre che per una certa irresponsabilità dell'uomo nella gestione delle risorse naturali, anche per l'indubbia difficoltà nella costruzione di modelli adeguati di questi fenomeni.

Tra i fenomeni difficili da modellare e a cui molti dei lettori sono estremamente interessati possiamo aggiungere gli esami di profitto presso una Università. Ogni studente, ma anche il docente, è molto interessato a prevedere l'esito di una prova scritta. In questo caso, la difficoltà nasce dal fatto che non si sa come costruire il modello della cervello del docente che sceglie gli esercizi e il modello del cervello degli esaminandi che tenga conto della loro reazione davanti a un esercizio un po' diverso dal solito.

## 1.3 MODELLO DI UN CIRCUITO FISICO

Per i fenomeni elettrici artificiali i possibili modelli si suddividono in due vaste classi: modelli a parametri concentrati, più noti come circuiti, e modelli a parametri distribuiti.

### 1.3.1 Modelli di fenomeni elettrici artificiali: circuiti

La descrizione di una vasta sottoclasse di fenomeni elettrici artificiali è fatta mediante i *modelli a parametri concentrati*. Il compito di questo corso consiste principalmente nell'analisi di questi modelli. Infatti i fenomeni elettrici naturali sono in genere piuttosto complessi per poterne fare un modello adeguato, mentre i fenomeni elettrici artificiali a parametri distribuiti sono descritti in altri corsi.

- Lo spazio fisico in cui ha sede un fenomeno elettrico della suddetta sottoclasse, costituisce un "circuito fisico".
- Opportune porzioni di questo spazio costituiscono i *componenti fisici*.
- Il modello matematico del circuito fisico viene detto "circuito modello" o più semplicemente *circuito*, qualora non nascano ambiguità.

Prendiamo in considerazione i modelli dei fenomeni elettrici di nostro interesse:

- I circuiti elettrici sono sede di fenomeni fisici di cui può essere, in genere, costruito un modello sufficientemente adeguato. Questo non sottintende affatto che gli studiosi di circuiti fisici siano più abili degli studiosi di altri fenomeni fisici, ma che i circuiti fisici sono più facili da modellare che altri fenomeni citati precedentemente. Comunque questa osservazione non significa che questo corso sia facile.



- I circuiti elettrici fisici sono, in genere, costruiti dall'uomo. Per questo il loro studio è più facile che quello dei fenomeni naturali, costruiti dal Padreterno. Comunque, tra quest'ultimi i fenomeni astronomici (movimenti delle stelle, comete, eclissi, ...) sono stati descritti dall'uomo con modelli molto accurati fin dall'antichità.

### 1.3.2 Successo del modello circuitale

Quanto detto nel precedente paragrafo può indurre al pessimismo. Fortunatamente, nel nostro caso il modellamento dei circuiti fisici ha avuto molto successo rispetto a quello di altri fenomeni fisici per i seguenti motivi :

- La verifica sperimentale del modello del circuito mediante opportune misure sul circuito fisico possono essere eseguite rapidamente, dal momento che i fenomeni elettrici all'interno del circuito fisico si sviluppano generalmente in tempi brevissimi. Inoltre le suddette misure (*testing*) possono essere automatizzate.
- I circuiti fisici più diffusi sono di costo piuttosto contenuto. Le centinaia di milioni di circuiti elettrici/elettronici regolarmente funzionanti in apparati esistenti nel mondo sono una continua conferma che l'arte della loro modellizzazione ha dato e continua a dare eccellenti risultati.
- Il malfunzionamento di un circuito fisico è in genere da attribuire a un guasto piuttosto che a un errore nella costruzione del suo modello. I primi personal computer col microprocessore "Pentium I" commettevano errori per una disattenzione nel progetto, non perché il modello circuitale fosse errato.
- Vi è un'eccezione a quanto detto. I malfunzionamenti originati da una insufficiente compatibilità elettromagnetica con altri apparati collocati nelle vicinanze sono da attribuire al fatto che il modello adottato per il progetto del circuito fisico non era sufficientemente adeguato alla realtà. Due esempi : la proibizione di usare i telefoni a bordo di un aereo e nelle sale operatorie degli ospedali è dovuta al fatto che è molto difficile valutare e prevedere gli effetti che le onde elettromagnetiche emesse dall'antenna del telefono possono avere sui circuiti fisici che sono all'interno, rispettivamente, dei sistemi automatici di guida dell'aereo stesso e delle apparecchiature biomedicali.
- La rivoluzione informatica che caratterizza l'attuale momento storico della nostra civiltà è stata consentita proprio dal fatto che i circuiti elettrici sono, nello stesso tempo, molto rapidi, piccoli ed economici (se prodotti su larga scala) rispetto a qualsiasi altro dispositivo fisico conosciuto al momento attuale. In principio nessuno può escludere che in un futuro più o meno prossimo possano essere realizzati dispositivi basati su fenomeni fisici completamente diversi che prendano il sopravvento sulla attuale tecnologia basata sui semiconduttori.
- In confronto col modello a parametri distribuiti il modello a parametri concentrati (circuito) si è dimostrato più adatto in sede di progetto anche se in alcuni casi può essere un po' carente. Questa carenza viene affrontata in un'apposita branca dell'Ingegneria Elettrica nota come Compatibilità Elettromagnetica.

- In genere, i modelli dei circuiti non tengono conto che la potenza elettrica dissipata (in pratica sempre presente) innalza la temperatura del circuito fisico e che questa a sua volta fa variare i parametri presenti del modello. Spesso questi effetti termici (parassiti) non possono essere trascurati e l'analisi del circuito fisico richiede la costruzione di un modello misto elettro-termico più complesso.

*Strumentazione elettronica* : In un sereno pomeriggio primaverile una giovane ciclista amatrice pedala rilassata lungo il fondovalle in attesa di affrontare una impegnativa salita alpina. Un mongolo-amatore adocchia dall'alto la ciclo-amatrice e, perdendo progressivamente quota fino a condurre la mongolfiera a un tiro di voce dalla stessa, chiede : "Scusi, mi sa dire dove mi trovo ? Sono partito da Napoli e desidererei raggiungere Venezia."

"Un momento che prendo il mio GPS e faccio il punto. Siamo alla latitudine nord di 47 gradi, 25 minuti e 37 secondi e alla longitudine est di 14 gradi, 49 primi e 13 secondi. La temperatura dell'atmosfera è di 22 gradi centigradi a terra e di 18 gradi a quota 1000 metri, le mie pulsazioni cardiache sono 110, ma, mi spiace, non conosco le sue pulsazioni. Per Venezia prenda la direzione ..."

"Mille grazie per le informazioni. Posso approfittare ancora di lei, mi è venuta una curiosità ?"

"Dica pure ..."

"Lei è forse un ingegnere elettronico ?"

"Sì sono ingegnere elettronico con indirizzo biomedico. Ma da che cosa l'ha dedotto ?"

"Dalla pertinenza e dalla precisione delle sue risposte e dalla sua confidenza con strumentazioni elettroniche sofisticate."

"Scommetto, invece, che lei è un ingegnere gestionale ?"

"Sono lusingato che lei abbia riconosciuto la mia professione, ma da che cosa l'ha capito ?"

"Beh, lei non sa dove si trova, non sa in che direzione andare, non sa che decisione prendere ..."

## 1.4 SCOMPOSIZIONE DELLO SPAZIO FISICO

Un circuito fisico occupa una porzione dello *spazio fisico tridimensionale* riempita, almeno in parte, da svariate materiali caratterizzati da specifiche proprietà elettriche e/o magnetiche (vedere Corso di Fisica). Il modello di questo fenomeno richiede innanzitutto la caratterizzazione geometrica ed elettrica dello spazio tridimensionale sede del fenomeno, cioè del circuito fisico, scomponendolo in un numero adeguato di *regioni equipotenziali e nonequipotenziali*, tra loro connesse tramite dei *varchi*.

### 1.4.1 Spazio fisico e regioni

Ogni membro del genere umano, di cui l'autore di questi appunti crede di far parte assieme agli eventuali lettori, respira, mangia, dorme, cammina, pensa, ... all'interno di uno "*spazio fisico*". L'autore non intende cercare una definizione dello spazio fisico e lascia questo problema ai filosofi. Qui ricordiamo che lo spazio fisico ci impone dei vincoli : se invadiamo, inavvertitamente, la porzione dello spazio fisico occupato dallo stipite di una porta, o da una porta di vetro, noi assistiamo alla crescita istantanea di un bernoccolo sulla nostra fronte e/o sul nostro naso. Il bernoccolo ha lo scopo di segnalare al suo proprietario che

egli ha toccato la superficie di separazione tra due porzioni dello spazio con caratteristiche fisiche diverse.

**Definizioni :** Lo spazio fisico (tridimensionale) sede del fenomeno elettrico viene scomposto in porzioni, cui diamo il nome di *regioni*. ciascuna regione è delimitata da un proprio *giacico* (i matematici preferiscono chiamarlo *superficie gaussiana*). Due differenti tipi di regioni sono individuabili :

- *regioni elettricamente equipotenziali* (e.p.)
- *regioni elettricamente non-equipotenziali* (n.p.)

**Commento :** Con riferimento alle nozioni di Elettrostatica, una regione risulta equipotenziale se è verificata una delle seguenti condizioni :

- Il volume occupato dalla regione è "massiccio" ma il campo elettrico  $E$  al suo interno è trascurabile poiché la regione è riempita da materiale con conduttività elettrica  $\sigma$  molto elevata.

- Il volume occupato dalla regione è molto sottile e distribuito attorno a una superficie a cui il campo elettrico  $E$  è ortogonale.

In entrambi i casi la circuitazione del campo elettrico  $E$  lungo un qualsiasi arco di curva completamente immerso nella regione è praticamente nulla.

In genere le regioni adiacenti non sono isolate tra loro :

**Definizione :** Vi sono dei *varchi* (connessioni) tra regioni, necessariamente adiacenti, attraverso cui le regioni si scambiano una *diversità elettrica* per il momento non ben specificata.

**Muro di pietre :** Immaginare un muro massiccio (uno di quelli che costruiscono i nostri bisnonni) formato da pietre affiancate e sovrapposte : il muro rappresenta lo spazio occupato dal circuito fisico e le pietre i volumi occupati dalle singole regioni. Inoltre si può pensare che le pietre provengano da due tipi diversi di roccia, che distinguono le regioni e.p. dalle regioni n.p. Infine, tra pietre adiacenti di roccia diversa possono esserci delle connessioni.

**Impianto elettrico domestico :** Questo corso non vuole proporre al lettore la costruzione di una casa : il muro di pietre intende essere d'aiuto al lettore nell'immaginare una suddivisione dello spazio. Il lettore non troverà difficoltà a immaginare le più disparate suddivisioni dello spazio fisico occupato dall'impianto e dagli apparecchi elettrici nel proprio appartamento : lampada, apparecchio televisivo, campanello, *personal computer*, stufa elettrica, telefono, rasoio, ...

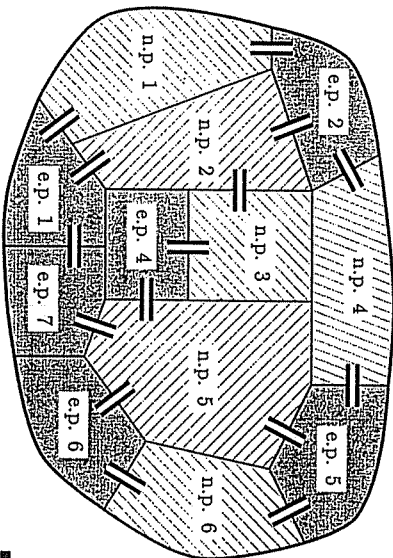
**Circuito integrato :** Supponga il lettore di ficcare il naso all'interno di un circuito integrato; la scomposizione dello spazio fisico in nodi e noccioli è molto realistica in quanto lo spazio fisico occupato dalle regioni e.p. (per esempio, quello che circonda la connessione di più piste) è spesso dello stesso ordine di grandezza dello spazio occupato dalle regioni n.p. (per esempio, quello che circonda le giunzioni bipolari dei transistori). L'autore ha provato a ficcare il naso all'interno di un circuito integrato raggiungendo la conclusione che è più facile ficcare un circuito integrato nel naso che il naso in un circuito integrato. ■

**Circuito stampato :** Prendete un cosidetto circuito stampato costituito da una piastra con saldati sopra i componenti dello stesso : un circuito fisico di questo tipo viene chiamato *circuito a componenti discreti* per distinguerlo dai circuiti integrati. La struttura fisica di un circuito a componenti discreti suggerisce la scomposizione del circuito stesso. Le regioni equipotenziali rappresentano le saldature di stagno su una faccia della piastra, mentre le regioni nonequipotenziali racchiudono i singoli componenti fisici, a parte i loro terminali, saldati sull'altra faccia. I varchi rappresentano i fori passanti presenti nella piastra e attraversati dai terminali dei componenti.

**Commento :** Se dal punto di vista fisico vi sono più varchi tra la stessa coppia di regioni, essi possono comunque essere rappresentati da un unico varco.

#### 1.4.2 Proprietà di bipartizione

**Esempio A :** Lo spazio fisico riportato nella figura a fianco è suddiviso in sei regioni e.p. e sei regioni n.p., connesse da quindici varchi. Due tra questi varchi collegano regioni omologhe : precisamente le regioni e.p. 1 e e.p. 7 e le regioni n.p. 2 e n.p. 3.

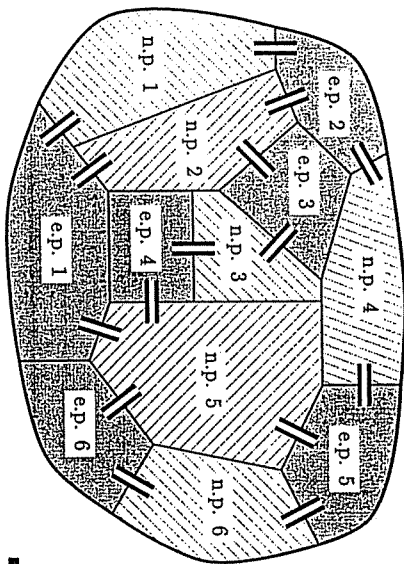


Possiamo sopprimere i varchi che connettono le regioni omologhe, nel modo seguente :

**Regola :** I varchi tra due regioni e.p. vengono soppressi, fondendo le due regioni (necessariamente adiacenti) in una sola, a sua volta e.p. In altre parole la parete divisoria tra le due regioni e.p. viene soppressa perché non necessaria.

I varchi tra due regioni n.p. vengono soppressi, interponendo tra queste regioni una nuova regione e.p. e connettendola con due varchi alle due regioni n.p. In altre parole la parete divisoria comune alle regioni n.p. viene sdoppiata. ■

**Esempio B :** Riprendendo l'esempio A, le regioni n.p. 2 e n.p. 3 vengono separate inserendo la nuova regione e.p. 3, mentre le regioni e.p. 1 e e.p. 7 sono fuse in un'unica regione e.p. 1. Otteniamo la nuova suddivisione dello spazio fisico riportata nella figura a fianco e caratterizzato da sei regioni n.p. e sei regioni e.p.



L'esempio consente di concludere che noi possiamo limitarci a considerare suddivisioni dello spazio fisico che verificano la :

**Proprietà :** Le regioni e.p., n.p. e i varchi soddisfano alla proprietà di bipartizione :

ogni varco connette esclusivamente una regione e.p. a una regione n.p.

**Diaggazione :** Nel suddetto muro possiamo sostituire due pietre adiacenti connesse da un varco e provenienti dalla roccia che identifica le regioni e.p. con un'unica pietra della stessa roccia. Inoltre possiamo interporre una pietra di roccia diversa tra le due pietre connesse da un varco e provenienti dalla roccia che identifica le regioni n.p.

### 1.4.3 Super-regioni nonequipotenziali

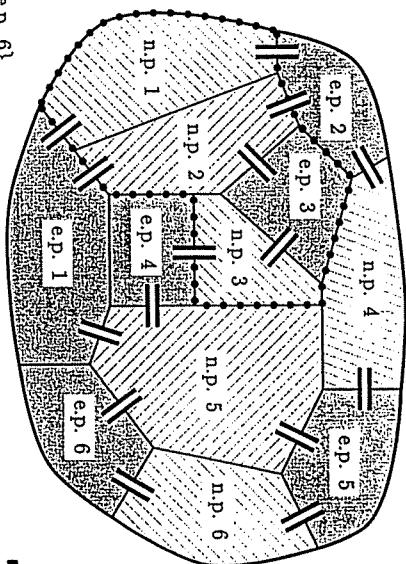
Se riconsideriamo le regioni in cui è suddiviso lo spazio fisico occupato dal circuito, si può individuare un *super-guscio* tale che :

- Il super-guscio delimita alcune regioni, sia e.p. sia n.p., di cui alcune connesse da varchi. Lo spazio interno al super-guscio costituisce una *super-regione* che è necessariamente n.p., poiché contiene al suo interno almeno una regione n.p.
- I varchi attraversanti il super-guscio connettono una regione interna a una esterna. Si può fare in modo che le regioni esterne alla super-regione e connesse a essa siano tutte regioni e.p. Conseguentemente, ogni regione interna a una super-regione e connessa a una regione esterna è necessariamente n.p. Questo ci assicura che la proprietà di bipartizione rimanga conservata.

**Esempio A :** Riprendendo l'esempio 1.4.2B, noi individuiamo una super-regione contenente le regioni n.p. 1, n.p. 2 e n.p. 3, congiuntamente alla regione e.p. 3 che è connessa esclusivamente a queste. Inoltre notiamo che la super-regione è connessa esclusivamente alle regioni e.p. 1, e.p. 2 e e.p. 3. Altre super-regioni sono :

{n.p. 5, n.p. 6, e.p. 6}  
{n.p. 4, n.p. 5, n.p. 6, e.p. 5, e.p. 6}

**Commento :** L'introduzione delle super-regioni in sostituzione di alcune regioni corrisponde a una risuddivisione del medesimo circuito fisico in un numero minore di regioni, di cui alcune occupano porzioni più estese dello spazio fisico.

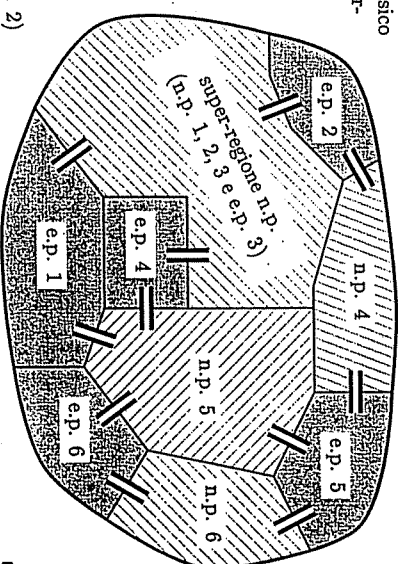


**Esempio B :** Nello spazio fisico dell'esempio A un'unica super-

regione n.p. sostituisce le quattro regioni n.p. 1, n.p. 2 e n.p. 3 e e.p. 3. Conseguentemente il numero complessivo delle regioni n.p. decresce da 6 a 4, quello delle regioni e.p. da 6 a 5 e quello dei varchi da 15 a 11.

Ciascuna delle coppie di varchi (e.p. 2 → n.p. 1 e e.p. 2 → n.p. 2) e (e.p. 1 → n.p. 1 e e.p. 1 → n.p. 2) è sostituita da un unico varco.

**Diaggazione :** Immaginare che un blocco di pietre adiacenti sia rimpiazzato da un unico pietrone all'interno del muro.



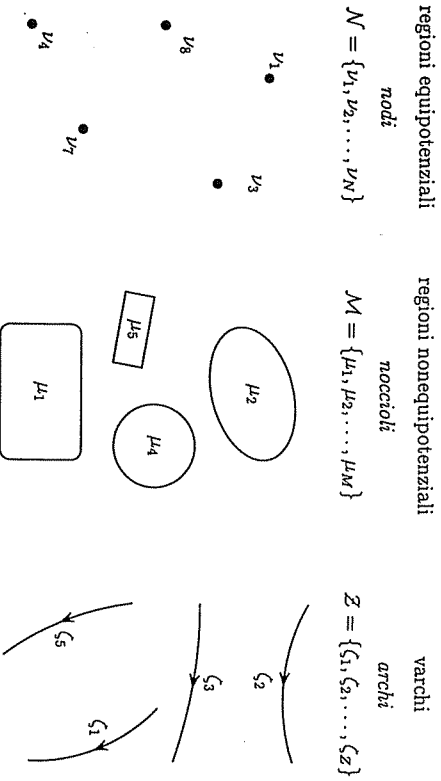
### 1.5 BIGRAFI

I *grafi bipartiti* (detti brevemente *bigrafi*) vengono introdotti per descrivere gli insiemi delle regioni equipotenziali e delle regioni nonequipotenziali e l'insieme dei varchi che le collegano. Il bigrafo di un circuito fisico ci consente una "descrizione più naturale" della cosiddetta *topologia*.

1.5.1 Nodi, noccioli e archi

Interpretiamo la suddetta scomposizione dello spazio da un punto di vista esclusivamente topologico. Infatti la forma e le dimensioni (la cosiddetta geometria) delle regioni e dei varchi non vengono coinvolte direttamente nella costruzione di un modello circuitale (cioè a parametri concentrati). La geometria del circuito sarà coinvolta indirettamente nelle relazioni costitutive (Cap. 5).

**Simboli grafici:** A questo scopo la figura sottostante introduce i seguenti enti topologici, unitamente ai loro simboli grafici, che rappresentano le regioni e.p., n.p. e i varchi:



La freccia che termina gli archi orienta, per convenzione, l'arco dal nodo verso il nocciolo. Qualora necessario, indicheremo ciascuno arco col simbolo  $\zeta_c \equiv v_a \rightarrow \mu_b$ .

**Terminologia:** Introduciamo una terminologia che ci sarà utile nel seguito:

Un arco è *incidente* a un nodo se esce da esso.  
 Un arco è *incidente* a un nocciolo se entra in esso.  
 Un nodo  $v_a$  e un nocciolo  $\mu_b$  sono *adiacenti* se esiste un arco  $\zeta_c$  tale che  $\zeta_c \equiv v_a \rightarrow \mu_b$

1.5.2 Dai nodi, noccioli e archi al bigrafo

Diamo ora la seguente definizione:

**Definizione:** La struttura topologica costituita dagli insiemi dei nodi  $N$ , dei noccioli  $M$  e degli archi  $Z$  e soddisfacente alla proprietà della bipartizione è detta *bigrafo* (dalla contrazione di *grafo bipartito*) e indicata dal simbolo:

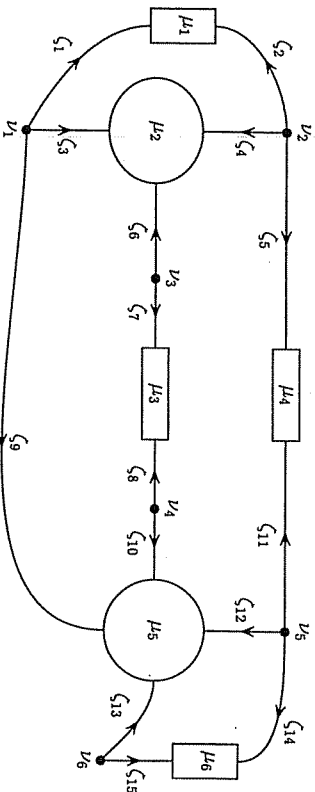
$$B = \{N, M, Z\}$$

dove  $Z \subset N \times M$

**Commento:** Il prodotto cartesiano  $N \times M$  costituisce l'insieme di tutte le possibili coppie nodo-nocciolo. In genere solo una parte delle coppie è effettivamente connessa da un arco e quindi vale la proprietà di inclusione  $Z \subset N \times M$ . Questo risultato è una conseguenza della proprietà di bipartizione a cui soddisfano tutti gli archi in  $Z$ .

**Commento:** Il bigrafo viene rappresentato graficamente unendo in modo naturale i simboli grafici dei nodi, noccioli e archi che lo costituiscono. Questa rappresentazione grafica è usata di fatto anche da chi non introduce i bigrafi.

**Esempio A:** Il bigrafo della suddivisione dello spazio fisico discusso nell'esempio 1.4.2B risulta:



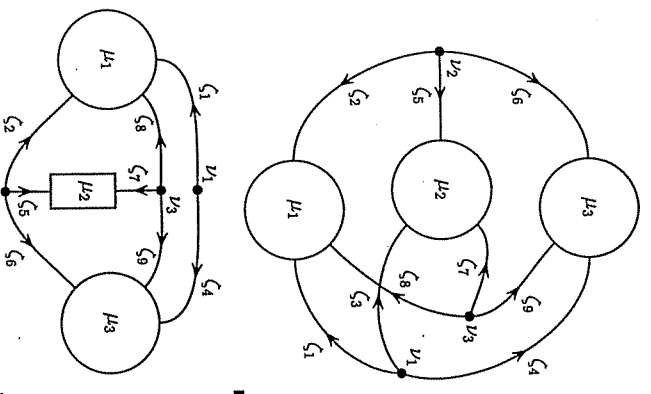
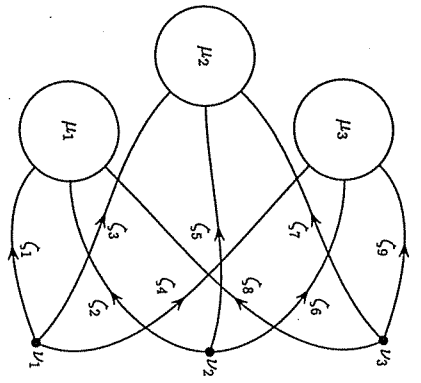
**Definizione:** Per ciascun nodo e nocciolo conviene molto spesso introdurre il rispettivo sottoinsieme degli archi incidenti:

sottoinsiemi degli archi incidenti un singolo nodo:  $Z_n^v \subset Z \quad \forall v_n \in N$

sottoinsiemi degli archi incidenti un singolo nocciolo:  $Z_m^\mu \subset Z \quad \forall \mu_m \in M$

**Bigrafi planari e nonplanari:** Il bigrafo è detto *planare* se può essere tracciato su un foglio senza incroci tra i segmenti di linea che rappresentano gli archi. Altrimenti, il bigrafo è detto *nonplanare*.

**Esempio B:** Le due figure sottostanti riportano lo stesso bigrafo, costituito da tre nodi, tre noccioli e nove archi, ma tracciato in due modi diversi. Nella prima figura nove coppie di archi,  $(\zeta_2, \zeta_3)$ ,  $(\zeta_2, \zeta_4)$ ,  $(\zeta_3, \zeta_4)$ ,  $(\zeta_4, \zeta_5)$ ,  $(\zeta_4, \zeta_7)$ ,  $(\zeta_4, \zeta_8)$ ,  $(\zeta_5, \zeta_8)$ ,  $(\zeta_6, \zeta_7)$  e  $(\zeta_6, \zeta_8)$ , si intersecano. Nella seconda, avendo riposizionato il nodo  $v_2$ , solamente gli archi  $\zeta_7$  e  $\zeta_8$  si intersecano. Comunque, non essendo possibile ridisegnare il bigrafo senza alcun incrocio, il bigrafo risulta nonplanare.



**Esempio C** : La figura sulla destra riporta un bigrafo, derivato da quello delle due figure precedenti sopprimendo l'arco  $\zeta_3$ . Esso è costituito da tre nodi, tre noccioli e otto archi e risulta "evidentemente" planare, essendo privo di incroci tra gli archi.

**Divagazione** : Immaginare che il suddetto muro sia formato da un unico strato (verticale) di pietre, cioè che ogni pietra tocchi entrambe le pareti esterne del muro. Oppure si può pensare allo strato di cubetti di porfido che pavimentano una piazza e alle piastrelle che formano il pavimento di una cucina.

**Commento** : Dal punto di vista fisico questo significa che le regioni costituiscono un unico strato nello spazio fisico.

**1.5.3 Tabella degli archi**

La tabella degli archi costituisce una rappresentazione del bigrafo equivalente e alternativa a quella grafica. Essa è basata proprio sulla "natura bipartita" del bigrafo e mette in evidenza le relazioni degli archi con i nodi e noccioli.

Assegnare le righe e colonne in corrispondenza binivoca con i nodi  $\nu \in N$  e noccioli  $\mu \in M$ , rispettivamente.

Collocare ogni arco  $\zeta_i \equiv \nu_a \rightarrow \mu_b \in Z$  all'incrocio della riga  $\nu_a$  e della colonna  $\mu_b$ , lasciando vuoti i restanti incroci.

**Esempio A** : Con riferimento al bigrafo planare dell'Esempio 1.5.2A si ha la tabella degli archi qui a fianco :

	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$	$\mu_6$
$\nu_1$	$\zeta_1$	$\zeta_3$			$\zeta_9$	
$\nu_2$	$\zeta_2$	$\zeta_4$		$\zeta_5$		
$\nu_3$		$\zeta_6$	$\zeta_7$			
$\nu_4$			$\zeta_8$		$\zeta_{10}$	
$\nu_5$				$\zeta_{11}$	$\zeta_{12}$	$\zeta_{14}$
$\nu_6$				$\zeta_{13}$	$\zeta_{15}$	
	$Z_1^\mu$	$Z_2^\mu$	$Z_3^\mu$	$Z_4^\mu$	$Z_5^\mu$	$Z_6^\mu$

**Commento** : In accordo alle definizioni date nel Par. 1.5.2, accanto alla tabella sono indicati i sottoinsiemi di archi incidenti lo stesso nodo  $Z_n^\mu$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) e quelli incidenti lo stesso nocciolo  $Z_n^\mu$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ). Giacuno di questi sottoinsiemi occupa una riga o colonna della tabella.

**1.6 COMPONENTI DI UN BIGRAFO**

I bigrafi sono scomposti in componenti semplici, costituiti da un nocciolo (regione n.p.) e dagli archi incidenti, che prendono il nome di terminali del componente. A loro volta i componenti semplici possono essere aggregati per formare i componenti composti: ognuno di essi è strettamente legato a una super-regione (vedere Par. 1.4.3). L'introduzione dei componenti composti ci consente di semplificare in un modo rigoroso il bigrafo e, in conclusione, il modello del circuito fisico. Questo problema verrà ripreso dopo l'introduzione delle relazioni costitutive (CCap. 7, 13).

**1.6.1 Componenti semplici**

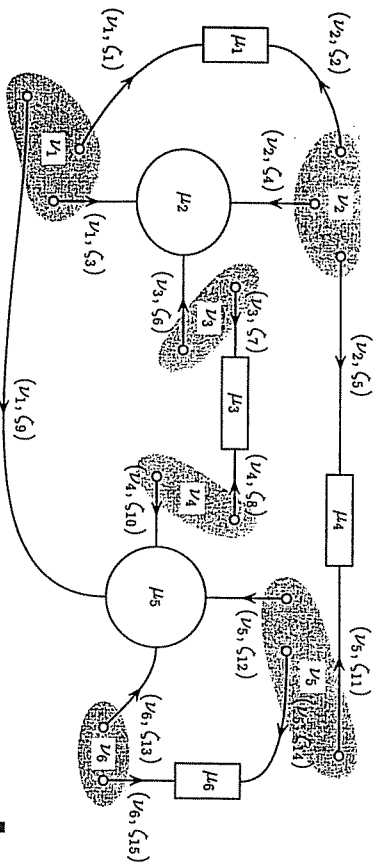
All'interno di un qualsiasi bigrafo possiamo individuare i componenti semplici :

**Definizione** : Un singolo nocciolo unitamente agli archi incidenti a esso e ai nodi adiacenti caratterizza un componente (semplice).

**Definizione** : Gli archi incidenti al nocciolo di un componente semplice unitamente ai nodi adiacenti costituiscono i terminali (semplici) del componente. Ciascun terminale semplice viene indicato dalla corrispondente coppia nodo-arco ( $\nu_a, \zeta_i$ ).

**Commento** : Dal momento che in un nodo sono incidenti più terminali di componenti semplici diversi, possiamo concludere che ogni terminale di un componente è connesso a uno o più terminali di altri componenti.

**Esempio A** : Il bigrafo dell'esempio 1.5.2A risulta scomposto in sei componenti semplici. Notare che ciascun nodo contribuisce a formare ciascuno dei terminali corrispondenti agli archi incidenti ad esso.



componente	terminali
bipolo	2
tripolo	3
quadripolo	4
multipolo	3, 4, 5, ...
k-polo	k

**Definizione :** I componenti sono distinti in base al numero di terminali in accordo alla tabella a fianco. I suddetti nomi sono ottenuti anteponendo il prefisso numerico indicante il numero di terminali (*bi-*, *tri-*, *quadri-*, ...) al nome *polo*, termine alternativo per indicare un terminale.

**Terminologia :** In questi appunti il nome *polo* è riservato ai valori dell'argomento di una funzione complessa di variabile complessa, nei quali la funzione assume valore infinito (vedere Cap. 21) . Questa scelta ci consente di evitare frasi di questo tipo :

questo componente ha due poli (terminali) e la sua impedenza ha tre poli, un transistor bipolare ha tre poli (terminali)

**1.6.2 Componenti composti**

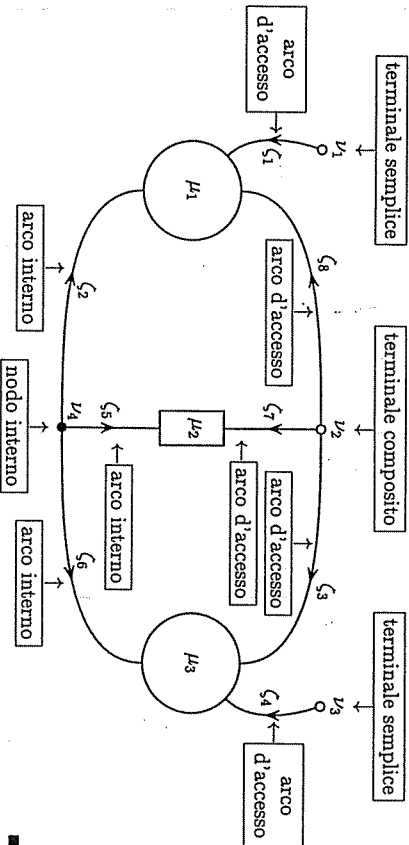
Sia data una super-regione (vedere Par. 1.4.3), contenente al suo interno sia regioni n.p. (nodi) sia e.p. (nodi) e i varchi tra di essi (archi) :

**Definizioni :** L'aggregazione degli elementi interni a una super-regione costituisce un *componente composto*. Al suo interno vengono definiti :

1. **Nodi interni :** sono i nodi interni al componente composto. Essi corrispondono alle regioni n.p. interne alla super-regione.
2. **Nodi interni :** sono i nodi interni al componente composto. Essi risultano connessi esclusivamente a nodi interni e corrispondono alle regioni e.p. interne alla super-regione. In casi semplici (per esempio, nella connessione parallelo di bipoli) essi possono essere assenti.
3. **Archi interni :** sono gli archi incidenti esclusivamente a un nodo interno e a un nocciolo interno. Se i nodi interni sono assenti, anch'essi sono assenti.

4. **Archi d'accesso :** sono gli archi incidenti esclusivamente a un nodo esterno e a un nocciolo interno. Ognuno di essi connette la super-regione a una regione e.p. (nodo) esterna al super-guscio.
5. **Nodi d'accesso :** sono i nodi esterni alla super-regione e connessi ad essa per mezzo di uno o più archi d'accesso. Quindi essi sono adiacenti ad almeno una regione n.p. interna alla super-regione e ad almeno una regione n.p. esterna ad essa.
6. **Terminali semplici :** se un unico arco d'accesso è incidente a un nodo d'accesso di un componente composto, il nodo e l'arco d'accesso, costituiscono un *terminale semplice*, analogamente ai terminali dei componenti semplici.
7. **Terminali composti :** se due o più archi d'accesso sono incidenti a un nodo d'accesso di un componente composto, il nodo, unitamente agli archi costituiscono un *terminale composto*.

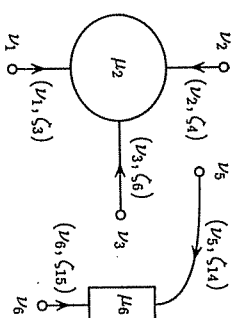
**Esempio A :** Il tripolo composto in figura è costituito da due tripoli semplici (definiti dai rispettivi nodi  $\mu_1$  e  $\mu_3$ ) e un bipolo semplice (definito dal nocciolo  $\mu_2$ ). I terminali del tripolo composto, due semplici e uno composto, sono indicati in figura assieme agli archi d'accesso ed evidenziati dai cerchietti che denotano i rispettivi nodi d'accesso. Infine sono indicati i tre archi interni, ciascuno incidente all'unico nodo interno ( $\nu_4$ ), rappresentato da un pallino nero :



**Componenti composti separabili:** Un componente composto può essere topologicamente separabile nel senso che può essere caratterizzato da noccioli tra loro completamente sconnessi: per esempio un componente formato da due noccioli, senza alcun nodo adiacente a entrambi. Questi particolari componenti composti sono di interesse limitato.

**Esempio B:** nel bigrafo dell'esempio 1.5.2A il componente composto definito dalla coppia  $(\mu_2, \mu_6)$  risulta separato in due componenti semplici.

**Commento:** Quando un componente composto è separabile, tutti i suoi terminali sono necessariamente semplici e viceversa.



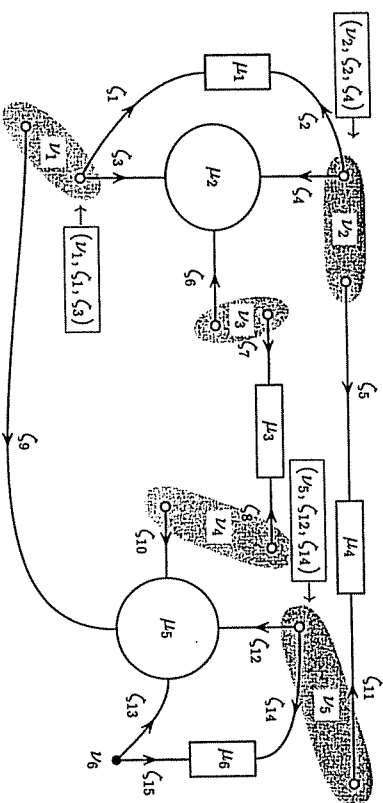
### 1.7 SCOMPOSIZIONI PARZIALI DI UN BIGRAFO

L'introduzione dei componenti composti consente diverse scomposizioni (parziali) dello stesso bigrafo. Alcuni esempi illustrano quelle più interessanti: esse sono basate sul fatto che alcuni dei componenti semplici possono rimanere uniti per formare componenti composti. Queste scomposizioni ci consentono di semplificare in modo rigoroso il bigrafo e, in conclusione, il modello del circuito fisico.

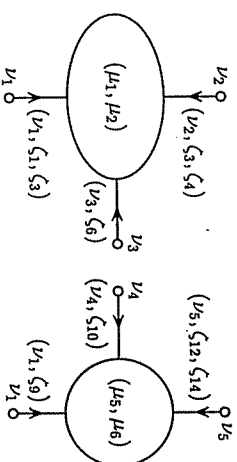
#### 1.7.1 Alcuni esempi

L'introduzione dei componenti composti comporta la possibilità di scomporre parzialmente un bigrafo, nel senso che la scomposizione può lasciare aggregati alcuni dei componenti (semplici) dando origine ad alcuni componenti composti.

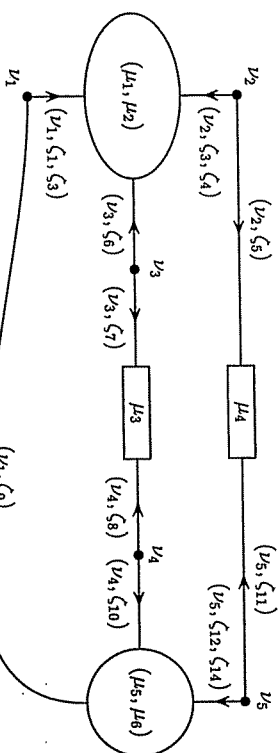
**Esempio A:** Il bigrafo dell'esempio 1.5.2A è scomposto in due tripoli composti, definiti dalla rispettive coppie di noccioli  $(\mu_1, \mu_1)$  e  $(\mu_5, \mu_6)$ , e due bipoli semplici, come illustrato in figura.



La figura a fianco mette in evidenza i terminali semplici e composti dei due tripoli. Il tripolo definito dalla coppia  $(\mu_1, \mu_2)$  presenta due terminali composti,  $(v_1, \sigma_1, \sigma_3)$  e  $(v_2, \sigma_2, \sigma_4)$ , e uno semplice,  $(v_3, \sigma_6)$ , mentre quello definito dalla coppia  $(\mu_5, \mu_6)$  presenta un terminale composto,  $(v_5, \sigma_{12}, \sigma_{14})$ , e due semplici,  $(v_1, \sigma_9)$  e  $(v_4, \sigma_{10})$ .



La seguente figura riporta il bigrafo del Par. 1.5.2 in cui i due tripoli composti discussi precedentemente sono rimpiazzati da due tripoli semplici:



**Commento:** Diverse scomposizioni dello stesso bigrafo sono possibili. Ogni componente composto può essere visto come l'aggregazione di componenti semplici (uno per ogni nocciolo). Il numero dei terminali di un componente composto è inferiore o al più uguale alla somma del numero di terminali dei componenti aggregati.

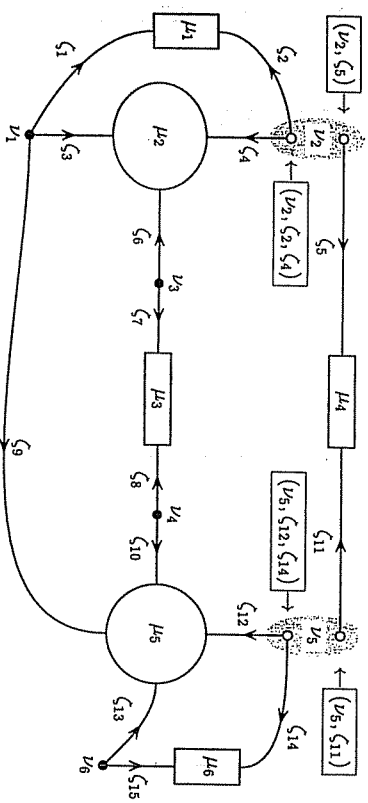
#### 1.7.2 Scomposizione in due componenti complementari

Supponiamo di estrarre un componente, sia semplice sia composto, da un bigrafo:

**Definizione:** Il componente (in genere composto) che raggruppa al suo interno tutti i noccioli non appartenenti a un altro componente (sia semplice sia composto) è detto **componente complementare** di quest'ultimo.

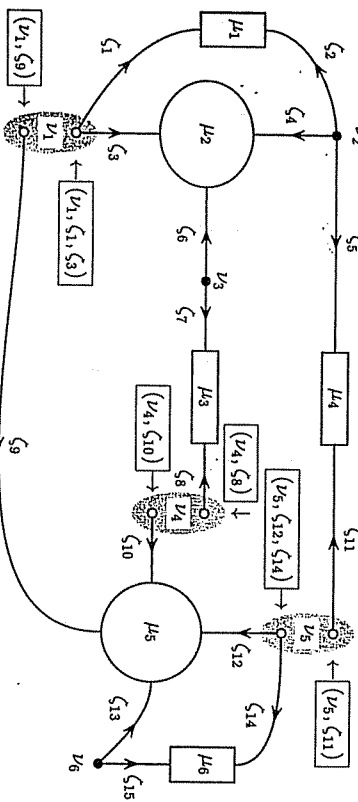
Molte diverse scomposizioni di un bigrafo in una coppia di componenti complementari sono possibili. Per esempio qui riportiamo quattro diverse scomposizioni del bigrafo del Par. 1.5.2 in due componenti complementari:

**Esempio A:** Il bigrafo viene scomposto in un bipolo semplice (definito dal nocciolo  $\mu_4$ ) e nel bipolo composto complementare (definito dai noccioli  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_5$  e  $\mu_6$ ):



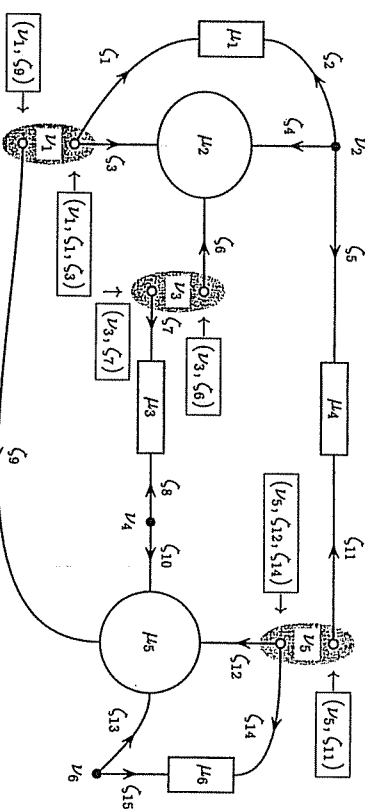
Entrambi i terminali del bipolo composto sono composti, mentre esistono quattro nodi ( $v_2, v_3, v_4, v_5$ ) interni al bipolo stesso.

**Esempio B :** Il bigrafo viene scomposto in un due tripoli composti (complementari), il primo definito dai noccioli  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  e  $\mu_4$  e il secondo dai noccioli  $\mu_5$  e  $\mu_6$  :



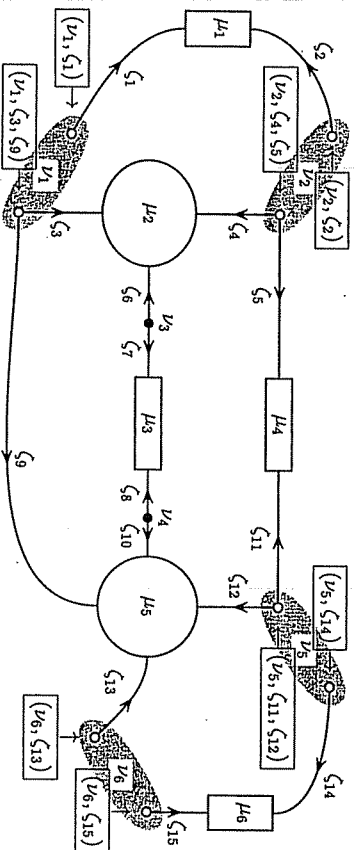
Entrambi i tripoli composti sono dotati di due terminali semplici e uno composto e hanno, rispettivamente, due ( $v_2$  e  $v_3$ ) e uno ( $v_6$ ) nodi interni.

**Esempio C :** Anche in questo caso il bigrafo viene scomposto in un due tripoli composti (complementari), il primo definito dai noccioli  $\mu_1, \mu_2$  e  $\mu_4$  e il secondo dai noccioli  $\mu_3, \mu_5$  e  $\mu_6$  :



Come nell'esempio B, entrambi i tripoli composti sono dotati di due terminali semplici e uno composto. I nodi interni sono, rispettivamente, uno ( $v_2$ ) e due ( $v_3$  e  $v_4$ ).

**Esempio D :** Individuiamo nel bigrafo il quadripolo composto definito dai noccioli  $\mu_2, \mu_3, \mu_4$  e  $\mu_5$ . In questo caso il quadripolo composto complementare, definito dai noccioli  $\mu_1$  e  $\mu_6$ , risulta separato in due bipoli semplici :



Il quadripolo composto è dotato di tre terminali composti e uno semplice e di due nodi interni ( $v_3$  e  $v_4$ ).

**Commento :** Nei successivi sviluppi di questo testo vedremo come la scomposizione parziale di un circuito in componenti semplici e/o composti sia molto importante per semplificare l'analisi e il progetto di un circuito.



## 1.8 COMPONENTI FISICI

Questa sezione mette in relazione i precedenti concetti sui componenti e le scomposizioni di un bigrafo con i componenti e le scomposizioni fisiche incontrati nella realtà di ogni giorno.

### 1.8.1 Terminali dei componenti fisici

I terminali dei componenti fisici vengono in genere facilmente distinti dalla loro forma geometrica dovuta al fatto che essi sono costruiti per facilitare la connessione elettrica con gli altri componenti. Infatti, vengono prima costruiti i componenti fisici e successivamente vengono connessi per realizzare il circuito fisico. Essi sono costituiti e/o almeno ricoperti da materiale conduttore (rame, stagno, ottone, argento, oro, ...) per rendere funzionale la connessione. Questi terminali fisici sono usualmente chiamati con un nome apposito che ricorda in genere la loro forma, per esempio :

- *Morsetto* : indica in genere un terminale fisico nei circuiti di potenza. Per esempio i morsetti della batteria di un'automobile.
- *Pinza* : indica un terminale fisico dei cavi di un carica-batterie di un'automobile.
- *Piedino* : indica in genere un terminale fisico dei transistori ovvero un terminale (esterno) dei circuiti integrati usati nei circuiti per l'informazione.
- *Spina* : indica una coppia o una terna di terminali fisici negli apparati domestici e industriali e assume forme diverse. Molto spesso vi è un tetro (nelle apparecchiature domestiche) o quarto terminale (nelle apparecchiature industriali) che, come previsto dalle norme per la sicurezza, serve a connettere a terra la carcassa metallica dell'apparecchiatura.
- *Prasa* : indica una coppia o una terna di terminali fisici presenti in ogni stanza di un alloggio o ufficio per la connessione dei più svariati apparecchi elettrici all'impianto di alimentazione domestico. Sono presenti anche all'interno di uno stabilimento industriale una con forme diverse. Anche in questo caso è in genere presente un ulteriore terminale per la messa a terra.
- *Poli* : indicano i terminali fisici di una batteria usata; essi sono costituiti da superfici piane metalliche.
- *Attacco a vite* : esso ha lo scopo di connettere, sia elettricamente sia meccanicamente, le lampade a incandescenza di uso domestico. Uno dei terminali è costituito dalla *vite* (superficie metallica con geometria elicoidale), mentre l'altro è costituito dal *fondello* (goccia di stagno sul fondo dell'attacco).
- *Attacco a baionetta* : esso ha lo scopo di connettere, sia elettricamente sia meccanicamente, le lampade montate all'interno dei fari e delle luci di posizione degli autoveicoli. I due terminali sono costituiti da due alette laterali.

*Circuiti integrati* : I cosiddetti circuiti integrati sono diffusissimi nella presente tecnologia dei circuiti per l'informazione : senza di essi non esisterebbero gli attuali personal

*computer*. A dispetto del nome, i circuiti integrati sono componenti (e non circuiti) composti da centinaia, migliaia, ... di componenti più semplici e costruiti in un unico blocco. Questo spiega l'origine del termine "integrato". I terminali interni al blocco hanno perso la funzione originaria e pertanto non sono affatto distinguibili per la loro forma geometrica. D'altra parte, solo un *matto integrale* potrebbe concepire la sostituzione di un singolo transistor all'interno di un circuito integrato (*chip*).

### 1.8.2 Scomposizione dei componenti fisici

La scomposizione di un bigrafo in componenti, sia semplici sia composti, non corrisponde necessariamente a una scomposizione del circuito fisico in componenti fisici.

L'individuazione dei componenti all'interno di un circuito fisico consiste nel definire i componenti che formano il circuito, il loro numero di terminali e le loro connessioni :

*La differenza tra componente semplice e componente composto non ha un valore assoluto ma solamente relativo: si può solamente affermare che un componente è "più semplice" di un altro in quanto è interno a quest'ultimo.*

*In linea di principio questo processo di scomposizione, se ripetuto infinite volte, conduce a una descrizione di tipo distribuito del fenomeno elettrico.*

*Divagazione* : In quanti sottocumuli di pietre può essere suddiviso un cumulo costituito da 10000 pietre ? Per esempio, in 100 cumuli di 100 pietre ciascuno, ovvero in 10000 cumuli di una pietra ciascuno. Ma se rompo con una mazza ogni pietra del cumulo originario, esso può essere suddiviso, per esempio, in un milione di cumuli di 1000 frammenti ciascuno. In linea di principio, mal di schiena a parte, questa frantumazione può essere ripetuta infinite volte riducendo l'orteginario cumulo di pietre a un mucchio di  $\infty$  granelli di sabbia.

Ma allora sono meglio i modelli a parametri concentrati o quelli a parametri distribuiti ? L'autore preferisce abitare in una casa a parametri concentrati (coi muri in blocchi di pietra) che in una casa a parametri distribuiti (coi muri in sabbia). ■

*Questi* : Provi il lettore a dare una risposta ai seguenti problemi :

Un filo di rame lungo 3 metri da quanti componenti deve essere caratterizzato ?

Un filo di rame lungo 30 metri ?

Un amplificatore operazionale ?

E i circuiti presenti nel vostro telefonino ?

Neppure il costruttore del vostro personal computer sarebbe in grado di dirvi il numero di componenti che vi sono al suo interno, dal momento che vi sono molti criteri possibili per contarli e che egli preferisce contare i calcolatori che piazza sul mercato piuttosto che il numero totale di componenti contenuti in ciascuno di essi. ■

## 2 GRANDI EZZE ELETTRICHE

WWWWWW??? FIGURA EMBLEMA fare bigrafo con segnate tensioni formanti una sequenza chiusa tra i terminali di un multipolo e correnti nei terminali di un multipolo ???WWWWWWWW  
WWWWWWWW RIVEDERE

Questo capitolo introduce le grandezze elettriche sulla struttura fisica descritta dai bigrafi nel precedente capitolo : potenziale elettrico, tensione elettrica, corrente elettrica congiuntamente alla potenza elettrica virtuale e al lavoro elettrico virtuale. Vengono enunciate le leggi di KIRCHHOFF e il Teorema della potenza virtuale. Infine esso introduce i più noti *gruppi (monopartiti)*.

**Sez. 2.1 : Convergenza e divergenza :** Le funzioni d'arco definite sull'insieme degli archi di un bigrafo, consentono di introdurre la funzione *convergenza* su ogni nocciolo e la funzione *divergenza* su ogni nodo. Queste funzioni consentiranno, più avanti, di unificare e semplificare la descrizione delle leggi fisiche a cui sono soggette le grandezze elettriche che descrivono i circuiti.

**Sez. 2.2 : Grandezze elettriche e Leggi di Kirchhoff :** Le grandezze fondamentali presenti nei circuiti sono il *potenziale*, la *tensione* e la *corrente* : esse sono applicazioni degli insiemi dei nodi e degli archi sull'insieme delle funzioni reali del tempo. Le loro proprietà cioè le ben note *Leggi di KIRCHHOFF delle tensioni e delle correnti* sono presentate in una forma adatta ai bigrafi.

**Sez. 2.3 : Potenza e lavoro virtuali :** *teoremi e corollari* : La *potenza virtuale* e il *lavoro virtuale* sono definiti come applicazioni degli insiemi dei noccioli sull'insieme delle funzioni reali del tempo. Vengono presentati i *teoremi della potenza virtuale e del lavoro virtuale* e i loro rispettivi corollari. Essi costituiscono una formulazione alternativa del *Teorema di TELLEGEN*.

**Sez. 2.4 : Tensioni e correnti indipendenti e bipoli fittizi di un multipolo :** Le  $k-1$  tensioni e  $k-1$  correnti indipendenti di un generico  $k$ -polo sono scelte col metodo dell'albero di bipoli fittizi. Conseguentemente la potenza virtuale risulta uguale al prodotto scalare dei vettori delle tensioni e correnti indipendenti e ciascun  $k$ -polo presente nel bigrafo può essere sostituito da un'aggregazione di  $k-1$  bipoli fittizi (*porte*) riducendo il bigrafo a un usuale *gruppo (gruppo monopartito)*, costituito da nodi e rami.

### 2.1 CONVERGENZA E DIVERGENZA

Vengono introdotte le *funzioni d'arco* sull'insieme degli archi di un bigrafo. La loro definizione consente, a sua volta, di introdurre le *funzioni convergenza* sull'insieme dei noccioli e componenti e le *funzioni divergenza* sull'insieme dei nodi. Queste funzioni sono, per il momento, prive di un significato fisico : la loro importanza risulterà chiara nelle sezioni seguenti, in cui esse consentiranno di unificare e semplificare la descrizione delle leggi fisiche a cui sono soggette le grandezze elettriche presenti nei circuiti.

#### 2.1.1 Simbologia delle funzioni reali del tempo

Richiamiamo qui di seguito la notazione che useremo per le funzioni reali del tempo  $t$  :

- $\mathbb{R}^1$  denota l'insieme di tutti i numeri reali  $(-\infty, +\infty)$ , cioè uno spazio lineare di dimensione 1.
- $\mathbb{R}_t$  denota l'asse dei tempi, cioè l'insieme di tutti i valori reali  $(-\infty, +\infty)$ , che la variabile tempo  $t$  può assumere.
- $\mathbb{R}^k$  denota l'insieme di tutte le  $k$ -uple ordinate di numeri reali, cioè uno spazio lineare di dimensione  $k$ .
- $\mathbb{R}^{n \times m}$  denota l'insieme di tutte le  $(n \times m)$ -uple di numeri reali ordinate in una matrice, cioè uno spazio lineare di dimensione  $n \times m$ .
- $\mathbb{R}^1(t)$  denota l'insieme di tutte le funzioni reali di  $t$  cioè del tipo  $\mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^1$ .
- $\mathbb{R}^k(t)$  denota l'insieme di tutte le  $k$ -uple delle funzioni reali in  $\mathbb{R}^1(t)$  o, equivalentemente, l'insieme di tutte le funzioni del tipo  $\mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^k$  ovvero l'insieme di tutti i vettori di  $k$  elementi dipendenti dal tempo  $t$ .
- $\mathbb{R}^{n \times m}(t)$  denota l'insieme di le  $(n \times m)$ -uple di funzioni reali  $\mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^1$  ovvero l'insieme di tutte le matrici di  $n \times m$  elementi dipendenti dal tempo.

#### 2.1.2 Funzione d'arco, vettore e matrice delle funzioni d'arco

Introduciamo una funzione sull'insieme degli archi, senza specificarne il significato fisico :  
**Definizione :** Sia definita su ogni arco una funzione del tempo, detta appunto *funzione d'arco* : cioè sia introdotta un'applicazione dell'insieme degli archi sull'insieme delle funzioni reali del tempo :

$$\left. \begin{array}{l} \zeta_1 \rightarrow f_1(t) \\ \zeta_2 \rightarrow f_2(t) \\ \vdots \\ \zeta_Z \rightarrow f_Z(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \mathcal{Z} \rightarrow f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_Z(t) \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} f : \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^Z \equiv \mathbb{R}^Z(t) \\ f_Z(t) : \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}^1(t) \end{cases}$$

L'insieme di tutte le funzioni d'arco costituisce un vettore di  $\mathcal{Z}$  funzioni  $\mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^1$ .

**Esempio A :** Sul bigrafo già introdotto nell'esempio 1.5.2A sono riportate le funzioni d'arco,  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_{15}(t)$  :



### 2.1.4 Divergenza

Data una qualsiasi funzione d'arco  $f(t)$  definita in un bigrafo, la *divergenza* viene definita come un'applicazione dell'insieme dei nodi sull'insieme delle funzioni reali :

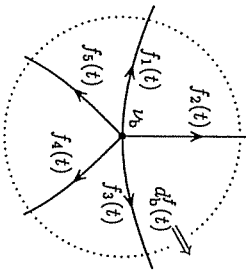
**Definizione :** La *divergenza* di  $f(t)$  nel generico nodo  $\nu_n$  è definita come la somma delle funzioni d'arco in  $f(t)$  corrispondenti agli archi incidenti il nodo (appartenenti a  $\mathcal{Z}_n'$ ) :

$$\left. \begin{array}{l} \nu_1 \rightarrow d_1^f(t) \\ \nu_2 \rightarrow d_2^f(t) \\ \vdots \\ \nu_N \rightarrow d_N^f(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{N} \rightarrow d^f(t) = \begin{bmatrix} d_1^f(t) \\ d_2^f(t) \\ \vdots \\ d_N^f(t) \end{bmatrix} \quad \text{dove } d_n^f(t) = \sum_{\zeta \in \mathcal{Z}_n'} f_\zeta(t) \quad \forall \nu_n \in \mathcal{N}$$

La divergenza nei nodi  $d^f(t)$  è una funzione  $\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}^N \equiv \mathcal{R}^{N'}(t)$ .

**Esempio A :** la divergenza  $d_{\nu_b}^f(t)$  della funzione d'arco  $f(t)$  nel nodo  $\nu_b$  in figura risulta uguale a :

$$d_{\nu_b}^f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t) + f_5(t) = 0$$



Ai lettori che hanno confidenza con le matrici può essere più gradita una definizione alternativa più compatta, tramite la matrice delle funzioni d'arco  $F(t)$  :

$$d^f(t) = F(t) \mathbf{u}_M$$

dove  $\mathbf{u}_M$  indicano i vettori di  $M$  elementi tutti uguali a 1. Infatti, la somma degli elementi di una riga di  $F(t)$  coincide con la divergenza nel corrispondente nodo.

**Esempio B :** Indichiamo le divergenze dei nodi del bigrafo dell'esempio 2.1.2A per mezzo della tabella degli archi :

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) & f_2(t) & 0 & 0 & f_6(t) & 0 & 0 \\ f_2(t) & f_2(t) & 0 & f_5(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_6(t) & f_7(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_8(t) & 0 & f_{10}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{11}(t) & f_{12}(t) & f_{14}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{13}(t) & f_{15}(t) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow d_1^f(t) \\ \leftarrow d_2^f(t) \\ \leftarrow d_3^f(t) \\ \leftarrow d_4^f(t) \\ \leftarrow d_5^f(t) \\ \leftarrow d_6^f(t) \end{array}$$

### 2.1.5 Teorema e corollario della convergenza e divergenza

Il seguente teorema è fondamentale per i bigrafi :

**Teorema :** La somma delle divergenze di una funzione d'arco qualsiasi  $f(t)$  estesa a tutti i nodi è uguale alla somma delle convergenze estesa a tutti i noccioli :

$$\sum_{\nu_n \in \mathcal{N}} d_n^f(t) = \sum_{\mu_m \in \mathcal{M}} c_m^f(t)$$

**Prova :** La funzione di ciascun arco  $\zeta \equiv \nu \rightarrow \mu$  compare sia nella divergenza del nodo  $\nu$  (nella sommatoria a primo membro) sia nella convergenza del nocciolo  $\mu$  (nella sommatoria a secondo membro). Quindi le due sommatorie risultano uguali.

Per gli appassionati di matrici, la dimostrazione può essere ripetuta in modo più formale ma meno efficace :

$$\begin{cases} \sum_{\nu_n \in \mathcal{N}} d_n^f(t) = [\mathbf{u}_N]^T d^f(t) = [\mathbf{u}_N]^T F(t) \mathbf{u}_M = [\mathbf{u}_M]^T [F(t)]^T \mathbf{u}_N \\ \sum_{\mu_m \in \mathcal{M}} c_m^f(t) = [\mathbf{u}_M]^T c^f(t) = [\mathbf{u}_M]^T [F(t)]^T \mathbf{u}_N = [\mathbf{u}_N]^T F(t) \mathbf{u}_M \end{cases}$$

Il suddetto teorema da origine ad un corollario, che può essere applicato a un qualsiasi componente composto :

**Corollario :** La convergenza  $c_{\text{com}}^f(t)$  di una qualsiasi funzione d'arco  $f$  in un componente composto è uguale alla somma delle convergenze estesa al sottoinsieme  $\mathcal{M}^{\text{int}} \subset \mathcal{M}$  dei noccioli interni meno la somma delle divergenze estesa al sottoinsieme  $\mathcal{N}^{\text{int}} \subset \mathcal{N}$  dei nodi interni :

$$c_{\text{com}}^f(t) = \sum_{\mu_m \in \mathcal{M}^{\text{int}}} c_m^f(t) - \sum_{\nu_n \in \mathcal{N}^{\text{int}}} d_n^f(t)$$

**Prova :** La somma delle convergenze dei noccioli interni (sottoinsieme  $\mathcal{M}^{\text{int}} \subset \mathcal{M}$  contiene le funzioni d'arco degli archi interni e degli archi d'accesso, mentre la somma delle divergenze dei nodi interni (sottoinsieme  $\mathcal{N}^{\text{int}} \subset \mathcal{N}$ ) contiene solamente le funzioni d'arco degli archi interni. Quindi la differenza di queste due sommatorie a secondo membro è uguale alla somma delle funzioni d'arco degli archi d'accesso, che coincide, per definizione, con la convergenza del componente composto.

## 2.2 GRANDEZZE ELETTTRICHE E LEGGI DI KIRCHHOFF

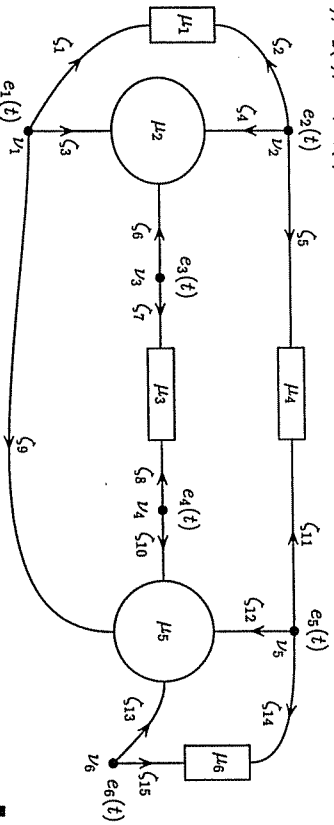
Ora siamo in grado di introdurre le grandezze fondamentali sui bigrafi per descrivere i fenomeni elettrici all'interno dei circuiti. In ordine vengono introdotti il *potenziale*, la *tensione* e la *corrente* come applicazioni degli insiemi dei nodi e degli archi sull'insieme delle funzioni reali del tempo. Infine, vengono presentate le loro proprietà cioè le ben note *Leggi di KIRCHHOFF delle tensioni e delle correnti*.

2.2.1 Potenziale elettrico

Definizione : Il potenziale (elettrico) è l'applicazione dell'insieme dei nodi  $\mathcal{N}$  sull'insieme delle funzioni reali del tempo  $\mathbb{R}^1(t)$  :

$$\left. \begin{array}{l} v_1 \rightarrow e_1(t) \\ v_2 \rightarrow e_2(t) \\ \vdots \\ v_N \rightarrow e_N(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{N} \rightarrow e(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_N(t) \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} e_n : \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}^1(t) \\ e : \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^N \equiv \mathbb{R}^N(t) \end{cases}$$

Esempio A : Sul bigrafo introdotto nell'esempio 2.1.2A sono riportati i potenziali elettrici  $e_1(t), e_2(t), \dots, e_6(t)$  :



Commento : Nella definizione delle tensione elettrica (Par. 2.2.2) e della potenza virtuale Par. 2.3.2 si constaterà che ciascun potenziale può essere considerato definito a meno di una funzione additiva arbitraria comune ai potenziali di tutti i nodi. Questo fatto è già noto dal Corso di Fisica.

Unità di misura : L'unità di misura del potenziale elettrico è il volt [V]; comunque esso non può essere "fisicamente" misurato dal momento che è definito a meno di una funzione additiva arbitraria.

2.2.2 Tensione elettrica

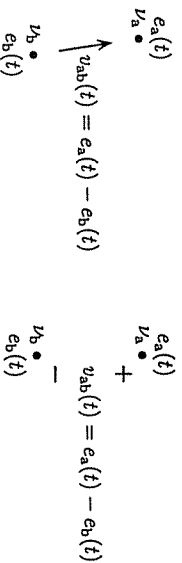
Definizione : Per ogni coppia ordinata di nodi distinti  $(v_a, v_b)$  la tensione (elettrica)  $v$  viene definita dalla differenza dei potenziali nei nodi :

$$\text{coppia di nodi } (v_a, v_b) \xrightarrow{\text{tensione}} v(v_a, v_b) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}, \quad v_a \neq v_b$$

Il doppio indice di ogni tensione denota la coppia di nodi tra cui è definita.

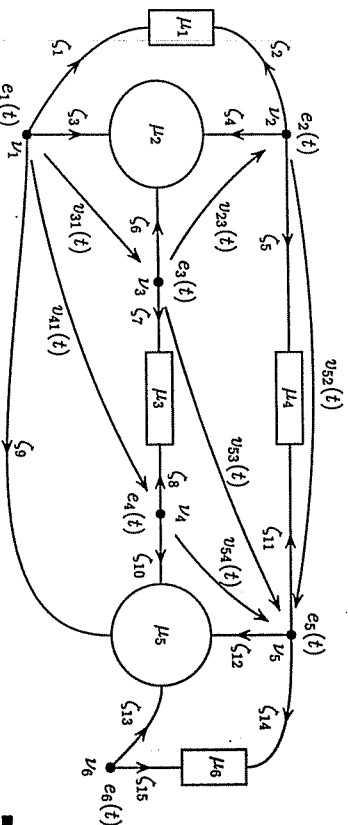
Convenzione grafica : Quando vogliamo indicare su un bigrafo la tensione  $v_{ab}(t)$  tra la coppia di nodi  $(v_a, v_b)$ , noi metteremo un "+" accanto al nodo  $v_a$  e un meno accanto al nodo  $v_b$ . La suddetta notazione può dar luogo ad ambiguità, qualora sullo stesso bigrafo fossero indicate molte altre tensioni : infatti vi sarebbero molti segni "+" e "-"

accanto ai nodi in cui confluiscono molti rami e sarebbe arduo comprendere correttamente l'associazione tra i "+" e i "-". In questi casi si preferisce sostituire ogni coppia "+, -" con una freccia con la punta al posto del "+" e la coda al posto del "-", come riportato nella sottostante figura :



Nella sottostante figura vi è un bigrafo in cui sono riportati i potenziali dei nodi e alcune tensioni :

Esempio A : Sul bigrafo già introdotto nell'esempio 2.1.2A sono riportate alcune tensioni elettriche  $v_{21}(t), v_{23}(t), v_{41}(t), v_{52}(t), v_{54}(t)$  :

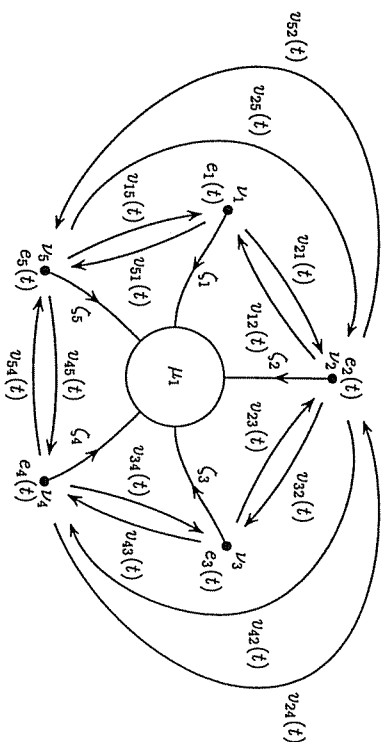


Unità di misura : La tensione elettrica viene misurata in volt [V].

Commento : Con alcune nozioni di calcolo combinatorio è immediato verificare che tra gli  $N$  nodi di un bigrafo sono definite  $N(N-1)$  tensioni. Questo numero diventa elevato anche per valori moderati di  $N$ ; fortunatamente, nell'analisi di un circuito in genere non è necessario prendere in considerazione tutte queste tensioni.

Definizione : Tra i  $k$  terminali di un  $k$ -polo (sia semplice sia composto) possono essere definite  $k(k-1)$  tensioni. Esse vengono dette tensioni del componente.

Esempio B : Nella figura è rappresentato un multipolo con cinque terminali : vi sono riportate quattordici delle  $5 \times (5-1) = 20$  tensioni che sono definite tra i cinque terminali del multipolo. Le restanti tensioni,  $v_{54}(t), v_{53}(t), v_{45}(t), v_{41}(t), v_{43}(t), v_{31}(t), v_{35}(t), v_{34}(t), v_{32}(t), v_{21}(t), v_{25}(t), v_{23}(t), v_{15}(t), v_{14}(t), v_{13}(t)$ , non sono segnate per non appesantire ulteriormente il disegno :

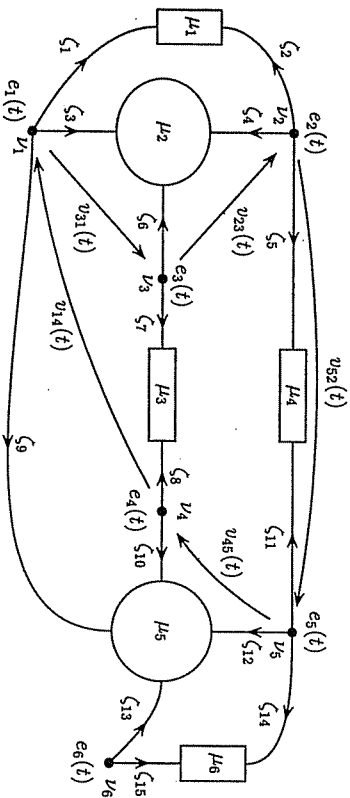


**Proprietà:** Siccome ogni tensione è definita come differenza tra due potenziali, le tensioni non variano se sommiamo una funzione arbitraria a tutti i potenziali.

**2.2.3 Legge di Kirchhoff delle tensioni**

La Legge di KIRCHHOFF delle tensioni, una pietra miliare (1847) della teoria dei circuiti elettrici, è qui enunciata nella sua forma più semplice e, nello stesso tempo, generale :

**Proprietà:** Sia dato un sottoinsieme qualsiasi di nodi  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \subset \mathcal{N}$ . Su di essi definiamo una sequenza ordinata e chiusa di coppie di nodi :  $(v_2, v_1), (v_3, v_2), (v_4, v_3), (v_5, v_4), (v_1, v_5)$ . La somma delle tensioni definite sulla suddetta sequenza di coppie di nodi (vedere figura sottostante) è nulla :



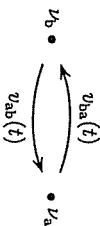
Le tensioni  $v_{31}(t), v_{23}(t), v_{24}(t), v_{45}(t)$  e  $v_{14}(t)$  sono tali che la freccia di ciascuna tocca la coda della precedente : esse formano un percorso chiuso in cui le tensioni sono orientate nel verso orario del percorso.

**Prova:** Con riferimento al bigrato in figura, mettiamo le suddette tensioni in ordine :

$$\begin{array}{cccccccc}
 (v_3, v_1) & , & (v_1, v_4) & , & (v_4, v_5) & , & (v_5, v_2) & , & (v_2, v_3) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 v_{31}(t) & + & v_{14}(t) & + & v_{45}(t) & + & v_{52}(t) & + & v_{23}(t) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \underbrace{e_3(t) - e_1(t)} + \underbrace{e_1(t) - e_4(t)} + \underbrace{e_4(t) - e_5(t)} + \underbrace{e_5(t) - e_2(t)} + \underbrace{e_2(t) - e_3(t)} & = & 0
 \end{array}$$

Il potenziale di ogni nodo presente nella sequenza, compare due volte a primo membro, una volta con segno "+" e l'altra con segno "-", annullandosi, mentre i potenziali dei nodi non facenti parte della sequenza non compaiono affatto.

**Caso particolare:** Se la sequenza ordinata e chiusa è costituita dalle seguenti coppie di nodi  $(v_a, v_b)$  e  $(v_b, v_a)$ , si ha immediatamente :  $v_{ab}(t) = -v_{ba}(t)$ .



**2.2.4 Flusso**

Congiuntamente alla tensione conviene introdurre anche il **flusso** :

**Definizione:** Il **flusso** è definito come integrale della tensione. La costante d'integrazione  $\phi(t_0)$ , in mancanza di ulteriori informazioni, è considerata arbitraria :

$$\phi(t) = \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + \phi(t_0)$$

**Unità di misura:** Il flusso viene misurato in weber [Wb].

**Commento:** Il flusso, benché sia stato qui definito come integrale della tensione lungo un dato intervallo di tempo può essere interpretato indipendentemente. Partendo dalla equazione di MAXWELL in forma integrale (vedere Corso di Fisica) :

$$\text{flusso} : \phi(t) = \text{integrale di superficie dell'induzione magnetica } \mathbf{B}(t)$$

**Commento:** Con riferimento a un induttore fisico (costituito da un avvolgimento di filo conduttore avvolto attorno a un nucleo (toro) di materiale ferromagnetico), il flusso di  $\mathbf{B}(t)$ , detto brevemente **flusso magnetico** è diverso dal flusso definito come integrale della tensione, per un fattore moltiplicativo  $N_s$ , coincidente col numero delle spire dell'avvolgimento. Infatti la tensione tra i capi dell'avvolgimento (Legge di FARADAY) è :

$$v(t) = -N_s \frac{d\phi(t)}{dt}$$

**La legge di Kirchhoff:** Avendo definito opportunamente le costanti arbitrarie d'integrazione, la legge di KIRCHHOFF delle tensioni vale anche per i flussi :

$$\phi_{31}(t) + \phi_{14}(t) + \phi_{45}(t) + \phi_{52}(t) + \phi_{23}(t) = 0$$

**Prova:** Integriamo i due membri della legge di KIRCHHOFF delle tensioni (Par. 2.2.3) :

$$\int_0^t [v_{31}(\tau) + v_{14}(\tau) + v_{45}(\tau) + v_{52}(\tau) + v_{23}(\tau)] d\tau + \phi_{31}(0) + \phi_{14}(0) + \phi_{45}(0) + \phi_{52}(0) + \phi_{23}(0)$$

Nell'ipotesi che i flussi in  $t = 0$  (cioè le costanti d'integrazione arbitrarie) verifichino la legge di Kirchhoff delle tensioni :

$$\phi_{31}(0) + \phi_{14}(0) + \phi_{45}(0) + \phi_{52}(0) + \phi_{23}(0) = 0$$

si ha immediatamente che i flussi soddisfano alla medesima legge per qualsiasi  $t$  :

$$\phi_{31}(t) + \phi_{14}(t) + \phi_{45}(t) + \phi_{52}(t) + \phi_{23}(t) = 0$$

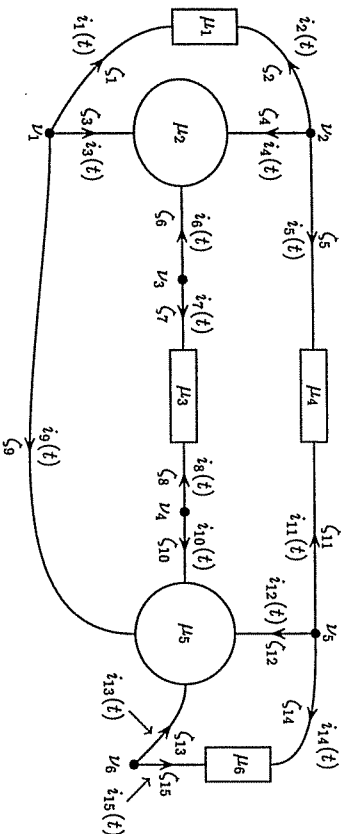
### 2.2.5 Corrente elettrica

Un'altra grandezza elettrica viene introdotta :

**Definizione** : La corrente (elettrica) viene definita come una particolare funzione d'arco: essa è l'applicazione dell'insieme degli archi  $Z$  sull'insieme delle funzioni reali del tempo :

$$\begin{aligned} \zeta_1 \rightarrow i_1(t) \\ \zeta_2 \rightarrow i_2(t) \\ \vdots \\ \zeta_Z \rightarrow i_Z(t) \end{aligned} \Bigg\} \begin{aligned} & Z \rightarrow i(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \vdots \\ i_Z(t) \end{bmatrix} \\ & \text{dove} \begin{cases} i_z : \mathcal{R}_t \rightarrow \mathcal{R}^1 \equiv \mathcal{R}^1(t) \\ i : \mathcal{R}_t \rightarrow \mathcal{R}^Z \equiv \mathcal{R}^Z(t) \end{cases} \end{aligned}$$

**Esempio A** : Sul bigrafo già introdotto nell'esempio 2.1.2A sono riportate le correnti elettriche  $i_1(t), i_2(t), \dots, i_{15}(t)$  fluenti negli archi.



**Unità di misura** : La corrente elettrica viene misurata in ampere [A].

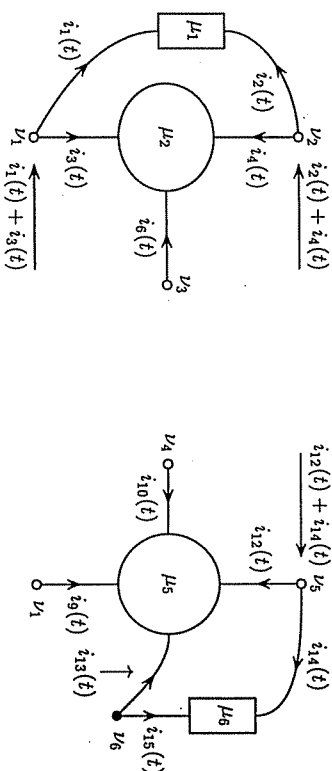
**Estensione della definizione** : Come visto nel Par. 2.1.2 per una generica funzione d'arco, la corrente fluente in un terminale semplice di un componente sia semplice sia composto coincide con la corrente fluente nel unico arco facente parte del terminale.

Nei terminali composti la corrente, per definizione, coincide con la somma delle correnti fluenti in ciascuno degli archi costituenti il terminale composto.

**Esempio B** : Il tripolo composto definito dai noccioli  $(\mu_1, \mu_2)$  è dotato del terminale semplice  $(\nu_3, \zeta_6)$  e dei due terminali composti  $(\nu_1, \zeta_1, \zeta_3)$  e  $(\nu_2, \zeta_2, \zeta_4)$ .

Il tripolo composto definito dai noccioli  $(\mu_5, \mu_6)$  è dotato dei due terminali semplici  $(\nu_4, \zeta_9)$  e  $(\nu_5, \zeta_{10})$  e del terminale composto  $(\nu_6, \zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{13})$ . Le correnti fluenti nei terminali composti

sono indicate come somme delle correnti fluenti nei rispettivi archi d'accesso.



### 2.2.6 Legge di Kirchhoff delle correnti

La Legge di КИРХГОФ delle correnti, un'altra pietra miliare (1847) della teoria dei circuiti, viene qui enunciata sotto forma di un assioma :

**Assioma** : Consideriamo la divergenza della corrente  $i(t)$  nei nodi e la convergenza della stessa nei noccioli. L'assioma stabilisce che entrambe sono nulle :

$$\text{divergenza : } d_n^i(t) = 0 \quad \forall n \in \mathcal{N} \qquad \text{convergenza : } c_m^i(t) = 0 \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

**Proprietà** : Dal teorema della convergenza e divergenza e dal precedente assioma, la nullità della divergenza della corrente in un qualsiasi nodo ovvero la nullità della divergenza della corrente in un qualsiasi nocciolo è una conseguenza della nullità della divergenza nei rimanenti nodi e della convergenza nei rimanenti noccioli. Infatti le divergenze e le convergenze sono legate dall'equazione lineare omogenea :

$$d_1^i(t) + d_2^i(t) + \dots + d_N^i(t) = c_1^i(t) + c_2^i(t) + \dots + c_M^i(t)$$

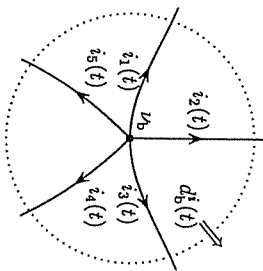
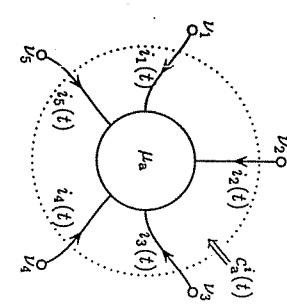
**Corollario** : La convergenza della corrente in ciascun componente è nulla.

**Prova** : Per i componenti semplici la nullità della convergenza della corrente deriva dalla definizione, mentre, per quelli composti, la nullità deriva dal corollario della convergenza e divergenza e dall'assioma qui enunciato.

**Esempio A** : La figura sottostante illustra la legge di Kirchhoff delle correnti in un generico nocciolo e in un generico nodo :

$$c_n^i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) + i_5(t) = 0$$

$$d_n^i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) + i_5(t) = 0$$



2.2.7 Carica elettrica

Congiuntamente alla corrente conviene introdurre anche la carica :

**Definizione :** La carica elettrica è definita come l'integrale della corrente. La costante d'integrazione  $q(t_0)$ , in mancanza di ulteriori informazioni, è considerata arbitraria :

$$q(t) = \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + q(t_0)$$

**Unità di misura :** La carica elettrica  $q$  viene misurata in coulomb [C].

**Commento :** La carica, benché sia stata qui definita come integrale della corrente può essere interpretata indipendentemente per il tramite delle equazioni di MAXWELL in forma integrale, o più precisamente per il tramite della elettrostatica (vedere Corso di Fisica) :

$$\text{carica : } q(t) = \text{integrale di volume della densità di carica } \rho(t)$$

**La legge di Kirchhoff :** Avendo definito opportunamente le costanti arbitrarie d'integrazione, la legge di KИRCHHOFF delle correnti vale anche per le cariche :

$$\text{divergenza : } d_n^q(t) = 0 \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad \text{convergenza : } c_n^q(t) = 0 \quad \forall \mu_n \in \mathcal{M}$$

**Prova :** Integriamo i due primi membri della legge di KИRCHHOFF delle correnti (Par. 2.2.6) :

$$d_n^q(t) = \int_0^t d_n^i(\tau) d\tau + d_n^i(0) \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad , \quad c_n^q(t) = \int_0^t c_n^i(\tau) d\tau + c_n^i(0) \quad \forall \mu_n \in \mathcal{M}$$

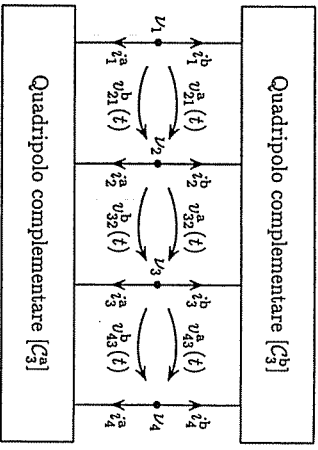
Nell'ipotesi che le cariche in  $t = 0$  (coincidenti con le costanti d'integrazione arbitrarie) verifichino la legge di Kirchhoff delle correnti  $d_n^i(0) = 0$   $c_n^i(0) = 0$ , si ha immediatamente che le cariche soddisfano alla medesima legge per qualsiasi  $t$ .

2.2.8 Tensioni e correnti nei componenti complementari

Tra le grandezze elettriche di due componenti complementari valgono le relazioni :

- I  $k$  potenziali e le  $k(k-1)$  tensioni di un  $k$ -polo coincidono necessariamente con quelli del  $k$ -polo complementare, in quanto i  $k$  terminali di ciascun componente sono incidenti agli stessi  $k$  nodi.
- Le  $k$  correnti di un  $k$ -polo sono uguali e opposte a quelle del  $k$ -polo complementare in quanto confluiscono negli stessi  $k$  nodi, in ciascuno dei quali la divergenza è necessariamente nulla.

Come esempio osservare i due quadripoli complementari ( $k = 4$ ) nella figura accanto.



2.2.9 Equazioni di Maxwell e Leggi di Kirchhoff

Le due Leggi di KИRCHHOFF possono essere derivate dalle Equazioni di MAXWELL facendo delle opportune ipotesi semplificative giustificate dalla geometria, dalle proprietà elettriche della materia e dal comportamento temporale delle grandezze vettoriali (campo elettrico  $E(t)$ , induzione elettrica  $D(t)$ , campo magnetico  $H(t)$ , induzione magnetica  $B(t)$  e densità di corrente  $J(t)$ ) e scalari (densità di carica  $\rho(t)$ ) tra cui vengono stabilite le equazioni di MAXWELL.

Storicamente le due Leggi di KИRCHHOFF sono state enunciate precedentemente alle Equazioni di MAXWELL, anzi esse, congiuntamente ad altre Leggi dell'elettricità e del magnetismo, diedero lo spunto a MAXWELL per la sua straordinaria intuizione, che ha unificato e generalizzato tutte le leggi dell'elettricità e magnetismo note fino a quel momento in quattro equazioni. L'autore di questi appunti pensa che sia troppo complesso per studenti del secondo anno partire dalle equazioni di MAXWELL per arrivare ai circuiti e che d'altra parte non sia strettamente necessario per imparadronirsi della capacità di analizzare i circuiti elettrici.

Da un punto di vista ingegneristico la conoscenza delle relazioni che intercorrono tra un modello concentrato (circuinale) e un modello distribuito (campistico) diventa importante per capire certi malfunzionamenti dei circuiti fisici non spiegabili dal modello concentrato. La spiegazione a volte può essere trovata solamente ricorrendo a un accurato modello a parametri distribuiti. La compatibilità elettromagnetica può essere interpretata come la disciplina che si occupa dei problemi ingegneristici in cui il modello concentrato, in genere più semplice, non è sufficientemente preciso, mentre il modello distribuito, in principio più accurato, non è facilmente trattabile.

2.2.10 Modello concentrato o distribuito ?

**Questio :** L'introduzione dei nodi, noccioli e archi e delle grandezze elettriche associate è essenziale per poter parlare di modello a parametri concentrati. Nasce spontanea la



domanda : quando si può parlare di modello a parametri concentrati (circuito) ovvero di modello a parametri distribuiti (campi elettromagnetici) ?

**Risposta :** Quando il numero di nodi, noccioli e archi e, conseguentemente, delle grandezze elettriche necessarie per descrivere un fenomeno elettrico diventa molto alto, la descrizione a parametri concentrati diventa troppo pesante. Facendo tendere a infinito il numero dei nodi, noccioli e archi, la descrizione a parametri concentrati si confonde con quella a parametri distribuiti: ogni punto dello spazio fisico costituisce un nodo o un nocciolo e in ognuno di essi sono definite delle grandezze elettriche. Tutti i nodi e noccioli geometricamente adiacenti sono connessi da archi.

**Commento :** Molti dei moderni metodi numerici per l'analisi di sistemi a parametri distribuiti possono essere visti come un modello a parametri concentrati che approssima un sistema fisico distribuito. Questi problemi saranno considerati in corsi successivi al presente.

2.2.11 Monopolo ?

**Questio :** Esiste un componente con un solo terminale (mono-polo) ?

**Risposta :** La corrente nell'unico terminale di un mono-polo è necessariamente nulla in seguito alla legge di KIRCHHOFF delle correnti. Quindi se scolghiamo il mono-polo dal nodo a cui è connesso il terminale, la divergenza della corrente in questo nodo si mantiene nulla senza alterare le correnti lungo i terminali incidenti. Quindi il monopolo è di nessun interesse in quanto la sua eventuale presenza non ha alcun effetto sul resto del circuito.

**Esempio A :** Supponiamo che vi siano due fili di rame (entrambi assimilabili a due resistori) con un capo (terminale) connesso a un nodo diverso di un circuito di potenza e l'altro capo disconnesso. Essi non provocano alcuna alterazione al circuito dal momento che entrambi si comportano come un monopolo. Ma se i due capi disconnessi venissero accidentalmente in contatto succederebbe il finimondo : i due fili di rame diventano due bipoli connessi in serie e sono in genere percorsi da una corrente che può essere molto elevata. Se la connessione tra i due capi disconnessi avvenisse attraverso il corpo di una persona (che opera come un resistore), questa rimarrebbe fulminata.

2.3 POTENZA E LAVORO VIRTUALI :  
TEOREMI E COROLLARI

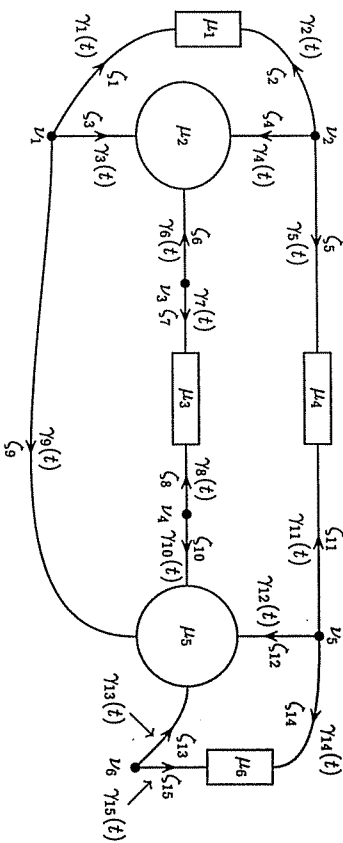
La potenza e il lavoro virtuali vengono introdotti come applicazioni degli insiemi dei noccioli sull'insieme delle funzioni reali del tempo. A questo fine è necessario introdurre la definizione e le proprietà del prodotto *potenziale* x *corrente* per ogni arco del bigrafo. Infine, vengono introdotti il *Teorema* e il *corollario della potenza virtuale*, strettamente legati al *Teorema di TELLEGÈN* (vedere Cap. 4), e le corrispondenti proprietà del lavoro virtuale.

2.3.1 Potenza e lavoro virtuali

Per motivi che verranno chiariti nel seguito, viene introdotta una nuova funzione d'arco :

**Definizione :** Chiamiamo col nome *prodotto potenziale* x *corrente* la funzione d'arco

$\gamma_z(t)$  definita dal prodotto della corrente fluente nell'arco  $z(t)$  per il potenziale  $e_n(t)$  del nodo a cui l'arco è incidente :  $\zeta_z \equiv v_n \rightarrow \mu_m \implies \gamma_z(t) = i_z(t) e_n(t) \quad \forall \zeta_z \in \mathcal{Z}$



**Proprietà :** La divergenza di  $\gamma(t)$  è nulla in ogni nodo, dal momento che essa è uguale alla divergenza della corrente (notoriamente nulla) moltiplicata per il potenziale del nodo :

$$d_n^T(t) = \sum_{\zeta_z \in \mathcal{Z}^v} \gamma_z(t) = \sum_{\zeta_z \in \mathcal{Z}^v} e_n(t) i_z(t) = e_n(t) d_n^T(t) \implies d_n^T(t) = 0 \quad \forall v_n \in \mathcal{N}$$

**Proprietà :** La convergenza di  $\gamma$  in un nocciolo è invariante alla traslazione  $\vec{e}(t)$  dei potenziali di tutti i nodi adiacenti, dal momento che la convergenza della corrente nei noccioli è nulla :

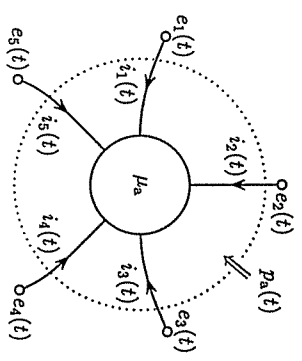
$$c_n^T(t) = \sum_{\zeta_z \in \mathcal{Z}^{\mu_n}} [e_z(t) + \vec{e}(t)] i_z(t) = \sum_{\zeta_z \in \mathcal{Z}^{\mu_n}} e_z(t) i_z(t) + \underbrace{\vec{e}(t) c_n^T(t)}_{\text{nulla}} \quad \forall \mu_n \in \mathcal{M}$$

dove  $e_z(t)$  è il potenziale del nodo a cui  $\zeta_z$  è incidente.

**Definizione :** La convergenza di  $\gamma(t)$  del generico nocciolo  $\mu_m$  ovvero in un componente semplice viene detta *potenza (elettrica) virtuale*  $p_m(t) = c_m^T(t)$ .

**Esempio A :** Consideriamo il multipolo in figura : la sua potenza virtuale  $p_a(t)$  risulta :

$$p_a(t) = e_1(t) i_1(t) + e_2(t) i_2(t) + e_3(t) i_3(t) + e_4(t) i_4(t) + e_5(t) i_5(t) + e_6(t) i_6(t)$$



**Definizione :** Il *lavoro (elettrico) virtuale*  $w_m(t)$  in un nocciolo ovvero in un componente semplice, per un dato intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$ , viene definito dall'integrale della potenza virtuale  $p_m(t)$  esteso all'intervallo considerato :

La definizione della potenza virtuale e del lavoro virtuale viene immediatamente estesa ai

$$w_m(t) = \int_{t_0}^t p_m(\tau) d\tau$$

componenti composti siccome la convergenza è definita anche per questi componenti.

*Unità di misura* : La potenza virtuale viene misurata in volt-ampere [V A] e il lavoro virtuale in volt-ampere-secondo [V A s].

2.3.2 Significato di "virtuale"

L'aggettivo "virtuale" ha lo scopo di distinguere la potenza e il lavoro definiti in questa sezione dalla *potenza effettiva* e dal *lavoro effettivo* che saranno introdotti nel Cap. 5. La potenza e il lavoro virtuali hanno preminentemente un significato matematico (astratto), mentre quelli effettivi hanno preminentemente un significato fisico.

Il seguente esempio sottolinea la distinzione tra "virtuale" e "effettivo" : Consideriamo due treni che corrono lungo due binari affiancati. Il primo treno corre con velocità  $v_1(t)$  trainato da una locomotiva, che esercita una forza di traino  $f_1(t)$  sul gancio del primo vagone. Il secondo treno si muove alla velocità  $v_2(t)$  sotto l'azione della forza di traino  $f_2(t)$ . La prima locomotiva sviluppa una potenza  $p_1(t) = v_1(t) f_1(t)$  e la seconda una potenza  $p_2(t) = v_2(t) f_2(t)$  :  $p_1(t)$  e  $p_2(t)$  sono le potenze (meccaniche) effettive, che fanno muovere i due treni. Se il macchinista del primo treno desidera incrementare la velocità deve aumentare anche la forza di traino, agendo sul motore : la velocità  $v_1(t)$  e la forza di traino  $f_1(t)$  non possono essere scelte in modo indipendente.

Eseguiamo i due prodotti  $p_a(t) = v_1(t) f_2(t)$  e  $p_b(t) = v_2(t) f_1(t)$  :  $p_a(t)$  e  $p_b(t)$  sono formalmente due potenze, che chiameremo potenze virtuali, in quanto esse sono uguali al prodotto della velocità di un sistema fisico (primo treno) e della forza di un altro sistema fisico (secondo treno). In conclusione, le potenze  $p_a(t)$  e  $p_b(t)$  non fanno muovere alcun treno ovvero fanno muovere solamente i "treni virtuali" che circolano nei giorni di sciopero totale dei trasporti.

Ritorniamo ai circuiti elettrici. A questo punto del presente corso, le tensioni e le correnti definite sul bigrafo non sono affatto legate tra loro da alcun legame (equazione) allo stesso modo della velocità  $v_1(t)$  del primo treno e della forza di traino  $f_1(t)$  del secondo.

Nel Cap. 5 saranno introdotti i legami tra tensioni e correnti dello stesso circuito (le cosiddette relazioni costitutive dei componenti). Tenendo in considerazione questi legami tra le tensioni e le correnti la potenza e il lavoro virtuali si trasformano per definizione in potenza e lavoro effettivi.

2.3.3 Teoremi e corollari della potenza e lavoro virtuale (Tellegen)

La potenza e il lavoro virtuale soddisfano al cosiddetto teorema della potenza e lavoro virtuale di importanza fondamentale :

*Teorema* : Dal teorema della divergenza e convergenza (Par. 2.1.5) si ha che in un bigrafo, con potenziali qualsiasi e correnti soddisfacenti alla legge di KIRCHHOFF, la somma sia delle potenze sia dei lavori virtuali estesa a tutti i noccioli (ovvero componenti semplici) è nulla :

$$\sum_{\mu_m \in \mathcal{M}} e_m^2(t) = \sum_{\nu_n \in \mathcal{N}} d_n^2(t) \implies \sum_{m=1}^M p_m(t) = 0 \implies \sum_{m=1}^M w_m(t) = 0$$

potenze virtuali      termini nulli

dove la somma dei lavori virtuali viene ottenuta integrando la rispettiva somma delle potenze virtuali.

*Commento* : Questo teorema è la formulazione per i bigrafi del ben noto teorema di TELLEGEN, che sarà riformulato nella forma originale per i grafi nella Sez. 4.1.

La potenza virtuale soddisfa anche a un corollario di uso assai generale :

*Corollario* : La potenza virtuale  $p_d(t)$  ovvero il lavoro virtuale  $w_d(t)$  assorbiti da un componente composto sono uguali alla somma delle potenze virtuali  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$ , ... ovvero lavori virtuali  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$ ,  $w_3(t)$ , ... assorbiti dai noccioli interni (cioè componenti semplici) che costituiscono il componente composto :

$$p_d \equiv \{C^1, C^2, \dots, C^k\} \implies \begin{cases} p_d(t) = p_1(t) + p_2(t) + \dots + p_k(t) \\ w_d(t) = w_1(t) + w_2(t) + \dots + w_k(t) \end{cases}$$

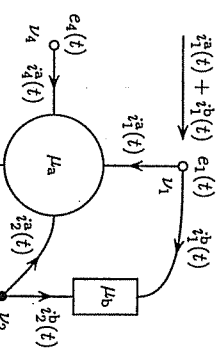
*Prova* : Dal corollario della convergenza e divergenza si ha che la convergenza di  $\gamma$  (cioè la potenza virtuale) nel componente composto è uguale alla somma delle divergenze di  $\gamma$  nei nodi (che sono nulle) più la somma delle convergenze di  $\gamma$  (che sono le potenze virtuali) nei noccioli.

*Esempio A* : Questo esempio ha lo scopo di verificare il suddetto corollario :

Calcoliamo le potenze virtuali  $p_a(t)$  e  $p_b(t)$  assorbiti dai componenti semplici, definiti dai rispettivi noccioli  $\mu_a$  e  $\mu_b$  :

$$p_a(t) = e_1(t) i_1^a(t) + e_2(t) i_2^a(t) + e_3(t) i_3^a(t) + e_4(t) i_4^a(t)$$

$$p_b(t) = e_1(t) i_1^b(t) + e_2(t) i_2^b(t)$$



La potenza virtuale  $p_{com}(t)$  del componente composto, definito da  $\mu_a$  e  $\mu_b$ , è :

$$p_{com}(t) = e_1(t) [i_1^a(t) + i_1^b(t)] + e_2(t) [i_2^a(t) + i_2^b(t)] + e_3(t) i_3^a(t) + e_4(t) i_4^a(t)$$

Confrontando le precedenti espressioni possiamo verificare che :  $p_{com}(t) = p_a(t) + p_b(t)$ .

WWWWWW??? SCRIVERE ESPRESSIONE MATEMATICA

Conv. del compon. = somma converg. noccioli - somma diverg. nodi

*Proprietà* : Tra le potenze virtuali di due componenti complementari vale la relazione : la potenza virtuale di un componente complementare a un altro è l'opposto di quella di quest'ultimo in quanto la somma delle suddette potenze virtuali è nulla per il teorema della potenza virtuale.

2.4 TENSIONI E CORRENTI INDIPENDENTI E BIPOLI FITTIZI DI UN MULTIPOLLO

Le due Leggi di KIRCHHOFF stabiliscono che solo  $k - 1$  tensioni e  $k - 1$  correnti di un generico  $k$ -polo risultano indipendenti. Qualora quest'ultime siano scelte col metodo dell'albero di bipoli fittizi, la potenza virtuale risulta uguale al prodotto scalare dei vettori

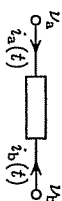
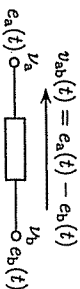
delle tensioni e correnti indipendenti. Conseguentemente ciascun  $k$ -polo presente nel bigrafo può essere sostituito da un'aggregazione di  $k - 1$  bipoli fittizi (porte) ed il bigrafo si riduce a un usuale *grafo* (*grafo morfotico*), costituito da nodi e rami.

2.4.1 Tensione e corrente indipendente in un bipolo

Per qualsiasi bipolo compreso ai nodi  $v_a$  e  $v_b$  del bigrafo, si ha:

In seguito alla Legge di KIRCHHOFF delle tensioni, le due tensioni  $v_{ab}(t)$  e  $v_{ba}(t)$  definite tra i due terminali di un generico bipolo sono uguali e opposte:

In seguito alla Legge di KIRCHHOFF delle correnti, le due correnti  $i_a(t)$  e  $i_b(t)$  fluenti nei corrispondenti terminali di un generico bipolo sono uguali e opposte:



Quindi una sola tensione e una sola corrente sono sufficienti per descrivere il comportamento elettrico di un bipolo. Nella scelta della tensione indipendente, nel seguito indicata con  $v(t)$ , e della corrente indipendente, nel seguito indicata con  $i(t)$ , si possono presentare  $2 \times 2 = 4$  casi. La potenza virtuale assorbita  $p_a(t) = e_a i_a(t) + e_b i_b(t)$  e quella erogata  $p_b(t)$ , dove  $p_a(t) = -p_b(t)$ , assumono espressioni differenti per il segno a seconda delle convenzioni adottate per la tensione e la corrente.

Quadro delle  $2 \times 2 = 4$  convenzioni di segno per i bipoli:

simbolo circuitale				
tensione indipendente	$v(t) \equiv v_{ab}(t)$	$v(t) \equiv v_{ba}(t)$	$v(t) \equiv v_{ba}(t)$	$v(t) \equiv v_{ab}(t)$
corrente indipendente	$i(t) \equiv i_a(t)$	$i(t) \equiv i_b(t)$	$i(t) \equiv i_a(t)$	$i(t) \equiv i_b(t)$
potenza $p_a(t)$ assorbita	$v(t) i(t)$	$-v(t) i(t)$	$-v(t) i(t)$	$v(t) i(t)$
potenza $p_b(t)$ erogata	$-v(t) i(t)$	$v(t) i(t)$	$v(t) i(t)$	$-v(t) i(t)$
convenzione	normale (utilizzatori)	nonnormale (generatori)	nonnormale (generatori)	normale (utilizzatori)

**Commento:** Quando la potenza virtuale assorbita  $p_a(t)$  coincide col prodotto  $v(t) i(t)$ , si parla di *convenzione normale* ovvero di *convenzione degli utilizzatori*, mentre, quando la stessa  $p_a(t)$  coincide col prodotto  $-v(t) i(t)$ , si parla di *convenzione nonnormale* ovvero di *convenzione dei generatori*. Conseguentemente sia la potenza virtuale assorbita  $p_a(t)$  sia quella erogata  $p_b(t)$  non dipendono affatto dalla convenzione (normale o nonnormale) adottata, dal momento che il segno che compare nella espressione  $\pm v(t) i(t)$  viene scelto in modo che il risultato non dipenda dalla convenzione.

2.4.2 Tensioni e correnti indipendenti in un multipolo

I vincoli creati dalle due leggi di KIRCHHOFF tra tutte le tensioni e correnti definite tra i  $k$  terminali di un  $k$ -polo fanno sì che:

**Tensioni indipendenti:** Tra le  $k(k-1)$  tensioni definite tra i  $k$  terminali di un  $k$ -polo solamente  $k - 1$  sono indipendenti. Infatti ciascuna tensione coincide con la differenza di due tra i  $k$  potenziali, i quali a loro volta, sono definiti a meno di una funzione additiva arbitraria.

**Correnti indipendenti:** Tra le  $k$  correnti fluenti nei terminali di un  $k$ -polo solamente  $k - 1$  correnti sono indipendenti, dal momento che la loro somma (convergenza) è nulla a causa della Legge di KIRCHHOFF delle correnti.

I due esempi seguenti riportano due tra le possibili scelte di (quattro) tensioni e (quattro) correnti indipendenti di un generico 5-polo:

**Esempio A:** Le tensioni e correnti indipendenti, indicate nella figura, sono:

$$\begin{aligned}
 v_1(t) &= v_{ba}(t) & v_2(t) &= v_{ab}(t) & v_3(t) &= v_{dc}(t) & v_4(t) &= v_{bc}(t) \\
 i_1(t) &= i_a(t) & i_2(t) &= i_b(t) & i_3(t) &= i_d(t) & i_4(t) &= i_c(t)
 \end{aligned}$$

Ciascuna delle altre tensioni e correnti possono essere espresse in funzione di queste. Per esempio:

$$\begin{aligned}
 v_{ad}(t) &= -v_1(t) - v_2(t) - v_3(t) \\
 v_{ed}(t) &= -v_2(t) - v_3(t) - v_4(t) \\
 v_{ea}(t) &= v_1(t) + v_2(t) \\
 i_c(t) &= -i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) - i_4(t)
 \end{aligned}$$

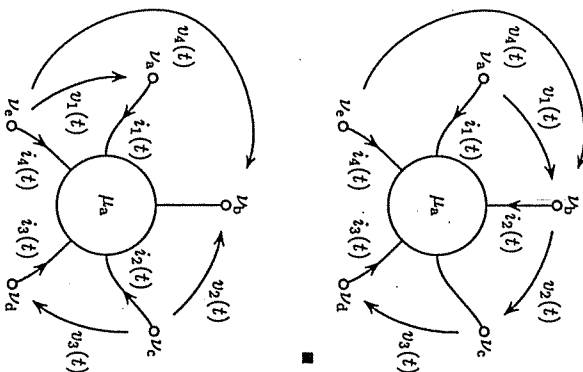
**Esempio B:** Le tensioni e correnti indipendenti, indicate nella figura, sono:

$$\begin{aligned}
 v_1(t) &= v_{ac}(t) & v_2(t) &= v_{bc}(t) & v_3(t) &= v_{dc}(t) & v_4(t) &= v_{be}(t) \\
 i_1(t) &= i_a(t) & i_2(t) &= i_c(t) & i_3(t) &= i_d(t) & i_4(t) &= i_e(t)
 \end{aligned}$$

Ciascuna delle altre tensioni e correnti possono essere espresse in funzione di queste. Per esempio:

$$\begin{aligned}
 v_{ad}(t) &= v_1(t) - v_4(t) + v_2(t) - v_3(t) \\
 v_{ed}(t) &= -v_4(t) + v_2(t) - v_3(t) \\
 v_{ba}(t) &= v_4(t) - v_1(t) \\
 i_b(t) &= -i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) - i_4(t)
 \end{aligned}$$

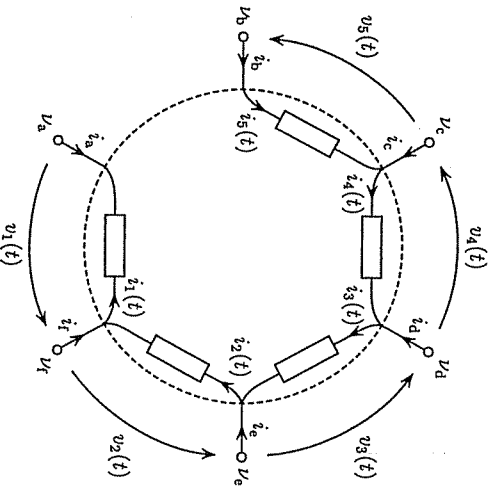
**Albero di bipoli fittizi:** In principio, le  $k - 1$  tensioni e le  $k - 1$  correnti indipendenti in un  $k$ -polo possono essere scelte in modo assolutamente slegato le une dalle altre, come nei due esempi precedenti. In pratica, per motivi che saranno chiariti nei paragrafi seguenti, conviene che il sottoinsieme delle tensioni indipendenti e quello delle correnti indipendenti siano "coordinati tra loro". Assumiamo che il  $k$ -polo sia composto da  $k - 1$  bipoli, che chiamiamo *bipoli fittizi*. I bipoli fittizi sono connessi ad albero, cioè essi non formano percorsi chiusi e toccano tutti i  $k$  terminali del  $k$ -polo. In un generico  $k$ -polo sono possibili molti alberi diversi ciascuno costituito da  $k - 1$  bipoli fittizi.



Tutte le tensioni e correnti definite in un  $k$ -polo possono venire espresse in termini delle tensioni definite ai capi dei bipoli fittizi e delle correnti fluenti negli stessi :  
 l'insieme delle  $k-1$  tensioni definite ai capi dei bipoli fittizi costituisce una base per le  $k(k-1)$  tensioni definite tra i terminali del  $k$ -polo.  
 l'insieme delle  $k-1$  correnti fluenti nei bipoli fittizi costituisce una base per le  $k$  correnti fluenti nei terminali del  $k$ -polo.

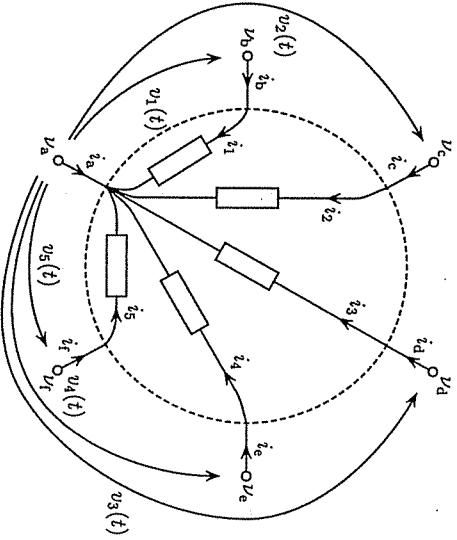
**Esempio C :** i bipoli fittizi del 6-polo formano una catena che "occca" tutti i terminali. Le relazioni tra le correnti fluenti nei terminali e le correnti fluenti nei bipoli fittizi mostrano che solamente le correnti  $i_1(t)$  e  $i_5(t)$  coincidono con correnti fluenti nei terminali :

$$\begin{aligned} i_a(t) &= -i_1(t) \\ i_b(t) &= i_5(t) \\ i_c(t) &= i_4(t) - i_2(t) \\ i_d(t) &= i_3(t) - i_4(t) \\ i_e(t) &= i_2(t) - i_3(t) \\ i_f(t) &= i_1(t) - i_2(t) \end{aligned}$$



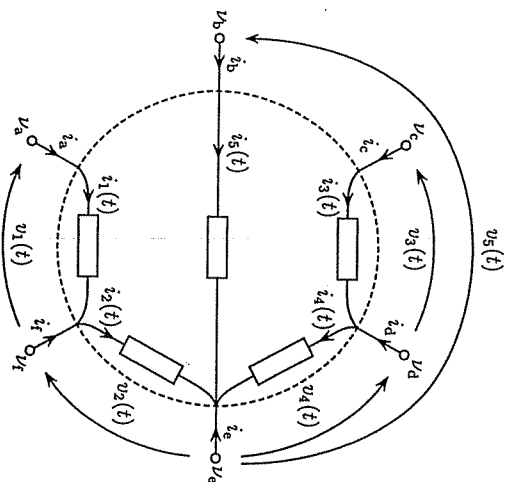
**Esempio D :** i bipoli fittizi formano un cespuglio dal momento che tutti sono incidenti allo stesso terminale, da un lato, e a uno degli altri dall'altro lato. Le relazioni tra le correnti fluenti nei terminali e le correnti fluenti nei bipoli fittizi mostrano che ciascuna corrente indipendente coincide con la corrente fluente in un terminale :

$$\begin{aligned} i_b(t) &= i_1(t), \quad i_c(t) = i_2(t), \\ i_d(t) &= i_3(t), \quad i_e(t) = i_4(t), \\ i_f(t) &= i_5(t), \\ i_a(t) &= -i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) - i_4(t) - i_5(t) \end{aligned}$$



**Esempio E :** i bipoli fittizi formano un generico albero. Le relazioni tra le correnti fluenti nei terminali e le correnti fluenti nei bipoli fittizi mostrano che solamente le correnti  $i_1(t)$ ,  $i_3(t)$  e  $i_5(t)$  coincidono con correnti fluenti nei terminali :

$$\begin{aligned} i_a(t) &= -i_5(t) - i_2(t) - i_4(t) \\ i_c(t) &= i_3(t) \\ i_d(t) &= i_1(t) \\ i_b(t) &= i_5(t) \\ i_d(t) &= i_4(t) - i_3(t) \\ i_f(t) &= i_2(t) - i_1(t) \end{aligned}$$



**Commento :** La scomposizione di un componente in bipoli fittizi connessi ad albero è basata su considerazioni topologiche, in quanto non coinvolge le relazioni costitutive dei componenti, che saranno viste nel Cap. 5. Essa non ha, in genere, alcuna relazione con la struttura interna del componente fisico. In conclusione, l'albero dei bipoli fittizi costituisce uno strumento molto semplice per individuare due sottoinsiemi coordinati di tensioni e correnti indipendenti per un multipolo qualsiasi.

L'albero dei bipoli fittizi di un  $k$ -polo può assumere forme diverse : tra esse sono più usate le due seguenti, tra loro duali :

Il **grafo a cespuglio** è un albero caratterizzato dal fatto che tutti i rami (bipoli fittizi) sono connessi a uno stesso nodo, detto **nodo di riferimento** del multipolo. Come esempio vedere l'esempio B di questo paragrafo.

In questo caso le tensioni indipendenti sono quelle dei restanti  $k-1$  nodi rispetto al nodo di riferimento e le correnti indipendenti sono quelle fluenti nei corrispondenti terminali.

In un  $k$ -polo possono essere definite  $k$  cespugli diversi, ciascuno caratterizzato da uno specifico nodo di riferimento.

Nel Cap. 6 si vedrà come il grafo a catena sia opportuno in presenza di porte proprie.

**Avvertenza :** L'albero dei bipoli fittizi introdotto per i multipoli ha lo stesso ruolo di un albero di un grafo monoperitico che sarà introdotto nella Sez. 3.2.

Il **grafo a catena** è un albero caratterizzato dal fatto che tutti i rami (bipoli fittizi) formano una catena in cui due nodi sono gli estremi e gli altri sono intermedi. Come esempio vedere l'esempio A di questo paragrafo.

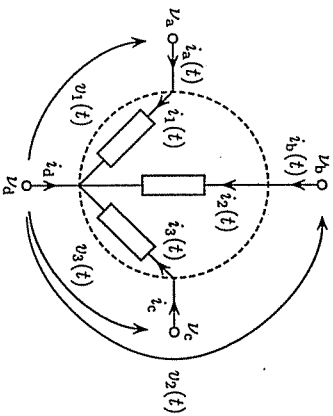
In questo caso solamente le correnti nel primo e ultimo ramo della catena coincidono con una corrente nei terminali, mentre le rimanenti correnti di ramo sono uguali a somme/sottrazioni di quelle fluenti nei terminali. Le tensioni di ramo si riferiscono a coppie di terminali connesse da un ramo della catena. In un  $k$ -polo possono essere definite molte catene diverse.

**Commento :** Ognuna delle correnti fluenti nei  $k-1$  bipoli fittizi non coincide necessariamente con una delle correnti fluenti nei  $k$  terminali. Al contrario, la tensione ai capi di ciascun bipolo fittizio coincide, in qualsiasi caso, con una delle  $k(k-1)$  tensioni definite tra i terminali del  $k$ -polo.

**Esempio F :** I tre bipoli fittizi del quadripolo in figura formano un cespuglio. Tra le quattro correnti fluenti nei terminali coincidono con quelle indipendenti :

$$i_a = i_1(t) \quad , \quad i_b = i_2(t) \quad , \quad i_c = i_3(t) \\ i_d = -i_1(t) - i_2(t) - i_3(t)$$

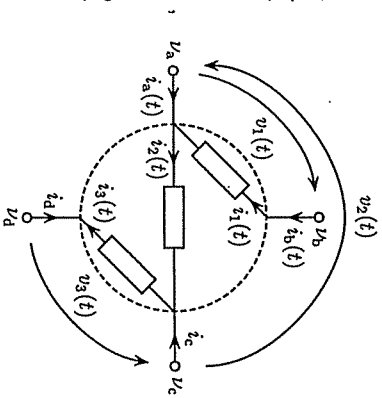
Ciascuna tra le 12 tensioni del quadripolo dipende dalle tre tensioni indipendenti; per esempio  $v_{ab} = v_1(t) - v_2(t)$  ,  $v_{ca} = v_2(t) - v_1(t)$  ,  $v_{bd} = v_2(t)$  .



**Esempio G :** I tre bipoli fittizi di un generico quadripolo formano una catena. Due tra le quattro correnti fluenti nei terminali coincidono con quelle indipendenti :

$$i_a = i_2(t) - i_1(t) \quad , \quad i_b = i_1(t) \\ i_c = i_3(t) - i_2(t) \quad , \quad i_d = -i_3(t)$$

Ciascuna tra le 12 tensioni del quadripolo dipende dalle tre tensioni indipendenti; per esempio  $v_{ab} = -v_1(t)$  ,  $v_{ca} = -v_2(t)$  ,  $v_{bd} = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t)$  .



### 2.4.3 Potenza virtuale e bipoli fittizi

Le  $k-1$  tensioni e  $k-1$  correnti indipendenti di un  $k$ -polo, indicate dai vettori  $v(t)$  e  $i(t)$ , siano scelte col metodo dei bipoli fittizi e adottando una delle convenzioni normali per ciascuno di essi. La base delle tensioni e la base delle correnti risultano interdipendenti, consentendo di trovare un'espressione molto semplice della potenza virtuale assorbita dal componente :

**Proprietà :** La potenza virtuale  $p(t)$  assorbita dal  $k$ -polo è uguale al prodotto scalare dei

vettori delle tensioni e correnti indipendenti come risulta dai seguenti passaggi :

$$p(t) = \sum_{\eta=1}^{k-1} p_{\eta}^R(t) \implies p(t) = \sum_{\eta=1}^{k-1} v_{\eta}(t) i_{\eta}(t) \implies p(t) = [v(t)]^T i(t) = [i(t)]^T v(t)$$

$\uparrow$  corollario della potenza virtuale       $\uparrow$  potenze nei bipoli fittizi

**Commento :** Se i sottosistemi delle tensioni e correnti indipendenti  $v(t)$  e  $i(t)$  non fossero scelti seguendo il criterio dei bipoli fittizi, l'espressione della potenza virtuale  $p(t)$  sarebbe molto più complicata e dipenderebbe dalla specifica scelta. L'albero dei bipoli fittizi può essere definito in molti modi diversi e conseguentemente i vettori  $v(t)$  e  $i(t)$  : in ogni caso, l'espressione della potenza virtuale rimane la stessa ! Nella pratica questa espressione della potenza virtuale è l'unica usata mentre la definizione tramite potenziali e correnti, introdotta nel Par. 2.3.1 , viene usata solo in mancanza della definizione delle tensioni e correnti indipendenti.

**Definizione di porta :** Nell'uso corrente ogni bipolo fittizio facente parte del  $k$ -polo è detto *porta* del  $k$ -polo. Qualora necessario, la porta è detta *normale* per distinguertela dalle porte proprie e improprie che verranno introdotte nel Cap. 6 .

**Commento :** Un bipolo può essere visto come un componente con una sola porta.

### 2.4.4 Fenomeni fisici e convenzioni

In questa sezione abbiamo introdotto le convenzioni con cui possono essere scelte la tensione e la corrente indipendente in un bipolo e il metodo dei bipoli fittizi (porte) per individuare le tensioni e correnti indipendenti di un multipolo. Comunque il suddetto metodo consente molti modi diversi per individuare le porte di un multipolo. La scelta delle porte di un multipolo è una generalizzazione del primo problema riguardante la scelta del segno della tensione e corrente in un bipolo. Entrambi i problemi hanno in comune il fatto di essere una pura convenzione che non ha niente a che fare col fenomeno fisico che intendiamo descrivere. Nella pratica si tende a scegliere le convenzioni di segno delle tensioni e delle correnti e le porte di un multipolo in modo che la formulazione del problema e l'organizzazione dei calcoli sia la più semplice possibile.

Nel Cap. 6 vedremo il concetto di *porta propria* e di *porta impropria* la cui scelta non può essere arbitraria ma è suggerita dalla realtà fisica del fenomeno.

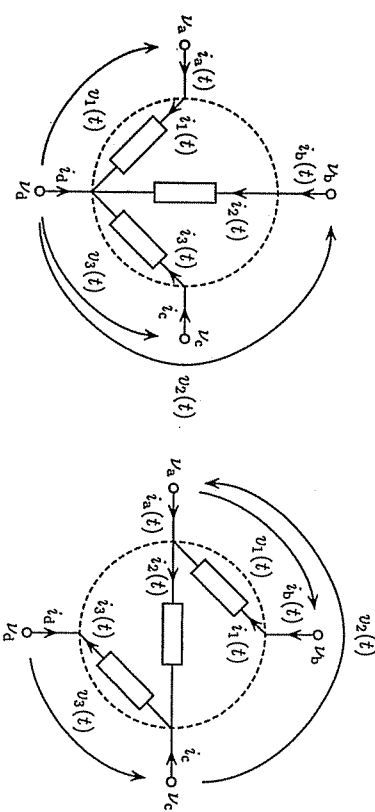
**Commento :** A volte rimango perplesso davanti a studenti che vanno in crisi sulla scelta di una convenzione per dimostrare una qualche proprietà o risolvere un circuito. Un elettrone cambia la traiettoria seguita all'interno di un conduttore di rame qualora il valore della tensione ai capi del filo venisse modificato, ma non la cambia certamente in seguito al cambio della convenzione di segno della tensione stessa. L'importanza sta nello scegliere una convenzione di segno e rimanere coerenti con la scelta per tutto lo svolgimento del problema.

**La convenzione del nome :** Uno studente di nome *Asdrubale* si innamora di una collega, che conosce come *Gabri*. Dopo circa un anno *Gabri* presenta *Asdrubale* alla madre, la quale usa rivolgersi alla figlia chiamandola *Lella*. *Asdrubale* non riesce ad abituarsi a questo nome e poco a poco si disamora di *Gabri/Lella* . . . .

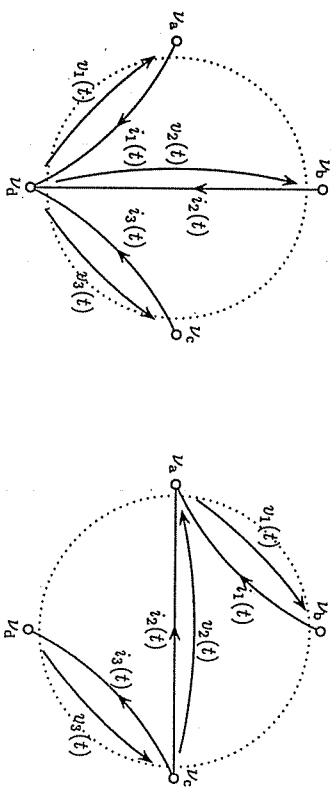
2.4.5 Dai bigrafi ai grafi

**Grafo di un componente** : Quando un  $k$ -polo è descritto mediante le tensioni e le correnti delle  $k - 1$  porte (ovvero bipoli fittizi) può essere rappresentato da un **grafo monopartito** costituito da  $k$  nodi e  $k - 1$  rami : un nodo per ogni terminale del componente, rappresentato da un cerchietto nero e un ramo per ogni bipolo fittizio (porta) rappresentato da un arco di linea. Quindi ciascun ramo comprende il nocciolo e i due terminali del bipolo fittizio e connette i due nodi tra cui vi era il bipolo fittizio.

**Esempio A** : Consideriamo i due quadripoli già incontrati negli esempi 2.4.3F-G : ciascuno di essi è descritto da tre bipoli fittizi, in un caso a cespuglio e nell'altro a catena.



I corrispondenti (sotto) grafi monopartiti dei suddetti quadripoli sono :

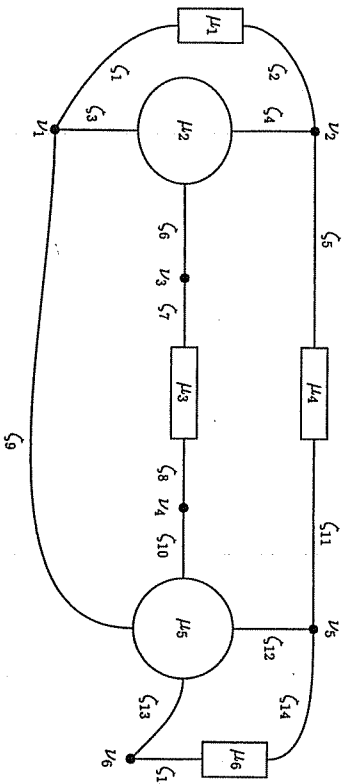


**Commento** : Quanto detto vale anche per il caso particolare di un bipolo , il cui grafo monopartito è costituito da un unico ramo collegante due nodi. ■

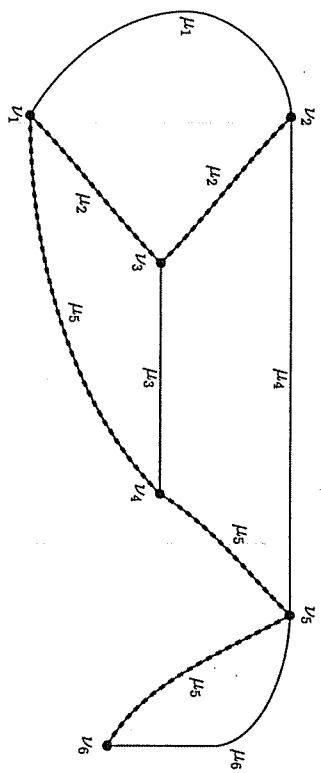
**Grafo di un circuito** : Il grafo (monopartito)  $\mathcal{G}$  di un circuito completo è ottenuto dalla aggregazione dei grafi (monopartiti) dei singoli componenti connettendo i rami incidenti agli stessi nodi. Quindi il grafo di un circuito è derivato dal bigrafo con le regole seguenti :

- Rimpiazzare ogni  $k$ -polo con un albero di  $k - 1$  bipoli fittizi (porte) : si ottiene un bigrafo di soli bipoli, sia effettivi sia fittizi.
- Rimpiazzare i due terminali e il nocciolo di ogni bipolo con un unico ramo. Notare che ogni nodo del bigrafo rimane un nodo anche del grafo.
- Il grafo  $\mathcal{G}$  è formato dai nodi  $\mathcal{N}$  e dai rami  $\mathcal{R}$  :  $\mathcal{G} \equiv \{\mathcal{N}, \mathcal{R}\}$ .
- Il numero di nodi e rami di un grafo verrà indicato da  $n$  e  $m$ , rispettivamente.

**Esempio B** : Consideriamo il bigrafo riportato qui sotto : esso è costituito da quattro bipoli, un tripolo e un quadripolo.



Sostituiamo il tripolo con due bipoli fittizi (cioè due rami) contrassegnati da  $\mu_2$  e il quadripolo con tre bipoli fittizi a catena (tre rami) contrassegnati con  $\mu_5$ . Quindi rappresentiamo tutti i bipoli (sia effettivi sia fittizi) con dei rami. Otteniamo il grafo (monopartito) :



I rami del grafo provenienti dai bipoli effettivi sono distinti da quelli provenienti dai bipoli fittizi. Le etichette accanto a ciascun ramo indicano il nocciolo del componente semplice da cui i rami stessi provengono. ■

**Commenti** : Il confronto tra il bigrafo e uno dei corrispondenti grafi ci consente di fare le seguenti osservazioni :

- Il grafo mette in evidenza le tensioni e correnti indipendenti in ciascun componente.

- In un grafo ogni coppia di nodi può essere connessa da più di un ramo : i suddetti rami risultano in parallelo.
- In genere un ramo non può connettere un nodo con se stesso.
- Qualora siano presenti multipoli, possono essere tracciati diversi sottografi per ciascuno di essi. Quindi dallo stesso bigrafo possono essere ottenuti grafi diversi.
- L'appartenenza di due o più rami allo stesso componente non è più evidente in un grafo. Questo è un grave carenza dei grafi rispetto ai bigrafi, che spesso è causa di gravi errori per un principiante. Questo problema sarà chiarito con l'introduzione delle relazioni costitutive nelle SSez. 5.1-3. ■

**Scomposizione del grafo in componenti semplici e/o composti :** Come spiegato nella Sez. 1.6, i componenti semplici, sia bipoli sia multipoli, presenti in un bigrafo sono immediatamente riconoscibili, dal momento che ciascun nocciolo del bigrafo definisce un componente semplice. Anche i componenti composti sono facilmente caratterizzabili dai componenti semplici che ne fanno parte.

Al contrario, il riconoscimento dei componenti semplici e/o composti all'interno di un grafo (monopartito) non è altrettanto immediato.

La suddivisione dell'insieme dei rami  $\mathcal{R}$  in due o più sottoinsiemi  $\mathcal{R}^a, \mathcal{R}^b, \mathcal{R}^c \dots$  corrisponde ad una suddivisione del grafo in componenti semplici e composti se e solo se i rami rappresentanti ciascun multipolo semplice rimangono riuniti nel medesimo sottoinsieme  $\mathcal{R}^a$  o  $\mathcal{R}^b$  o  $\mathcal{R}^c \dots$  ■

# 3 TEORIA ELEMENTARE dei GRAFI

## 3.1 GENERALITÀ

Questa sezione introduce le nozioni preliminari sui grafi, sia non-orientati sia orientati, i percorsi, gli alberi e i coalberi, i grafi sconnessi, semplicemente connessi e strettamente connessi e infine i grafi planari.

### 3.1.1 Grafi non-orientati e orientati

**Grafi non-orientati:** Un grafo (*monopartito*), indicato con  $G$ , è definito da un insieme di  $n$  nodi  $\mathcal{N} \equiv \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e un insieme di  $m$  rami  $\mathcal{R} \equiv \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m\}$ :

$$G \equiv \{\mathcal{N}, \mathcal{R}\}$$

dove ciascun ramo  $\rho_e \in \mathcal{R}$  è associato a una specifica coppia di nodi:  $\rho_e \rightarrow (v_a, v_b)$ . Se l'ordine dei nodi all'interno di ciascuna coppia non è di interesse, il grafo è chiamato *non-orientato*.

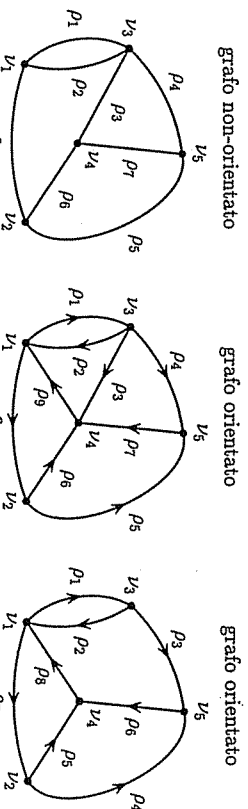
In altre parole in un grafo non-orientato le relazioni  $\rho_e \rightarrow (v_a, v_b)$  e  $\rho_e \rightarrow (v_b, v_a)$  sono considerate equivalenti.

In molti problemi di interesse alla suddetta definizione di grafo viene aggiunta l'orientazione dei suoi rami: in altre parole noi diamo un significato all'ordine dei nodi all'interno di ciascuna coppia a cui è associato un ramo.

**Grafi orientati:** Denotiamo con  $v_a$  e  $v_b$  i nodi a cui un generico ramo è incidente: noi possiamo assegnare il *verso di percorrenza*  $v_a \rightarrow v_b$  oppure  $v_a \leftarrow v_b$  al suddetto ramo. In questo caso il grafo è detto *orientato*.

In altre parole in un grafo orientato le relazioni  $\rho_e \rightarrow (v_a, v_b)$  e  $\rho_e \rightarrow (v_b, v_a)$  hanno significati distinti.

**Rappresentazione grafica:** Rappresentiamo i nodi con un pallino nero e i rami con un arco di linea che congiunge i due nodi a cui il ramo è associato. Limitatamente ai grafi orientati su ciascun arco di linea sovrapponiamo la punta di un freccia per indicare il verso di percorrenza del ramo stesso.



**Commento:** Possono esserci più rami che collegano la stessa coppia di nodi: i suddetti rami risultano in parallelo. Per esempio i rami  $\rho_1$  e  $\rho_2$  nei tre grafi in figura.

In genere un ramo non può connettere un nodo con se stesso.

**Commento:** In genere, i versi di percorrenza dei rami sono scelti in modo arbitrario, poiché essi non dipendono dalla realtà fisica. Qualora conoscissimo in anticipo le direzioni effettive (fisiche) delle grandezze fisiche coinvolte nel modello descritto dal grafo, potrebbe

## WWWWWW??? FIGURA EMBLEMA grafo di grandi dimensioni con segnate tagli e maglie

Il presente capitolo non riguarda direttamente i circuiti elettrici ma un settore della matematica applicata, chiamato *Teoria dei grafi*, la cui origine precede la nascita dei circuiti elettrici. Qui noi introduciamo gli elementi di questa teoria necessari nell'analisi dei circuiti, rinviando l'approfondimento di questa teoria ai circuiti elettrici al Cap. 4.

**Sez. 3.1: Generalità:** Un grafo è definito da un insieme di *nod*i e un insieme di *rami*. Il grafo è detto *orientato*, se si attribuisce un verso di percorrenza a ciascuno dei rami. Un *albero* e il suo complemento (*coalbero*) sono specifici sottoinsiemi di rami del grafo. Successivamente i grafi vengono distinti in *sconnessi*, *semplicemente connessi* e *strettamente connessi*. Infine vengono introdotti i *grafi planari*.

**Sez. 3.2: Maglie e tagli:** Le maglie e i tagli sono particolari sottoinsiemi di nodi e rami di un grafo (*soflografi*). Ad essi associamo un verso di percorrenza (per le maglie) e un verso di attraversamento (per i tagli), che consente di introdurre i *vettori topologici* di entrambi.

**Sez. 3.3: Relazioni tra maglie e tagli:** Vengono descritte le principali relazioni topologiche tra le maglie e i tagli; in particolare viene dimostrato il teorema dell'*ortogonalità* tra maglie e tagli e il *teorema dei grafi colorati*.

**Sez. 3.4: Dualità tra grafi planari:** Le proprietà topologiche dei grafi planari vengono discusse: in particolare, vengono definiti gli *anelli* come particolari maglie. Si dimostra come ad ogni grafo planare può essere associato un altro grafo planare, detto *grafo duale*, i cui anelli corrispondono ai nodi e i cui nodi corrispondono agli anelli del grafo originario.

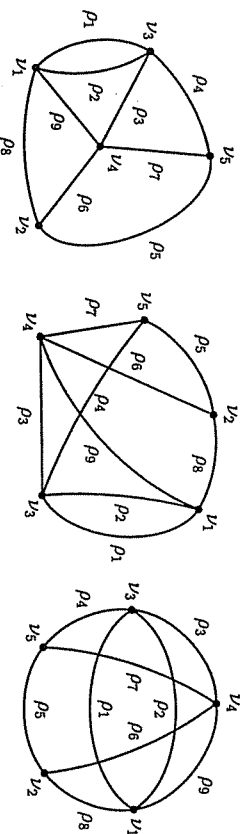
**Sez. 3.5: Basi di maglie e tagli:** I sottoinsiemi di maglie e di tagli indipendenti, chiamati *basi di maglie* e *basi di tagli*, sono rappresentati dalle *matrici delle basi*, costituite dai vettori topologici delle maglie e dei tagli facenti parte della base.



conveniente scegliere i versi dei rami coincidenti con quelli effettivi. Comunque, una volta scelto il verso di un ramo tutti gli sviluppi matematici successivi devono rispettare questa scelta. ■

### 3.1.2 Equivalenza tra grafi

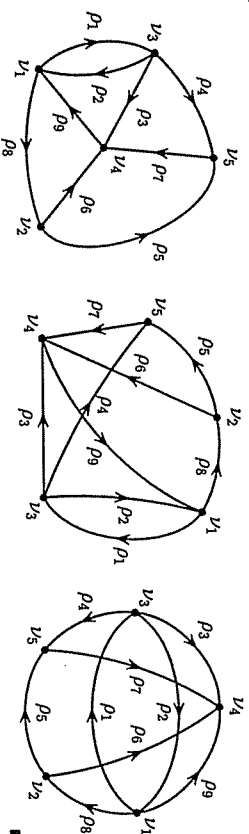
La rappresentazione grafica di un grafo può trarre in inganno chi incontra i grafi (sia non-orientati sia orientati) per la prima volta. Infatti la rappresentazione grafica fornisce inevitabilmente al lettore anche informazioni di natura geometrica completamente estranee al concetto di grafo. Se cambiamo la posizione dei nodi, come nella figura sottostante, il grafo appare completamente diverso :



Se esaminiamo con attenzione i suddetti tre grafi, possiamo constatare che i nodi e i rami sono gli stessi per ciascuno di essi e che ciascun ramo è associato alla stessa coppia di nodi in ciascuno dei tre grafi. Notare che i rami del secondo e terzo grafo danno origine, rispettivamente, a due e quattro incroci, mentre il primo non presenta alcun incrocio.

**Definizione :** Due grafi non-orientati vengono detti *equivalenti* se, una volta stabilita una corrispondenza biunivoca sia tra i nodi sia tra i rami, i rami corrispondenti risultano associati a coppie di nodi corrispondenti. ■

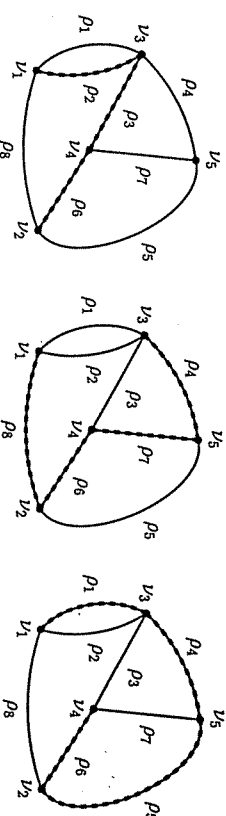
**Commento :** Questa definizione viene estesa immediatamente anche ai grafi orientati con l'aggiunta che i rami corrispondenti devono essere orientati nello stesso verso nei due grafi equivalenti. Qui sotto riportiamo tre grafi orientati tra loro equivalenti.



### 3.1.3 Percorsi

**Definizione :** Dati due nodi distinti di un grafo, viene chiamato *percorso* una catena di rami adiacenti (cioè incidenti a due a due allo stesso nodo) collegante i due nodi, detti *estremi* del percorso. ■

**Commento :** Questa definizione non tiene conto dell'eventuale orientamento dei rami. ■  
**Esempio A :** La figura riporta tre diversi percorsi del medesimo grafo :



$\{v_1, p_2, v_3, p_3, v_4, p_6, v_2\}$ ,  $\{v_3, p_4, v_5, p_7, v_4, p_8, v_2, p_8, v_1\}$ ,  $\{v_1, p_1, v_3, p_4, v_5, p_5, v_2, p_6, v_4\}$   
 I percorsi sono costituiti dalle sequenze alternate di nodi e rami : ciascun nodo e ramo lungo il percorso vengono incontrati una sola volta e non sono ammesse diramazioni : Lungo un percorso noi incontriamo, oltre ai due nodi estremi,  $k$  rami e  $k - 1$  nodi intermedi. ■

**Divagazione :** Immaginare un treno che collega due città (nodi estremi del percorso) facendo alcune fermate (nodi intermedi) e percorrendo diversi tronchi della rete ferroviaria (rami del percorso). ■

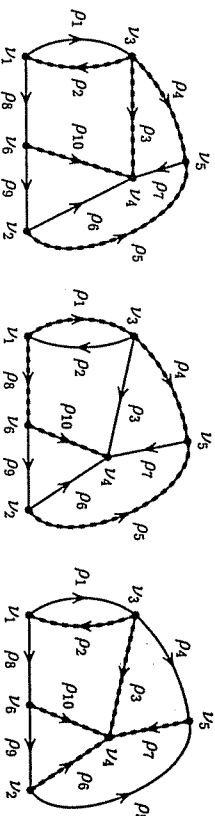
### 3.1.4 Alberi e coalberi

I seguenti sottografi, molto importanti per lo studio dei grafi stessi, sono introdotti :

**Definizione :** Viene chiamato *albero* ogni sottografo di un grafo contenente uno e un solo percorso tra qualsiasi coppia di nodi del grafo. Conseguentemente, un albero è un sottografo che comprende tutti i nodi del grafo e non contiene alcuna maglia al suo interno. Il sottografo complementare di un qualsiasi albero viene detto *coalbero*. ■

**Commento :** Questa definizione non tiene conto dell'eventuale orientamento dei rami del grafo. ■

**Proprietà :** Tracciando diverse coppie di alberi/coalberi dello stesso grafo, come illustrato nella figura sottostante, è facile verificare che qualsiasi albero di un grafo con  $n$  nodi e  $m$  rami è costituito da  $n - 1$  rami e che qualsiasi coalbero è costituito da  $m - n + 1$  rami.



**Prova :** Coloriamo di rosso un ramo qualsiasi del grafo e i due nodi a cui esso è incidente. Coloriamo di rosso uno dei rami che collega uno dei nodi rossi a uno dei nodi non-rossi, che a sua volta viene colorato di rosso. Ripetiamo l'operazione fino a che tutti i nodi sono rossi. ■

**Commento :** Tutti i rami incidenti a un nodo possono appartenere allo stesso albero : per esempio, il nodo  $v_4$  dell'albero tracciato nella figura sovrastante sulla destra.

**Commento :** Il nome albero è suggerito dalla ben nota struttura formata dal tronco e dai rami di un comune albero. Una formica ha a disposizione uno e un solo percorso per spostarsi lungo i rami dello stesso albero. Gli scoiattoli non sono soggetti a questi vincoli dal momento che sono in grado di saltare da un ramo all'altro.

**Diagnosi :** Quando un terremoto o un'alluvione devastano la rete ferroviaria, viaria, idrica, elettrica, telefonica e/o informatica di una regione, la protezione civile interviene per ripristinare un albero di ciascuna di queste reti nel tempo più breve possibile.

### 3.1.5 Grafi sconnessi e connessi

I grafi possono essere divisi in due classi, di cui la seconda è, a sua volta, suddivisa in due ulteriori sottoclassi :

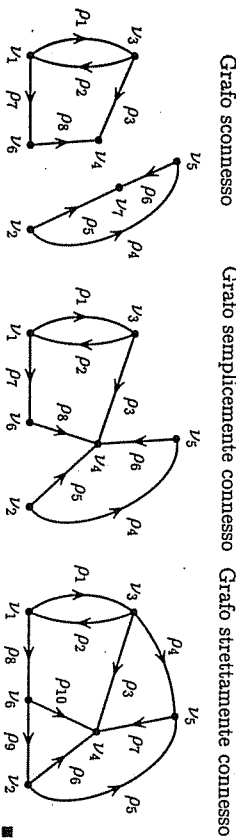
**Definizione :** Un grafo viene detto *grafo connesso*, qualora, per ciascuna coppia di nodi esista almeno un percorso, di cui essi siano gli estremi. Altrimenti il grafo viene detto *grafo sconnesso*.

**Commento :** Quindi un grafo sconnesso è separato completamente in due o più parti. Perciò, i grafi sconnessi sono di minor interesse, in quanto essi sono scomposti in due o più grafi meno estesi.

La classe dei grafi connessi viene suddivisa, a sua volta, nelle due sottostanti sottoclassi.

**Definizione :** Un grafo connesso viene detto *grafo strettamente connesso*, qualora per qualsiasi coppia di nodi, esistano almeno due percorsi completamente distinti, cioè senza alcun ramo e nodo intermedio in comune.

Altrimenti un grafo connesso viene detto *grafo semplicemente connesso*.



**Commento :** Caso particolare ma di interesse di un grafo semplicemente connesso è un grafo che coincide con l'unico albero del grafo stesso.

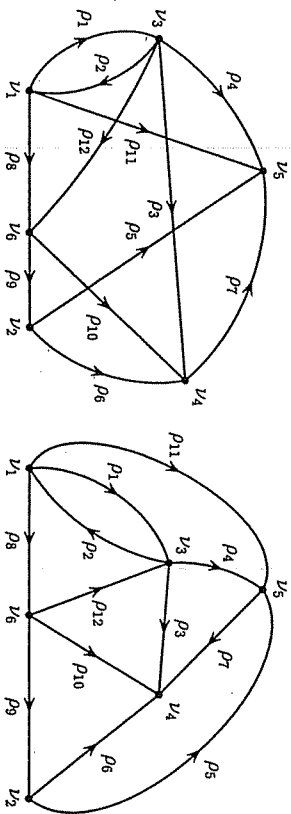
**Commento :** In genere i grafi dei circuiti sono strettamente connessi. In ogni caso i grafi semplicemente connessi ovvero i grafi sconnessi sono molto importanti per spiegare certe proprietà dei circuiti stessi.

### 3.1.6 Grafi planari

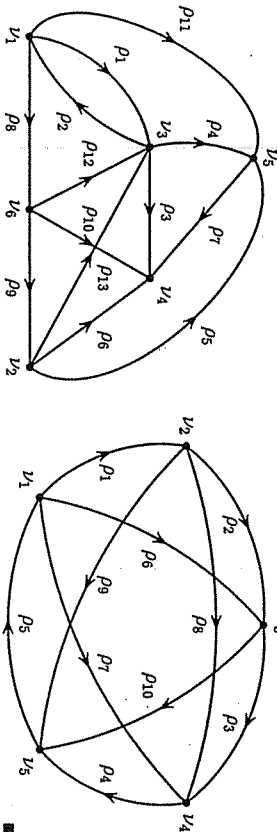
Introduciamo una sottoclasse, molto diffusa in pratica, di grafi :

**Definizione :** Un grafo strettamente connesso è detto *planare* quando può essere tracciato su un piano (ovvero una superficie sferica) senza incroci tra i rami al di fuori delle connessioni dovute ai nodi. Altrimenti, il grafo è detto *nonplanare*.

**Esempio A :** Nella figura sottostante sono tracciati due grafi, tra loro equivalenti, (vedere Par. 3.1.2) : nel grafo di sinistra compaiono quattro incroci tra i rami, mentre in quello di destra non compare alcun incrocio. Quindi il grafo è planare.



**Esempio B :** Nella figura sono tracciati due grafi, tra loro non-equivalenti : in quello di sinistra compare un incrocio che non riesce ad essere soppresso. In quello di destra compaiono cinque incroci di cui solo alcuni possono essere soppressi ritracciando il grafo. Quindi entrambi i grafi sono nonplanari.



**Commento :** Il grafo di destra è il più semplice tra tutti i grafi non-planari. Infatti i grafi con due, tre e quattro nodi sono in ogni caso planari, mentre i grafi con cinque nodi sono non-planari, se e solo se sono completi.

**Proprietà :** I bigrafi planari (vedere Par. 1.4.2) danno sempre origine a grafi planari, dal momento che i bipoli fittizi di ogni  $k$ -polo formano un albero di  $k$  nodi e  $k - 1$  rami, che è planare.

**Prova :** Tracciare alcuni bigrafi planari su un foglio senza incroci tra gli archi, e sostituire ciascun multipolo col corrispondente sottografo (albero) di bipoli fittizi.

**Commento :** Un grafo planare ha in genere origine dalla modellizzazione di un problema fisico a due dimensioni, mentre un grafo nonplanare ha origine da un problema a tre o più dimensioni. I grafi con pochi [molti] rami in confronto al numero dei nodi sono spesso planari [nonplanari].

**Diaggazione :** La rete di vie di una città senza incroci a più livelli tra le vie (cioè cavalcavia, viadotti, sottopassaggi, gallerie, ...) costituisce un grafo planare. In caso contrario la rete costituisce un grafo generalmente nonplanare.

**Commento :** La planarità del grafo di un circuito fisico consente di evitare alcuni accorgimenti tecnologici nella costruzione sia di un circuito su un unico "chip" (circuito integrato) sia di una piastra (circuito stampato).

### 3.2 MAGLIE E TAGLI

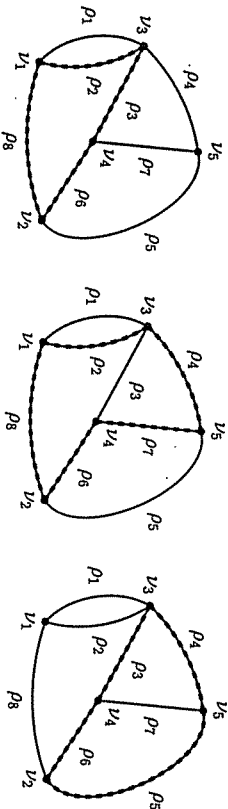
Questa sezione introduce i concetti di *maglia* e *taglio* come sottoinsiemi di rami di un grafo (*sottografi*). Ad essi associamo un verso di percorrenza (per le maglie) e un verso di attraversamento (per i tagli).

#### 3.2.1 Maglie

La definizione di percorso discussa nel Par. 3.1.3 consente di introdurre la seguente definizione :

**Definizione :** Se i due nodi estremi di un percorso sono scelti coincidenti, il percorso costituisce una *maglia* del grafo.

**Esempio A :** La figura riporta tre diverse maglie del medesimo grafo :



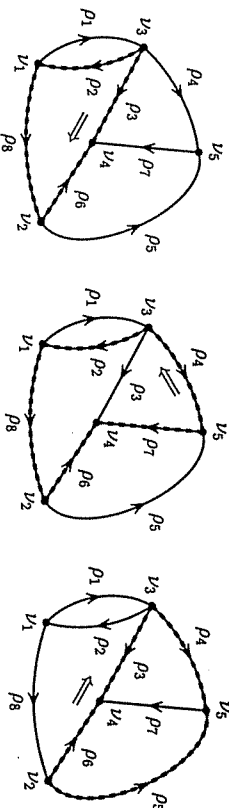
$$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_1\}, \quad \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1\}, \quad \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_2\}$$

Le tre maglie in figura sono costituite dalle sequenze alternate di nodi e rami :

Lungo una maglia si incontrano  $k$  nodi e  $k$  rami. Una maglia consente due percorsi completamente separati tra qualsiasi coppia di nodi appartenenti alla maglia.

**Orientazione delle maglie :** A ogni maglia può essere assegnato un verso di percorrenza in quanto la maglia può essere percorsa in verso orario o antiorario, come una qualsiasi linea chiusa. In questo caso la maglia è detta *orientata*.

**Esempio B :** Le tre maglie della figura precedente sono qui ripetute avendo assegnato un verso di percorrenza :



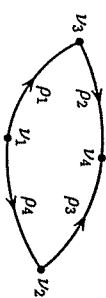
Le frecce " $\Rightarrow$ " denotano il verso di percorrenza delle suddette maglie.

**Diaggazione :** Una maglia può venire visualizzata all'interno della rete viaria di una città : se partiamo da casa nostra e ci ritorniamo senza ripassare per le stesse vie e incroci, noi percorriamo una maglia. Agli studenti milanesi possiamo ricordare le linee flouviarie 90 e 91 come esempio di una maglia della rete dei trasporti urbani.

**Commento :** In genere, i versi delle maglie possono essere scelti in modo arbitrario, dal momento che questi versi sono indipendenti dalla realtà fisica. Quindi il verso di ogni ramo può essere concorde ovvero discordo con quello delle maglie di cui fa parte.

**Diaggazione :** L'orientazione delle maglie è molto importante anche nella vita reale. Immaginate una gara di formula 1 nell'autostrada di Monza in cui ogni pilota potesse scegliere il verso di percorrenza dell'anello d'asfalto ?

**Grafo con un'unica maglia ? :** Tra tutti i grafi possibili vi sono grafi con una unica maglia. La risposta è positiva e un banale esempio è riportato nella figura accanto. Notare che in ciascun nodo del grafo confluiscono due e due soli rami.



#### 3.2.2 Tagli

**Definizione :** Si dice *taglio* di un grafo qualsiasi sottoinsieme di rami, che siano necessari e sufficienti, qualora vengano rimossi, a separare il grafo in due sottografi separati.

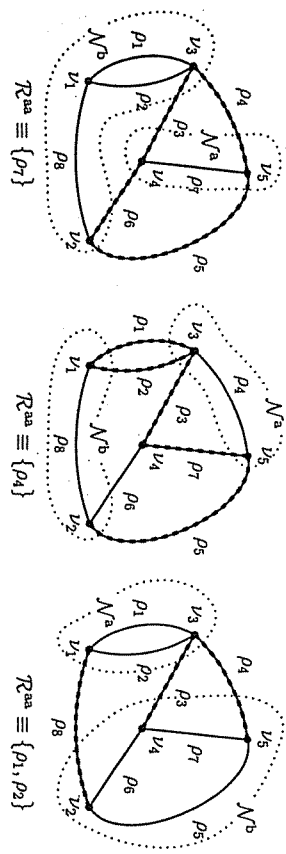
**Commento :** Ogni taglio partiziona l'insieme dei nodi  $\mathcal{N}$  in due sottoinsiemi  $\mathcal{N}^a$  e  $\mathcal{N}^b$ , dove  $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}^a \cup \mathcal{N}^b$  e  $\mathcal{N}^a \cap \mathcal{N}^b \equiv \emptyset$ .

Consequentemente l'insieme dei rami  $\mathcal{R}$  risulta suddiviso nei tre sottoinsiemi :

- $\mathcal{R}^{ab}$ , contenente i rami connessi a coppie di nodi in  $\mathcal{N}^a$
- $\mathcal{R}^b$ , contenente i rami connessi a coppie di nodi in  $\mathcal{N}^b$
- $\mathcal{R}^{ab}$  contenente i rami connessi a un nodo in  $\mathcal{N}^a$  e a un nodo in  $\mathcal{N}^b$

Il sottoinsieme  $\mathcal{R}^{ab}$  coincide proprio con i rami del taglio.

**Esempio A :** La figura riporta tre diversi tagli dello stesso grafo e i sottoinsiemi di rami determinati dalla partizione ( $\mathcal{N}^a, \mathcal{N}^b$ ) dei nodi :



$$\mathcal{R}^{aa} \equiv \{p_1\}$$

$$\mathcal{R}^{bb} \equiv \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$\mathcal{R}^{ab} \equiv \{p_3, p_4, p_5, p_6\}$$

$$\mathcal{R}^{aa} \equiv \{p_4\}$$

$$\mathcal{R}^{bb} \equiv \{p_5, p_6\}$$

$$\mathcal{R}^{ab} \equiv \{p_1, p_2, p_3, p_7\}$$

$$\mathcal{R}^{aa} \equiv \{p_1, p_2\}$$

$$\mathcal{R}^{bb} \equiv \{p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8\}$$

Il taglio di sinistra è nello stesso tempo anche una maglia.

Abbiamo visto che ciascun taglio definisce una specifica partizione dell'insieme dei nodi  $\mathcal{N}$  nei due sottoinsiemi  $\mathcal{N}^a$  e  $\mathcal{N}^b$ . Consideriamo il problema inverso :

**Questione** : Il sottoinsieme  $\mathcal{R}^{ab}$  associato a una qualsiasi partizione  $\mathcal{N}^a$  e  $\mathcal{N}^b$  dei nodi  $\mathcal{N}$  definisce un taglio ?

**Risposta** : Il sottoinsieme di rami  $\mathcal{R}^{ab}$  definito dalla partizione costituisce un taglio se e solo se i sottografi  $\mathcal{R}^{aa}$  e  $\mathcal{R}^{bb}$  sono connessi. In caso contrario  $\mathcal{R}^{ab}$  costituisce l'unione di più tagli.

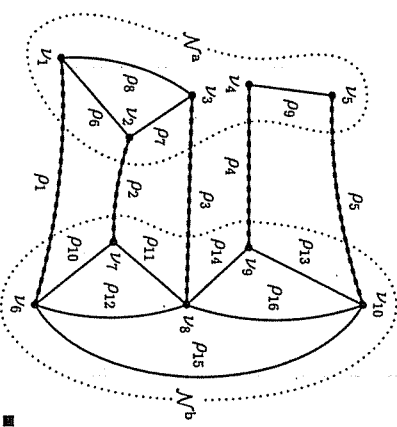
**Esempio B** : Avevamo partizionato l'insieme dei nodi  $\mathcal{N}$  del grafo in figura nei due sottoinsiemi  $\mathcal{N}^a$  e  $\mathcal{N}^b$ , introduciamo i tre sottoinsiemi di rami :

$$\mathcal{R}^{aa} \equiv \{p_6, p_7, p_8, p_9\}$$

$$\mathcal{R}^{bb} \equiv \{p_{10}, p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}, p_{16}\}$$

$$\mathcal{R}^{ab} \equiv \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$$

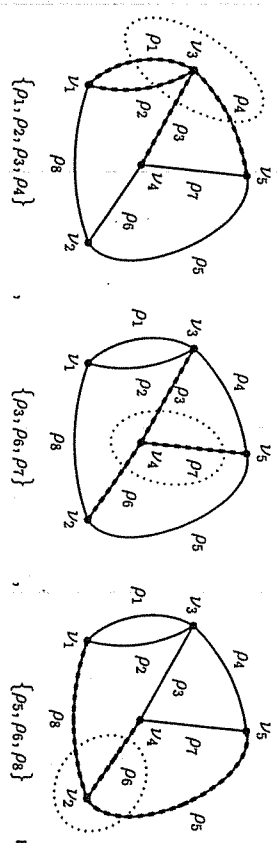
Il sottoinsieme  $\mathcal{R}^{aa}$  risulta sconnesso : infatti il ramo  $p_6$  è completamente separato dai rami  $p_7, p_8$  e  $p_9$ . Quindi il sottoinsieme  $\mathcal{R}^{ab}$  non costituisce un taglio del grafo, poiché la sua rimozione lascia tre sottografi tra loro sconnessi e non due, come previsto dalla definizione dei tagli nel Par. 3.2.2.



**Commento** : Il sottoinsieme  $\mathcal{R}^{ab}$  può essere suddiviso nei due sottoinsiemi  $\{p_1, p_2, p_3\}$  e  $\{p_4, p_5\}$ , ciascuno dei quali costituisce un taglio del grafo completo.

**Definizione** : Un taglio è chiamato *taglio nodale* se separa un unico nodo da tutti i rimanenti, cioè qualora  $\mathcal{N}^a$  ovvero  $\mathcal{N}^b$  siano costituiti da un unico nodo. Quindi esso è costituito dai rami incidenti al suddetto nodo.

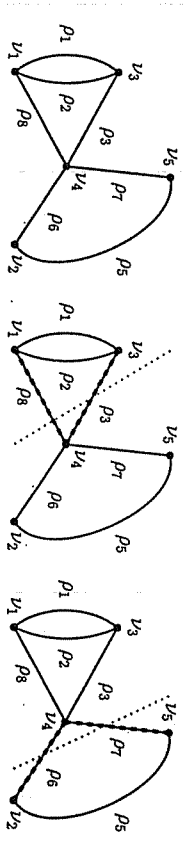
**Esempio C** : La figura sottostante riporta tre diversi tagli nodali, relativi ai nodi  $v_3, v_4$  e  $v_2$ , del medesimo grafo :



**Commento** : Qualora l'insieme dei nodi  $\mathcal{N}$  sia partizionato in due sottoinsiemi  $\mathcal{N}^a$ , costituito da un unico nodo, e  $\mathcal{N}^b$ , l'insieme dei rami  $\mathcal{R}^{ab}$  costituisce un taglio nodale se e solo se  $\mathcal{R}^{bb}$  risulta connesso. In caso contrario il sottoinsieme  $\mathcal{R}^{ab}$  coincide con l'unione di due o più tagli nonnodali.

**Nodo cruciale** : Un nodo a cui siano associati più di un taglio viene chiamato *nodo cruciale*.

**Esempio D** : Il nodo  $v_4$  del grafo riportato nella sottostante figura è cruciale :

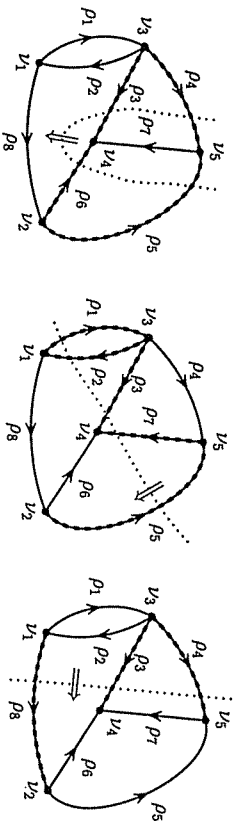


Infatti i quattro rami  $p_3, p_6, p_7$  e  $p_8$  incidenti al nodo  $v_4$  possono essere suddivisi in due coppie  $\{p_3, p_6\}$  e  $\{p_7, p_8\}$ , ciascuna delle quali costituisce, per proprio conto, un taglio.

**Disaggregazione** : Un taglio può venire visualizzato entro la rete viaria di una città attraversata da un fiume (per esempio, Roma attraversata dal Tevere e Firenze dall'Arno) : i ponti sul fiume costituiscono un taglio del grafo che rappresenta la rete viaria. Gli eventuali lettori tristesimi sono sconsigliati di ispirarsi a un fiume carsico per visualizzare un taglio : potrebbero trarre conclusioni completamente errate.

**Orientazione dei tagli** : A ogni taglio  $\mathcal{R}^{ab}$ , che partiziona l'insieme dei nodi  $\mathcal{N} \equiv \{\mathcal{N}^a, \mathcal{N}^b\}$  può essere assegnato un verso di attraversamento : il verso  $\mathcal{N}^a \rightarrow \mathcal{N}^b$  oppure il verso  $\mathcal{N}^b \leftarrow \mathcal{N}^a$ . In questo caso il taglio è detto *orientato*.

**Esempio E** : i tagli sono ridisegnati con orientazione

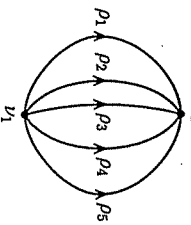


Le frecce " $\Rightarrow$ " denotano il verso di attraversamento dei suddetti tagli.

**Commento :** In genere, i versi dei tagli possono essere scelti in modo arbitrario, dal momento che questi versi sono indipendenti dalla realtà fisica. Quindi il verso di ogni ramo può essere concorde ovvero discorde con quello dei tagli di cui fa parte.

**Diaggazione :** L'orientazione dei tagli è molto importante anche nella vita reale. Immaginate le automobili che attraversano il casello autostradale della Ghisola senza osservare il verso di attraversamento stabilito per ciascuna porta del casello stesso.

**Grafo con un unico taglio ? :** Tra tutti i grafi possibili vi sono grafi con un unico taglio ? La risposta è positiva ed un'esempio lo si trova nella figura accanto. Notare che nel grafo vi è un'unica coppia di nodi a cui sono connessi tutti i rami.



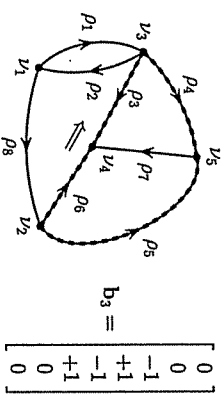
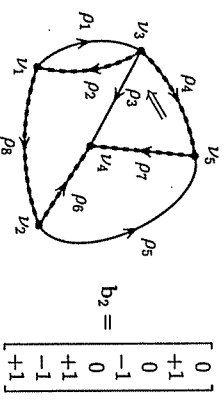
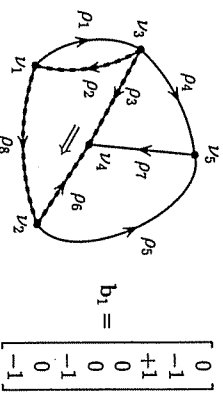
**3.2.3 Vettori topologici delle maglie e dei tagli**

La numerazione progressiva e l'orientazione dei rami, assieme a quella delle maglie e dei tagli, ci consentono di rappresentare ogni maglia e ogni taglio mediante un apposito vettore :

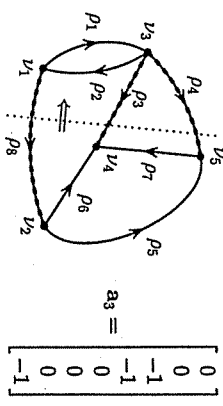
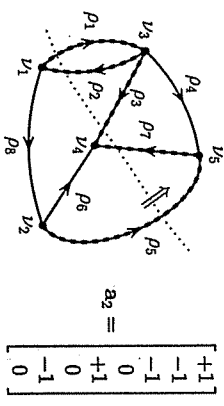
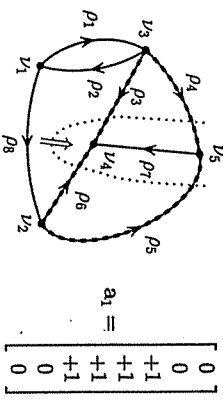
**Definizione :** Chiamiamo **vettore topologico** di una maglia/taglio il vettore di  $m$  elementi, uno per ciascun ramo, posti uguali a :

valore dell'elemento	-1	0	+1
se il ramo appartiene alla maglia/taglio con verso discorde			
se il ramo appartiene alla maglia/taglio con verso concorde			

**Esempio A' :** qui sotto sono indicati i vettori topologici di tre diverse maglie dello stesso grafo orientato :



**Esempio A'' :** qui sotto sono indicati i vettori topologici di tre diversi tagli dello stesso grafo orientato :



**Commento :** Se cambiasimo segno a un vettore topologico, cioè a tutti i suoi elementi, esso rappresenterebbe la stessa maglia o lo stesso taglio con orientazione opposta.

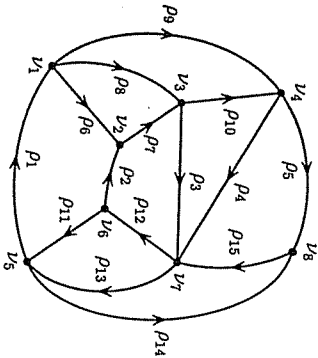
**Commento :** La maglia descritta dal vettore  $b_3$  e il taglio descritto dal vettore  $a_1$  sono costituiti dagli stessi rami : comunque i corrispondenti vettori differiscono per i segni degli elementi nonnulli.

**Avvertenza :** Notare che un qualsiasi vettore di dimensioni uguali al numero dei rami e costituito da elementi di valore 1, -1 o 0 non rappresenta in genere una maglia o un taglio del grafo, dal momento che un sottosistema qualsiasi di rami (scelti a caso) non forma in genere né una maglia né un taglio.

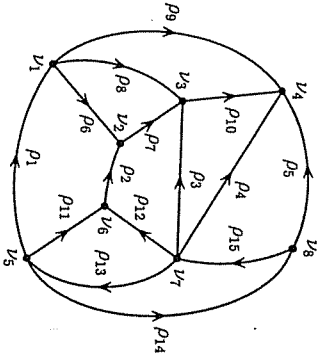
**Definizione :** Una maglia è **uniformemente orientata**, se tutti i suoi rami sono orientati concordemente o discordemente con la maglia. In altre parole tutti gli elementi diversi da zero del vettore topologico sono uguali a 1 oppure -1.

**Definizione :** Un taglio è **uniformemente orientato**, se tutti i suoi rami sono orientati concordemente o discordemente col taglio. In altre parole tutti gli elementi diversi da zero del suo vettore topologico sono uguali a 1 oppure -1.

**Esempio B'** : La maglia  $\{p_1, p_{11}, p_2, p_{15}, p_5, p_{10}, p_7, p_6\}$  del sottostante grafo è uniformemente orientata: tutti i suoi rami sono orientati nel verso orario della maglia.



**Esempio B''** : Il taglio  $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$  del sottostante grafo è uniformemente orientato: tutti i suoi rami sono orientati da destra a sinistra.



Altre maglie uniformemente orientate compaiono nel grafo, per esempio:

$$\{p_1, p_{13}, p_4, p_6\}, \{p_{11}, p_{13}, p_3, p_8\} \text{ e } \{p_{13}, p_{14}, p_{15}\}.$$

Altri tagli uniformemente orientati compaiono nel grafo, per esempio:

$$\{p_8, p_{10}, p_4, p_5\}, \{p_9, p_8, p_7, p_3, p_4, p_5\} \text{ e } \{p_1, p_{11}, p_{12}, p_3, p_4, p_5\}.$$

### 3.3 RELAZIONI TRA MAGLIE E TAGLI

Questa sezione esamina le principali relazioni topologiche tra le maglie, i tagli, gli alberi e i coalberi. Essi consentono di dimostrare le relazioni topologiche tra maglie e tagli ed in particolare il teorema dell'ortogonalità tra maglie e tagli e il teorema dei grafi colorati.

#### 3.3.1 Relazioni preliminari tra percorsi maglie, tagli, alberi e coalberi

Per un generico taglio  $\mathcal{R}^{ab}$ , definito dalla partizione dei nodi  $\mathcal{N} \equiv \{\mathcal{N}^a, \mathcal{N}^b\}$ , valgono le seguenti proprietà:

**Proprietà**: Qualsiasi percorso collegante un nodo in  $\mathcal{N}^a$  e uno in  $\mathcal{N}^b$  contiene un numero dispari di rami appartenenti a  $\mathcal{R}^{ab}$ .

**Proprietà**: Il numero di rami comuni ad una qualsiasi maglia e ad un qualsiasi taglio è nullo oppure è pari.

**Prove**: L'intuizione ci consente di verificare le suddette proprietà con l'aiuto del grafo nella figura sottostante, in cui è evidenziato il taglio  $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$  che separa i nodi  $\mathcal{N}$  nei sottoinsiemi  $\mathcal{N}^a$  e  $\mathcal{N}^b$ :

I seguenti percorsi, con i nodi  $v_2 \in \mathcal{N}^a$  e  $v_{10} \in \mathcal{N}^b$  come estremi, hanno, rispettivamente, uno, tre e cinque rami (sottolineati da una graffa) in comune col taglio:

$$\{p_7, p_8, p_4, p_{15}, p_{13}, p_{16}\}$$

$$\{p_6, p_1, p_{11}, p_{12}, p_3, p_8, p_4, p_{14}\}$$

$$\{p_2, p_{11}, p_1, p_9, p_3, p_{15}, p_4, p_{10}, p_5\}.$$

Le seguenti maglie hanno, rispettivamente, nessuno, due e quattro rami (sottolineati da una graffa) in comune col taglio:

$$\{p_{14}, p_{15}, p_{12}, p_{11}, p_{16}\}$$

$$\{p_7, p_8, p_4, p_{15}, p_{12}, p_2\}.$$

Le seguenti proprietà risulteranno utili nel paragrafo successivo per caratterizzare basi di maglie e di tagli.

**Proprietà**: In un grafo qualsiasi maglia e qualsiasi coalbero hanno almeno un ramo in comune.

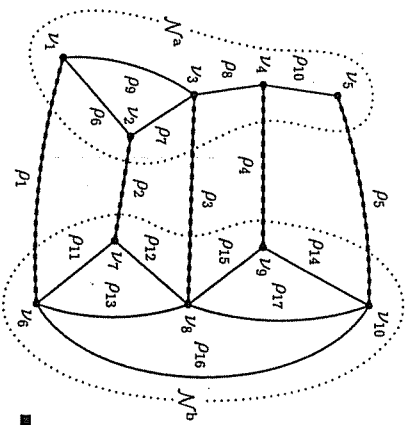
**Prova**: Per definizione, ciascun albero non può contenere tutti i rami di una qualsiasi maglia e quindi almeno un ramo di qualsiasi maglia appartiene al coalbero.

**Proprietà**: Ciascun ramo di un coalbero forma una e una sola maglia, i cui restanti rami facciano parte dell'albero.

**Prova**: I nodi connessi dal ramo del coalbero sono anche connessi da uno e un solo percorso formato da rami dell'albero: questo percorso forma una maglia con il ramo del coalbero.

**Commento**: A ogni ramo del coalbero può essere associata una specifica maglia per un totale di  $m - n + 1$  maglie.

**Divagazione**: Se un fiume in piena travolgesse tutti i ponti di una città, ogni collegamento tra le due sponde rimane impedito.



**Proprietà**: In un grafo qualsiasi taglio e qualsiasi albero hanno almeno un ramo in comune.

**Prova**: Per definizione, l'albero stabilisce un percorso tra ogni coppia di nodi, mentre il taglio impedisce qualsiasi percorso tra due nodi appartenenti a due sottoinsiemi complementari.

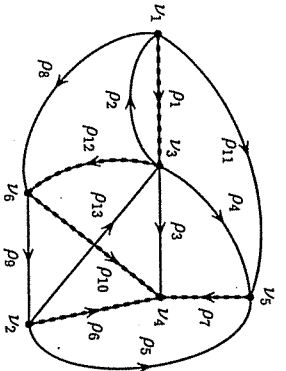
**Proprietà**: Ciascun ramo di un albero forma uno e un solo taglio, i cui restanti rami facciano parte del coalbero.

**Prova**: Il ramo dell'albero separa i nodi in due sottoinsiemi, che a loro volta definiscono un taglio, formato dal suddetto ramo dell'albero e da rami facenti tutti parte del coalbero.

**Commento**: A ogni ramo dell'albero può essere associato uno specifico taglio per un totale di  $n - 1$  tagli.

■

**Esempio A :** Il grafo orientato della figura accanto è costituito da  $n = 6$  nodi e  $m = 13$  rami. Su di esso è rimarcato un albero, costituito dai  $n - 1 = 5$  rami  $\rho_1, \rho_6, \rho_7, \rho_{10}$  e  $\rho_{13}$ , e il rispettivo coalbero di  $m - n + 1 = 8$  rami. Le maglie e i tagli definiti dalla suddetta scomposizione albero/coalbero sono elencati qui di seguito.



Le otto maglie associate a ciascun ramo del coalbero sono :

- $\{\rho_2, \rho_1\}$ ,  $\{\rho_3, \rho_{12}, \rho_{10}\}$ ,  $\{\rho_4, \rho_7, \rho_{10}, \rho_{12}\}$ ,  $\{\rho_5, \rho_6, \rho_7\}$ ,  $\{\rho_8, \rho_1, \rho_{12}\}$ ,  $\{\rho_9, \rho_{10}, \rho_6\}$ ,  $\{\rho_{11}, \rho_1, \rho_{12}, \rho_{10}, \rho_7\}$ ,  $\{\rho_{13}, \rho_{12}, \rho_{10}, \rho_6\}$ .

Le graffe indicano il ramo del coalbero che da origine alla maglia.

I cinque tagli associati a ciascun ramo dell'albero sono :

- $\{\rho_1, \rho_2, \rho_8, \rho_{11}\}$ ,  $\{\rho_6, \rho_5, \rho_9, \rho_{13}\}$ ,  $\{\rho_7, \rho_4, \rho_5, \rho_{11}\}$ ,  $\{\rho_{10}, \rho_3, \rho_4, \rho_8, \rho_{11}, \rho_{13}\}$ ,  $\{\rho_{12}, \rho_3, \rho_4, \rho_8, \rho_{11}, \rho_{13}\}$ .

Le graffe indicano il ramo dell'albero che da origine al taglio.

**3.3.2 Teorema dell'ortogonalità tra maglie e tagli**  
 Indipendentemente dai versi assegnati ai rami, maglie e tagli, i vettori topologici delle maglie e dei tagli soddisfano al seguente teorema :

**Teorema :** Ciascuna maglia e ciascun taglio in un grafo sono tra loro ortogonali nel senso che il prodotto scalare dei rispettivi vettori topologici  $b$  e  $a$  è nullo :

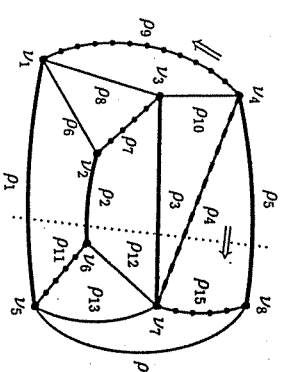
$$b^T a = a^T b = 0 \quad \forall b \in \text{maglia} \subset \text{grafo}, \quad \forall a \in \text{taglio} \subset \text{grafo}$$

**Prova :** Come già detto il numero  $k$  di rami comune a una maglia e a un taglio è necessariamente pari ( $k = 0, 2, 4, 6, \dots$ ):

$$b^T a = \sum_{(1)} 0 + \sum_{(2)} (+1) + \sum_{(3)} (-1) = 0 + k/2 - k/2 = 0$$

- La sommatoria parziale marcata da (1) è dovuta ai rami che non appartengono sia alla maglia sia al taglio : essi non danno alcun contributo al prodotto  $b^T a$ .
- La sommatoria parziale marcata da (2) è dovuta ai  $k/2$  rami che sono concordi sia con la maglia sia col taglio ovvero discordi sia con la maglia sia col taglio : siccome ciascun ramo da un contributo di valore 1 al prodotto  $b^T a$ , questa sommatoria parziale vale  $k/2$ .
- La sommatoria parziale marcata da (3) è dovuta ai  $k/2$  rami concordi con la maglia e discordi col taglio ovvero discordi con la maglia e concordi con il taglio : siccome ciascun ramo da un contributo di valore  $-1$  al prodotto  $b^T a$ , questa sommatoria parziale vale  $-k/2$ .

**Esempio A :** Consideriamo la maglia orientata  $\{\rho_1, \rho_{11}, \rho_7, \rho_3, \rho_{15}, \rho_5, \rho_9\}$  e il taglio orientato  $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5\}$  del grafo in figura. I rami  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  e  $\rho_5$  (contraddistinti da una linea spessa) sono comuni alla maglia e al taglio. Notare che la maglia e il taglio hanno un orientamento concorde nei rami  $\rho_1$  e  $\rho_3$  e discordo nei rami  $\rho_2$  e  $\rho_5$ . Il ramo  $\rho_4$  fa parte solamente del taglio e i rami  $\rho_{11}, \rho_7, \rho_{15}$  e  $\rho_9$  solamente della maglia.



**Esempio B :** Verifichiamo il teorema eseguendo alcuni prodotti scalari di vettori topologici di maglie e tagli incontrati nell'esempio del Par. 3.3.2 :

$$[b_1]^T [a_1] = 0 \times 0 + (-1) \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times 0 + (-1) \times 0 = 0$$

$$[b_1]^T [a_3] = 0 \times 0 + (-1) \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times (-1) + 0 \times 0 + (-1) \times 0 + 0 \times 0 + (-1) \times (-1) = 0$$

$$[b_2]^T [a_1] = 0 \times 0 + (-1) \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 0 = 0$$

$$[b_2]^T [a_3] = 0 \times 0 + (-1) \times 0 + 0 \times (-1) + 1 \times (-1) + 0 \times 0 + (-1) \times 0 + 1 \times 0 + (-1) \times (-1) = 0$$

Le graffe superiori indicano i termini di valore 1, mentre le graffe inferiori indicano i termini di valore  $-1$ . I termini privi di graffe sono nulli.

**Commento :** L'ortogonalità tra maglie e tagli viene comunemente ricordata dicendo che le maglie e i tagli sono tra loro *duali*.

**A zozzo per Firenze :** L'ortogonalità tra una maglia qualsiasi e un taglio qualsiasi può essere visualizzata nella rete viaria di una città divisa in due parti da un fiume, attraversato da alcuni ponti. Spostiamoci a Firenze : la città è bagnata dall'Arno, che la separa in due parti : una a Nord più estesa e una a Sud meno estesa. Facciamo una lunga passeggiata, partendo per esempio dal Campanile di Giotto (a Nord dell'Arno) e visitando i notissimi palazzi, chiese e monumenti della città tra cui Piazzale Michelangelo e Palazzo Pitti (a Sud dell'Arno) e ritornando infine al Campanile di Giotto senza ripassare due volte per le stesse vie, gli stessi incroci e le stesse gelaterie. La nostra passeggiata costituisce una maglia della rete viaria della città e alcuni rami della maglia, necessariamente in numero pari, saranno costituiti necessariamente da ponti sull'Arno : metà di questi ponti vengono percorsi nel verso Nord-Sud (concorde col taglio) e l'altra metà nel verso Sud-Nord (discordo col taglio), provando l'ortogonalità tra il taglio e la maglia. Nel gennaio 1985 alcuni turisti e/o cittadini attraversavano l'Arno camminando sul ghiaccio che ricopriva il fiume. Essi mettevano a repentaglio la propria vita forse per il "gusto di smentire" il teorema dell'ortogonalità.

Nella primavera successiva cessava di vivere proprio nella sua amata Firenze il prof. Mario Soldi già titolare della prima cattedra, in Italia, di Teoria delle Reti Elettriche presso il Politecnico di Torino.

### 3.3.3 Teorema dei grafi colorati

Esaminiamo un teorema sui grafi molto interessante, che può comunque essere omesso, dal momento che non viene utilizzato nel seguito.

**Lemma:** Una maglia uniformemente orientata e a un taglio uniformemente orientato non possono avere un ramo in comune.

**Prova:** Se una maglia e un taglio uniformemente orientati avessero uno o più rami in comune, il prodotto scalare dei vettori topologici sarebbe necessariamente diverso da zero, violando il teorema dell'ortogonalità.

**Teorema:** Dato un qualsiasi ramo di un grafo strettamente connesso esiste sempre una e una sola delle seguenti situazioni tra loro duali:

Esiste una maglia uniformemente orientata che contiene il ramo

oppure

Esiste un taglio uniformemente orientato che contiene il ramo

**Prova:** Sia dato un grafo strettamente connesso in cui tutti i rami siano orientati. Consideriamo un ramo qualsiasi, che chiameremo ramo originario, e coloriamo di verde il nodo in cui esso entra. Coloriamo di rosso tutti i rami uscenti dal nodo verde e di verde i nodi in cui entrano questi rami rossi. Ripetiamo la colorazione in rosso di tutti i rami uscenti dai nuovi nodi verdi. La colorazione dei rami in rosso e dei nodi in verde ha termine nel momento in cui non si ha alcun ramo non-rosso uscente da un nodo verde e alcun nodo non-verde in cui entra un ramo rosso.

A questo punto i nodi risultano suddivisi nel sottoinsieme dei nodi verdi e nel sottoinsieme dei nodi non-verdi (che può essere vuoto), mentre i rami risultano suddivisi nel sottoinsieme dei rami rossi e nel sottoinsieme dei rami non-rossi (che può essere vuoto). Tutti i rami rossi connettono nodi verdi: ci troviamo davanti a due alternative:

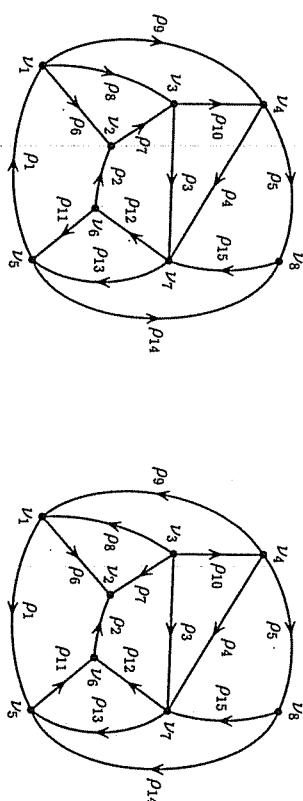
**Il ramo originario connette due nodi verdi:**  
 Il ramo originario connette un nodo non-verde e un nodo verde:

In questo caso tutti i rami che connettono un nodo verde a un nodo non-verde (tra cui quello originario) risultano orientati dal nodo non-verde al nodo verde e risultano non-rossi.

Nella seconda alternativa i rami che connettono un nodo verde a un nodo non-verde costituiscono un taglio uniforme ovvero un insieme di tagli uniformi, di uno dei quali fa necessariamente parte il ramo originario, che è rosso.

**Esempio A':** Consideriamo il ramo  $\rho_4$  del sottostante grafo: osserviamo che la maglia  $\{\rho_1, \rho_2, \rho_7, \rho_1, \rho_0\}$ , uniformemente orientata, contiene il ramo in questione, mentre non esiste alcun taglio uniformemente orientato che contenga  $\rho_4$ .

**Esempio A'':** Consideriamo il ramo  $\rho_4$  del sottostante grafo: osserviamo che il taglio  $\{\rho_9, \rho_8, \rho_7, \rho_3, \rho_4, \rho_5\}$ , uniformemente orientato, contiene il ramo in questione, mentre non esiste alcuna maglia uniformemente orientata che contenga  $\rho_4$ .



Esistono altre maglie uniformemente orientate contenenti  $\rho_4$ :  $\{\rho_4, \rho_{13}, \rho_1, \rho_9\}$  e  $\{\rho_4, \rho_{12}, \rho_{11}, \rho_1, \rho_8, \rho_{10}\}$ .

Esistono altri tagli uniformemente orientati contenenti  $\rho_4$ :  $\{\rho_1, \rho_6, \rho_7, \rho_3, \rho_4, \rho_5\}$  e  $\{\rho_9, \rho_8, \rho_7, \rho_3, \rho_4, \rho_{15}, \rho_{14}\}$ .

### 3.4 DUALITÀ TRA GRAFI PLANARI

Le proprietà topologiche dei grafi planari vengono discusse: in particolare sono introdotti gli anelli come particolari maglie e il concetto di dualità tra grafi planari.

#### 3.4.1 Anelli

Tracciamo un grafo planare su un foglio senza alcun incrocio tra i suoi rami: alcune delle maglie del grafo hanno un ruolo particolare:

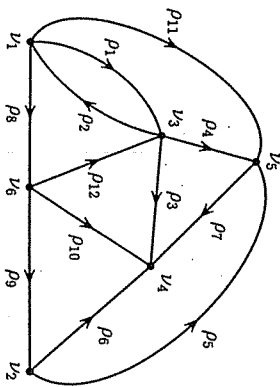
**Definizione:** Sono chiamati *anelli interni* le maglie del grafo planare, al cui interno non sono tracciati altri rami e nodi.

**Divagazione:** Visualizziamo il concetto di anello: se andate a spasso per la vostra città limitandovi a fare il giro dell'isolato in cui si trova la vostra casa, voi percorrete un anello della rete viaria, altrimenti percorrete una maglia normale.

**Definizione:** Viene chiamato *anello esterno* la maglia (unica) del grafo planare, al cui esterno non sono tracciati altri rami e nodi.

**Esempio A:** Il grafo della figura accanto è evidentemente planare, dal momento che è privo di incroci tra i rami. Qui riportiamo tutti i suoi otto anelli compreso quello esterno:

- $\{\rho_{11}, \rho_4, \rho_1\}$ ,  $\{\rho_4, \rho_7, \rho_3\}$ ,  $\{\rho_7, \rho_5, \rho_6\}$ ,
- $\{\rho_1, \rho_2\}$ ,  $\{\rho_2, \rho_{12}, \rho_8\}$ ,  $\{\rho_{12}, \rho_3, \rho_{10}\}$ ,
- $\{\rho_{10}, \rho_6, \rho_9\}$ ,  $\{\rho_{11}, \rho_5, \rho_9, \rho_8\}$  (esterno).

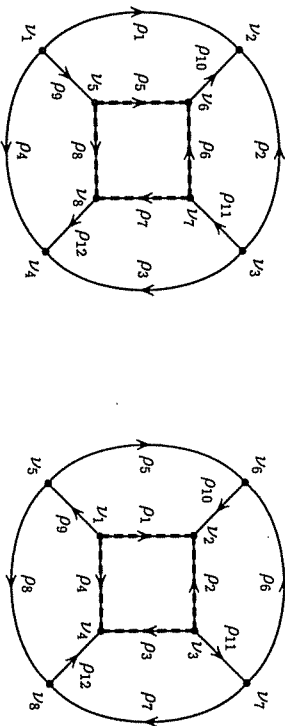


**Commento:** Possiamo ridisegnare il grafo su un foglio (grafo equivalente a quello origi-

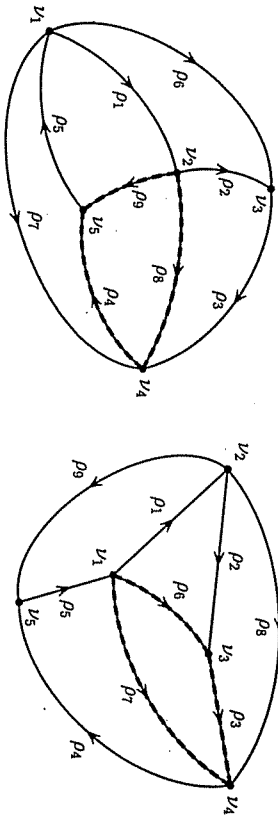


nario) in modo tale che l'anello esterno diventi un anello interno e uno qualsiasi degli anelli interni diventi quello esterno. Quindi da un punto di vista topologico non vi è alcuna differenza tra gli anelli interni e quello esterno. Per comprendere meglio questo fatto, basta pensare al grato planare tracciato su di una superficie sferica senza incroci tra i rami. In questo caso tutti gli anelli, sia quelli interni sia quello esterno (qualora tracciato su una superficie piana) suddividono la superficie sferica in due parti.

**Esempio B :** Consideriamo la superficie chiusa costituita dalle sei facce di un cubo : essa è topologicamente, ma non geometricamente, equivalente a quella di una sfera. Tracciamo sulla superficie cubica i dodici lati e gli otto vertici ; essi costituiscono un grato planare, tracciato nella figura sottostante in due forme geometricamente diverse ma topologicamente equivalenti. Per esempio l'anello esterno di ciascuna forma è interno per l'altra.



**Esempio C :** I due grafi nella figura sottostante sono planari ed equivalenti : in ciascuno di essi è evidenziato l'anello interno che corrisponde all'anello esterno dell'altro grafo equivalente :



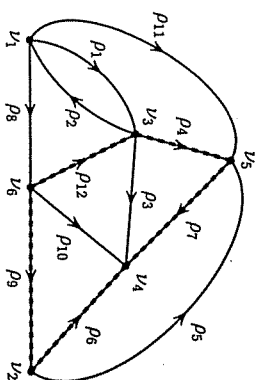
**Proprietà :** Tutti i rami di un grafo planare fanno parte di due e due soli anelli (incluendo anche l'anello esterno).

**Prova :** Consideriamo un grafo planare tracciato su una superficie chiusa (sfera) : ogni ramo agisce come frontiera tra due porzioni della superficie chiusa, ciascuna delimitata da un anello.

**Proprietà :** Qualsiasi maglia di un grafo planare, che non coincida con un anello, suddivide l'insieme di tutti gli anelli del grafo in due sottosistemi : quelli interni alla maglia e

quelli esterni.

**Esempio D :** Consideriamo la maglia  $\{p_4, p_7, p_8, p_9, p_{12}\}$  del grafo planare in figura : essa separa gli anelli tracciati al suo interno  $\{p_4, p_7, p_3\}$ ,  $\{p_2, p_{10}, p_{12}\}$  e  $\{p_{10}, p_6, p_9\}$  da quelli tracciati al suo esterno  $\{p_2, p_{12}, p_8\}$ ,  $\{p_{11}, p_2\}$ ,  $\{p_{11}, p_{11}, p_4\}$ ,  $\{p_7, p_5, p_6\}$  e  $\{p_8, p_{11}, p_5, p_9\}$  (anello esterno del grafo).



**Commento :** Questa proprietà è analoga a quella di un qualsiasi taglio di un qualsiasi grafo (non necessariamente planare) che suddivide i nodi in due sottosistemi. Questa analogia verrà chiarita nel prossimo paragrafo.

### 3.4.2 Grafo primale e grafo duale

Consideriamo un qualsiasi grafo planare che chiamiamo *grafo primale*. Una volta noto il grafo primale noi introduciamo il rispettivo *grafo duale*. Esso è costruito, partendo dai nodi, rami e anelli del grafo primale :

**Nodi duali :** Cominciamo a tracciare il grafo duale collocando un nodo duale all'interno di ogni anello interno primale. Il nodo duale corrispondente all'anello esterno primale deve essere collocato all'esterno dello stesso.

**Rami duali :** Per ogni ramo primale, tracciamo un ramo duale intersecante il ramo primale stesso e collegante i nodi duali corrispondenti ai due anelli primali di cui fa parte il ramo primale.

**Grafo duale :** Avendo tracciato i nodi e i rami duali, il tracciamento del grafo duale risulta completato : esso risulta a sua volta planare.

**Anelli duali :** Ogni anello interno del grafo duale delimita una regione del piano al cui interno vi è uno e un solo nodo primale, mentre l'anello esterno duale circonda tutti i nodi primali eccetto uno. Quindi viene stabilita una corrispondenza biunivoca tra ciascun taglio nodale primale e ciascun anello duale e viceversa.

Dal confronto del grafo primale e del grafo duale risulta evidente la corrispondenza biunivoca tra gli anelli primali e i nodi duali, tra i rami primali e i rami duali, tra i nodi primali e gli anelli duali. Inoltre notiamo che a qualsiasi maglia del grafo primale corrisponde uno specifico taglio del grafo duale e che a qualsiasi taglio del grafo primale corrisponde una specifica maglia del grafo duale.

In particolare, se nel grafo primale compare un taglio nodale costituito da due soli rami, nel grafo duale corrisponde un anello costituito da due soli rami cioè da due rami incidenti la stessa coppia di nodi duali.

**Esempio A :** Il grafo primale, descritto con le usuali notazioni e dimensioni geometriche, è costituito da cinque nodi e nove rami (gli anelli sono sei, comprendendo quello esterno). Il grafo duale, rappresentato mediante dimensioni geometriche maggiorate e notazioni barrate, è costituito da sei nodi e nove rami (gli anelli sono cinque, comprendendo

quello esterno).

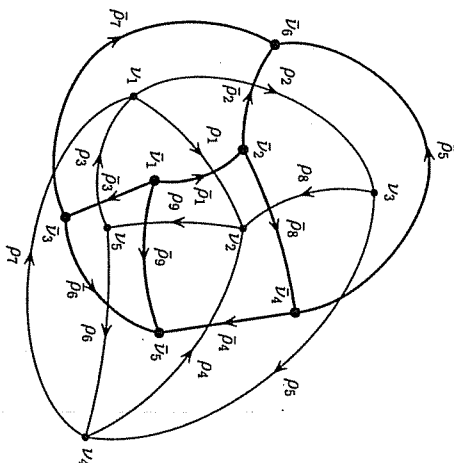
La corrispondenza biunivoca tra rami primali e rami duali è evidenziata dal pedice comune, mentre le corrispondenze biunivoche tra anelli e nodi sono elencate qui di seguito :

**anelli primali**  $\longleftrightarrow$  **nodii duali**

- Anello :  $\{p_1, p_2, p_3\} \longleftrightarrow v_1$
- Anello :  $\{p_1, p_2, p_8\} \longleftrightarrow v_2$
- Anello :  $\{p_3, p_6, p_7\} \longleftrightarrow v_3$
- Anello :  $\{p_4, p_8, p_8\} \longleftrightarrow v_4$
- Anello :  $\{p_4, p_6, p_9\} \longleftrightarrow v_5$
- Anello :  $\{p_2, p_7, p_8\} \longleftrightarrow v_6$

**anelli duali**  $\longleftrightarrow$  **nodii primali**

- Anello :  $\{\bar{p}_1, \bar{p}_3, \bar{p}_7, \bar{p}_2\} \longleftrightarrow v_1$
- Anello :  $\{\bar{p}_1, \bar{p}_8, \bar{p}_4, \bar{p}_9\} \longleftrightarrow v_2$
- Anello :  $\{\bar{p}_2, \bar{p}_5, \bar{p}_8\} \longleftrightarrow v_3$
- Anello :  $\{\bar{p}_5, \bar{p}_4, \bar{p}_6, \bar{p}_7\} \longleftrightarrow v_4$
- Anello :  $\{\bar{p}_3, \bar{p}_9, \bar{p}_8\} \longleftrightarrow v_5$



**Venezia e la dualità** : Incamminiamoci per le suggestive "calli" (vicoli) di Venezia. Dopo curve e contorcure ci assale un naturale senso di disorientamento che ci fa capire che la rete delle calli costituisce un grafo planare piuttosto intricato. Il percorso sarebbe completamente piatto se non fosse sovente interrotto da brevi scalinate che ci portano sulla sommità di ponticelli in pietra che superano i "rii" (canali). Ci soffermiamo sulla sommità del ponte per ammirare l'immane bionda e con gli occhi azzurri che passa su una gondola. La rete di rii costituisce, a sua volta, un grafo planare. Che relazione vi è tra il grafo planare delle calli e quello altrettanto planare dei rii ?

Venezia, città marinara per eccellenza, è stata fondata su un arcipelago di isole sabbiose separate l'un l'altra da stretti bracci di mare (rii) : questa rete di rii (modificata più volte nel corso dei secoli) permetteva un agevole trasporto delle merci porta a porta favorendo la vocazione mercantile della città. Ma per i cittadini privi di barca personale era più rapido e comodo spostarsi con le proprie gambe per cui la rete dei rii e delle calli sono coesistite senza ostracclarsi a vicenda avendo costruito una numero elevato di ponti che permettevano ai pedoni di spostarsi da un'isola all'altra.

Semplifichiamo la pianta della città assumendo che ogni tronco di rio sia attraversato da uno e un solo ponte che connette le due isole che formano le due sponde del rio e che su ogni isola vi sia un solo "campiello" (piazetta) in cui confluiscono le calli che conducono ai ponti e alle isole adiacenti.

**Grafo delle calli** : I nodi del grafo sono i campielli e i rami sono le calli che collegano i campielli di due isole vicine, comprendendo nel ramo anche il ponte che scavalca il rio che separa le due isole.

**Grafo dei rii** : I nodi del grafo sono gli incroci di rii e i rami sono i tronchi di rii tra due incroci : essi sono attraversati dal ponte che unisce le due sponde del rio.

Possiamo concludere che i grafi delle calli e dei rii sono tra loro duali.

**Avvertenza** : Il turista che intendesse alzarsi in piedi sulla gondola per salutare la bella

veneziana affacciarsi alla finestra di un palazzo sia attento : il ramo duale potrebbe colpire con una memorabile capocciata.

### 3.5 BASI DI MAGLIE E TAGLI

Questa sezione si sofferma sulle proprietà degli insiemi di maglie e di tagli : in questo ambito vengono definiti i sottoinsiemi di maglie e di tagli indipendenti, chiamati brevemente *basi di maglie* e *basi di tagli*. Infine vengono introdotte le matrici che rappresentano queste basi da un punto di vista algebrico, riunendo i vettori topologici di una base di maglie e di una base di tagli.

#### 3.5.1 Maglie e tagli indipendenti

Le maglie e i tagli esistenti in un grafo anche di dimensioni moderate possono essere assai numerosi. Per entrambi si pone spontanea la domanda :

*È necessario individuare tutte le maglie ovvero tutti i tagli ?*

La risposta è l'argomento di questo paragrafo.

**Definizione** : Un sottoinsieme di maglie di un grafo, con vettori topologici  $b_1, b_2, b_3, \dots$ , è detto *indipendente* se non esiste alcuna combinazione lineare nulla dei rispettivi vettori topologici

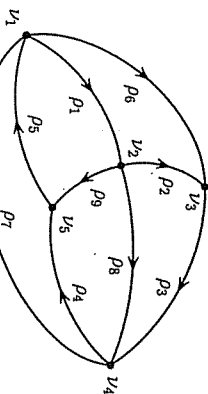
$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 + \dots \neq 0_m$$

in cui ciascuno dei coefficienti  $c_1, c_2, c_3, \dots$  può assumere uno dei tre valori 1, 0 o -1 con l'esclusione del caso banale  $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = 0$ .

Altrimenti, il sottoinsieme di maglie è detto *dipendente*.

Per esempio, una maglia dipende da altre due maglie se contiene solamente i rami appartenenti a una o all'altra maglia escludendo quelli comuni a entrambe.

**Esempio A** : Consideriamo il grafo nella figura accanto e scriviamo i vettori topologici di sei maglie (con verso di percorrenza orario)  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  e  $b_6$ , scelte a caso e riportate qui sotto. Verifichiamo la loro possibile indipendenza o dipendenza lineare.



WWWWWW???

SEGNARE maglie sul grafo

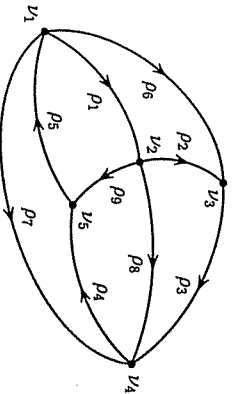
$$b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad b_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le maglie rappresentate dai vettori  $b_2, b_4$  e  $b_5$  sono dipendenti poiché  $b_5 = b_2 + b_4$ .  
 Le maglie rappresentate dai vettori  $b_1, b_2, b_3, b_4$  e  $b_6$  sono dipendenti poiché  $b_6 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$ .

Le maglie rappresentate dai vettori  $b_1, b_2, b_3$  e  $b_4$  non sono dipendenti poiché in ciascuno dei questi quattro vettori  $v_i$  è un elemento non nullo solamente in questo vettore:  
 Nel vettore  $b_1$  l'elemento corrispondente al ramo  $\rho_6$ ,  
 Nel vettore  $b_2$  l'elemento corrispondente al ramo  $\rho_5$ ,  
 Nel vettore  $b_3$  l'elemento corrispondente al ramo  $\rho_5$ ,  
 Nel vettore  $b_4$  l'elemento corrispondente al ramo  $\rho_4$ .

**Commento:** Una maglia che dipende da tutte le maglie appartenenti ad un dato sottoinsieme, contiene i rami presenti in un numero dispari di maglie del sottoinsieme e non contiene quelli presenti in un numero pari.

**Esempio B:** Consideriamo il grafo nella figura accanto e scriviamo i vettori topologici di sei tagli  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  e  $a_6$ , scelti a caso e riportati qui sotto. Verifichiamo la loro possibile indipendenza o dipendenza lineare.



$$a_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

I tagli rappresentati dai vettori  $a_1, a_2$  e  $a_3$  sono dipendenti poiché  $a_3 = a_1 + a_2$ .  
 I tagli rappresentati dai vettori  $a_1, a_2, a_4$  e  $a_5$  sono dipendenti poiché  $a_4 = -a_1 - a_2 - a_5$ .  
 I tagli rappresentati dai vettori  $a_1, a_2, a_5$  e  $a_6$  non sono dipendenti poiché nei vettori  $a_1,$

$a_2$  e  $a_6$   $v_i$  è un elemento non nullo solamente in questo vettore:  
 Nel vettore  $a_1$  l'elemento corrispondente al ramo  $\rho_5$ ,  
 Nel vettore  $a_2$  l'elemento corrispondente al ramo  $\rho_5$ ,  
 Nel vettore  $a_6$  l'elemento corrispondente al ramo  $\rho_4$ .  
 Inoltre il vettore  $a_6$  non può essere una combinazione degli altri tre.

**Commento:** Un taglio che dipende da tutti i tagli appartenenti ad un dato sottoinsieme, contiene i rami presenti in un numero dispari di tagli del sottoinsieme e non contiene quelli presenti in un numero pari.

**Avvertenza:** La combinazione lineare di due maglie (ovvero due tagli) senza alcun ramo in comune non da origine a un'altra maglia (ovvero taglio).

3.5.2 Basi di maglie e tagli

Se consideriamo tutte le maglie ovvero tutti i tagli di un grafo, è facile verificare che essi non sono affatto indipendenti.

**Definizione:** Un sottoinsieme di maglie di un grafo costituisce una base di maglie, se le maglie sono indipendenti e se tutte le maglie escluse dal sottoinsieme dipendono da quelle del sottoinsieme.

**Questio:** Qual'è il numero massimo di maglie e tagli tra loro indipendenti in un grafo? Ovvvero, quante maglie e tagli occorrono in modo che tutte le rimanenti maglie e tagli dipendano da queste?

**Risposta:** Le maglie e i tagli indipendenti sono rispettivamente  $m - n + 1$  e  $n - 1$ : la dimostrazione è rinviata al corollario della Sez. 3.5.3.

Una qualsiasi base di maglie ovvero di tagli può essere rappresentata da una matrice:  
**Definizione:** Consideriamo una qualsiasi base di maglie e i corrispondenti vettori topologici:  $b_1, b_2, \dots, b_{m-n+1}$ . Essi sono raggruppati come righe della matrice di dimensioni  $(m - n + 1) \times m$ :

$$B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{m-n+1}]^T$$

WWWWWW?? FARE ESEMPIO con grafo semplice e scrivere una matrice base di maglie e tagli ???WWWWWW

La matrice B ha rango pieno in seguito alla definizione di base e viene detta *matrice della base di maglie*.

**Commento:** Le righe in cui gli elementi della k-esima colonna di B sono nonnulli indicano le maglie della base che contengono il k-esimo ramo.

**Definizione:** Consideriamo una qualsiasi base di tagli e i corrispondenti vettori topologici:  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ . Essi sono raggruppati come righe della matrice di dimensioni  $(n - 1) \times m$ :

$$A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n-1}]^T$$

La matrice A ha rango pieno in seguito alla definizione di base e viene detta *matrice della base di tagli*.

**Commento:** Le righe in cui gli elementi della k-esima colonna di A sono nonnulli indicano i tagli della base che contengono il k-esimo ramo.

**Commenti :** Siccome esistono molte diverse basi di maglie / tagli dello stesso grafo, altrettante matrici di base di maglie / tagli esistono. Si può passare da una matrice di base un'altra matrice di base premoltiplicando la prima per una opportuna matrice quadrata nonsingolare i cui elementi sono uguali esclusivamente a 1, -1 ovvero 0. ■

**Proprietà :** Siccome il vettore topologico di una qualsiasi maglia è ortogonale al vettore topologico di una qualsiasi taglio, la matrice di una qualsiasi base di maglie è ortogonale alla matrice di una qualsiasi base di tagli :

$$B A^T = 0_{m-n+1, n-1}$$

ovvero

$$A B^T = 0_{n-1, m-n+1}$$

### 3.5.3 Basi di maglie e tagli definite da un albero/coalbero

Ogni suddivisione di un grafo in una coppia albero/coalbero consente di definire una specifica base sia di maglie sia di tagli. Numeriamo gli  $m$  rami del grafo nel modo seguente:  $1, 2, \dots, m - n + 1$  i rami del coalbero e  $m - n + 2, m - n + 3, \dots, m$  i rami dell'albero.

**Proprietà :** Il sottoinsieme di tutte le maglie formate da un unico ramo del coalbero e da alcuni rami del corrispondente albero costituisce una base. ■

**Prova :** Se assegniamo a ciascuna maglia lo stesso verso dell'unico ramo del coalbero facente parte della maglia, le prime  $m - n + 1$  colonne della matrice della base  $B$  formano la matrice identità  $I_{m-n+1}$  :

$$B = [I_{m-n+1} \ B^{alb}]$$

La presenza della matrice  $I_{m-n+1}$  prova che le  $m - n + 1$  maglie del sottoinsieme sono tra loro indipendenti. La prova è completata dal fatto che ogni maglia non appartenente al sottoinsieme considerato (quindi costituita da  $k \geq 2$  rami del coalbero oltre, in genere, ad alcuni rami dell'albero) dipende dalle  $k$  maglie del sottoinsieme che contengono (uno per ciascuna maglia) i suddetti  $k$  rami del coalbero. ■

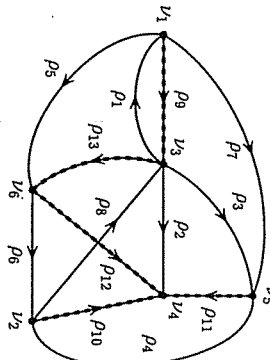
**Corollario :** Dalle precedenti considerazioni si ha che il numero di maglie indipendenti di un grafo (che non dipende dal come sono scelte) coincide col numero di rami  $m - n + 1$  di un suo coalbero. ■

**Proprietà :** Siccome una qualsiasi matrice di una base di maglie è sempre ortogonale a una qualsiasi matrice di una base di tagli, si ottiene la seguente relazione tra le sottomatrici

$B^{alb}$  e  $[A^{coa}]^T$  delle matrici delle basi :

$$B A^T = [I_{m-n+1} \ B^{alb}] \begin{bmatrix} [A^{coa}]^T \\ I_{n-1} \end{bmatrix} = 0_{m-n+1, n-1} \implies B^{alb} = -[A^{coa}]^T$$

**Esempio A :** Il grafo orientato in figura è costituito da  $n = 6$  nodi e  $m = 13$  rami : nel grafo è rimarcato un albero. I rami sono numerati cominciando dagli  $m - n + 1 = 8$  rami del coalbero e terminando con gli  $n - 1 = 5$  rami dell'albero. Seguendo la suddetta scomposizione albero/coalbero, caratterizziamo le basi delle maglie e dei tagli, di cui scriviamo qui sotto le rispettive matrici topologiche  $B$  e  $A$ .



ramo determinante	coalbero : matrice $A^{coa}$					albero : matrice $I_{n-1}$							
il taglio	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$	$p_{10}$	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$
$p_6 \rightarrow$	-1	0	0	0	+1	0	+1	0	+1	0	0	0	0
$p_{10} \rightarrow$	0	0	0	+1	0	-1	0	+1	0	+1	0	0	0
$p_{11} \rightarrow$	0	0	-1	-1	0	0	-1	0	0	0	+1	0	0
$p_{12} \rightarrow$	0	+1	+1	0	0	+1	+1	-1	0	0	0	+1	0
$p_{13} \rightarrow$	0	+1	+1	0	+1	0	+1	-1	0	0	0	0	+1

La suddetta matrice base di tagli ha una colonna per ciascun ramo dell'albero e del coalbero e una riga per ciascun ramo dell'albero (a cui è associato uno specifico taglio della base). Conseguentemente la sottomatrice  $5 \times 5$  costituita dalle cinque colonne associate ai rami dell'albero è la matrice identità. ■

ramo determinante	coalbero : matrice $I_{m-n+1}$							albero : matrice $B^{ab}$					
la maglia	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$\rho_5$	$\rho_6$	$\rho_7$	$\rho_8$	$\rho_9$	$\rho_{10}$	$\rho_{11}$	$\rho_{12}$	$\rho_{13}$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\rho_1 \rightarrow$	+1	0	0	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	0
$\rho_2 \rightarrow$	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	
$\rho_3 \rightarrow$	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	+1	-1	
$\rho_4 \rightarrow$	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	-1	+1	0	0
$\rho_5 \rightarrow$	0	0	0	0	+1	0	0	0	-1	0	0	0	-1
$\rho_6 \rightarrow$	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	+1	0	-1	0
$\rho_7 \rightarrow$	0	0	0	0	0	0	+1	0	-1	0	+1	-1	-1
$\rho_8 \rightarrow$	0	0	0	0	0	0	0	+1	0	-1	0	+1	-1

La matrice base di maglie ha una colonna per ciascun ramo sia dell'albero sia del coalbero e una riga per ciascun ramo del coalbero (a cui è associata una specifica maglia della base). Conseguentemente la sottomatrice  $8 \times 8$  costituita dalle otto colonne associate ai rami del coalbero è la matrice identità.

**Commento :** Dal confronto tra le due suddette matrici, possiamo verificare che  $B^{ab} = -[A^{co}]^T$ .

### 3.5.4 Basi di anelli e tagli nodali

Questo paragrafo esamina le basi di maglie costituite da anelli (limitatamente ai grafi planari) e le basi di tagli costituite da tagli nodali (per grafi sia planari sia nonplanari).

**Questo :** In un grafo planare, esistono basi di maglie costituite esclusivamente da anelli ?  
La risposta è fornita dalla :

**Proprietà :** Se scartiamo uno qualsiasi degli  $m-n+2$  anelli (non necessariamente quello esterno) il sottosistema dei restanti  $m-n+1$  anelli costituisce una base di maglie.

**Prova :** Orientiamo tutte le maglie, compresi tutti gli anelli, concordemente (per esempio in verso orario).

Gli anelli interni sono tra loro linearmente indipendenti : infatti essi possono essere ordinati in modo che ogni anello contenga un ramo non contenuto nei precedenti. La sufficienza viene provata dal fatto che :

**Questo :** In un grafo generico, esistono basi di tagli costituite esclusivamente da tagli nodali ?  
La risposta è fornita dalla :

**Proprietà :** Se scartiamo uno qualsiasi tra gli  $n$  tagli nodali, il sottosistema dei restanti  $n-1$  tagli nodali costituisce una base di tagli (per un grafo strettamente connesso).

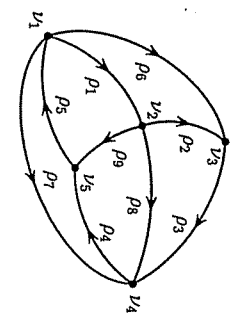
**Prova :** Orientiamo tutti gli  $n$  tagli nodali concordemente (per esempio verso il nodo).

Il sottosistema di  $n-1$  tagli nodali è indipendente dal momento che gli  $n-1$  tagli nodali possono essere ordinati in modo che ogni taglio coinvolga un nuovo ramo non coinvolto nei tagli precedenti :

Il vettore topologico di una qualsiasi altra maglia del grafo planare, incluso l'anello esterno, è uguale alla somma dei vettori topologici di tutti gli anelli che sono tracciati all'interno della maglia stessa. Infatti tutti i rami comuni a due anelli interni vengono eliminati nella somma.

**Diaggazione :** Gli anelli interni di un grafo planare possono essere ordinati in modo tale che ciascun anello contenga almeno un ramo non contenuto in ciascuno degli anelli che lo precedono. Un piastrellista approfitta di questa proprietà per decidere l'ordine in cui posare le piastrelle al pavimento di una cucina.

**Esempio A :** Nel grafo planare in figura se ordiniamo i cinque anelli interni nell'ordine :  $\{\rho_6, \rho_2, \rho_1\}$ ,  $\{\rho_2, \rho_3, \rho_8\}$ ,  $\{\rho_1, \rho_9, \rho_5\}$ ,  $\{\rho_9, \rho_8, \rho_4\}$  e  $\{\rho_5, \rho_4, \rho_7\}$  possiamo osservare che ciascun anello contiene almeno un ramo assente in ciascuno degli anelli che lo precedono.



anello	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$\rho_5$	$\rho_6$	$\rho_7$	$\rho_8$	$\rho_9$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\{\rho_6, \rho_2, \rho_1\} \rightarrow$	-1	-1	0	0	0	+1	0	0	0
$\{\rho_2, \rho_3, \rho_8\} \rightarrow$	0	+1	+1	0	0	0	0	-1	0
$\{\rho_1, \rho_9, \rho_5\} \rightarrow$	+1	0	0	0	+1	0	0	0	+1
$\{\rho_9, \rho_8, \rho_4\} \rightarrow$	0	0	0	+1	0	0	0	+1	-1
$\{\rho_5, \rho_4, \rho_7\} \rightarrow$	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0

**Commento :** Il fatto che ogni ramo è associato a una coppia di anelli è formalmente simile al fatto che ogni ramo è associato a una coppia di nodi (vedere Sez. 2.4).

**Commento :** Il prossimo paragrafo è dedicato alla matrice di una base di tagli nodali.

### 3.5.5 Matrice incidenza (ridotta)

Una generica base di tagli può contenere sia tagli nonnodali, ma la scelta di tagli esclusivamente nodali è di gran lunga la preferita. Per la loro importanza esse hanno un nome specifico.

**Definizione :** La matrice di una base di tagli nodali, molto usata nella pratica, prende il nome di *matrice incidenza (ridotta)*. Ognuna delle  $n-1$  righe coincide col vettore topologico di un taglio nodale della base.

**Commento :** Per essa si dovrebbe usare il simbolo  $A^{nod}$  per mettere in evidenza che essa viene costruita usando una base di tagli nodali. Siccome è l'unica matrice di base di tagli usata nella pratica, si preferisce mantenere lo stesso simbolo  $A$  usato per una generica base di tagli.

Vista la sua importanza riassumiamo la procedura pratica per la costruzione della matrice incidenza :

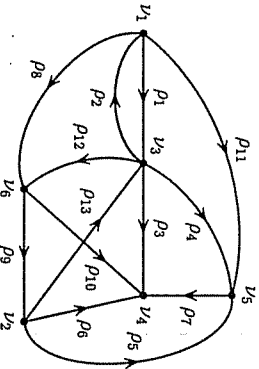
- attribuire un verso qualsiasi a ogni ramo e scegliere la base degli  $n - 1$  tagli nodali escludendo un nodo (detto *nodo di riferimento*).
- assegnare  $n - 1$  righe, una per ogni taglio nodale della base e assegnare  $m$  colonne, una per ogni ramo.
- porre ogni elemento della matrice uguale a :

valore dell'elemento $\rightarrow$	-1	0	1
se il ramo $\rightarrow$	esce dal nodo	non tocca il nodo	entra nel nodo

**Commento :** Il segno dei coefficienti 1 e -1 della matrice dipende dal verso di attraversamento dei tagli nodali diretto verso il nodo.

**Esempio A :** Calcoliamo la matrice incidenza del grafo (nonplanare) in figura, avendo scelto il nodo  $v_6$  come riferimento : la matrice è riportata sotto.

I rami  $p_1$  e  $p_2$ , connessi alla stessa coppia di nodi, danno origine a due colonne identiche ma col segno opposto. Inoltre nelle colonne dei rami  $p_8, p_9, p_{10}$  e  $p_{12}$ , connessi al nodo di riferimento, compare un solo elemento non-



	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$	$p_{10}$	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$
$v_1 \rightarrow$	-1	+1	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0
$v_2 \rightarrow$	0	0	0	0	-1	-1	0	0	+1	0	0	0	-1
$v_3 \rightarrow$	+1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
$v_4 \rightarrow$	0	0	+1	0	0	+1	0	0	+1	0	0	0	0
$v_5 \rightarrow$	0	0	0	+1	+1	0	-1	0	0	0	+1	0	0

**Commento :** Consideriamo una qualsiasi sottomatrice  $(n - 1) \times (n - 1)$  della matrice incidenza e il sottografo costituito dagli  $(n - 1)$  rami delle colonne che compongono la sottomatrice. Se la sottomatrice è non-singolare, il sottografo costituisce un albero del grafo, mentre, se la sottomatrice è singolare, vi è una maglia costituita esclusivamente da rami del sottografo.

**Commento :** In confronto alle altre matrici di base di tagli o alle matrici di base di maglie, la matrice incidenza descrive il grafo orientato in modo assolutamente immediato nel senso che noi siamo in grado di ricostruire il grafo originario da una semplice ispezione della matrice. È sufficiente segnare su un foglio gli  $n$  nodi numerati, ispezionare le  $m$  colonne della matrice e tracciare un ramo collegante la rispettiva coppia di nodi.

**Commento :** L'uso dei bigrafi e grafi è una descrizione della topologia molto confacente

al modo di ragionare del cervello umano. Infatti tutta la informazione necessaria è introdotta in parallelo come in un disegno o in una figura. Invece per un calcolatore questo metodo è meno adatto benché non impossibile. Per questo motivo viene più comodo l'uso della matrice incidenza per introdurre la topologia di un circuito nel computer.

**Matrice incidenza completa :** Se viene aggiunta alla matrice incidenza una riga rappresentante l'unico taglio nodale escluso dalla base otterremo una matrice (*matrice incidenza completa*) in cui la somma delle righe sarebbe una riga di elementi nulli, dal momento che ogni colonna conterrebbe due e due soli elementi nonnulli di valore 1 e -1. Questa è un'ulteriore prova della dipendenza esistente tra gli  $n$  tagli nodali.

**Esempio B :** Qui scriviamo la matrice incidenza completa del grafo considerato nell'esempio A di questo paragrafo :

	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$	$p_{10}$	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$
$v_1 \rightarrow$	-1	+1	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0
$v_2 \rightarrow$	0	0	0	0	-1	-1	0	0	+1	0	0	0	-1
$v_3 \rightarrow$	+1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1
$v_4 \rightarrow$	0	0	+1	0	0	+1	0	0	+1	0	0	0	0
$v_5 \rightarrow$	0	0	0	+1	+1	0	-1	0	0	0	+1	0	0
$v_6 \rightarrow$	0	0	0	0	0	0	0	+1	-1	-1	0	+1	0

# 4 TENSIONI e CORRENTI di RAMO

## 4.1 SOTTOSPAZI DELLE TENSIONI E CORRENTI

Nel Cap. 3 abbiamo parlato dei grafi (monopartiti) senza alcun riferimento alle grandezze elettriche già introdotte per i bigrafi nel Cap. 2. Ora riprendiamo in considerazione le grandezze elettriche nell'ambito di questi grafi. Nel passare dai bigrafi ai grafi abbiamo applicato parzialmente le due Leggi di KIRCHHOFF nel senso che abbiamo considerato soltanto le relazioni tra tensioni e correnti appartenenti al medesimo componente (vedere Sez. 2.4). In questo modo, per ciascun ramo del grafo, sono definite una tensione e una corrente. Ma le medesime Leggi di KIRCHHOFF generano vincoli anche tra tensioni e correnti di ramo relative a componenti diversi a causa delle connessioni tra i componenti stessi. Partendo dalle basi di maglie e tagli, queste relazioni vengono rivisitate dal punto di vista dell'algebra moderna, introducendo i sottospazi (vettoriali ovvero lineari) della tensioni e delle correnti. In questo ambito, le due Leggi di KIRCHHOFF e il teorema e corollario della potenza virtuale assumono un'espressione più compatta e semplice e "quasi banale" per chi ha dimestichezza con gli spazi lineari.

### 4.1.1 Tensioni e correnti di ramo

Le definizioni di potenziale e tensione, introdotte nella Sez. 2.2, rimangono inalterate in quanto i nodi, introdotti nei bigrafi, sopravvivono invariati nei grafi. In un grafo di  $n$  nodi possono venire definite  $n \times (n - 1)$  tensioni tra loro dipendenti: in pratica noi ci limitiamo a considerare solo le  $m$  tensioni definite tra le coppie di nodi connesse da un ramo, chiamate appunto *tensioni di ramo* e raggruppate nel vettore colonna:

$$v(t) \equiv [v_1(t) \ v_2(t) \ \dots \ v_m(t)]^T \quad \text{dove } v(t) \in \mathcal{R}^m(t)$$

Esse formano, in genere, un sottoinsieme di tutte le tensioni presenti nel grafo. Le restanti tensioni sono uguali a somme / sottrazioni di queste tensioni di ramo, ottenute dalla Legge di KIRCHHOFF applicata a opportune sequenze ordinate e chiuse di coppie di nodi.

Le correnti fluenti negli archi di un bigrafo (Par. 2.2.5) sono sostituite dalle correnti fluenti nei rami di un grafo, chiamate appunto *correnti di ramo* e raggruppate nel vettore colonna:

$$i(t) \equiv [i_1(t) \ i_2(t) \ \dots \ i_m(t)]^T \quad \text{dove } i(t) \in \mathcal{R}^m(t)$$

In confronto coi bigrafi, sparisce una corrente per ogni componente semplice (nocciolo).

**Convenzioni di segno**: Siccome ogni ramo del grafo è orientato, ogni tensione e corrente di ramo possono venire descritte con due differenti convenzioni:

In ogni ramo la tensione e la corrente vengono scelte, in genere, in accordo a una delle due convenzioni normali, in cui le frecce della tensione e della corrente sono discordi (vedere Sez. 2.4). Questa scelta viene assunta in tutta questa sezione.

Vedremo nei prossimi capitoli che per alcuni rami può convenire usare una delle due convenzioni nonnormali (in cui le frecce della tensione e della corrente sono concordi). ■

**Esempio**: La figura sottostante riporta due grafi equivalenti: tutte le tensioni hanno il medesimo verso nei due grafi, mentre le correnti sono orientate con la convenzione normale nel grafo di sinistra e quella non-normale in quello di destra.

WWWWWW??? Figura EMBLEMA: GRAFO monopartito con segnate tensioni e correnti di

ramo. ???WWWWWW

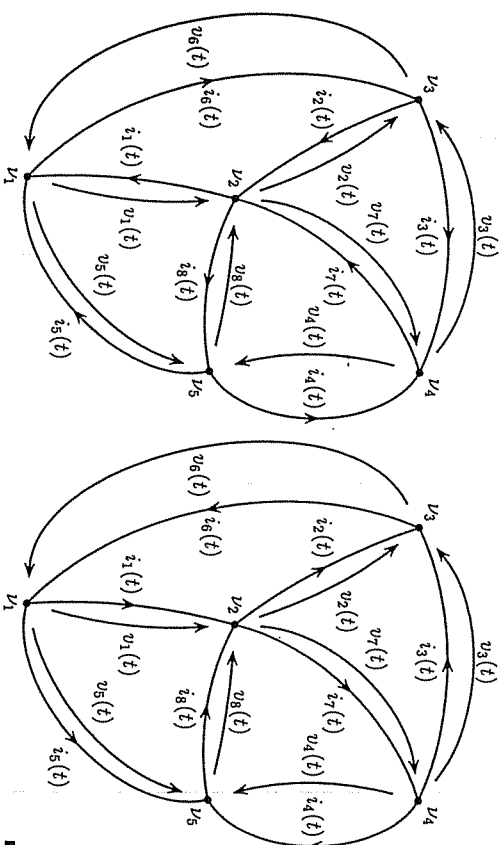
WWWWWW??? SUDDIVIDERE IN UN MAGGIOR NUMERO DI SEZIONI

Questo capitolo introduce le tensioni e correnti di ramo sui grafi (monopartiti), partendo dalle Leggi di KIRCHHOFF enunciate per i bigrafi e riformula le due medesime Leggi di Kirchhoff e i Teoremi e Corollari della potenza e del lavoro virtuali (Teorema di TELLEGEN).

Sez. 4.1: Sottospazi delle tensioni e correnti: Partendo dalle basi di maglie e tagli, le Leggi di KIRCHHOFF vengono rivisitate nell'ambito dei sottospazi lineari delle tensioni e delle correnti. Conseguentemente, il teorema e il corollario della potenza virtuale assumono una forma molto semplice, universalmente nota come Teorema di TELLEGEN.

Sez. 4.2: Basi di tensioni e correnti: Le basi di questi sottospazi vengono discusse: tra queste basi viene approfondito lo studio delle tensioni di nodo e delle correnti cicliche per la loro importanza. Esse consentono una espressione matriciale alternativa delle due Leggi di KIRCHHOFF.

Sez. 4.3: Teoremi di non-amplificazione: Due teoremi, preceduti da un lemma, stabiliscono a priori un limite superiore al valore assoluto istantaneo delle tensioni e correnti di ramo dei circuiti in cui un solo bipolo (effettivo o fittizio) eroga potenza virtuale positiva.



**Convergenza** : la nullità della convergenza della corrente nei componenti sia semplici (noccioni) sia composti, introdotta per i bigrafi nel Par. 2.2.6, è stata sfruttata per costruire il grafo monorpartito. Quindi non viene più usata in questi grafi.

**Divergenza** : la nullità della divergenza della corrente nei nodi, introdotta per i bigrafi nel Par. 2.2.6, corrisponde nei grafi monorpartiti alla nullità del prodotto scalare del vettore delle correnti di ramo con il vettore topologico del taglio nodale :  $d_k^i(t) = a_k \cdot i(t) = 0$  . Il teorema e il corollario della convergenza e divergenza, introdotti nel Par. 2.1.5, vengono riformulati :

**Proprietà** : La somma delle divergenze di una qualsiasi funzione di ramo (non necessariamente la corrente) estesa a tutti i tagli nodali del grafo è nulla.

**Prova** : La prova deriva dal fatto che l'insieme dei tagli nodali è dipendente.

**Corollario** : La divergenza di una qualsiasi funzione di ramo in un generico taglio  $\mathcal{R}^{ab}$  relativo alla partizione  $\mathcal{N} \equiv \{\mathcal{N}^a, \mathcal{N}^b\}$  è uguale alla somma delle divergenze nei tagli nodali in  $\mathcal{N}^a$  ovvero in  $\mathcal{N}^b$  a parte il segno.

**Prova** : La prova deriva dal fatto che il vettore topologico del taglio non-nodale coincide con la somma dei vettori topologici dei tagli dei nodi interni al taglio nodale.

**4.1.2 Riformulazione delle due leggi di Kirchoff**

Le tensioni di ramo  $v(t)$  sono soggette alla legge di Kirchoff applicata alle maglie formate dalle compressioni dei componenti tra loro, mentre le correnti di ramo  $i(t)$  sono soggette alla legge di Kirchoff applicata ai tagli. Quindi una qualsiasi funzione del tipo  $\mathcal{R}_i \rightarrow \mathcal{R}^{ab}$  non rappresenta in genere un vettore delle tensioni o correnti di ramo.

Introducendo i vettori topologici di una maglia/taglio (Sez. 3.1), possiamo riformulare le due Leggi di Kirchoff :

*Le due leggi di Kirchoff per una maglia e per un taglio*

**Proprietà** : La somma delle tensioni di ramo lungo una maglia coincide con il prodotto scalare del rispettivo vettore topologico  $b$  e del vettore delle tensioni di ramo  $v(t)$  :  $b^T v(t) = 0$

**Proprietà** : La somma delle correnti di ramo attraverso un taglio coincide con il prodotto scalare del rispettivo vettore topologico  $a$  e del vettore delle correnti di ramo  $i(t)$  :  $a^T i(t) = 0$

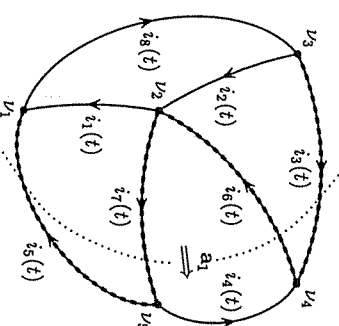
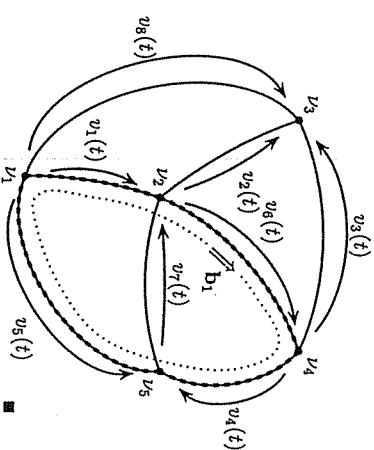
**Commento** : Le equazioni coinvolgenti le tensioni o correnti di ramo dovute alle due Leggi di Kirchoff sono lineari e omogenee.

I seguenti esempi illustrano le suddette proprietà :

**Esempio A'** : Consideriamo il grafo della figura sottostante, in cui l'orientamento dei rami coincide con quello della rispettiva tensione. Scriviamo la legge di Kirchoff delle tensioni per la maglia rimarcata in figura :

$$v_1(t) + v_6(t) + v_4(t) - v_5(t) = 0$$

$$i_3(t) - i_5(t) + i_7(t) - i_6(t) = 0$$



Il vettore topologico della maglia risulta :

$$b_1 = [+1 \ 0 \ 0 \ +1 \ -1 \ +1 \ 0 \ 0]^T$$

Il vettore topologico del medesimo risulta :

$$a_1 = [0 \ 0 \ +1 \ 0 \ -1 \ -1 \ +1 \ 0]^T$$

Moltiplichiamo scalarmente  $b_1$  per  $v(t)$  :

$$b_1^T v(t) = v_1(t) + v_4(t) - v_5(t) + v_6(t)$$

Moltiplichiamo scalarmente  $a_1$  per  $i(t)$  :

$$a_1^T i(t) = i_3(t) - i_5(t) - i_6(t) + i_7(t)$$

da cui si ha che la legge di Kirchoff delle tensioni lungo una maglia assume la forma compatta :

$$b_1^T v(t) = 0$$

da cui si ha che la legge di Kirchoff delle correnti attraverso un taglio assume la forma compatta :

$$a_1^T i(t) = 0$$



4.1.3 Sottospazi delle tensioni e delle correnti  $\subset \mathfrak{R}^m(t)$

Il concetto di basi di maglie e di tagli consente di riformulare la legge di KIRCHHOFF delle tensioni e delle correnti per il grafo completo :

*Leggi di Kirchhoff delle tensioni e delle correnti per il grafo completo*

**Proprietà :** Affinché sia nulla la somma delle tensioni di ramo  $v(t)$  lungo tutte le maglie presenti nel grafo è necessario e sufficiente che sia nulla la somma delle tensioni lungo tutte le maglie di una qualsiasi base.

**Prova :** Se  $b_1, b_2, \dots, b_{m-n+1}$  sono i vettori topologici della base, si ha :

$$\left. \begin{matrix} b_1^T v(t) = 0 \\ b_2^T v(t) = 0 \\ \vdots \\ b_{m-n+1}^T v(t) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow B v(t) = 0$$

dove  $B$  è la matrice della base di maglie. Quindi vi sono  $m - n + 1$  equazioni scalari indipendenti. La legge di KIRCHHOFF delle tensioni per qualsiasi maglia fuori della base è assicurata dal fatto che il corrispondente vettore topologico dipende da quelli della base.

**Commento :** Ciascuno dei suddetti sistemi sottodeterminati di equazioni è lineare e omogeneo con matrice di rango massimo : essi definiscono due sottospazi lineari dello spazio  $\mathfrak{R}^m(t)$  :

$$\Omega^e \equiv \{v(t) \in \mathfrak{R}^m(t) \mid B v(t) = 0\}$$

dove  $\Omega^e \equiv$  sottospazio di dimensioni  $n-1$ , poiché il rango di  $B$  è  $(m - n + 1)$ .

4.1.4 Ortogonalità di  $\Omega^e$  e  $\Omega^i$  : Teorema di Tellegen

**Proprietà :** I sottospazi lineari  $\Omega^e$  e  $\Omega^i$  sono tra loro ortogonali, dal momento che le matrici della base di maglie  $B$  e della base di tagli  $A$  soddisfanno alla :  $A B^T = 0$ , e, equivalentemente, alla  $B A^T = 0$  (vedere Par. 3.5.2).

**Commento :** Ricordiamo che il teorema dell'ortogonalità è una riformulazione adattata alle grandezze definite sui grafi monopartiti del teorema della potenza virtuale, presentato per i bigrafi nella Sez. 2.3.

**Proprietà :** Affinché sia nulla la somma delle correnti di ramo  $i(t)$  attraverso tutti i tagli presenti nel grafo è necessario e sufficiente che sia nulla la somma delle correnti attraverso tutti i tagli di una qualsiasi base.

**Prova :** Se  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  sono i vettori topologici della base, si ha :

$$\left. \begin{matrix} a_1^T i(t) = 0 \\ a_2^T i(t) = 0 \\ \vdots \\ a_{n-1}^T i(t) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow A i(t) = 0$$

dove  $A$  è la matrice della base di tagli. Quindi vi sono  $n - 1$  equazioni scalari indipendenti. La legge di KIRCHHOFF delle correnti per qualsiasi taglio fuori della base è assicurata dal fatto che il corrispondente vettore topologico dipende da quelli della base.

Quindi vi sono  $n - 1$  equazioni scalari indipendenti. La legge di KIRCHHOFF delle correnti per qualsiasi taglio fuori della base è assicurata dal fatto che il corrispondente vettore topologico dipende da quelli della base.

$$\Omega^i \equiv \{i(t) \in \mathfrak{R}^m(t) \mid A i(t) = 0\}$$

dove  $\Omega^i \equiv$  sottospazio di dimensioni  $m - n + 1$ , poiché il rango di  $A$  è  $(n - 1)$ .

**Teorema :** L'ortogonalità dei sottospazi  $\Omega^e$  e  $\Omega^i$ , universalmente nota come Teorema di TELLEGEN, viene riscritta nella forma usuale :

$$v(t) \in \Omega^e \quad i(t) \in \Omega^i \quad \left\} \Rightarrow [v(t)]^T i(t) = 0$$

**Commento :** Notare che in ciascun ramo la tensione e la corrente sono definite con la medesima convenzione (normale oppure nonnormale).

**Nota storica :** Il teorema di TELLEGEN, pur strettamente legato alle due Leggi di KIRCHHOFF, è stato formulato un secolo più tardi. Questo ritardo è in parte dovuto al fatto che l'applicazione della teoria dei grafi ai circuiti è successiva alle due Leggi di KIRCHHOFF.

**Estensioni del teorema di Tellegen :** Il teorema di TELLEGEN suggerisce estensioni molto generali, qualora si tenga conto che l'integrale e la derivata del vettori delle tensioni e correnti di ramo appartengono ancora ai rispettivi spazi  $\Omega^e$  e  $\Omega^i$ . Lo stesso dicasi per la differenza e la somma di due vettori di tensioni e correnti di ramo. La tabella sottostante riassume queste proprietà :

<i>tensioni di ramo</i> $v(t)$	<i>correnti di ramo</i> $i(t)$
$v^{(1)}(t) \in \Omega^e$	$i^{(1)}(t) \in \Omega^i$
$v^{(2)}(t) \in \Omega^e$	$i^{(2)}(t) \in \Omega^i$
$v(t) \in \Omega^e \Rightarrow v(t - t_0) \in \Omega^e$	$i(t) \in \Omega^i \Rightarrow i(t - t_0) \in \Omega^i$
$v(t) \in \Omega^e \Rightarrow \dot{v}(t - t_0) \in \Omega^e$	$v(t) \in \Omega^e \Rightarrow \dot{v}(t - t_0) \in \Omega^e$
$v(t) \in \Omega^e \Rightarrow \ddot{v}(t - t_0) \in \Omega^e$	$v(t) \in \Omega^e \Rightarrow \ddot{v}(t - t_0) \in \Omega^e$
$v(t) \in \Omega^e \Rightarrow \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \in \Omega^e$	$v(t) \in \Omega^e \Rightarrow \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \in \Omega^e$

dove  $t_0$  è un qualsiasi istante di tempo sia per le tensioni sia per le correnti. Quindi l'ortogonalità dei suddetti vettori viene conservata, per esempio si ha :

$[v(t)]^T i(t - t_0) = 0$	$[v(t)]^T i(t - t_0) = 0$
$[v(t) - v(t - t_0)]^T i(t) = 0$	$[v(t) - v(t - t_0)]^T [i(t) - i(t - t_0)] = 0$
$[v(t)]^T [i(t) - i(t - t_0)] = 0$	$[\dot{v}(t)]^T i(t) = 0$
$[v(t)]^T i(t) = 0$	$[\dot{v}(t)]^T i(t) = 0$
$[v(t) - v(t - t_0)]^T i(t) = 0$	$[\ddot{v}(t) - v(t - t_0)]^T [i(t) - i(t - t_0)] = 0$
$[\dot{v}(t)]^T [i(t) - i(t - t_0)] = 0$	$[v(t)]^T \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau = 0$

**Avvertenza :** Il Teorema di TELLEGEN vale anche quando le tensioni di ramo  $v(t)$  e le correnti di ramo  $i(t)$  appartengono a due circuiti fisici diversi, purché i grafi siano equivalenti e i versi delle tensioni e correnti siano coincidenti, cioè :

- lo stesso numero di nodi e rami.

- i rami siano connessi tra coppie corrispondenti di nodi.
- i rami abbiano la stessa numerazione e orientazione.
- le tensioni e le correnti siano orientate nello stesso modo.

4.1.5 Corollario di Tellegen

Questo corollario è una diretta conseguenza del corollario della potenza virtuale, e per analogia lo chiamiamo corollario di TELLEGEN.

**Corollario :** Il prodotto scalare delle tensioni e correnti (tensioni e correnti non necessariamente legate dalle relazioni costitutive) delle porte di un componente composto coincide con la somma dei corrispondenti prodotti scalari dei componenti aggregati.

**Prova :** Segue direttamente dal corollario della potenza virtuale, sostituendo le potenze virtuali coi corrispondenti prodotti scalari.

Estensioni analoghe a quelle descritte per il teorema di TELLEGEN valgono anche per il presente corollario.

WWWWWW??? INTRODURRE UN'OPPORTUNA SIMBOLOGIA PER LA FORMULAZIONE MATEMATICA DEL COROLLARIO FARE ESEMPIO ???WWWWWW

4.2 BASI DI TENSIONI E CORRENTI

Nella precedente sezione abbiamo introdotto i sottospazi delle tensioni e correnti di ramo. Questa sezione introduce le basi di questi sottospazi : Esse consentono di definire le tensioni nodali e le correnti cicliche e una formulazione matriciale delle due Leggi di KIRCHHOFF, alternativa a quella esaminata nella sezione precedente.

4.2.1 Tensioni e correnti associate a tagli e maglie

I vettori topologici delle maglie e dei tagli, introdotti per descrivere alcune proprietà dei grafi, possono essere interpretati anche da un punto di vista circuitale :

Consideriamo un taglio e moltiplichiamo il corrispondente vettore topologico  $a_1$  per una tensione scalare qualsiasi  $v_1(t)$ . Otteniamo il vettore  $v_1(t) a_1$ . Ognuno degli  $m$  elementi, uno per ciascun ramo, risulta uguale a  $\pm v_1(t)$ , se il ramo fa parte del taglio, altrimenti è nullo.

**Proprietà :** Il vettore  $v_1(t) a_1 \in \mathbb{R}^m(t)$  è un particolare elemento del sottospazio delle tensioni di ramo :  $v_1(t) a_1 \in \Omega^v$

**Prova :** Sia  $B$  la matrice di una qualsiasi base di maglie, che definisce il sottospazio  $\Omega^e$ . Si ha immediatamente che :

$$B[v_1(t) a_1] = v_1(t) [B a_1] = 0$$

Consideriamo una maglia e moltiplichiamo il corrispondente vettore topologico  $b_1$  per una corrente scalare qualsiasi  $i_1(t)$ . Otteniamo il vettore  $i_1(t) b_1$ . Ognuno degli  $m$  elementi, uno per ciascun ramo, risulta uguale a  $\pm i_1(t)$ , se il ramo fa parte della maglia, altrimenti è nullo.

**Proprietà :** Il vettore  $i_1(t) b_1 \in \mathbb{R}^m(t)$  è un particolare elemento del sottospazio delle correnti di ramo :  $i_1(t) b_1 \in \Omega^i$

**Prova :** Sia  $A$  la matrice di una qualsiasi base di tagli, che definisce il sottospazio  $\Omega^t$ . Si ha immediatamente che :

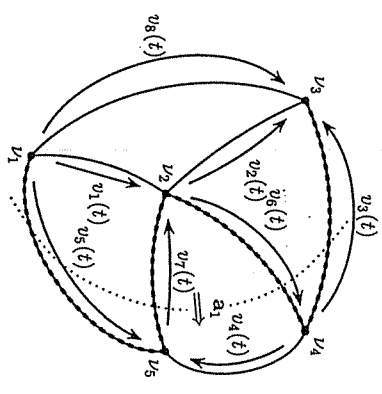
$$A[i_1(t) b_1] = i_1(t) [A b_1] = 0$$

**Commento :** La tensione scalare  $v_1(t)$  rappresenta la cosiddetta *tensione di taglio* dal momento che è comune a tutti i rami del taglio definito dal vettore  $a_1$  e viene indicata col simbolo  $v_1^{tag}(t)$ .

**Commento :** La corrente scalare  $i_1(t)$  rappresenta la cosiddetta *corrente ciclica* dal momento che è comune a tutti i rami della maglia definita dal vettore  $b_1$  e viene indicata col simbolo  $i_1^{cic}(t)$ .

I seguenti esempi illustrano i concetti duali di vettore di tensione di ramo associato ad un taglio e di vettore di correnti di ramo associato ad una maglia :

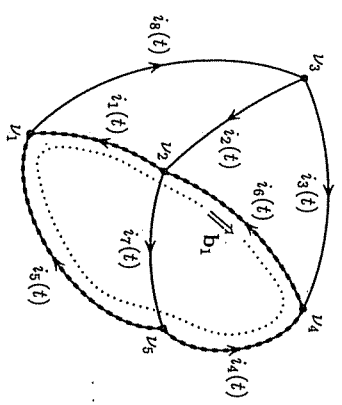
**Esempio A' :** Nel sottostante grafo è rimarcato un taglio con vettore  $a_1$  :



Il vettore delle tensioni di ramo associato al suddetto taglio risulta :

$$\begin{aligned}
 v_1(t) &= 0 & , & & v_2(t) &= 0 \\
 v_3(t) &= -v_1^{tag}(t) & , & & v_4(t) &= 0 \\
 v_5(t) &= v_1^{tag}(t) & , & & v_6(t) &= v_1^{tag}(t) \\
 v_7(t) &= -v_1^{tag}(t) & , & & v_8(t) &= 0
 \end{aligned}$$

**Esempio A'' :** Nel sottostante grafo è rimarcata una maglia con vettore  $b_1$  :



Il vettore delle correnti di ramo associato alla suddetta maglia risulta :

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= -i_1^{cic}(t) & , & & i_2(t) &= 0 \\
 i_3(t) &= 0 & , & & i_4(t) &= -i_1^{cic}(t) \\
 i_5(t) &= v_1^{cic}(t) & , & & i_6(t) &= -i_1^{cic}(t) \\
 i_7(t) &= 0 & , & & i_8(t) &= 0
 \end{aligned}$$

4.2.2 Basi dei sottospazi  $\Omega^e$  e  $\Omega^i$

Le precedenti proprietà dei vettori topologici ci consentono di individuare delle opportune basi dei sottospazi  $\Omega^e$  e  $\Omega^i$  :

**Proprietà:** Le colonne della matrice  $A^T$ , cioè i vettori topologici di una qualsiasi base di tagli, costituiscono una base del sottospazio  $\Omega^v$ .

**Prova:** I vettori colonna di  $A^T$  appartengono a  $\Omega^v$  e sono tra loro indipendenti e in numero uguale alle dimensioni di  $\Omega^v$ .

**Nuova formulazione delle Leggi di Kirchhoff:** Le basi dei sottospazi  $\Omega^v$  e  $\Omega^i$  definite nel precedente paragrafo ci consentono di scrivere la seguente formulazione alternativa delle due Leggi di Kirchhoff:

**Proprietà:** Qualsiasi vettore delle tensioni di ramo  $v(t) \in \Omega^v$  può venire espresso come combinazione lineare dei vettori della base:

$$v(t) = \sum_{k=1}^{n-1} v_k^{tag}(t) a_k = A^T v^{tag}(t)$$

dove il vettore dei coefficienti della combinazione lineare coincide con quello delle tensioni di taglio  $v^{tag}(t)$ .

**Commento:** Esempi illustrativi sono riportati nei paragrafi seguenti.

### 4.2.3 Base delle tensioni di taglio

Riprendiamo il discorso sulle tensioni di taglio: la legge di Kirchhoff delle tensioni è scritta nella forma in cui ogni tensione di ramo  $v(t)$  è uguale alla somma/differenza delle tensioni di taglio relative ai tagli di cui il ramo fa parte:

$$v(t) = v_1^{tag}(t) a_1 + v_2^{tag}(t) a_2 + \dots + v_{n-1}^{tag}(t) a_{n-1} = A^T v^{tag}(t)$$

Ogni colonna della matrice  $A^T$  indica i tagli di cui il ramo fa parte. Le tensioni di taglio non coincidono in genere con le tensioni di ramo. Le tensioni di nodo, che saranno discusse nel prossimo paragrafo, costituiscono un caso particolare di tensioni di taglio.

**Esempio A:** La figura riporta un grafo costituito da cinque nodi e otto rami. Su di esso sono segnati quattro tagli indipendenti, distinti dai vettori topologici  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$ , riportati di fianco alla figura. Ciascuno dei vettori topologici è definito, avendo assunto che ciascun ramo sia orientato concordemente alla rispettiva tensione. Essi formano una base:

**Proprietà:** Le colonne della matrice  $B^T$ , cioè i vettori topologici di una qualsiasi base di maglie, costituiscono una base del sottospazio  $\Omega^i$ .

**Prova:** I vettori colonna di  $B^T$  appartengono a  $\Omega^i$  e sono tra loro indipendenti e in numero uguale alle dimensioni di  $\Omega^i$ .

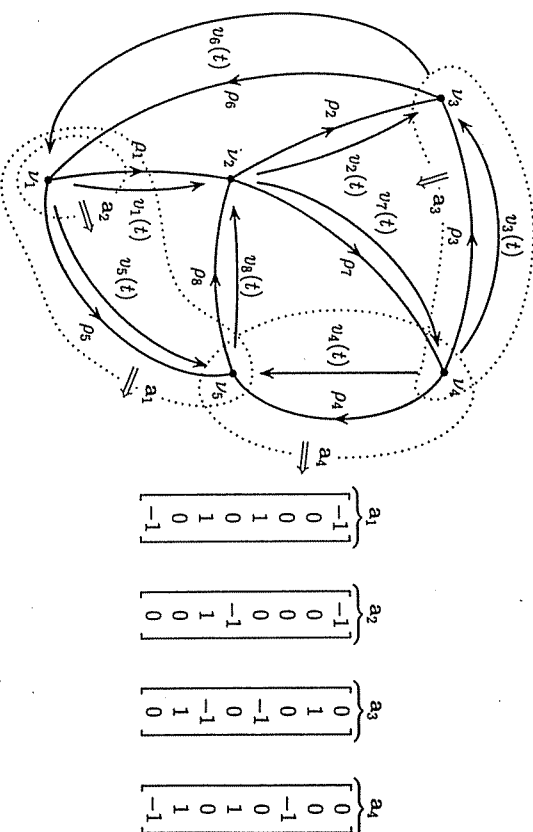
**Nuova formulazione delle Leggi di Kirchhoff:** Le basi dei sottospazi  $\Omega^v$  e  $\Omega^i$  definite nel precedente paragrafo ci consentono di scrivere la seguente formulazione alternativa delle due Leggi di Kirchhoff:

**Proprietà:** Qualsiasi vettore delle correnti di ramo  $i(t) \in \Omega^i$  può venire espresso come combinazione lineare dei vettori della base:

$$i(t) = \sum_{k=1}^{m-n+1} i_k^{cic}(t) b_k = B^T i^{cic}(t)$$

dove il vettore dei coefficienti della combinazione lineare coincide con quello delle correnti cicliche  $i^{cic}(t)$ .

**Commento:** Esempi illustrativi sono riportati nei paragrafi seguenti.



Il vettore delle tensioni di ramo  $v(t)$  può essere espresso in funzione delle quattro tensioni di taglio:

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \\ v_5(t) \\ v_6(t) \\ v_7(t) \\ v_8(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_1^{tag}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix} v_2^{tag}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_3^{tag}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix} v_4^{tag}(t)$$

### 4.2.4 Base delle tensioni di nodo

Con riferimento al caso particolare ma molto frequente in cui gli  $n-1$  tagli della base siano nodali, si ha che la matrice della base  $A$  è la matrice incidenza (vedere Par. 3.5.5). Ogni colonna di  $A^T$  rappresenta il vettore topologico di uno specifico taglio nodale: la tensione del  $m$ -esimo ramo contenuta nel vettore  $v_k^{tag}(t) a_k$  coincide con  $v_k^{tag}(t) [-v_k^{tag}(t)]$  se il  $m$ -esimo ramo entra (esce) nel  $k$ -esimo nodo, altrimenti è nulla. Quindi, siccome in questo caso il vettore delle tensioni di taglio  $v^{tag}(t)$  assume un significato fisico più specifico, lo chiamiamo vettore delle tensioni di nodo e gli assegniamo il simbolo  $v^{nod}(t)$ . Quindi la legge di Kirchhoff delle tensioni di nodo esprime il vettore delle tensioni di ramo rispetto al vettore delle tensioni di nodo:

$$v(t) = v_1^{nod}(t) a_1 + v_2^{nod}(t) a_2 + \dots + v_{n-1}^{nod}(t) a_{n-1} = A^T v^{nod}(t)$$

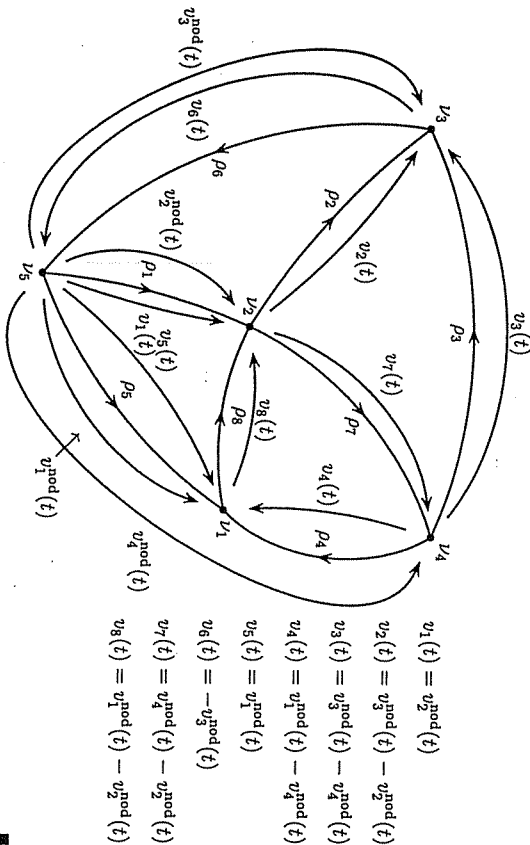
Ricordarsi che suddetta equazione vale nell'ipotesi che la matrice incidenza sia scritta orientando i rami come le rispettive tensioni di ramo e i tagli nodali verso il nodo.

**Interpretazione:** La tensione di ramo  $v_{\mu}(t)$  coincide col prodotto scalare della  $\mu$ -esima riga di  $A^T$  per il vettore delle tensioni di nodo  $v^{nod}(t)$ . Interpretiamo questo prodotto scalare da un punto di vista circuitale:

- se la  $\mu$ -esima riga di  $A^T$  ha due elementi nonnulli,  $v_{\mu}(t)$  è uguale alla differenza tra la tensione del nodo in cui il ramo entra e quella del nodo da cui il ramo esce.

- se la  $\mu$ -esima riga di  $A^T$  ha un solo elemento nonnullo (quindi il  $\mu$ -esimo ramo è incidente al nodo di riferimento),  $v_{\mu}(t)$  coincide con  $v_{\mu}^{nod}(t)$  [- $v_{\mu}^{nod}(t)$ ] se il  $\mu$ -esimo ramo entra [esce] dal  $k$ -esimo nodo.

**Esempio A:** La sottostante figura riporta un grafo con le tensioni di ramo e quelle di nodo, definite col nodo  $v_5$  come riferimento. Accanto alla figura riportiamo le tensioni di ramo in funzione di quelle di nodo; esse sono scritte evitando di scrivere i vettori topologici dei tagli nodali, ma seguendo l'interpretazione appena discussa:



**Commento:** Le tensioni di nodo coincidono con i potenziali (vedere Cap. 2), una volta che la funzione additiva arbitraria, caratteristica dei potenziali, venga determinata in modo che il nodo di riferimento abbia potenziale nullo.

**Commento:** Il nodo di riferimento del grafo completo non coincide necessariamente coi nodi di riferimento dei sottografi a cespuglio dei multipoli contenuti nel grafo. Quando è possibile, conviene farli coincidere.

#### 4.2.5 Base delle correnti cicliche

Riprendiamo il discorso sulle correnti cicliche (Par. 4.2.4). La legge di KIRCHHOFF delle correnti è scritta nella forma in cui ogni corrente di ramo  $i(t)$  è uguale alla somma/differenza

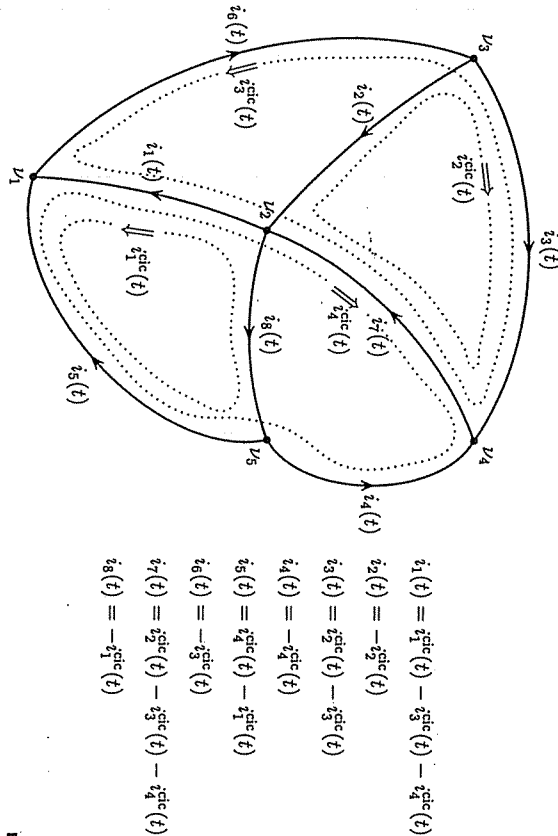
delle correnti cicliche fluenti nel ramo considerato:

$$i(t) = i_1^{cic}(t) b_1 + i_2^{cic}(t) b_2 + \dots + i_{m-n+1}^{cic}(t) b_{m-n+1} = B^T i^{cic}(t)$$

Ogni riga della matrice  $B^T$  indica le maglie di cui il ramo fa parte. Le correnti cicliche non coincidono in genere con le correnti di ramo.

Se il grafo è planare e la base di maglie è formata esclusivamente da anelli (per esempio quelli interni), si ha che ogni corrente di ramo è uguale alla differenza di due correnti cicliche oppure a una singola corrente ciclica, a parte il segno.

**Esempio A:** La sottostante figura riporta un grafo con l'indicazione di una base di maglie indipendenti, le rispettive correnti cicliche e le correnti di ramo. Accanto alla figura riportiamo le tensioni di ramo in funzione di quelle cicliche: ciascuna corrente di ramo coincide con la somma/differenza delle correnti cicliche fluenti nel ramo stesso; ciascuna corrente ciclica compare nella somma/differenza col segno "+" ["-"] se essa è concorde [discorda] con la corrente di ramo. In questo modo evitiamo di scrivere i vettori topologici delle maglie della base.



#### 4.2.6 Basi originate dalla scomposizione albero/coalbero

Le basi di tensioni di taglio e correnti cicliche possono essere determinate mediante la scomposizione del grafo in albero/coalbero. Infatti questa scomposizione è in grado di individuare una base di maglie e una base di tagli (vedere Par. 3.5.3).

Partizioniamo i vettori delle tensioni e delle correnti di ramo in due sottovettori: il primo riguarda i rami del coalbero e il secondo i rami dell'albero:

$$v(t) = [v^{coa}(t)]^T [v^{alb}(t)]^T, \quad i(t) = [i^{coa}(t)]^T [i^{alb}(t)]^T$$

e analogamente le matrici delle basi di maglie e tagli:

$$B = [I_{m-n+1} \quad B^{alb}] \quad , \quad A = [A^{coa} \quad I_{n-1}]$$

Si ottengono le seguenti espressioni per le tensioni e le correnti di ramo:

$$\begin{bmatrix} v^{coa}(t) \\ v^{alb}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A^{coa}]^T \\ I_{n-1} \end{bmatrix} v^{alb}(t) \quad , \quad \begin{bmatrix} z^{coa}(t) \\ z^{alb}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_{m-n+1}] \\ [B^{alb}]^T \end{bmatrix} z^{coa}(t)$$

Tenendo presente che  $B^{alb} = -[A^{coa}]^T$ , le precedenti espressioni possono essere riscritte:

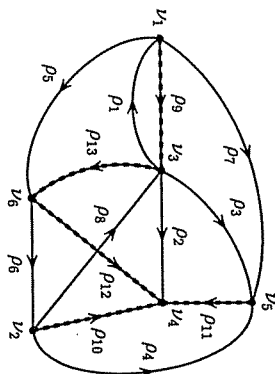
$$\begin{bmatrix} v^{coa}(t) \\ v^{alb}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^{alb} \\ I_{n-1} \end{bmatrix} v^{alb}(t) \quad , \quad \begin{bmatrix} z^{coa}(t) \\ z^{alb}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m-n+1} \\ -A^{coa} \end{bmatrix} z^{coa}(t)$$

Queste espressioni ci dicono che i sottovettori delle tensioni dei rami di un albero  $v^{alb}(t)$  e il sottovettore delle correnti dei rami di un coalbero  $z^{coa}(t)$  costituiscono, rispettivamente, una base del sottospazio delle tensioni di ramo e una base del sottospazio delle correnti di ramo.

Le suddette espressioni possono essere riscritte in una forma esplicita che mette in evidenza la dipendenza delle tensioni del coalbero da quelle dell'albero e delle correnti dell'albero da quelle del coalbero:

$$v^{coa}(t) = -B^{alb} v^{alb}(t) \quad , \quad z^{alb}(t) = -A^{coa} z^{coa}(t)$$

**Esempio A:** Consideriamo il grafon figura, su cui è rimarcato un albero. Le correnti di ramo, non segnate, siano orientate come i rispettivi rami e le tensioni di ramo con la convenzione normale rispetto alle corrispondenti correnti. Da una semplice ispezione del grafo possiamo scrivere le relazioni tra le tensioni del coalbero  $v^{coa}(t)$  e quelle dell'albero  $v^{alb}(t)$  e tra le correnti dell'albero  $z^{alb}(t)$  e quelle del coalbero  $z^{coa}(t)$ .



$$\begin{aligned} v_1^{coa}(t) &= -v_8^{alb}(t) \\ v_2^{coa}(t) &= v_{12}^{alb}(t) + v_{13}^{alb}(t) \\ v_3^{coa}(t) &= v_{12}^{alb}(t) + v_{13}^{alb}(t) - v_{11}^{alb}(t) \\ v_4^{coa}(t) &= v_{10}^{alb}(t) - v_{11}^{alb}(t) \\ v_5^{coa}(t) &= v_8^{alb}(t) + v_{13}^{alb}(t) \\ v_6^{coa}(t) &= v_{12}^{alb}(t) - v_{11}^{alb}(t) \\ v_7^{coa}(t) &= v_8^{alb}(t) + v_{13}^{alb}(t) + v_{12}^{alb}(t) - v_{11}^{alb}(t) \\ v_8^{coa}(t) &= v_{10}^{alb}(t) - v_{13}^{alb}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1^{alb}(t) &= z_1^{coa}(t) - z_5^{coa}(t) - z_7^{coa}(t) \\ z_2^{alb}(t) &= z_4^{coa}(t) + z_5^{coa}(t) - z_8^{coa}(t) \\ z_3^{alb}(t) &= z_3^{coa}(t) + z_4^{coa}(t) + z_5^{coa}(t) \\ z_4^{alb}(t) &= -z_2^{coa}(t) - z_3^{coa}(t) - z_8^{coa}(t) \\ z_5^{alb}(t) &= -z_2^{coa}(t) + z_8^{coa}(t) \\ z_6^{alb}(t) &= -z_5^{coa}(t) - z_7^{coa}(t) - z_8^{coa}(t) \\ z_7^{alb}(t) &= -z_5^{coa}(t) - z_7^{coa}(t) - z_8^{coa}(t) \\ z_8^{alb}(t) &= -z_2^{coa}(t) + z_8^{coa}(t) \end{aligned}$$

### 4.3 TEOREMI DI NON-AMPLIFICAZIONE

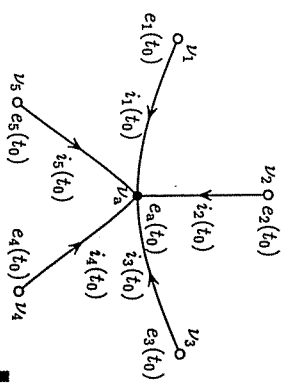
I teoremi di non-amplificazione, preceduti dal lemma dei potenziali di nodo, stabiliscono a priori un limite superiore al valore assoluto istantaneo delle tensioni e correnti di ramo di un grafo in cui un solo ramo (bipolo effettivo o fittizio) eroga potenza virtuale.

#### 4.3.1 Lemma del potenziale di nodo

Consideriamo un circuito costituito da componenti qualsiasi e sostituiamo gli eventuali multipoli coi corrispondenti bipoli fittizi. Esaminiamo i vettori delle tensioni e delle correnti di ramo  $v(t)$  e  $z(t)$  ad un dato istante di tempo  $t = t_0$ .

**Proprietà:** Consideriamo un generico nodo  $v_a$  e indichiamo con  $\mathcal{R}^a$  il sottoinsieme dei rami incidenti  $v_a$  e con  $\mathcal{N}^a$  il sottoinsieme dei nodi a cui è connesso l'altro terminale dei rami  $\in \mathcal{R}^a$ . In generale  $\mathcal{R}^a$  è il taglio nodale di  $v_a$  eccetto il caso in cui esso sia cruciale. Assumiamo che le potenze virtuali assorbite siano positive  $p_k(t_0) = v_k(t_0) z_k(t_0) > 0 \forall p_k \in \mathcal{R}^a$ . Si ha:

- esiste un nodo  $v_k \in \mathcal{N}^a$  con  $e_k(t_0) > e_a(t_0)$
- esiste un nodo  $v_k \in \mathcal{N}^a$  con  $e_k(t_0) < e_a(t_0)$



**Prova:** Consideriamo il sottografo in figura, in cui è rappresentato il nodo  $v_a$  e i rami  $\mathcal{R}^a \equiv \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5\}$  ad esso incidenti, che lo connettono ai nodi  $\mathcal{N}^a \equiv \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ . Le correnti  $z_k(t_0)$  fluenti nei rami in  $\mathcal{R}^a$  siano orientate verso il nodo  $v_a$ . Per la legge di KIRCHHOFF delle correnti, la somma di queste correnti è nulla

$$\sum_{p_k \in \mathcal{R}^a} z_k(t_0) = 0$$

e quindi  $v_i$  è almeno una corrente positiva (entrante in  $v_a$ ) e almeno una negativa (uscente da  $v_a$ ). L'ipotesi della nonnullità della potenze virtuali esclude che queste correnti siano nulle. Quindi tra i nodi in  $\mathcal{N}^a$  almeno uno ha potenziale più elevato e almeno uno ha potenziale più basso di  $e_a(t_0)$ , dal momento che tutte le potenze virtuali sono positive:

$$p_k(t_0) = [e_k(t_0) - e_a(t_0)] z_k(t_0) > 0 \implies e_k(t_0) > e_a(t_0) \text{ per } z_k(t_0) > 0 \text{ (entrante)}$$

$$p_k(t_0) = [e_k(t_0) - e_a(t_0)] z_k(t_0) > 0 \implies e_k(t_0) < e_a(t_0) \text{ per } z_k(t_0) < 0 \text{ (uscente)}$$

#### 4.3.2 Teorema di non-amplificazione della tensione

Dal precedente lemma otteniamo l'importante teorema:  
**Proprietà:** Consideriamo un circuito completo costituito da  $n$  nodi e  $m$  rami. Assumiamo che le potenze virtuali assorbite in  $t_0$  da ciascun bipolo (sia effettivo sia fittizio) siano positive eccetto quella dell' $m$ -esimo bipolo:

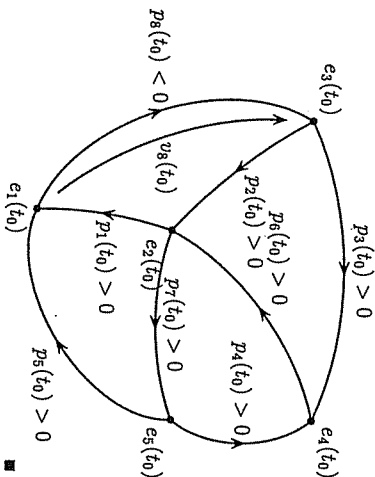
$$p_k(t_0) > 0 \quad k = 1, 2, m-1, \quad p_m(t_0) < 0$$

Il valore assoluto della tensione  $v_m(t_0)$  dell' $m$ -esimo bipolo è maggiore del valore assoluto di ciascuna delle altre tensioni di ramo :

$$|v_m(t_0)| \geq |v_k(t_0)|, \quad k = 1, 2, \dots, m-1$$

*Prova* : Applichiamo il lemma del potenziale di nodo agli  $n-2$  nodi (tutti eccetto i due a cui è connesso l'  $m$ -esimo bipolo) : il potenziale di nessuno di questi  $n-2$  nodi può raggiungere il valore massimo o minimo tra tutti gli  $n$  potenziali. Quindi i nodi con il valore massimo e il valore minimo dei potenziali sono proprio quelli connessi all'  $m$ -esimo bipolo. Quindi la tensione di tutti i rimanenti bipoli non può superare, in valore assoluto, la tensione ai capi dell'  $m$ -esimo bipolo che coincide con la differenza tra il potenziale più elevato e quello più basso presenti nel circuito.

*Esempio A* : Consideriamo il grato in figura, costituito da 5 nodi e 8 rami : la potenza virtuale  $p_8(t_0)$  assorbita dal ramo  $p_8$  è negativa, mentre le rimanenti potenze virtuali sono positive. Siccome solamente i nodi con potenziali  $e_1(t_0)$  e  $e_3(t_0)$  non soddisfano al precedente Lemma del potenziale di nodo,  $e_1(t_0)$  e  $e_3(t_0)$  sono il più alto e il più basso tra i potenziali. Quindi nessuna tensione di ramo può essere superiore in valore assoluto alla  $v_8(t_0)$ .



4.3.3 Teorema di non-amplificazione della corrente

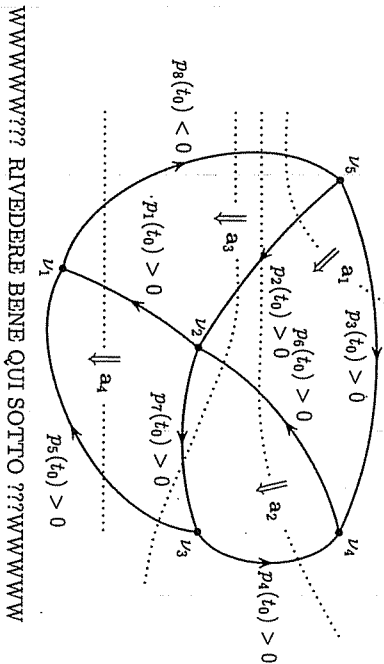
Dal lemma del potenziale di nodo deriva un'altro teorema :

*Proprietà* : Consideriamo un circuito completo costituito da  $n$  nodi e  $m$  rami. Assumiamo che le potenze virtuali assorbite in  $t_0$  da ciascun bipolo (sia effettivo sia fittizio) siano positive eccetto quella dell'  $m$ -esimo bipolo :

$$p_k(t_0) > 0 \quad \forall k = 1, m-1, \quad p_m(t_0) < 0$$

Il valore assoluto della corrente  $i_m(t_0)$  dell'  $m$ -esimo bipolo è maggiore o uguale al valore assoluto di ciascuna delle altre correnti di ramo :

$$|i_m(t_0)| \geq |i_k(t_0)|, \quad k = 1, 2, \dots, m-1$$



WWWWWW?? RIVEDERE BENE QUI SOTTO ???WWWWWW

*Prova* : Separiamo i nodi  $N$  del circuito in due sottoinsiemi  $N^a$  e  $N^b$  tali che il potenziale di ciascun nodo in  $N^a$  sia più elevato del potenziale di ciascun nodo in  $N^b$  :

$$e_{n_a}(t) > e_{n_b}(t) \quad \forall n_a \in N^a \text{ and } n_b \in N^b$$

Esistono  $n-1$  differenti partizioni dei nodi di questo tipo : ciascuna di esse definisce uno specifico sottoinsieme di rami  $R^{ab}$ , che è un taglio o l'unione dei rami di più tagli (vedere Par. 3.4.2). Scegliamo il verso  $N^a \rightarrow N^b$  come verso di attraversamento di questo (i) taglio (i) e orientiamo le tensioni ai capi dei rami in  $R^{ab}$  in modo che risultino positive cioè nel verso  $N^a \leftarrow N^b$ .

In seguito al lemma del potenziale di nodo, l' $m$ -esimo ramo, che collega il nodo con potenziale più elevato a quello con potenziale più basso, compare in ciascun sottoinsieme  $R^{ab}$ . Siccome la corrente fluente nel  $m$ -esimo ramo scorre nel verso  $N^a \rightarrow N^b$  poiché  $p_m(t) < 0$ . Tutte le rimanenti correnti di questi  $n-1$  sottoinsiemi fluiscono nel verso  $N^a \rightarrow N^b$  poiché le loro potenze virtuali assorbite sono positive.

Applicando la legge di KIRCHHOFF delle correnti alle correnti degli  $n-1$  sottoinsiemi  $R^{ab}$  si ha che :

$$\underbrace{-i_m(t_0)}_{\text{positiva}} = \sum_{\rho_k \in \text{taglio}} \underbrace{i_k(t_0)}_{\text{positiva}} \implies |i_m(t_0)| \geq |\rho_k \in \text{taglio}|$$

Estendendo questa analisi a tutti gli  $n-1$  sottoinsiemi di rami del tipo suddetto, tutte le correnti di ramo compaiono a secondo membro per almeno uno dei tagli.

4.3.4 Conclusioni

Le seguenti conclusioni possono essere tratte :

1. Il lemma del potenziale di nodo e i due teoremi di non amplificazione sono enunciati per un assegnato istante di tempo  $t_0$ . Se l'assunzione sui segni delle potenze virtuali valgono per qualsiasi  $t$ , anche le condizioni sui valori assoluti delle tensioni e/o correnti valgono per qualsiasi  $t$ .

2. L'applicazione dei suddetti teoremi ai circuiti contenenti multipoli può far sorgere alcune difficoltà. Infatti i bipoli fittizi che sostituiscono i multipoli possono essere scelti in molti modi diversi. Conseguentemente le potenze virtuali dei bipoli fittizi (potre) possono cambiare di segno se cambio la scelta dei bipoli fittizi. Solo alcuni di questi modi possono dare origine a bipoli fittizi tutti assorbitanti potenza virtuale. Per poter applicare il teorema occorre che ciascun multipolo ammetta almeno una tra le numerose possibili scomposizioni in cui le potenze virtuali di ciascun bipolo fittizio siano positive.
3. Notare che questi due teoremi prescindono dalle relazioni costitutive dei componenti del circuito. Infatti per la loro dimostrazione occorrono le due leggi di KIRCHHOFF ed il concetto di potenza virtuale. Essi trovano applicazioni di interesse nei casi in cui la potenza virtuale venga sostituita dalla potenza effettiva ed il segno di questa può essere stabilito dalla conoscenza delle relazioni costitutive dei componenti. Vedremo alcune applicazioni nel seguito.
4. I due teoremi di non-amplificazione possono essere generalizzati a circuiti con più bipoli eroganti potenza virtuale.  $WWWWWWW???$   
 $WWWWWWW???$  VEDERE CON CURA se estendere i teoremi di amplificazione anche al caso  $P_m(t) \geq 0$  (vedere testo di CDK).  $???$   
 $WWWWWWW$

# 5 RELAZIONI COSTITUTTIVE

WWWWWW??? FIGURA EMBLEMMA : multipolo con cinque terminali con scritto dentro il nocciolo "hinc sunt constitutives relationes". WWWW

Questo capitolo introduce le *relazioni costitutive* dei componenti, cioè le equazioni matematiche che vincolano tra loro le tensioni e correnti di ramo dello stesso componente. Esse sono essenziali per formare, insieme alle Leggi di KIRCHHOFF, il modello completo del circuito, cioè il modello necessario e sufficiente per calcolare le tensioni e correnti del circuito.

**Sez. 5.1 : Motivazioni e definizioni :** Le due leggi di KIRCHHOFF, consentono di formulare  $m$  equazioni in  $2m$  incognite, non sono in grado di costituire un modello completo del circuito fisico. Occorre aggiungere le *relazioni costitutive* dei componenti rappresentati il modello esterno dei fenomeni fisici che hanno sede all'interno del componente fisico.

**Sez. 5.2 : Classificazioni :** Le relazioni costitutive vengono classificate seguendo tre criteri di tipo molto generale e indipendenti l'uno dall'altro : *adinnatici* o *dinamici*, *tempo-invarianti* o *tempo-varianti*, *lineari* o *nonlineari*. Queste tre diverse classificazioni valgono simultaneamente per il medesimo componente dando origine a otto classi di componenti.

**Sez. 5.3 : Relazioni costitutive nella realtà :** Le caratteristiche di un componente fisico non possono mai essere descritte "esattamente" da una legge matematica. Quindi, lo stesso componente fisico può essere considerato adinnamico o dinamico, tempo-invariante o tempo-variante, lineare o nonlineare a seconda del circuito al cui interno esso opera.

**Sez. 5.4 : Analisi di circuiti :** Per trovare la soluzione di un circuito (completo), viene costruito un unico sistema di equazioni facendo un banale *collego* tra le Leggi di KIRCHHOFF e le relazioni costitutive dei componenti.

**Sez. 5.5 : Analisi di componenti composti :** Viene introdotto un unico sistema sottodeterminato di equazioni per costruire le relazioni costitutive di un generico componente composto.

**Sez. 5.6 : Teorema di sostituzione :** Il *Teorema di Sostituzione* risulta utile per semplificare il sistema di equazioni del circuito senza alterarne la soluzione. Per la sua introduzione è necessario anticipare la presentazione delle *sovranti tempo-invarianti* e *tempo-varianti*.

**Sez. 5.7 : Potenza e lavoro (effettivi) :** La *potenza elettrica (effettiva)* e il *lavoro elettrico (effettivo)* sono derivati dalla potenza e dal lavoro virtuali (vedere Cap. 2), aggiungendo le relazioni costitutive (vedere Sez. 5.1-3) che vincolano tra loro le tensioni e correnti di ramo del componente. Conseguentemente, molte delle proprietà già incontrate nel Cap. 2 sopravvivono : sono enunciati il teorema e il corollario sia della potenza effettiva sia del lavoro effettivo.

## 5.1 MOTIVAZIONI E DEFINIZIONI

Le due leggi di KIRCHHOFF, da sole, non sono in grado di costituire un modello completo del circuito fisico, dal momento che il numero di equazioni scalari è inferiore al numero di incognite. Questa sezione fa alcune considerazioni preliminari di carattere molto generale e astratto sulle *relazioni costitutive* che completano il modello del circuito, introducendo opportuni vincoli tra le tensioni e correnti di ramo di ciascun componente motivati dalla realtà fisica.

### 5.1.1 Soluzione di un circuito

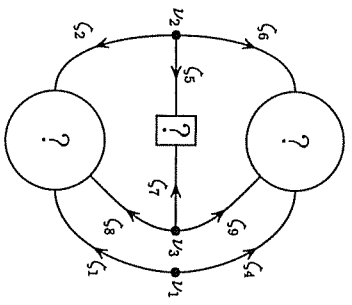
Le tensioni e correnti di ramo di un circuito sono in genere dipendenti dal tempo. Nel caso in cui esse verifichino tutte le equazioni matematiche proprie del circuito esse costituiscono una *soluzione del circuito*. Indicando con  $n$  e  $m$  il numero dei nodi e dei rami del grafo, abbiamo :

$m$  tensioni di ramo, inglobate nel vettore  $v(t) \in \mathbb{R}^m(t)$ , ed  $m$  correnti di ramo, inglobate nel vettore  $i(t) \in \mathbb{R}^m(t)$ , per un totale di  $2m$  grandezze incognite. Qualora necessario, indicheremo col simbolo  $x(t) \equiv [v(t)^T \ i(t)^T]^T \in \mathbb{R}^{2m}(t)$  il vettore che raggruppa tutte le  $2m$  grandezze di ramo.

$m - n + 1$  equazioni scalari (una per ogni maglia indipendente) coinvolgenti le  $m$  tensioni di ramo (legge di KIRCHHOFF delle tensioni)  $v(t)$  :

$n - 1$  equazioni scalari (una per ogni taglio indipendente) coinvolgenti le  $m$  correnti di ramo  $i(t)$  (legge di KIRCHHOFF delle correnti) per un totale di  $m$  equazioni scalari.

**Insufficienza della topologia :** Le due leggi di KIRCHHOFF forniscono solamente  $m$  equazioni in  $2m$  incognite. Siccome ciascuna tensione e corrente di ramo in un circuito fisico, non può che assumere uno e uno solo valore a ogni istante  $t$ , le due Leggi di KIRCHHOFF, da sole, non costituiscono un modello completo del circuito fisico. Per completarlo occorre tirarsi su le maniche per individuare altre  $m$  equazioni, sulla base di considerazioni di natura fisica, coinvolgenti le tensioni e correnti di ramo : le relazioni costitutive dei componenti, argomento di questo capitolo, sono la risposta al problema. In altre parole, dobbiamo investigare i noccioli (cioè le regioni nonequipotenziali introdotti nel Cap. 1), la cui descrizione fisica è rimasta fino ad ora senza risposta.



■



**e-mail all'autore** : Se vuoi capire come siamo fatti dentro dovresti fare uno sforzo enorme : fare la lista di tutti gli atomi e le molecole al nostro interno, seguire le evoluzioni che ciascuno di essi compie seguendo il proprio estro. In altre parole dovresti metterti a studiare la fisica della materia argomento vasto e non facilmente digeribile. Quindi noi ti consigliamo un approccio più pratico e meno teorico che consiste nel fornire, almeno per i più importanti tra di noi gli effetti esterni del nostro comportamento interno senza entrare dentro ai meccanismi interni. E non dimenticare che potresti essere messo sotto accusa da qualche lobby accademica che non gradirebbe la tua intrusione entro settori che essi considerano a loro riservati.

i componenti del tuo personal.

5.1.2 Relazioni costitutive di un componente

**Definizione** : Le tensioni e correnti delle porte di ogni  $k$ -porta sono soggette a  $k$  vincoli. Ciascun vincolo è descritto da un'equazione scalare che coinvolge come incognite le tensioni e correnti. Queste  $k$  equazioni sono usualmente chiamate *relazioni costitutive* del  $k$ -porta. Alternativamente, la relazione costitutiva di un bipolo ovvero le relazioni costitutive di un  $k$ -porta vengono chiamate *caratteristica* del componente

■ **Commento** : Le equazioni scalari dovute alle relazioni costitutive dei componenti di un circuito sono in totale  $m$  (una per ciascun ramo del grafo) e consentono di completare le relazioni topologiche per formare un sistema di  $2m$  equazioni in  $2m$  incognite.

■ **Natura fisica** : Da un punto di vista fisico, le relazioni costitutive sono il *modello matematico esterno* (che coinvolge le grandezze definite alle porte) dei fenomeni fisici che si sviluppano all'interno di ogni componente fisico, cioè all'interno della regione non equipotenziale rappresentata dal nocciolo (vedere Cap. 1). Nell'ambito di questo corso, noi non ci occuperemo direttamente di questi fenomeni fisici in quanto il loro studio fa parte di altri corsi. A noi è sufficiente conoscere il loro modello esterno (cioè i vincoli tra le tensioni e correnti delle porte), che, per definizione, condensa tutte le informazioni necessarie e sufficienti per analizzare, mediante cart&#x26;#x2013;pena e/o simulazione su calcolatore, il comportamento di qualsiasi circuito fisico in cui il componente si trovi a operare.

■ L'introduzione delle relazioni costitutive dei componenti può seguire due vie tra loro opposte.

**Via teorica** : Possiamo immaginare componenti con relazioni costitutive interessanti dal punto di vista matematico e analizzare le loro proprietà qualora siano connessi ad altri componenti e, in un secondo tempo, controllare se la tecnologia ha messo a disposizione componenti fisici che approssimano adeguatamente queste caratteristiche ideali. Per esempio, mezzo secolo fa Tellegen con ragionamenti puramente matematici scoprì che la teoria ammette l'esistenza di doppi bipoli nonreciproci e passivi, che hanno tra l'altro la peculiarità di trasformare un condensatore in un induttore. Egli inventò sulla carta il *giratore* (vedere Sez. 10.6) che fu costruito in seguito da altri motivati dalle sue interessanti proprietà teorico-matematiche.

Anche la sorgente di corrente ideale (impulsiva) (vedere Sez. 7.2) è stata introdotta sulla carta per analogia (dualità) della sorgente di tensione ideale (impulsiva) anche se la tecnologia non aveva ancora messo a disposizione bipoli fisici il cui modello fosse una sorgente

di corrente ideale. Il modello di Norton di un bipolo, duale del modello di Thévenin, mostra come l'introduzione della sorgente di corrente ideale sia vantaggiosa. Solo in seguito sono stati realizzati bipoli fisici che si comportano come sorgenti ideali di corrente.

■ **Via tecnologica** : Possiamo esaminare i componenti fisici resi disponibili dalla tecnologia, almeno quelli più noti, e descriverne le relazioni costitutive tramite esperimenti o analisi di tipo fisico dei fenomeni che avvengono al suo interno.

Per esempio, la sorgente di tensione ideale (vedere Sez. 7.2) è stata introdotta come modello idealizzato del bipolo fisico chiamato pila ovvero batteria che è un'evoluzione dell'originaria pila di Volta.

Il trasformatore ideale (vedere Sez. 10.6) è stato introdotto come il modello più semplificato (idealizzato) del trasformatore fisico che già alla fine del diciannovesimo secolo aveva raggiunto un ruolo fondamentale nella trasmissione a distanza dell'energia elettrica.

■ Anche il nullore (vedere Sez. 10.2) è stato introdotto come modello idealizzato del componente fisico chiamato amplificatore operazionale.

Molto spesso è stata seguita una via mista :

■ **Via mista** : Per esempio nello stesso momento che noi misuriamo la caratteristica di un filo di rame e riportiamo su un diagramma cartesiano i valori misurati della tensione e della corrente, possiamo osservare che i punti sono abbastanza allineati e quindi a concepire la caratteristica idealizzata  $v = r i$  (universalmente nota come legge di Ohm) che definisce il bipolo noto come resistore (ideale).

■ Anche le sorgenti pilotate (vedere Sez. 10.5) sono state introdotte per descrivere il comportamento di multipoli quali i triodi, pentodi e successivamente i transistori.

■ In questo corso, purtroppo privo di esercitazioni in laboratorio, noi seguiremo piuttosto la prima via, anche se cercheremo di fare, nei momenti opportuni, alcuni cenni alla differenza tra componenti fisici e il loro modello più o meno idealizzato.

5.1.3 Simbologia

Avendo indicato con  $v(t)$  e  $i(t)$  i vettori di dimensioni  $k$  delle tensioni e delle correnti definite alle  $k$  porte di un  $k$ -porta, denotiamo con  $f(\cdot)$  una generica funzione i cui argomenti sono gli elementi di  $v(t)$  e  $i(t)$  ed eventualmente il tempo  $t$ . Per rappresentare le relazioni costitutive di un componente, noi adottiamo la seguente simbologia :

1.  $f^{(2)}$ ( ) denota una funzione che dipende linearmente (apice  $\mathcal{L}$ ) da ciascuna tensione e corrente e che comprende anche l'operatore derivata  $\frac{d}{dt}$  e/o integrale  $\int dt$  (apice  $\mathcal{D}$ ), applicato alle tensioni e/o correnti.
2.  $f^{N\mathcal{D}}$ ( ) denota una funzione che dipende nonlinearmente (apice  $\mathcal{N}$ ) da almeno una tensione e corrente e che comprende anche l'operatore derivata e/o integrale.
3.  $f^{\mathcal{L}}$ ( ) denota una funzione che dipende linearmente da ciascuna tensione e corrente e che non comprende gli operatori derivata e integrale.
4.  $f^{N\mathcal{L}}$ ( ) denota una funzione che dipende nonlinearmente da almeno una tensione o corrente e che non comprende gli operatori derivata e integrale.

In ciascuno dei quattro casi suddetti la funzione può dipendere esplicitamente anche dal tempo  $t$ . Comunque, in nessun caso viene richiesto che questa dipendenza sia lineare.

**Avertenza :** La suddetta simbologia potrebbe essere riconsiderata nell'ambito della "Teoria degli Operatori" : le funzioni  $f^{ND}(\cdot)$  potrebbero essere riviste come operatori. Comunque in questi appunti questo possibile approccio non viene considerato, dal momento che risulterebbe inutilmente pesante per un corso propedeutico. ■

**5.1.4 Rappresentazione implicita**

Le relazioni costitutive di un  $k$ -porta possono essere descritte in diverse (comunque equivalenti) forme analitiche, che vengono chiamate comunemente *rappresentazioni*. Le  $k$  tensioni e le  $k$  correnti di ramo del  $k$ -porta sono riunite in un unico vettore  $x(t) \in \mathbb{R}^{2k}(t)$ , detto *vettore delle grandezze di ramo* (o alle porte) del componente, da non confondere col vettore introdotto nel Par. 5.1.1, che comprende le tensioni e correnti di tutti i rami del grafo.

Le  $k$  relazioni costitutive (scalari) di un  $k$ -porta devono essere compatibili tra loro e nessuna di esse può essere ridondante. La ridondanza nascerebbe nel caso, per esempio, in cui una o più delle relazioni coincidesse con una combinazione lineare delle rimanenti :

Una generica rappresentazione delle relazioni costitutive, descritta da una funzione in forma implicita, è detta *rappresentazione implicita*. Con riferimento alla notazione introdotta nel paragrafo precedente, una generica rappresentazione implicita ha la forma :

$$f^{ND}[v(t), i(t), t] = 0_k \text{ dove } f^{ND} : \mathbb{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

L'ultimo argomento  $t$  di  $f^{ND}(\cdot)$  denota che il vincolo tra le tensioni e correnti varia col tempo. In molti casi, mediante opportune operazioni differenziali, si può assumere che in  $f^{ND}$  compaia solo l'operatore differenziale  $\frac{d}{dt}$  e sia eliminato l'operatore integrale  $\int dt$ .

**Avertenza :** È possibile che due diverse funzioni  $f_1^{ND}[v(t), i(t), t]$  e  $f_2^{ND}[v(t), i(t), t]$ , con  $f_1^{ND}[v(t), i(t), t] \neq f_2^{ND}[v(t), i(t), t]$ , se uguagliate a zero, diano origine alla stessa funzione implicita, cioè :

$$f_1^{ND}[v(t), i(t), t] = 0_k \iff f_2^{ND}[v(t), i(t), t] = 0_k$$

Per esempio :  $[v(t) + 2i(t) - 3i(t)]^2 = 0 \iff 5i(t) + 10i(t) - 15i(t) = 0$ . ■

**Definizione :** Si dice *situazione elettrica* una delle possibili soluzioni, cioè un particolare vettore  $\mathfrak{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  delle tensioni e correnti di ramo  $x(t) \equiv [v(t)^T i(t)^T]^T$ , che soddisfi le relazioni costitutive del  $k$ -porta :

$$x(t) \equiv [v(t)^T i(t)^T]^T : f_1^{ND}[v(t), i(t), t] = 0_k \quad \blacksquare$$

**Definizione :** Viene chiamato *dominio costitutivo* del componente l'insieme  $\mathcal{X}_t$  di tutte le situazioni elettriche cioè di tutti i vettori  $x(t) \equiv [v(t)^T i(t)^T]^T$  che soddisfano alle relazioni costitutive del  $k$ -porta :

$$\mathcal{X}_t \equiv \{ [v(t)^T i(t)^T]^T \in \mathbb{R}^{2k}(t) \mid f_1^{ND}[v(t), i(t), t] = 0_k \} \quad \blacksquare$$

**5.2 CLASSIFICAZIONI**

Le relazioni costitutive dei componenti fisici usati in pratica suggeriscono di classificarle in accordo a tre criteri matematici di tipo molto generale e indipendenti l'uno dall'altro.

Queste tre diverse classificazioni valgono simultaneamente per il medesimo componente. Altre classificazioni saranno esaminate nei CCap. 7, 8 e 15, 16, dopo aver introdotto la potenza e il lavoro effettivi.

**5.2.1 Prima classificazione : "adinnamico/dinamico"**

**Definizione :** Un  $k$ -porta è chiamato *adinnamico* se il suo dominio costitutivo  $\mathcal{X}$  verifica la :

$$\forall [v(t)^T i(t)^T]^T \in \mathcal{X} \iff \exists [v(a)^T i(a)^T]^T \in \mathcal{X} \quad \forall a \in \mathbb{R}^1$$

Questa definizione è elegante ma incompleta, in quanto vale solo nel caso che la variabile tempo  $t$  non compaia esplicitamente nelle relazioni costitutive.

La seguente definizione alternativa vale in ogni caso :

**Definizione :** Un  $k$ -porta è chiamato *adinnamico* se le relazioni costitutive verificano la :

$$f^{ND}[v(t), i(t), t] = 0_k \iff f^{ND}[v(a), i(a), a] = 0 \text{ dove } f^{ND} : \mathbb{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k \quad \forall a \in \mathbb{R}^1$$

Altrimenti, il  $k$ -porta viene detto *dinamico*. ■

**Commento :** In parole più semplici, questa condizione implica che i componenti adinnamici siano insensibili a un'alterazione della scala del tempo. Nella caratteristica di un componente adinnamico non possono apparire le derivate e/o integrali delle tensioni e correnti. In altre parole, con le notazioni del Par. 5.1.3, si ha :

$$f^{ND}[v(t), i(t), t] = 0 \implies g^N[v(t), i(t), t] = 0 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ f^{ND} : \mathbb{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ g^N : \mathbb{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k \end{matrix} \quad \blacksquare$$

**Terminologia :** Nella letteratura anglosassone e spesso anche in quella italiana, l'aggettivo "resistivo (resistive)" è usato al posto di "adinnamico" : esso può indurre in inganno, perché "resistivo" fa pensare a un componente "composito da resistor" o, comunque, a un componente che dissipa energia.

Spesso gli ingegneri elettronici usano l'aggettivo "statico" per indicare il concetto qui espresso da *adinnamico* : per esempio la retta di carico *statica* impiegata per individuare il punto di lavoro di un transistor. Questo uso è derivato impropriamente dalla fisica, dove l'aggettivo *statico* è attribuito ai fenomeni fisici in cui non vi è trasferimento di potenza ovvero variazione di energia. Nelle Scienze Elettriche l'*elettrostatica* e la *magnetostatica* si riferiscono ai fenomeni elettrici e magnetici, in cui non si hanno trasferimenti di potenza, ma, esclusivamente, una distribuzione stazionaria di energia nello spazio fisico.

Altre volte i componenti dinamici e adinnamici vengono chiamati, rispettivamente, componenti *con memoria* e *senza memoria*. Questa scelta può suggerire erroneamente che i circuiti che costituiscono le memorie a semiconduttore presenti nei calcolatori operino in base a effetti dinamici mentre la loro capacità di memorizzare è dovuta alla nonlinearità. Dal punto di vista matematico "dinamico" è sinonimo di "differenziale" e "adinnamico"

di "nondifferenziale". Spesso viene usato il termine *algebraico* per indicare un'equazione nondifferenziale. Ma questo termine è in genere riservato alle equazioni lineari o, più precisamente, polinomiali. Infatti un'equazione con al suo interno una funzione trascendente (per esempio un'esponenziale) sarebbe algebrica nonlineare.

**Domínio costitutivo condizionato/incondizionato** : Per i componenti dinamici, la definizione di dominio costitutivo ha bisogno di una precisazione. Il comportamento del componente dipende dal valore che la tensione  $e$ /o corrente  $i$ /o le loro derivate hanno all'istante  $t_0$  in cui si inizia a esaminare il componente. Se prescindiamo da questi valori, il dominio costitutivo ha la massima estensione e viene detto *incondizionato*, mentre se fissiamo questi valori, ci troviamo davanti a un *dominio costitutivo condizionato* che risulta essere un sottoinsieme del precedente. Questo problema sarà ripreso e chiarito quando affronteremo i condensatori e gli induttori nel Cap. 15.

5.2.2 Seconda classificazione : "tempo-invariante/tempo-variante"

**Definizione** : Un  $k$ -porta è detto *tempo-invariante* se il suo dominio costitutivo  $\mathcal{X}$  verifica la :

$$\forall [v(t)^T \ i(t)^T]^T \in \mathcal{X} \quad \left\} \Rightarrow [v(t + \Delta t)^T \ i(t + \Delta t)^T]^T \in \mathcal{X} \right.$$

$\forall \Delta t \in \mathbb{R}$

cioè se ammette una traslazione  $\Delta t$  nel dominio del tempo delle tensioni e correnti. Altrimenti, un componente è detto *tempo-variante*.

**Avvertenza** : Una relazione costitutiva tempo-invariante non implica affatto che le grandezze di ramo siano costanti nel dominio del tempo. Per esempio, confrontare la caratteristica  $v(t) = r \ i(t)$  di un resistore tempo-invariante e quella  $v(t) = r(t) \ i(t)$  di un resistore tempo-variante. Nella prima sia la tensione sia la corrente variano, in genere, col tempo  $t$  ma il loro rapporto rimane costante. Nella seconda anche il rapporto varia necessariamente col tempo. Questo discorso sarà approfondito nel Cap. 15.

**Simbologia** : Per i componenti tempo-invarianti, la funzione  $f^{ND}[v(t), i(t), t]$  non varia al variare dell'ultimo dei suoi argomenti  $t$ ; quindi si ha che :

$$f^{ND}[v(t), i(t), t] = 0 \quad \Rightarrow \quad g^{ND}[v(t), i(t)] = 0$$

$\downarrow$

$$f^{ND} : \mathbb{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k \quad \quad \quad g^{ND} : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

**Terminologia** : Lo scrivente si rende conto che i termini "tempo-invariante" e "tempo-variante" suonano orribilmente per i puristi della lingua italiana. Infatti essi sono stati presi di peso dai termini "time-invariant" e "time-varying" dell'inglese. Una traduzione più consona all'italiano richiederebbe delle perifrasi piuttosto complesse che farebbero perdere immediatezza alla frase. D'altra parte questi termini sono ormai molto diffusi in molte settori dell'Ingegneria. Spero che DANTE, MANZONI, ... non mi "firino le orecchie", come facevano i docenti delle scuole superiori di una volta.

5.2.3 Terza classificazione : "lineare/nonlineare"

**Definizione** : Un  $k$ -porta è detto *lineare* se una qualsiasi combinazione lineare (con somma unitaria dei coefficienti) delle tensioni e correnti di due qualsiasi situazioni elettriche

$[v'(t)^T \ i'(t)^T]^T$  e  $[v''(t)^T \ i''(t)^T]^T$  è a sua volta una soluzione della caratteristica :

$$\forall [v'(t)^T \ i'(t)^T]^T \in \mathcal{X} \quad \left\} \Rightarrow [[\alpha' v'(t) + \alpha'' v''(t)]^T \ [\alpha' i'(t) + \alpha'' i''(t)]^T]^T \in \mathcal{X} \right.$$

$\forall \alpha', \alpha'' \in \mathbb{R}^1$   
con  $\alpha' + \alpha'' = 1$

Altrimenti, un componente è detto *nonlineare*.

**Commento** : La precedente condizione equivale a dire che il dominio costitutivo  $\mathcal{X}$  di un componente lineare costituisce un *sottospazio affine*.

**Commento** : La caratteristica implicita dei componenti lineari soddisfa alla condizione :

$$f^{ND}[v(t), i(t), t] = 0_k \quad \Rightarrow \quad g^{CD}[v(t), i(t), t] = 0_k$$

$\downarrow$

$$f^{ND} : \mathbb{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k \quad \quad \quad g^{CD} : \mathbb{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

**Sottoclassificazione omogeneo/nonomogeneo** : I componenti lineari possono, a loro volta, essere suddivisi in omogenei e nonomogenei :

**Definizione** : Un  $k$ -porta lineare è detto *omogeneo* se ogni soluzione delle relazioni costitutive, se alterata per uno scalare qualsiasi, è a sua volta una soluzione :

$$\forall [v(t)^T \ i(t)^T]^T \in \mathcal{X} \quad \left\} \Rightarrow [[\alpha v(t)]^T \ [\alpha i(t)]^T]^T \in \mathcal{X} \right.$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^1$

Altrimenti il componente lineare è detto *nonomogeneo*.

**Proprietà** : Il dominio costitutivo  $\mathcal{X}$  di un  $k$ -porta lineare omogeneo costituisce un *sottospazio lineare*, dal momento che esso è affine e contiene la situazione elettrica nulla :

$$[v(t)^T \ i(t)^T]^T = 0_k \in \mathcal{X}$$

**Terminologia** : Nei due precedenti paragrafi abbiamo impiegato l'aggettivo "lineare" per individuare una data classificazione per i componenti. Inoltre, abbiamo suddiviso i componenti lineari in quelli omogenei e quelli nonomogenei. Questa scelta è analoga a quella che si fa nei corsi elementari di analisi matematica, quando si parla di un sistema di equazioni (sia algebriche sia differenziali) lineari, in cui sono in genere presenti anche i cosiddetti "termini noti". Quando questi termini sono assenti, viene precisato che il sistema lineare è *omogeneo*, mentre "nonomogeneo" denota che è presente almeno un termine noto, come risulta dal seguente quadro :

*Sistemi di equazioni lineari*

	algebraico	differenziale
omogeneo	$A x = 0_k$	$\dot{x}(t) = A x(t)$
nonomogeneo	$A x = b$	$\dot{x}(t) = A x(t) + b(t)$

Al contrario, nell'algebra moderna, quando si parla di spazi (vettoriali) lineari, il termine "lineare" ha un significato più ristretto, che corrisponde, confrontato col caso precedente, al termine "lineare omogeneo", mentre viene introdotto il termine "affine" per indicare "lineare non omogeneo".

Questa contraddizione risulta evidente nel seguente enunciato :

*l'insieme delle soluzioni di un sistema algebrico sottodeterminato lineare e non omogeneo costituisce, se non è a vuoto, uno spazio affine, mentre l'insieme delle soluzioni di un sistema sottodeterminato lineare e omogeneo costituisce uno spazio lineare.*

5.2.4 Le otto classi di componenti

Le tre suddette classificazioni, usate congiuntamente, definiscono  $8 = 2^3$  classi di componenti, qualora non considerassimo la distinzione tra componenti lineari omogenei e non omogenei. Per semplificare le notazioni vengono introdotte le abbreviazioni : adin. (dinamico), din. (dinamico), t-inv. (tempo-invariante), t-var. (tempo-variante), lin. (lineare), nonl. (nonlineare) :

Classi	Relazioni costitutive	
adin. t-inv. lin.	$f^L[v(t), \dot{i}(t)] = 0$	$f^L : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^k$
adin. t-inv. nonl.	$f^N[v(t), \dot{i}(t)] = 0$	$f^N : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^k$
adin. t-var. lin.	$f^L[v(t), \dot{i}(t), t] = 0$	$f^L : \mathbb{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$
adin. t-var. nonl.	$f^N[v(t), \dot{i}(t), t] = 0$	$f^N : \mathbb{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$
din. t-inv. lin.	$f^{LD}[v(t), \dot{i}(t)] = 0$	$f^{LD} : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^k$
din. t-inv. nonl.	$f^{ND}[v(t), \dot{i}(t)] = 0$	$f^{ND} : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^k$
din. t-var. lin.	$f^{LTD}[v(t), \dot{i}(t), t] = 0$	$f^{LTD} : \mathbb{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$
din. t-var. nonl.	$f^{NTD}[v(t), \dot{i}(t), t] = 0$	$f^{NTD} : \mathbb{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$

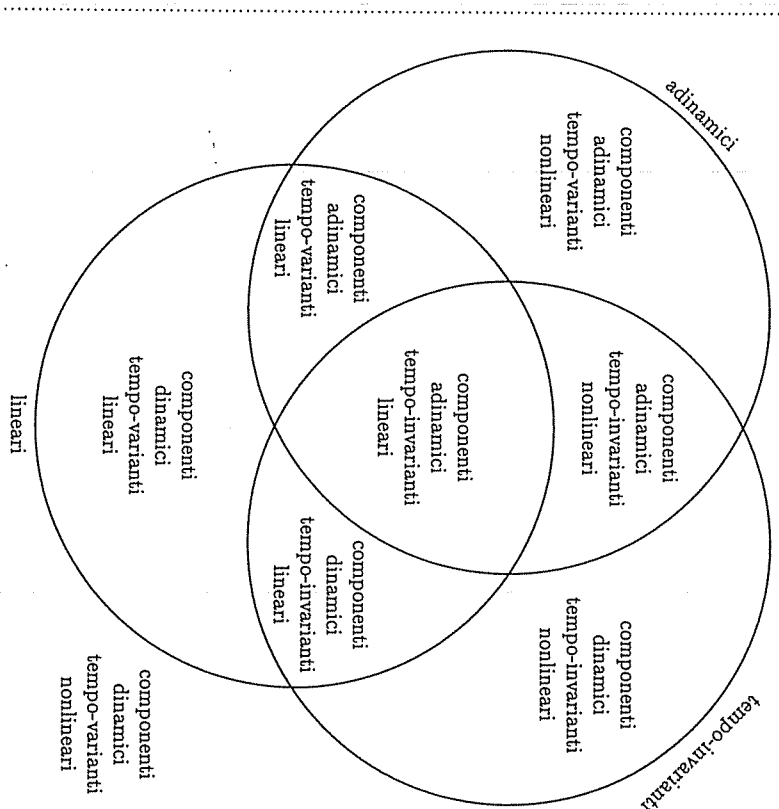


FIG. LE OTTO CLASSI DI COMPONENTI DEFINITE DALLE TRE CLASSIFICAZIONI

5.2.5 Esempi di relazioni costitutive

Qui di seguito sono riportate, come esempio, alcune relazioni costitutive. Esse non sono in genere riferite a componenti fisici di interesse :

## Quadro di esempi di bipoli delle otto classi

Classi	Relazioni costitutive
adin. t-inv. lin.	$5v(t) - 4i(t) + 3 = 0$
adin. t-inv. nonl.	$2v(t)^2 - 4i(t)v(t) + 3 = 0$
adin. t-var. lin.	$tv(t) - 4i(t) + 3t^2 = 0$
adin. t-var. nonl.	$2tv(t)^2 - 4i(t)v(t) + 3t^2 = 0$
din. t-inv. lin.	$5v(t) + 2v(t) - 4i(t) - \dot{i}(t) + 3 = 0$
din. t-inv. nonl.	$5v(t) + 2v(t)v(t) - 4i(t)^3 - \dot{i}(t) + 3 = 0$
din. t-var. lin.	$5 \exp(t)v(t) + 2tv(t) - 4i(t) - \dot{i}(t) + 3t^2 = 0$
din. t-var. nonl.	$5t^2v(t) + 2 \exp(t)v(t)v(t) - 4i(t)^3 - \dot{i}(t) + 3/t = 0$

## Quadro di esempi di tripoli delle otto classi

Classi	Relazioni costitutive
adin. t-inv. lin.	$\begin{cases} 3v_1(t) + 2v_2(t) - 4i_1(t) + i_2(t) - 2 = 0 \\ v_1(t) - 2v_2(t) + 3i_1(t) - 2i_2(t) = 0 \end{cases}$
adin. t-inv. nonl.	$\begin{cases} 3v_1(t)^2 + 2v_2(t)i_1(t) + i_2(t) - 2 = 0 \\ v_1(t) - 2/v_2(t) + 3i_1(t)i_2(t) = 0 \end{cases}$
adin. t-var. lin.	$\begin{cases} v_1(t) + t^2v_2(t) - 4i_1(t) + i_2(t) - 2t = 0 \\ v_1(t) - 3ti_1(t) - 2i_2(t) = 0 \end{cases}$
adin. t-var. nonl.	$\begin{cases} 3v_1(t)^2 + 2tv_2(t)i_1(t) + i_2(t) - 2t^3 = 0 \\ v_1(t) - 2t/v_2(t) + 3t^2i_1(t)i_2(t) = 0 \end{cases}$
din. t-inv. lin.	$\begin{cases} 3v_1(t) + 2v_2(t) + v_2(t) - 4i_1(t) - \dot{i}_1(t) + i_2(t) - 2 = 0 \\ v_1(t) + \dot{v}_1(t) - 2v_2(t) + 3i_1(t) - 2i_2(t) = 0 \end{cases}$
din. t-inv. nonl.	$\begin{cases} 3v_1(t)^3 + 2v_2(t) + [v_2(t)]^2 - 4i_1(t) - \dot{i}_1(t) + v_1(t)i_2(t) - 2 = 0 \\ v_1(t) + v_1(t)v_2(t) - 2v_2(t) + 3 \exp(i_1(t)) - 2i_2(t) = 0 \end{cases}$
din. t-var. lin.	$\begin{cases} 3t^2v_1(t) + 2v_2(t) + \exp(t)v_2(t) - 4i_1(t) - \dot{i}_1(t) + i_2(t) - 2 = 0 \\ t^2v_1(t) + \dot{v}_1(t) - 2 \exp(t)v_2(t) + 3i_1(t) - 2ti_2(t) = 0 \end{cases}$
din. t-var. nonl.	$\begin{cases} 2v_2(t) + [v_2(t)]^2 - 4i_1(t) - \exp(t)\dot{i}_1(t) + v_1(t)i_2(t) = 0 \\ \exp(t)v_1(t) + v_1(t)v_2(t) - 2v_2(t) + 3 \exp(i_1(t)) - 2t^2i_2(t) = 0 \end{cases}$

*Commento* : I precedenti esempi potrebbero scoraggiare il lettore : se le relazioni costitutive dei componenti sono così complicate è meglio rinunciare allo studio dei circuiti. Gli esempi riportati non si riferiscono in genere a componenti fisici di largo uso : essi hanno

lo scopo di mettere in evidenza la differenza concettuale tra le varie classificazioni. Per esempio in questi appunti i componenti nonlineari, sebbene di estremo interesse, verranno incontrati sporadicamente, per mancanza di spazio. ■

## 5.2.6 Traiettorie di bipoli tempo-invarianti

È interessante confrontare le tensioni e correnti dei componenti dinamici e dinamici nello spazio definito dalle rispettive tensioni e correnti : le variabili  $v(t)$  e  $i(t)$  di un bipolo dinamico tempo-invariante sia lineare sia nonlineare descrivono nel piano  $v-i$  la medesima curva (la cosiddetta caratteristica) indipendentemente dall'andamento temporale delle variabili stesse. Al contrario, le variabili  $v(t)$  e  $i(t)$  di un bipolo dinamico, tempo-invariante, sia lineare sia nonlineare, possono attraversare qualsiasi punto del piano  $v-i$ . Questo è motivato dal fatto che la traiettoria nel piano  $v-i$  dipende dall'andamento temporale di  $v(t)$  e  $i(t)$ .

Da un punto di vista qualitativo lo stesso discorso può essere ripetuto per componenti con più porte, in cui le traiettorie sono tracciate in uno spazio di dimensioni più elevate.

WWWWW?? ESTENDERE IL DISCORSO AI BIPOLI TEMPO-VARIANTI

## 5.3 RELAZIONI COSTITUTIVE NELLA REALTÀ

Le relazioni costitutive, già introdotte da un punto di vista matematico, vengono discusse da un punto di vista più fisico e realistico. Queste considerazioni servono a distinguere un Ingegnere da un Matematico. Le caratteristiche di un componente reale, come tutte le leggi fisiche, non possono mai essere descritte "esattamente" da una legge matematica sia semplice sia complicata. La suddetta affermazione è motivata dalla semplice osservazione che sarebbero necessarie misure esatte (impossibili nel mondo reale) del componente fisico sotto esame, ovvero una descrizione esatta (utopistica) di tutti i fenomeni fisici interni al componente.

## 5.3.1 Distribuzione dei componenti fisici

In genere, le relazioni costitutive date in forma analitica descrivono il comportamento del componente anche per valori elevati quanto si vuole delle tensioni  $e/o$  correnti di ramo. Queste relazioni definiscono il *dominio costitutivo teorico*. In pratica, qualsiasi componente fisico rimane danneggiato o distrutto in modo irreversibile per valori sufficientemente elevati delle tensioni  $e/o$  correnti, cioè per  $|v(t)| \rightarrow +\infty$   $e/o$   $|i(t)| \rightarrow +\infty$  dove  $| \cdot |$  indica il modulo del vettore. Quindi un componente fisico è in grado di operare regolarmente solo in un sottosistema del dominio costitutivo teorico che chiamiamo *dominio costitutivo fisico*. Per esempio nelle caratteristiche grafiche (per esempio quelle dei diodi e transistori) il dominio costitutivo fisico risalta in modo immediato, in quanto la curva ovvero la famiglia di curve che descrivono la caratteristica viene usualmente interrotta, per i valori di tensione  $e/o$  corrente per cui il componente può rimanere danneggiato.

## 5.3.2 Semplificazioni delle relazioni costitutive

Le seguenti considerazioni concernenti la semplificazione delle relazioni costitutive di un componente fisico sono di estremo interesse :

- Quando un componente è inserito in un circuito di un dato gruppo, il dominio costitutivo originario del componente  $\mathcal{X}$  può ridursi a un sottodominio (ridotto)  $\mathcal{X}^{rd} \subset \mathcal{X}$  per effetto dei vincoli imposti dal resto del circuito.
- In certi casi, la limitazione di  $\mathcal{X}$  può consentire una semplificazione delle relazioni costitutive del componente, valida solamente quando esso opera all'interno di un circuito del suddetto gruppo.

- Il medesimo componente, se opera in due circuiti di gruppi diversi, può essere soggetto a due diversi domini ridotti delle situazioni elettriche, e quindi può essere convenientemente descritto da due diverse relazioni costitutive semplificate.

Nel prossimo paragrafo esamineremo le semplificazioni più significative, che vengono incontrate nella realtà.

### 5.3.3 Situazioni con piccoli segnali

Assumiamo che il dominio costitutivo originario  $\mathcal{X}$  di un  $k$ -porta sia ridotto al sottodominio  $\mathcal{X}^{pic}$  caratterizzato da variazioni delle tensioni  $v(t)$  e correnti  $i(t)$  limitate in seguito alla connessione del componente complementare. Cioè siano verificate le :

$$\mathcal{X}^{pic} \equiv \{v(t)^T, i(t)^T \in \mathcal{X} \mid v^{inf} \leq v(t) \leq v^{sup}, \quad i^{inf} \leq i(t) \leq i^{sup}\}$$

dove  $v^{inf}$ ,  $v^{sup}$ ,  $i^{inf}$  e  $i^{sup}$  sono opportuni vettori costanti tali che  $v^{inf} < v^{sup}$  e  $i^{inf} < i^{sup}$ . Le suddette disuguaglianze tra vettori denotano che la stessa disuguaglianza vale per ciascuna coppia di elementi corrispondenti.

Siccome solo la porzione della caratteristica delimitata dai suddetti limiti è di interesse, ivi essa può presentare un comportamento abbastanza lineare nonostante che la caratteristica considerata sia, nel suo assieme, nonlineare. In caso favorevole, il modello nonlineare può essere rimpiazzato da uno lineare, cioè :

$$\forall [v(t)^T, i(t)^T] \in \mathcal{X}^{pic} \implies f^{ND}[v(t), i(t), t] = 0 \implies f^{LD}[v(t), i(t), t] \simeq 0$$

**Terminologia :** Nella letteratura anglosassone (*small signals*) e anche in quella italiana il termine "piccoli segnali" è ormai consolidato. In principio, sarebbe più appropriato il termine "segnali limitati" in quanto non è sempre necessario che il segnale sia piccolo per consentire la linearizzazione della caratteristica : per esempio, nei bipoli in cui la caratteristica è descritta da una funzione lineare ???a ampi tratti???. In questo caso, gli intervalli costituenti i vettori  $[v^{sup} - v^{inf}]$  e  $[i^{sup} - i^{inf}]$  possono essere piuttosto ampi. Al contrario, quando la caratteristica è descritta da una parabola (più generalmente, da un polinomio di grado superiore a uno), la linearizzazione è consentita solamente qualora le variazioni del segnale siano piccole cioè rispettino i limiti di validità della formula di TAYLOR, che approssima la caratteristica. In questo caso gli intervalli  $[v^{sup} - v^{inf}]$  e  $[i^{sup} - i^{inf}]$  devono essere piuttosto piccoli. ■

FIG. CARATTERISTICHE DI UN BIPOLO ADIN., T-INV. E NONL. CON ANDAMENTO LINEARE A TRATTI E PARABOLICO.

### 5.3.4 Situazioni con segnali lenti

Assumiamo che il dominio costitutivo originario  $\mathcal{X}$  di un componente sia ridotto al sottodominio  $\mathcal{X}^{lem}$  perché le tensioni  $v(t)$  e correnti  $i(t)$  variano lentamente (cioè le loro derivate temporali sono piccole) :

$$\mathcal{X}^{lem} \equiv \{v(t)^T, i(t)^T \in \mathcal{X} \mid \dot{v}(t) \simeq 0, \dot{i}(t) \simeq 0, \dots, \ddot{v}(t) \simeq 0, \ddot{i}(t) \simeq 0, \dots\}$$

Le derivate temporali  $\dot{v}(t)$ ,  $\dot{i}(t)$ ,  $\dots$ ,  $\ddot{v}(t)$ ,  $\ddot{i}(t)$ ,  $\dots$  presenti nella caratteristica dinamica, possono essere trascurate. In un certo senso, la caratteristica dinamica degenera in una adinamica, in quanto l'azione dell'operatore derivata svanisce.

$$\forall [v(t)^T, i(t)^T] \in \mathcal{X}^{lem} \implies f^{ND}[v(t), i(t), t] \simeq f^{NL}[v(t), i(t), t]$$

**Commento :** L'affermazione che una tensione e/o corrente sia lenta quando le sue derivate sono trascurabili è piuttosto vaga. Occorrerebbe dare una definizione più rigorosa, che a questo punto del corso risulterebbe inutilmente pesante. Il tutto risulterà più chiaro quando si parlerà dei componenti tempo-varianti e dinamici (vedere CCap. 14, 15, ...). ■

### 5.3.5 Situazioni di lunga durata

Il fatto che i componenti fisici debbano essere descritti da relazioni tempo-varianti può dipendere da :

- Essi vengono appositamente costruiti tempo-varianti, per esempio, sorgenti sim-soldati, interruptori, ... : essi devono essere considerati, necessariamente, tempo-varianti e non possono essere rimpiazzati da modelli tempo-invarianti, eccetto il caso in cui si intenda fare un'analisi di durata sufficientemente breve.
- Essi sono non appositamente tempo-varianti a causa dell'invecchiamento, variazioni delle condizioni ambientali (temperatura, pressione e umidità) : essi possono in genere essere considerati tempo-invarianti se la vita prevista del componente non è troppo lunga, ovvero se l'analisi del componente viene svolta per tempi non troppo lunghi, ovvero se le condizioni ambientali rimangono costanti.

5.3.6 Conclusioni sulle relazioni costitutive dei componenti fisici

Da quanto detto nei precedenti paragrafi, possiamo trarre le seguenti conclusioni interessanti, benché un po' vaghe :

- In principio, ogni componente fisico ha un comportamento dinamico tempo-variante e nonlineare, qualora esso operi con situazioni elettriche più generali possibili.
- Qualsiasi componente fisico soggetto a tensioni e/o correnti  $x(t) \equiv [v(t)^T \ i(t)^T]^T$  sufficientemente rapide deve essere descritto da relazioni costitutive dinamiche. Infatti, se consideriamo le equazioni di MAXWELL nella forma differenziale, vi sono presenti derivate temporali di grandezze elettriche/magnetiche (campo elettrico e campo magnetico), che non possono essere trascurate.
- Qualsiasi componente fisico, se soggetto a una situazione elettrica  $x(t) \equiv [v(t)^T \ i(t)^T]^T$  con escursioni sufficientemente ampie, deve necessariamente essere considerato non-lineare. Questo è dovuto alle proprietà fisiche dei materiali che costituiscono il componente fisico. La linearità della materia fisica, di cui sono costituiti i componenti fisici, non è più valida qualora le grandezze fisiche abbiano variazioni sufficientemente ampie.

- Qualsiasi componente fisico, esaminato per un intervallo di tempo sufficientemente lungo, deve essere considerato tempo-variante in seguito all'invecchiamento e/o deterioramento dei componenti fisici e al cambiamento delle condizioni ambientali (temperatura, umidità).

In pratica, l'insieme dei vettori  $x(t) \equiv [v(t)^T \ i(t)^T]^T$  che coinvolgono un componente fisico all'interno di un circuito di un dato gruppo è solo un sottodominio del dominio originario del componente. Dall'esame di questo sottosistema, in caso favorevole si può pervenire alla conclusione che un componente fisico può essere considerato dinamico e/o lineare e/o tempo-invariante con buona approssimazione. Le tre precedenti semplificazioni possono essere valide (simultaneamente) per lo stesso componente. Comunque, in caso di dubbio (invero molto frequente) sulla validità delle semplificazioni adottate, è doveroso verificare a posteriori che il componente operi all'interno del sottodominio ipotizzato, che ha consentito le semplificazioni.

5.4 ANALISI DI CIRCUITI

Questa sezione considera in termini molto generali e astratti il problema dell'analisi dei circuiti. Queste analisi sono basate sulla costruzione di sistemi di equazioni partendo dalle Leggi di KIRCHHOFF e dalle relazioni costitutive dei componenti.

5.4.1 Classificazione dei circuiti

*Definizioni* : Le tre diverse classificazioni dei componenti e le otto corrispondenti classi si estendono ai circuiti in modo immediato :

1. Un circuito è detto *adattivo* se tutti i suoi componenti sono dinamici; altrimenti, esso è detto *statico*.

2. Un circuito è detto *tempo-invariante* se tutti i suoi componenti sono tempo-invarianti; altrimenti, esso è detto *tempo-variante*.
3. Un circuito è detto *lineare* se tutti i suoi componenti sono lineari; altrimenti, esso è detto *nonlineare*.

*Terminologia* : In accordo alla teoria dei sistemi, molto spesso si usa il termine *autonomo* per indicare un circuito dinamico, tempo-invariante, sia lineare sia nonlineare.

*Commento* : Un circuito con componenti dinamici, tempo-varianti e lineari e componenti dinamici, tempo-invarianti e nonlineari è dinamico, tempo-variante e nonlineare, benché esso non contenga alcun componente che sia, nello stesso tempo, dinamico, tempo-variante e nonlineare.

*Commento* : Un circuito con due soli componenti nonlineari può essere ancora considerato lineare qualora le nonlinearietà dei due componenti si compensino tra loro. Esempio due diodi ideali contrapposti in serie ovvero in parallelo. Le stesse considerazioni possono valere per circuiti apparentemente dinamici. Comunque, casi di questo tipo sono molto particolari e di scarso interesse pratico e nel seguito si assumerà di averli individuati ed eliminati prima di affrontarne lo studio.

5.4.2 Rappresentazioni unificate

I componenti presenti in un circuito possono essere visti formalmente come un unico componente con un numero di porte uguale al numero di rami  $m$  del grafo. Assumiamo che il circuito sia formato da  $K$  componenti ciascuno dei quali abbia  $m_k$  porte ( $k = 1, 2, \dots, K$ ). L'insieme delle rappresentazioni implicite o esplicite dei  $K$  componenti possono essere viste come un unico sistema (sottodeterminato) di  $m$  equazioni in  $2m$  incognite :

$$\begin{cases} f_1^{N^D} [v^{(1)}(t), i^{(1)}(t), t] = 0 & f_1^{N^D} : \mathcal{R}^{2m_1+1} \rightarrow \mathcal{R}^{m_1} \\ f_2^{N^D} [v^{(2)}(t), i^{(2)}(t), t] = 0 & f_2^{N^D} : \mathcal{R}^{2m_2+1} \rightarrow \mathcal{R}^{m_2} \\ \vdots \\ f_K^{N^D} [v^{(K)}(t), i^{(K)}(t), t] = 0 & f_K^{N^D} : \mathcal{R}^{2m_K+1} \rightarrow \mathcal{R}^{m_K} \end{cases} \implies \underbrace{f^{N^D} [v(t), i(t), t]}_{f^{N^D} : \mathcal{R}^{2m+1} \rightarrow \mathcal{R}^m} = 0$$

dove  $v(t) = [v^{(1)}(t)^T \ v^{(2)}(t)^T \ \dots \ v^{(K)}(t)^T]^T$  e  $i(t) = [i^{(1)}(t)^T \ i^{(2)}(t)^T \ \dots \ i^{(K)}(t)^T]^T$  e con  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_K$

*Definizione* : Questo sistema sottodeterminato viene chiamato *rappresentazione unificata* (implicita o esplicita) di tutti i componenti.

*Commento* : Rispetto a un generico sistema con lo stesso numero di equazioni e incognite, la struttura di questo sistema unificato di equazioni "ricorda" la sua origine, in quanto esso è formato dal semplice *collego* di sistemi di dimensioni più piccole, ciascuno caratterizzato da specifiche incognite non condivise dagli altri.

*Componente complementare formato da c.c. e c.a.* : Un circuito può essere scomposto in due  $m$ -porte complementari : il primo ha  $m$  porte proprie ed è descritto dalla suddetta rappresentazione unificata, mentre il secondo risulta formato da c.c. e/o c.a. e descrive la topologia del circuito. La sue relazioni costitutive sono ottenute direttamente

dalle due leggi di КИРЧНОВ :

$$\begin{bmatrix} B \\ 0_{n-1,m} \end{bmatrix} v(t) + \begin{bmatrix} 0_{m-n+1,m} \\ A \end{bmatrix} i(t) = 0_m$$

FIG. SCOMPOSIZIONE DEL CIRCUITO NEL COMPONENTE UNIFICATO  
E NEL COMPONENTE COMPLEMENTARE FORMATO DA C. C. E C. A.

### 5.4.3 Sistema di equazioni risolutive

Nel paragrafo precedente abbiamo costruito un sistema di equazioni basato sulla scomposizione del circuito in due  $m$ -porte complementari, uno che tiene conto delle relazioni costitutive di tutti i componenti e l'altro della topologia del circuito stesso. Quest'ultimo richiede la conoscenza delle matrici di una base di maglie  $B$  e di una base di tagli  $A$ . Qui viene introdotto un diverso metodo per l'analisi di un circuito qualsiasi : esso richiede solamente il calcolo della matrice incidenza ed è qui chiamato *metodo totale*, conosciuto come *sparse tableau method* nella letteratura anglosassone. La sua formulazione è la più naturale tra tutte quelle possibili in quanto consiste in un banale "collage" delle equazioni topologiche e di quelle costitutive :

- Costruire il grato orientato del circuito e scegliere il nodo di riferimento.
- Costruire la matrice incidenza  $A$  di dimensioni  $(n-1) \times m$  (vedere Cap. 3).
- Introdurre il vettore delle incognite  $[v^{mod}(t)]^T [v(t)]^T [i(t)]^T$  per un totale di  $2m+n-1$ .
- Scrivere la Legge di КИРЧНОВ delle tensioni esprimendo le tensioni di ramo  $v(t)$  in funzione di quelle di nodo  $v^{mod}(t)$  per mezzo della matrice  $A : v(t) = A^T v^{mod}(t)$  (vedere Cap. 4).
- Scrivere la Legge di КИРЧНОВ delle correnti annullando la divergenza delle correnti di ramo  $i(t)$  in  $n-1$  tagli nodali per mezzo della matrice  $A : A i(t) = 0_{n-1}$  (vedere Cap. 4).
- Scrivere le relazioni costitutive dei componenti in forma unificata :  $f^{MD}[v(t), i(t), t] = 0_m$  dove  $f^{MD} : \mathbb{R}^{2m+n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

A questo punto possiamo riunire i tre gruppi di equazioni in un unico sistema :

$$\begin{cases} v(t) = A^T v^{mod}(t) & (m \text{ equazioni scalari}) \\ A i(t) = 0_{n-1} & (n-1 \text{ equazioni scalari}) \\ f^{MD}[v(t), i(t), t] = 0_m & (m \text{ equazioni scalari}) \end{cases}$$

in cui il numero totale di equazioni  $2m+n-1$  eguaglia il numero di incognite.

*Commento* : Questo sistema sarà differenziale o nondifferenziale, tempo-variante o tempo-invariante e nonlineare o lineare a seconda delle classi dei componenti facenti parte del circuito e le cui rappresentazioni sono incluse nella rappresentazione unificata  $f^{MD}[v(t), i(t), t] = 0_m$ . La soluzione di questo sistema sarà esaminata nel Cap. 11 per i circuiti dinamici e nel Cap. 19 per i circuiti dinamici. ■

## 5.5 ANALISI DI COMPONENTI COMPOSITI

Questa sezione considera in termini molto generali e astratti il problema dell'analisi dei componenti composti. Queste analisi sono basate sulla costruzione di sistemi di equazioni sottodeterminati partendo dalle Leggi di КИРЧНОВ e dalle relazioni costitutive dei componenti.

### 5.5.1 Classificazione dei componenti composti

Le tre diverse classificazioni dei componenti e le otto corrispondenti classi valgono anche per i componenti composti. Dal momento che un componente composto è costituito dalla aggregazione di componenti più semplici, occorre tener presente la seguente osservazione. Un componente composto da componenti dinamici, tempo-varianti e nonlineari, non è necessariamente dinamico, tempo-variante e nonlineare. Per esempio, un componente fisico che realizza una sorgente impressiva di tensione tempo-variante (generatore di forme d'onda) è in genere composto al suo interno da componenti dinamici, tempo-varianti e nonlineari. Infatti noi consideriamo solamente le grandezze alle porte accessibili del componente composto. Per esempio, un bipolo composto la cui porta d'accesso coincide con la porta pilotata di una sorgente pilotata, è dinamico, tempo-variante e lineare, anche se contiene al suo interno componenti dinamici e nonlineari. ■

*Confronto di componenti* : L'eguaglianza ovvero l'equivalenza tra due componenti presuppongono che essi siano dotati dello stesso numero di terminali e di porte. Se due componenti composti hanno la stessa struttura topologica interna e i componenti aggregati hanno le stesse caratteristiche essi sono (ovviamente) uguali ovvero essi hanno lo stesso modello : ■

*Definizione* : Due componenti, di cui almeno uno composto, con diversa struttura interna e/o diverse caratteristiche dei componenti aggregati, possono presentare le stesse relazioni costitutive. In questo caso essi sono detti *equivalenti*. ■

I concetti di analisi e sintesi sono molto usati :

*Definizione* : L'*analisi di un componente composto* significa calcolare le sue relazioni costitutive a partire da quelle dei componenti da cui è costituito. ■



**Definizione :** La sintesi di un componente (equivalentemente progetto, realizzazione), di cui siano assegnate le relazioni costitutive, significa trovare un componente composto formato da componenti più semplici (ovvero fisicamente esistenti) che sia equivalente a quello dato, cioè con le relazioni costitutive uguali a quelle assegnate. ■

### 5.5.2 Analisi del componente composto

Il calcolo delle relazioni costitutive di un componente composto, una volta note quelle dei componenti aggregati, è un problema affrontato molto frequentemente : per esempio per semplificare una parte dei circuiti piuttosto complessi prima di cominciare l'analisi del circuito completo.

L'analisi di un qualsiasi  $k$ -porta composto corrisponde all'analisi di un circuito incompleto, nel senso che il  $k$ -porta può essere visto come un circuito in cui sono presenti  $k$  bipoli, uno per ciascuna porta, la cui tensioni e correnti non sono soggette ad alcun vincolo. In altre parole, questi  $k$  bipoli possono essere considerati come  $k$  noratori, i quali hanno un dominio costitutivo che comprende quello di qualsiasi altro bipolo (vedere Sez. 6.1).

WWWWWW?? I noratori saranno introdotti nella Sez. 6.1. ???WWWWWW

L'insieme dei  $k$  noratori costituisce il  $k$ -porta  $C_k^c$  complementare di  $C_k^e$ . La presenza di questi  $k$  noratori (in esubero rispetto ai nullatori) rende patologico il circuito, in quanto esso è descritto da un sistema sottodeterminato di equazioni.

L'analisi del dominio costitutivo di  $C_k^e$  viene ricondotta alla ricerca delle soluzioni, in genere in numero infinito, del circuito patologico  $\{C_k^e, C_k^c\}$ .

#### *Distinzione grafica tra circuito e componente composto :*

In un circuito sono presenti solamente le porte dei componenti di cui esso è costituito, mentre in un componente composto sono presenti anche le porte del componente composto stesso assieme a quelle dei componenti aggregati. Per evidenziare queste porte conviene rappresentare i nodi accessibili tra cui sono definite le porte con circoletti con interno bianco per distinguerli dai circoletti neri che rappresentano in nodi interni (non accessibili) al componente composto. Inoltre accanto a queste porte vengono indicate le tensioni e correnti delle porte stesse.

Fig. CONFRONTO DEL DISEGNO DI UN COMPONENTE COMPOSITO E DI UN CIRCUITO

### 5.5.3 Costruzione del sistema sottodeterminato

Ora costruiamo un sistema sottodeterminato di equazioni che definisce il dominio costitutivo del  $k$ -porta :

- Costruire il grafo orientato, introducendo un ramo per ogni porta dei componenti aggregati (sottoinsieme  $\mathcal{R}^a$  di  $m - k$  rami) e un ramo per ogni porta del  $k$ -porta

composito (sottoinsieme  $\mathcal{R}^b$  di  $k$  rami) per un totale di  $m$  rami. Scegliamo il nodo di riferimento del grafo.

- Costruire la matrice incidenza  $A = [A^a \ A^b]$  di dimensioni  $(n - 1) \times m$  in cui la sottomatrice  $A^a$  di dimensioni  $(n - 1) \times (m - k)$  contiene le colonne dei rami  $\in \mathcal{R}^a$  e la sottomatrice  $A^b$  di dimensioni  $(n - 1) \times k$  contiene le colonne dei rami  $\in \mathcal{R}^b$ .

- Introdurre il vettore delle incognite  $\begin{bmatrix} v^{\text{mod}}(t) \\ v^a(t) \\ v^b(t) \\ i^a(t) \\ i^b(t) \end{bmatrix}^T$  per un totale di  $2m + n - 1$ . Anche in questo caso gli apici "a" e "b" distinguono le tensioni e correnti dei rami  $\in \mathcal{R}^a$  e  $\in \mathcal{R}^b$ .

- Scrivere la legge di Kirchhoff delle tensioni :  $[v^a(t)]^T [v^b(t)]^T$  in funzione di quelle di nodo  $v^{\text{mod}}(t)$  per mezzo della matrice incidenza :

$$v^a(t) = [A^a]^T v^{\text{mod}}(t) \quad , \quad v^b(t) = [A^b]^T v^{\text{mod}}(t)$$

- Scrivere la Legge di Kirchhoff delle correnti, annullando la divergenza delle correnti  $[i^a(t)]^T [i^b(t)]^T$  in  $n - 1$  tagli nodali tramite la matrice incidenza :

$$A^a i^a(t) + A^b i^b(t) = 0_{n-1}$$

- Scrivere le relazioni costitutive dei componenti aggregati all'interno del componente composto riunendole in una rappresentazione unificata :

$$f^{MD} [v^a(t), i^a(t), t] = 0_{m-k} \quad \text{dove} \quad f^{MD} : \mathbb{R}^{2(m-k)+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$$

A questo punto possiamo riunire i tre gruppi di equazioni in un unico sistema :

$$\begin{cases} [[v^a(t)]^T & [v^b(t)]^T]^T = [A^a & A^b]^T v^{\text{mod}}(t) & (m \text{ equazioni scalari}) \\ A^a i^a(t) + A^b i^b(t) = 0_{n-1} & (n - 1 \text{ equazioni scalari}) \\ f^{MD} [v^a(t), i^a(t), t] = 0_{m-k} & (m - k \text{ equazioni scalari}) \end{cases}$$

Il numero totale di equazioni  $2m - k + n - 1$  è inferiore al numero di incognite. Quindi il sistema è sottodeterminato con  $k$  incognite in eccesso.

**Proprietà :** La proiezione nel sottospazio delle  $2k$  variabili alle porte di  $C_k^e$  dell'insieme delle soluzioni del suddetto sistema sottodeterminato definisce le  $k$  relazioni costitutive ovvero il dominio costitutivo di  $C_k^e$ .

**Commento :** Questa proiezione corrisponde alla eliminazione dal sistema delle grandezze interne al componente composto contenute nei vettori incogniti  $v^{\text{mod}}(t)$ ,  $v^a(t)$  e  $i^a(t)$  e alla eliminazione di un corrispondente numero di equazioni scalari. Si ottiene un sistema di  $k$  equazioni nei vettori incogniti  $v^b(t)$  e  $i^b(t)$ , per un total di  $2k$  incognite scalari. Queste equazioni sono proprio le relazioni costitutive del  $k$ -porta composto. ■

### 5.6 TEOREMA DI SOSTITUZIONE

Questa sezione tratta del Teorema di Sostituzione, conosciuto anche come Principio di Sostituzione. Esso è molto importante dal punto di vista concettuale, piuttosto che da quello applicativo. Per la sua introduzione è necessario anticipare in questa sezione la presentazione di due bipoli specifici detti sorgenti impresse, che verranno introdotti in modo formale nella Sez. 7.2 (sorgenti impresse tempo-invarianti) e nella Sez. 14.1 (sorgenti impresse tempo-varianti).

#### 5.6.1 Sorgenti impresse

Le sorgenti impresse sono bipoli dinamici, lineari, sia tempo-invarianti sia tempo-varianti. Un bipolo è detto *impresso* se la sua relazione costitutiva coinvolge solo la tensione o solo la corrente e l'altra grandezza è non vincolata. Conseguentemente, la grandezza coinvolta coincide con una funzione del tempo assegnata (eventualmente coincidente con una costante), che prende il nome, rispettivamente, di tensione o corrente impressa, come risulta dal quadro :

bipolo	relazione costitutiva	grandezza impressa	simbolo circuitale
<i>sorgente di tensione</i> (sVI)	$v(t) = \hat{v}(t)$ $i(t)$ nonvincolata	$\hat{v}(t)$ tensione impressa	
<i>sorgente di corrente</i> (sII)	$i(t) = \hat{i}(t)$ $v(t)$ nonvincolata	$\hat{i}(t)$ corrente impressa	

Se la grandezza impressa  $\hat{v}(t)$  ovvero  $\hat{i}(t)$  è costante rispetto al tempo, siamo in presenza di una sorgente *tempo-invariante* (costante), altrimenti di una sorgente *impressa tempo-variante*.

#### 5.6.2 Circuito originario

Consideriamo un circuito qualsiasi, in seguito chiamato *circuito originario*, costituito in genere da componenti dinamici, tempo-varianti e nonlineari :

- Il circuito originario sia scomposto in due  $k$ -porte complementari  $\{C_k^a, C_k^b\}$ . Per le  $k$  tensioni e  $k$  correnti comuni alle porte di  $C_k^a$  e  $C_k^b$  vengono adottate, rispettivamente, la convenzione normale e quella nonnormale.
- Le tensioni e correnti  $x(t)$  alle porte vengono suddivise in due sottovettori  $x(t) = [x^a(t)^T \ x^b(t)^T]^T$ , ciascuno di dimensione  $k$ , in modo che la tensione e la corrente di ciascuna delle  $k$  porte non siano collocate nello stesso sottovettore.
- Le relazioni costitutive e i rispettivi domini costitutivi di  $C_k^a$  e  $C_k^b$  siano :  

$$C_k^a : \mathcal{X}^a \equiv \{x^a(t) \mid f_a^{NP}[x^a(t), t] = 0_k\}$$

$$C_k^b : \mathcal{X}^b \equiv \{x^b(t) \mid f_b^{NP}[x^b(t), t] = 0_k\}$$

Se  $x(t) = [[x^a(t)]^T \ [x^b(t)]^T]^T \in \mathcal{X}^a \cap \mathcal{X}^b$  è una soluzione del circuito originario  $\{C_k^a, C_k^b\}$ , abbiamo

$$f_a^{NP}[x^a(t), x^b(t), t] = 0_k \quad , \quad f_b^{NP}[x^a(t), x^b(t), t] = 0_k$$

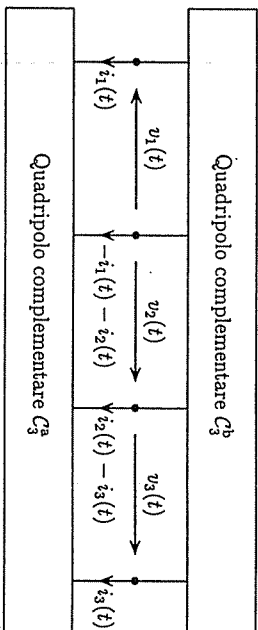


FIG. CIRCUITO COSTRUITO DA DUE QUADRIPOLI COMPLEMENTARI

#### 5.6.3 Circuito modificato

Partendo dal circuito originario  $\{C_k^a, C_k^b\}$ , possiamo creare un nuovo circuito, detto in seguito *circuito modificato*, nel modo seguente :  
 Sostituiamo il componente  $C_k^a$  con un nuovo componente  $C_k^c$  costituito da  $k$  sorgenti impresse : ogni porta di  $C_k^c$  viene sostituita da una sorgente impressa, la cui grandezza impressa sia coincidente con la corrispondente grandezza nel vettore  $x_k^b(t)$ . Quindi le relazioni costitutive di  $C_k^c$  assumono la forma :

$$C_k^c : \mathcal{X}^c \equiv \{x^a(t) \mid x^b(t) = \hat{x}^b(t) = x_k^b(t)\} \text{ con } x^a(t) \text{ nonvincolato}$$

**Proprietà:** La soluzione  $x_k(t) = [[x_k^a(t)]^T \ [x_k^b(t)]^T]^T$  del circuito originario è una soluzione del circuito modificato  $\{C_k^c, C_k^b\}$ .

**Prova:** Si può facilmente verificare che  $x_k(t) = [[x_k^a(t)]^T \ [x_k^b(t)]^T]^T$  verifica le relazioni costitutive di  $C_k^c$  per ipotesi e quelle di  $C_k^b$  per il modo con cui esso è stato costruito.

**Commenti:** Non si può escludere che sia il circuito originario sia quello modificato abbiano altre soluzioni oltre a quella qui considerata : queste eventuali soluzioni non saranno più comuni, in genere, a entrambi i circuiti.

**Avertenza:** Il fatto che i due circuiti abbiano una soluzione in comune significa che i domini costitutivi  $\mathcal{X}^c$  e  $\mathcal{X}^b$  di  $C_k^c$  e  $C_k^b$  hanno una situazione elettrica in comune. In genere, i due domini costitutivi  $\mathcal{X}^c$  e  $\mathcal{X}^b$  non sono affatto coincidenti e i componenti  $C_k^c$  e  $C_k^b$  non sono affatto tra loro equivalenti. Infatti due componenti sono equivalenti se e solo se tutte le soluzioni di un componente sono anche soluzioni dell'altro e viceversa, cioè se i due domini costitutivi sono coincidenti.

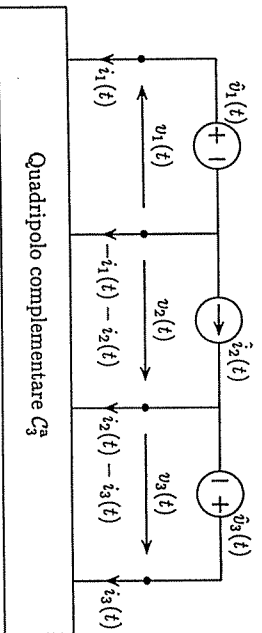


FIG. CIRCUITO MODIFICATO

5.6.4 Enunciato del teorema

Aggiungiamo due ulteriori ipotesi riguardanti il circuito originario :

**Ipotesi :** La soluzione  $x_a(t) = [[x_a^a(t)]^T \ x_a^b(t)]^T$  del circuito originario  $\{\{C_a^a, C_a^b\}\}$  sia unica e il componente  $C_a^b$  sia controllabile in  $x^b(t)$ , cioè vi sia un solo vettore  $x^a(t)$  per ciascun valore del vettore  $x^b(t)$  nelle relazioni costitutive  $f_a^a[x^a(t), x^b(t), t] = 0$ .

**Teorema :** Con le suddette ipotesi anche il circuito modificato  $\{\{C_a^a, C_a^b\}\}$  ha un'unica soluzione e questa soluzione coincide con quella del circuito originario.

**Prova :** L'ipotesi sulla controllabilità di  $C_a^b$  da parte di  $x^b(t)$  ci garantisce un'unica soluzione per il circuito modificato. La coincidenza viene garantita dalla proprietà discussa nel precedente paragrafo.

5.7 POTENZA E LAVORO EFFETTIVI

La potenza e il lavoro virtuali erano stati introdotti nel Cap. 2. Dal momento che nel Cap. 5 sono state introdotte le relazioni costitutive dei componenti, conosciamo i vincoli tra le tensioni e correnti dello stesso componente. Conseguentemente, siamo in grado di introdurre la potenza e il lavoro effettivi. Come in tutti i campi della fisica e dell'ingegneria, questi concetti sono indispensabili per analizzare gli aspetti energetici dei fenomeni che si sviluppano nei circuiti fisici. In questo ambito sono enunciati il teorema e il corollario sia della potenza effettiva sia del lavoro effettivo.

5.7.1 Dalla potenza e lavoro virtuali alla potenza e lavoro effettivi

La potenza virtuale assorbita in un componente  $p^{vir}(t) = v(t)^T i(t) = i(t)^T v(t)$  è stata introdotta nei CCap. 2 e 4 senza prendere in considerazione possibili vincoli tra i vettori delle tensioni  $v(t)$  e delle correnti  $i(t)$  alle porte del componente stesso.

**Definizione :** La potenza virtuale  $p^{vir}(t)$  assorbita o erogata da un componente diventa la **potenza effettiva**  $p^{eff}(t)$  assorbita o erogata dal componente medesimo, nel caso in cui i vettori  $v(t)$  e  $i(t)$  soddisfino alle relazioni costitutive (vedere SSer. 5.1-3) del componente stesso :

$$p^{eff}(t) = p^{vir}(t) = v(t)^T i(t) = i(t)^T v(t) \text{ dove } [v(t)^T \ i(t)^T]^T \in \mathcal{X}$$

**Commento :** Se  $[v(t)^T \ i(t)^T]^T$  dipende dal tempo anche la potenza effettiva dipenderà in genere dal tempo  $t$ . Quando si vuole sottolineare la dipendenza dal tempo, viene spesso usato il termine **potenza istantanea**.

**Definizione :** Il **lavoro elettrico (effettivo)**  $w^{eff}(t)$  in un componente, per un dato intervallo di tempo, viene definito dall'integrale della potenza (effettiva)  $p^{eff}(t)$  sopra l'intervallo di tempo considerato :

$$w^{eff}(t) = \int_{t_0}^t p^{eff}(\tau) d\tau$$

**Terminologia :** L'aggettivo "effettivo", momentaneamente introdotto per distinguere sia la potenza sia il lavoro effettivi da quelli virtuali, sarà tralasciato nei prossimi capitoli, eccetto in casi di possibile ambiguità. Analogamente anche i simboli matematici  $p^{eff}(t)$  e  $w^{eff}(t)$  saranno sostituiti dai più semplici  $p(t)$  e  $w(t)$ .

**Unità di misura :** La potenza effettiva viene misurata in watt [W], mentre il lavoro effettivo e l'energia vengono misurati in joule [J].

5.7.2 Teorema e corollario della potenza e del lavoro effettivi

Tutte le proprietà già viste per la potenza e il lavoro virtuali (vedere Cap. 2) valgono necessariamente anche per la potenza e il lavoro effettivi, dal momento che da un punto di vista matematico questi ultimi sono un caso particolare dei primi. Qui di seguito, enunciamo i teoremi e i corollari della potenza e del lavoro effettivi :

**Teorema della potenza e del lavoro effettivi :** Sia dato un circuito costituito da  $K$  componenti  $\{C^1, C^2, \dots, C^K\}$  : la somma sia delle potenze effettive  $p_k(t)$  sia dei lavori effettivi  $w_k(t)$  estesa a tutti i componenti del circuito è identicamente nulla :

$$\sum_{k=1}^K p_k(t) = 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^K w_k(t) = 0$$

**Corollario della potenza e del lavoro effettivi :** Sia dato il componente composito  $C^a \equiv \{C^1, C^2, \dots, C^{K^a}\}$  : sia la potenza effettiva  $p_a(t)$  sia il lavoro effettivo  $w_a(t)$  in  $C^a$  sono uguali alla somma, rispettivamente, delle potenze effettive  $p_k(t)$  e dei lavori effettivi  $w_k(t)$  nei  $K^a$  componenti aggregati in  $C^a$  :

$$p_a(t) = \sum_{k=1}^{K^a} p_k(t) \quad , \quad w_a(t) = \sum_{k=1}^{K^a} w_k(t)$$

**Conclusioni :** Per il momento non ci soffermiamo ulteriormente sulla potenza e sul lavoro effettivi, dal momento che le espressioni di queste grandezze dipendono dalle relazioni costitutive del componente. Quindi l'approfondimento viene rinviato al momento in cui discuteremo le relazioni costitutive delle diverse classi di componenti.

La potenza e il lavoro effettivi dei componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari saranno trattati nel Cap. 7 (per i bipoli); nel Cap. 8 (per i generici  $k$ -porte) e nel Cap. 9 (per i doppi bipoli). La potenza effettiva e il lavoro effettivi dei componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari saranno trattati nei CCap. 15 e 16.

fine del capitolo 5

# 6 INTERAZIONE tra TOPOLOGIA e RELAZIONI COSTITUTIVE

## 6.1 INTERAZIONE DI BIPOLI CON LA TOPOLOGIA

Le relazioni topologiche (cioè le Leggi di Kirchhoff formulate nei CCap. 2 e 4) e le relazioni costitutive (discusse nelle Sez. 5.1-3) danno origine a due sottosistemi di equazioni, che congiuntamente costituiscono un modello matematico completo, in genere, del circuito. In casi particolari ma di interesse, la natura topologica oppure costitutiva di qualcuna delle equazioni del sistema completo può non risultare evidente: le relazioni costitutive di alcuni specifici bipoli possono essere confuse con quelle topologiche e, conseguentemente, alterare il grato. Tra questi bipoli spiccano il *corto circuito*, il *circuito aperto*, il *nullatore* e il *noratore*.

### 6.1.1 Bipoli interagenti con la topologia

Tra i bipoli, la cui relazione costitutiva può essere confusa con un'equazione topologica spiccano due bipoli dinamici, tempo-invarianti e lineari chiamati:

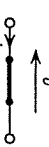
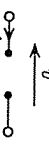


**Corto circuito e circuito aperto:** il *corto circuito* (c.c.) e il *circuito aperto* (c.a.) sono caratterizzati da una grandezza identicamente nulla, mentre la restante è *nonvincolata*. Notare che, nonostante il loro nome, entrambi sono bipoli non circuiti.

**Definizione:** Una tensione ovvero corrente di un qualsiasi componente è detta *nonvincolata* qualora essa non risulti coinvolta nelle relazioni costitutive.

**Commento:** Quando il componente è inserito in un circuito, la suddetta grandezza nonvincolata viene, in genere, univocamente determinata dalla parte restante del circuito stesso.

**Nullatore e noratore:** Vengono introdotti altri due bipoli, meno popolari del c.c. e del c.a., dal momento che non costituiscono modelli di bipoli fisici. Comunque essi sono introdotti per le loro proprietà concettuali: Il *nullatore* è caratterizzato da due vincoli "sia la tensione sia la corrente sono nulle" e il *noratore* è caratterizzato dal fatto di non essere soggetto ad alcun vincolo "sia la tensione sia la corrente sono nonvincolate". Entrambi sono "patologici" dal momento che essi violano l'ipotesi che ogni bipolo sia caratterizzato da una e una sola equazione (vincolo).

La seguente tabella confronta le relazioni costitutive dei suddetti quattro bipoli:

bipolo acronimo	bipoli non-patologici		bipoli patologici	
	corto circuito c.c.	circuito aperto c.a.	nullatore	noratore
relazione costitutiva	$v(t) = 0$	$i(t) = 0$	$\begin{cases} v(t) = 0 \\ i(t) = 0 \end{cases}$	$v(t)$ nonvincolata $i(t)$ nonvincolata
interazione topologica	fusione di due nodi	rimozione di un ramo	vedere la discussione nel paragrafo successivo	
simbolo circuitale				

WWWWWW??? INSERIRE come emblema una sequenza di tre figure con un grato di bipoli generici (1) di cui alcuni diventano c.c. e c.a. (2) e che semplifcano il grato stesso (3). IDEM per grati di multipoli ???WWWWWW

Questo capitolo considera l'interazione che specifiche relazioni costitutive possono avere con la topologia del circuito. Le relazioni topologiche formulate nel Cap. 4 e le relazioni costitutive discusse nel Cap. 5 danno origine a due sottosistemi di equazioni, che congiuntamente costituiscono un modello matematico completo (in genere) del circuito. In casi particolari la natura topologica oppure costitutiva di qualcuna delle equazioni del sistema completo può non risultare evidente: specifiche relazioni costitutive di bipoli e/o multipoli possono confondersi con equazioni topologiche.

**Sez. 6.1 : Interazione di bipoli con la topologia:** Tra i bipoli che interagiscono con la topologia incontriamo il *corto circuito*, il *circuito aperto*, il *nullatore* e il *noratore*. La loro presenza modifica il numero di nodi e/o rami del grato.

**Sez. 6.2 : Interazione di k-poli con la topologia:** L'interazione con la topologia può modificare il numero di porte di un generico k-polo, che in genere risulta  $k - 1$ . In particolare alcune delle  $k - 1$  porte possono diventare *proprie* e/o *improprie* riducendo il numero totale di porte del k-polo rispetto a  $k - 1$ .

**Sez. 6.3 : Doppio bipoli:** I concetti di porta propria e impropria ci suggeriscono di esaminare i *doppi bipoli*, che, come dice il loro nome, sono i componenti descritti da due bipoli fittizi ovvero da due porte. Congiuntamente ai bipoli, essi sono i componenti più usati e di maggior interesse. Essi vengono suddivisi in: *impropri*, *triplari* e *propri*.

**Sez. 6.4 : Invarianza al ribaltamento e direzionalità:** Vengono esaminati i *bipoli bilaterali* la cui relazione costitutiva è invariante rispetto al ribaltamento dei terminali. Vengono esaminati i *doppi bipoli simmetrici* le cui relazioni costitutive sono invarianti rispetto al ribaltamento delle porte. Infine viene definito il concetto di *direzionalità* per i doppi bipoli.

**Sez. 6.5 : Aggregazioni di componenti:** Le aggregazioni più usate di componenti sono esaminate da un punto di vista topologico: connessioni serie, parallelo, "a stella" e "a triangolo" di bipoli; doppio bipolo chiuso su bipolo, connessione trasversale di bipolo e DBT, connessione di bipolo in serie al terminale comune di DBT, connessioni cascate, parallelo e serie di doppi bipoli.

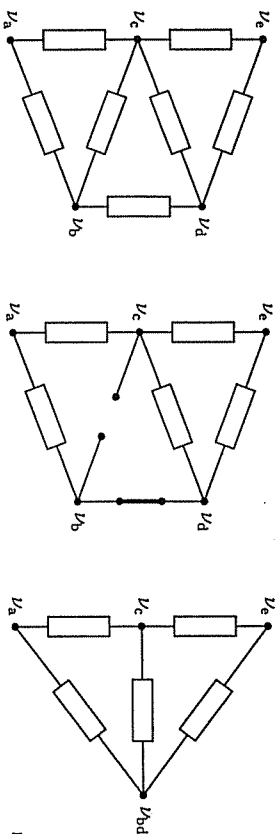
**Commenti :** Un circuito contenente bipoli patologici come il nullatore e il noratore non è necessariamente patologico. I nullatori e i noratori possono essere accettati all'interno di un circuito, purché essi siano presenti nello stesso numero. In questo caso il numero totale di relazioni costitutive del circuito rimane uguale al numero dei rami del circuito, come in un circuito privo di componenti patologici. Nel Cap. 10 verrà introdotto il *nullore*, componente nonpatologico composto da un nullatore e un noratore, il quale è il modello idealizzato di un doppio bipolo fisico molto diffuso: l'*amplificatore operazionale*, con l'invocazione che le opposte patologie del nullatore e del noratore si cancellano.

### 6.1.2 Contrazione del grafo di un circuito

Interpretiamo le relazioni costitutive dei suddetti quattro bipoli come una modifica del grafo originale del circuito. Assumiamo che il bipolo considerato sia rappresentato dal ramo  $v_a$  —  $v_b$  del grafo.

**Fusione di due nodi causata da un corto circuito :** Se il bipolo descritto dal ramo  $v_a$  —  $v_b$  è un corto circuito, i nodi  $v_a$  e  $v_b$  possono essere fusi in un unico nodo. Infatti i loro potenziali  $e_a(t)$  e  $e_b(t)$  sono necessariamente coincidenti e quindi la nullità della somma delle tensioni lungo tutte le maglie che contengono il ramo  $v_a$  —  $v_b$  rimane valida senza alcuna variazione delle stesse. Inoltre la divergenza della corrente nel nodo creato dalla fusione di  $v_a$  e  $v_b$  è nulla dal momento che coincide con la divergenza nel taglio che racchiudeva  $v_a$  e  $v_b$ .

**Esempio A :** Consideriamo il grafo di bipoli riportato nella figura di sinistra: esso è costituito da 5 nodi e 7 rami. Assumendo che il bipolo  $v_b$  —  $v_d$  sia un c.c. e il bipolo  $v_b$  —  $v_c$  sia un c.a. (vedere figura al centro), possiamo fondere i nodi  $v_b$  e  $v_d$  in un unico nodo, che indichiamo con  $v_{bd}$  (vedere figura di destra). Abolendo conseguentemente il ramo  $v_b$  —  $v_d$  e rimuovendo il ramo  $v_b$  —  $v_c$ . Il grafo, originariamente costituito da 5 nodi e 7 rami, si contrae in un grafo costituito da 4 nodi e 5 rami.



**Rimozione di un ramo causata da un circuito aperto :** Se il bipolo descritto dal ramo  $v_a$  —  $v_b$  è un circuito aperto, il ramo  $v_a$  —  $v_b$  può essere rimosso. Infatti le correnti dei rimanenti rami del grafo non vengono alterate, dal momento che la divergenza della corrente in tutti i tagli e che separano i nodi  $v_a$  e  $v_b$  rimane inalterata poiché la corrente nel ramo  $v_a$  —  $v_b$  è nulla. Inoltre le maglie, di cui il ramo  $v_a$  —  $v_b$  faceva parte, rimangono anch'esse soppresse e quindi la legge di Kirchhoff delle tensioni non viene violata.

**Commento :** Sia la fusione di due nodi sia la rimozione di un ramo possono essere interpretate nell'ambito della scomposizione dello spazio fisico in regioni (vedere Sez. 1.4): il fatto che il bipolo corrispondente a una data regione nonquipotenziale (n.p., nocciolo) sia un corto circuito, significa che la suddetta regione apparentemente n.p. era a tutti gli effetti equipotenziale (e.p.). Essa, unitamente alle due regioni e.p. adiacenti, costituisce, a tutti gli effetti, un'unica regione e.p.

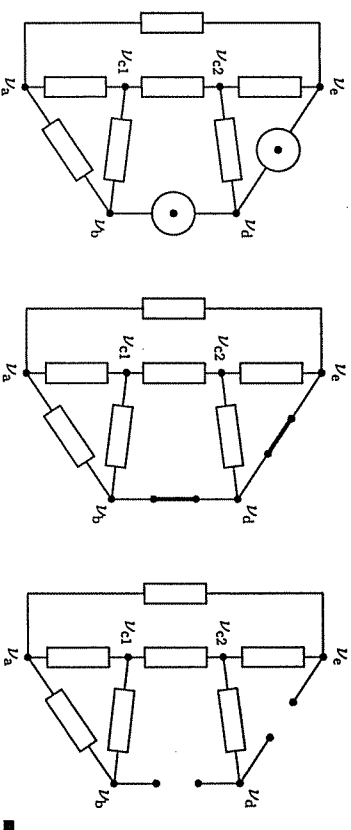
### 6.1.3 Contrazioni del grafo dovute a nullatori e noratori

Anche il nullatore e il noratore danno origine a contrazioni del grafo: ma essi a causa della patologia, danno origine a due contrazioni di tipo diverse, la prima valida esclusivamente per le tensioni e la seconda per le correnti.

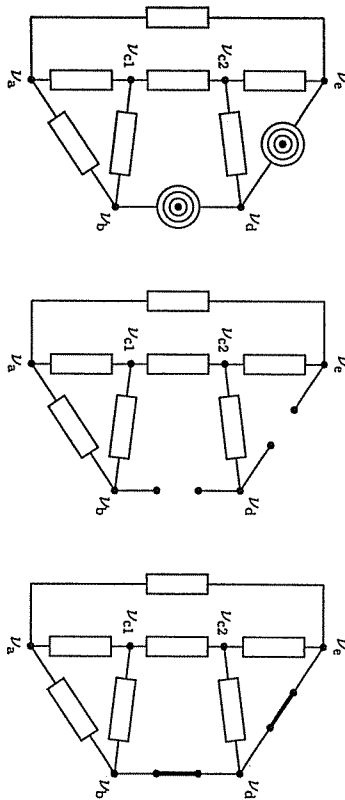
**Nullatore :** Il nullatore da origine a due diverse contrazioni del grafo del circuito. La prima contrazione vale solamente per le tensioni e consiste nella fusione dei nodi tra cui è connesso il nullatore (il nullatore equivale a un c.c.). La seconda contrazione vale solamente per le correnti e consiste nella rimozione del ramo occupato dal nullatore (il nullatore equivale a un c.a.).

**Noratore :** Il noratore da origine a due diverse contrazioni del grafo del circuito. La prima contrazione vale solamente per le tensioni e consiste nella rimozione del ramo occupato dal noratore (il noratore equivale a un c.a.). La seconda contrazione vale solamente per le correnti e consiste nella fusione dei nodi tra cui è connesso il noratore (il noratore equivale a un c.c.).

**Esempio A :** La figura di sinistra riporta il grafo di un circuito costituito da nove bipoli tra cui due nullatori. La figura al centro riporta il grafo contratto valido per le tensioni (i due nullatori sono sostituiti da due c.c.), mentre la figura di destra riporta il grafo contratto valido per le correnti (i due nullatori sono sostituiti da due c.a.):



**Esempio B :** La figura di sinistra riporta il grafo di un circuito costituito da nove bipoli tra cui due noratori. La figura al centro riporta il grafo contratto valido per le tensioni (i due noratori sono sostituiti da due c.a.), mentre la figura di destra riporta il grafo contratto valido per le correnti (i due noratori sono sostituiti da due c.c.) :

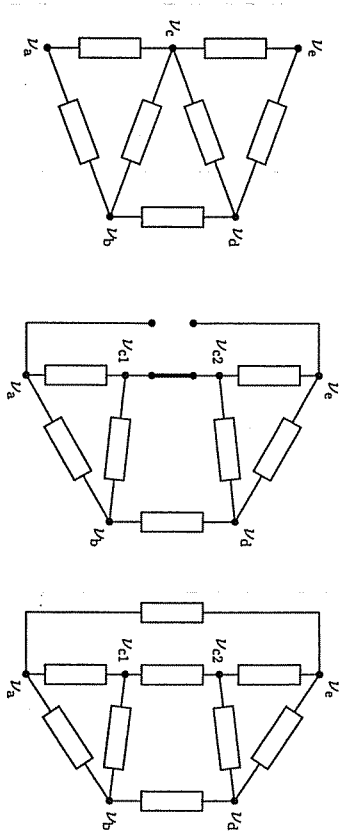


**6.1.4 Circuiti aperti e corto circuiti latenti in un circuito**

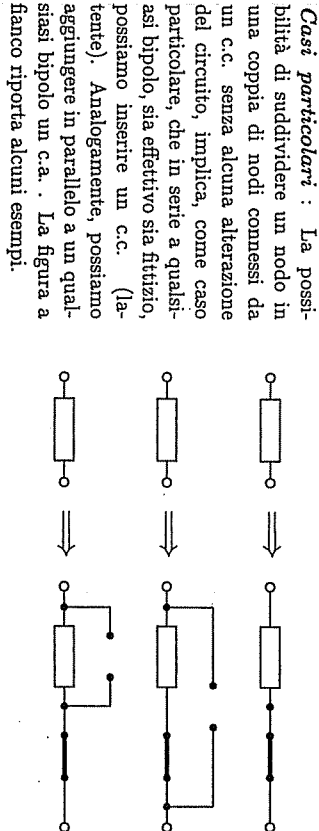
Il grafo di un circuito può essere espanso senza alterare il circuito, eseguendo le operazioni inverse a quelle descritte nel precedente paragrafo :

- Aggiunta di un ramo tra due nodi :** un nodo qualsiasi può essere suddiviso in connesso un nuovo bipolo senza alterare il circuito, purché il suddetto bipolo sia un circuito aperto. ■
- Divisione di un nodo in due nodi :** un nodo qualsiasi può essere suddiviso in due nodi senza alterare il circuito, purché tra i suddetti nodi sia connesso un corto circuito. ■

**Esempio A :** Consideriamo il grafo di bipoli riportato nella figura di sinistra : esso è costituito da 5 nodi e 7 rami. Assumiamo che il nodo  $v_c$  sia costituito da una coppia di nodi connessi da un c.c. e che tra i nodi  $v_a$  e  $v_e$  vi sia un ulteriore ramo costituito da un c.a., come indicato nella figura al centro. Se sostituiamo il c.c. e il c.a. con due generici bipoli, come indicato nella figura di destra, ottenendo un grafo con 6 nodi e 9 rami in totale. Il grafo originario, costituito da 5 nodi e 7 rami, mediante l'aggiunta di un c.a. e un c.c., viene trasformato in un grafo di 6 nodi e 9 rami. ■



- Definizione :** Il fatto che in un circuito possiamo aggiungere tra qualsiasi coppia di nodi un c.a., viene ricordato dicendo che in un circuito vi sono molti circuiti aperti latenti. ■
- Definizione :** Il fatto che in un circuito possiamo suddividere qualsiasi nodo in una coppia di nodi connessi da un c.c., viene ricordato dicendo che in un circuito vi sono molti corto circuiti latenti. ■



**Casi particolari :** La possibilità di suddividere un nodo in una coppia di nodi connessi da un c.c. senza alcuna alterazione del circuito, implica, come caso particolare, che in serie a qualsiasi bipolo, sia effettivo sia fittizio, possiamo inserire un c.c. (latente). Analogamente, possiamo aggiungere in parallelo a un qualsiasi bipolo un c.a. La figura a fianco riporta alcuni esempi.

**e-mail per l'autore :** Ti scriviamo a nome di tutti i resistori che vivono e operano all'interno del tuo personal e che stanno collaborando con silenziosa professionalità alla stesura di questo testo. Ci permettiamo di interrompere il nostro tradizionale silenzio per un problema che ci sta molto a cuore. Tu hai già iniziato a scrivere il sesto capitolo e non hai ancora parlato della nostra categoria. Fin dai tempi di OHM, noi abbiamo guadagnato il diritto di essere al centro di qualsiasi trattato che riguardi l'Ingegneria Elettrica ed Elettronica e, nonostante ciò, neppure in questo capitolo ci prendi in considerazione. E pensare che molti testi, e proprio quelli scritti senza la nostra partecipazione, parlano di noi fin dal primo capitolo. E non venirci a dire che noi,

all'inizio del nuovo millennio, siamo sorpassati; sai in quanti siamo all'interno del tuo *personal*? Tu non riesci a contattarci perché viviamo nascosti all'interno di pochi *chip* come in un formicaio. Che ne diresti se, per protesta, decidessimo di trasformarci in corto circuito per farci capire l'importanza del nostro ruolo? I tuoi file prenderebbero fuoco come quelli, registrati su carta, in voga nel secolo passato. Sperando che tu comprenda le ragioni del nostro sfogo, ti inviamo i nostri più cordiali saluti.

## 6.2 INTERAZIONE DI MULTIPOLI CON LA TOPOLOGIA

Anche le relazioni costitutive di specifici multipoli possono interagire con quelle topologiche e, conseguentemente, alterare il grafo del circuito. In questo caso questa "particolarità" da origine al concetto di *porta propria* e di *porta impropria* e alla diminuzione del numero di terminali e/o porte.

WWWWWW???. Nelle figure che descrivono la contrazione e espansione di multipoli con i rispettivi bipoli fittizi occorre aggiungere le linee d'inse "dashed" che ricordano il componente originario ???WWWWWW.

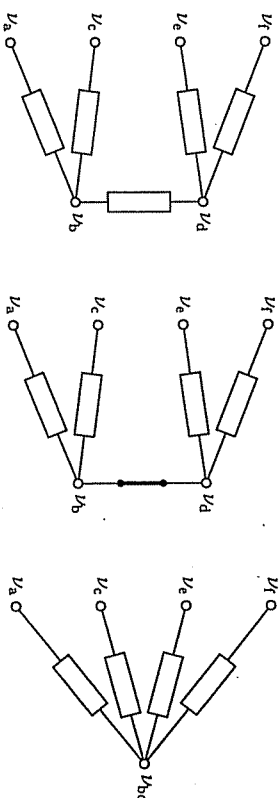
### 6.2.1 Contrazioni del grafo di un multipolo

Anche le relazioni costitutive di particolari multipoli possono interagire con la topologia ovvero coi bipoli fittizi (porte) che lo rappresentano. Come conseguenza il grafo del multipolo, cioè il numero di terminali e/o delle porte può venire ridotto.

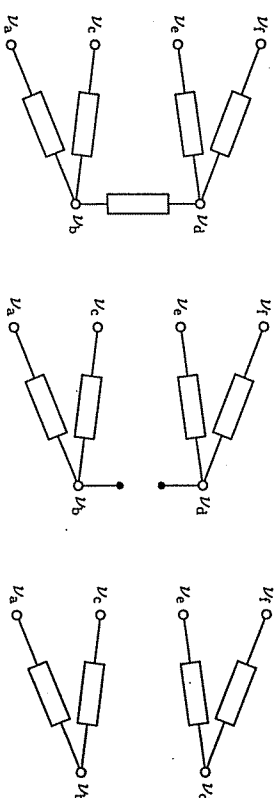
**Fusione di due terminali:** Assumiamo che la tensione  $v_n(t)$  e la corrente  $i_n(t)$  della  $\mu$ -esima porta di un  $k$ -porta, dotato di  $k+1$  terminali, soddisfino alla  $v_n(t) = 0$  e che  $i_n(t)$  sia nonvincolata. In questo caso la porta si comporta come un c.c. (vedere Par. 6.1.1) e possiamo contrarre il grafo fondendo i due terminali della porta in un unico terminale e rimuovendo la porta stessa. Il  $k$ -porta originario è equivalente a un  $(k-1)$ -porta dotato di  $k$  terminali. ■

**Esempio A:** Consideriamo il grafo di un 6-polo riportato nella figura di sinistra: esso contiene cinque bipoli fittizi. Assumiamo che il bipolo fittizio  $v_b$  —  $v_d$  sia un c.c. come indicato nella figura al centro: a questo punto possiamo fondere i terminali ( $v_b$  e  $v_d$ ) in un unico terminale, che indichiamo con  $v_b$  abolendo il bipolo fittizio  $v_b$  —  $v_d$ . Il grafo originario si contrae in un 5-polo con 4 bipoli fittizi (figura di destra).

**Rimozione di una porta:** Assumiamo che la tensione  $v_n(t)$  e la corrente  $i_n(t)$  della  $\mu$ -esima porta di un  $k$ -porta, dotato di  $k+1$  terminali, soddisfino alla  $i_n(t) = 0$  e che  $v_n(t)$  sia nonvincolata. In questo caso la porta si comporta come un c.a. (vedere Par. 6.1.1) e possiamo contrarre il grafo rimuovendo la porta e separando i bipoli fittizi rimanenti in due sottoalberi disconnessi. Il  $k$ -porta originario è equivalente a un  $(k-1)$ -porta dotato di  $k+1$  terminali. ■



**Esempio B:** Consideriamo il grafo di un 6-polo riportato nella figura di sinistra: esso contiene cinque bipoli fittizi. Assumiamo che il bipolo fittizio  $v_b$  —  $v_d$  sia un c.a., come indicato nella figura al centro: a questo punto possiamo sopprimere il bipolo fittizio  $v_b$  —  $v_d$ . Il grafo originario si contrae in un 6-polo con 4 bipoli fittizi (figura di destra). In realtà il 6-polo consiste in due tripoli tra loro disgiunti. ■

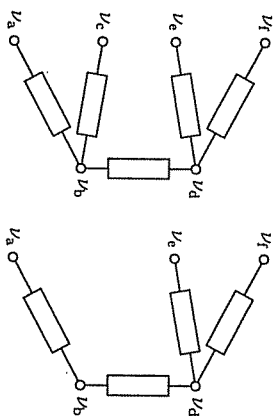


### 6.2.2 Porta propria

La rimozione di una o più porte in un  $k$ -polo per la presenza di un circuito aperto conduce a una delle seguenti situazioni:

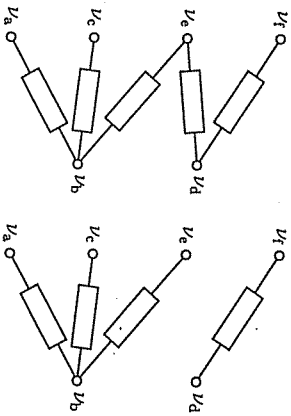
Se la rimozione di una porta descritta da un c.a. separa un terminale dai restanti  $k-1$  terminali del  $k$ -polo, la corrente fluente nel suddetto terminale è nulla mentre la sua tensione rispetto a tutti i rimanenti nodi è nonvincolata dalle relazioni costitutive del  $k$ -polo. In questo caso il  $k$ -polo risulta equivalente a un  $(k-1)$ -polo, dal momento che il terminale rimasto isolato è superfluo.

**Esempio A :** La prima figura a destra riporta il grafo di un 6-polo con 5 bipoli fittizi. Assumendo che il bipolo fittizio  $v_c$  —  $v_b$  sia un c.a., possiamo rinuoverlo : uno dei sei terminali (nodo  $v_c$ ) rimane separato e superfuò. Ci troviamo di fronte a un 5-polo con 4 bipoli fittizi (seconda figura a destra).



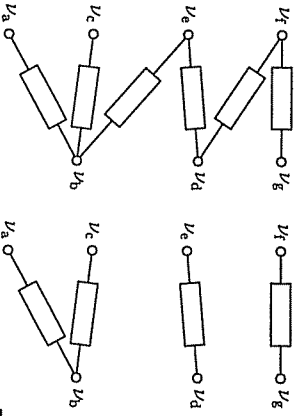
**Definizione :** Se la rimozione di una porta descritta da un c.a. isola un solo ramo con due terminali dai restanti  $k - 2$  terminali, la corrispondente porta sarà detta *propria* in quanto i terminali a cui è collegata hanno correnti uguali e opposte.

**Esempio B :** La prima figura sulla destra riporta il sottografo di un 6-polo con 5 bipoli fittizi : assumiamo che il bipolo  $v_e$  —  $v_d$  sia un c.a. . La sua rimozione separa il sottografo in due sottografi, il primo con due terminali e un bipolo fittizio ( $v_f$  —  $v_a$ ) e il secondo con 4 terminali e tre bipoli fittizi. Quindi la rimozione del c.a. non varia il numero di terminali ma riduce di un'unità il numero di porte del 6-polo. Il bipolo fittizio  $v_f$  —  $v_d$ , separato dagli altri, costituisce una porta propria.



Se più c.a. sono presenti tra i bipoli fittizi, altrettanti rami possono essere rimossi. Conseguentemente, più porte proprie possono essere presenti in un  $k$ -polo, riducendo ulteriormente il numero di porte rispetto a quelle che competerebbero a un  $k$ -polo costituito da  $k - 1$  generici bipoli fittizi.

**Esempio C :** La figura a fianco riporta un generico 7-polo con 6 bipoli fittizi. Se assumiamo che i bipoli fittizi  $v_f$  —  $v_d$  e  $v_e$  —  $v_b$  siano c.a., possiamo rinuoverli : otteniamo ancora un 7-polo ma con quattro bipoli fittizi tra cui due porte proprie corrispondenti ai bipoli fittizi  $v_f$  —  $v_g$  e  $v_e$  —  $v_d$  (seconda figura sulla destra).



**Commento :** L'unica porta di un qualsiasi bipolo può essere considerata sia come una porta normale sia come una porta propria.

**Commento :** Quando una o più delle  $k$  porte di un multipolo è descritta da un c.a., le porte rimangono separate in due sottoalberi tra loro sconnessi. In questo caso il multipolo rimane parzialmente "fottante" dal momento che una parte delle tensioni tra i terminali non può essere definita.

WWWWWW??? FARE FIGURA CON COMPONENTE PLOTTANTE ???WWWWWW

### 6.2.3 Espansione del grafo di un multipolo

Consideriamo un  $k$ -polo qualsiasi : il numero delle porte sarà in genere  $k - 1$ . Il suddetto  $k$ -polo può essere equivalente a un  $(k + 1)$ -polo. Esaminiamo i casi più interessanti :

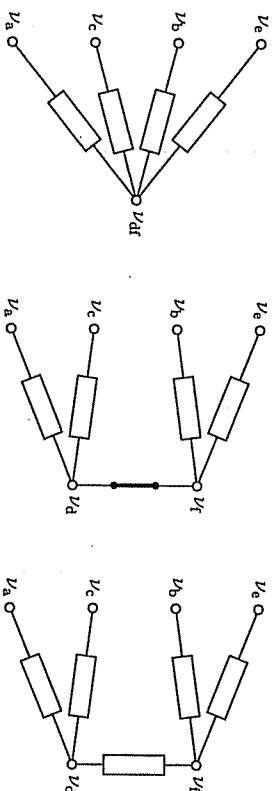
**Aggiunta di un c.c. :**

connessione a un terminale dell' $k$ -polo un c.c. e ottengo un  $(k + 1)$ -polo, in cui una porta è un c.c. .

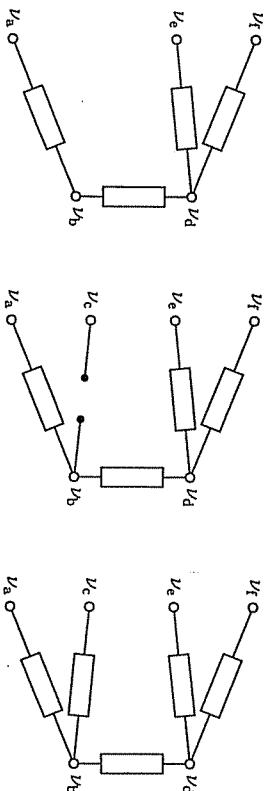
**Aggiunta di un c.a. :**

connessione a un terminale dell' $k$ -polo un c.a. e ottengo un  $(k + 1)$ -polo, in cui una porta è un c.a. .

**Esempio A :** Consideriamo il grafo di un 5-polo riportato nella figura di sinistra e contenente quattro generici bipoli fittizi generici. Assumiamo che il nodo  $v_{df}$  sia spaccato in due nodi  $v_d$  e  $v_f$  connessi dal bipolo fittizio  $v_d$  —  $v_f$ , che si assume che sia un c.c. come indicato nella figura al centro : Il grafo originario è espanso in un 6-polo con porte tra cui una è un c.c. (figura di destra).



**Esempio B :** Consideriamo il 5-polo nella figura di sinistra, costituito da quattro bipoli fittizi generici. Aggiungiamo il terminale  $v_c$  connesso dal bipolo fittizio  $v_b$  —  $v_c$ , che si assume sia un c.a., come indicato nella figura al centro : Il grafo originario risulta espanso in un 6-polo con cinque porte tra cui un c.a. (figura di destra).





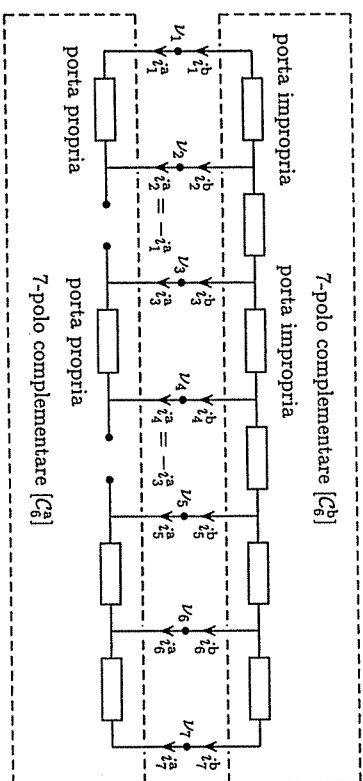
**Commento :** L'aggiunta di un c.a. ad un  $k$ -polo corrisponde all'introduzione della rappresentazione "flottante" dell' $k$ -polo stesso, in cui compaiono una corrente e una tensione in più.

**Commento :** Le suddette modifiche possono essere ripetute. Per esempio, un qualsiasi bipolo può diventare un  $k$ -polo, tra le cui  $k - 1$  porte sono presenti  $k - 2$  c.a. e/o c.c.

#### 6.2.4 Porta impropria

L'eventuale presenza di una porta propria in un multipolo dipende esclusivamente dal componente stesso, cioè dalle specificità delle sue relazioni costitutive e, in definitiva, dalla struttura interna del componente. Qui viene introdotta la *porta impropria*, che dipende dal circuito in cui il componente è inserito, cioè dalla topologia del componente complementare.

**Esempio A :** Il circuito in figura è costituito dal 7-polo  $C_6^2$  e dal 7-polo complementare  $C_6^3$ . Le relazioni costitutive del  $C_6^2$  sono tali che i bipoli fittizi  $v_2$  —  $v_3$  e  $v_4$  —  $v_5$  sono due c.a. Quindi i due bipoli fittizi  $v_1$  —  $v_2$  e  $v_3$  —  $v_4$  di  $C_6^2$  costituiscono due porte proprie. Noi assumiamo che tutti e sei i bipoli fittizi del  $C_6^2$  siano generici cioè che nessuno sia un c.c. ovvero un c.a. Ci chiediamo cosa succede del 7-polo complementare  $C_6^3$ ? I due bipoli fittizi  $v_2$  —  $v_3$  e  $v_4$  —  $v_5$  del  $C_6^2$ , dirimpettati dei due c.a. del  $C_6^2$  fanno parte di due tagli di cui essi sono gli unici rami. Conseguentemente le due correnti (indipendenti) fluenti in questi bipoli sono nulle e le correnti fluenti nei primi quattro terminali coincidono due a due:  $i_1^3(t) = -i_2^3(t)$  e  $i_3^3(t) = -i_4^3(t)$ . In altre parole le porte tra le coppie di terminali  $(v_1, v_2)$  e  $(v_3, v_4)$  del  $C_6^3$  si comportano come se fossero due porte proprie.

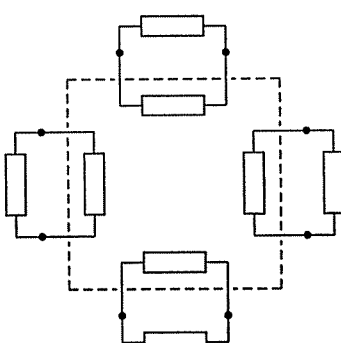


**Definizione :** In questo caso si dice che i due terminali connessi ai nodi  $v_4$  e  $v_5$  costituiscono una *porta impropria*.

**Commento :** Quando in un componente operante in un dato circuito sono definite una o più porte improprie, conviene scegliere il grafo del componente stesso in modo che ogni porta impropria coincida con un ramo. In questo caso la corrente di uno o più delle rimanenti porte (bipoli fittizi) sono necessariamente nulle, perché costituiscono tagli formati da un solo ramo (il grafo del circuito è semplicemente connesso) : si dice che la suddetta porta (bipolo fittizio) costituisce una *porta latente*. Come per le porte proprie, la presenza

di porte improprie consente di ridurre il numero complessivo di porte del componente rispetto al numero originario, in quanto le porte latenti possono essere rimosse.

**Esempio B :** La figura riporta un circuito costituito da un 8-polo (descritto dal rettangolo tratteggiato) e 4 bipoli, tra loro complementari. I quattro bipoli impongono che quattro dei sette bipoli fittizi dell'8-polo operino come porte improprie e che ciascuno dei restanti tre costituisca un taglio per proprio conto. La figura riporta solamente i quattro bipoli fittizi (all'interno del rettangolo tratteggiato) operanti come porte improprie, mentre i rimanenti tre bipoli fittizi (porte latenti) non sono riportati.



**Terminologia :** Volendo essere rigorosi, ma un pò pedanti, non è corretto affermare che :  
questa coppia di terminali di questo multipolo  
costituisce una porta impropria.

mentre è più appropriato dire che :

questa coppia di terminali di questo multipolo,  
operante in questo circuito, opera come una porta impropria.

La seconda frase viene rimpiazzata dalla prima, qualora non nascano ambiguità. ■

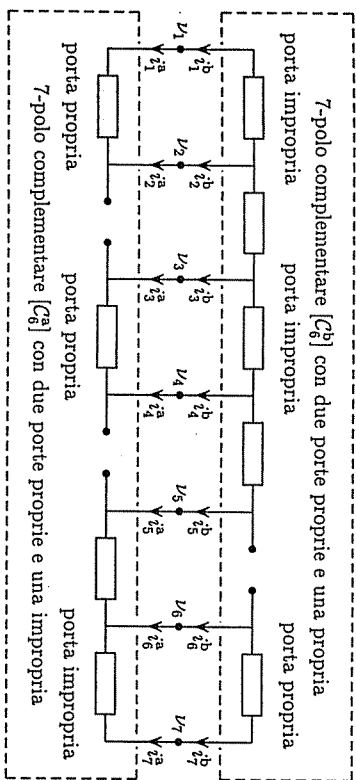
#### 6.2.5 Altri multipoli con porte proprie e/o improprie

Le porte proprie e/o improprie possono trovarsi anche in multipoli con 5 o più terminali. Qui ci limitiamo a presentare alcuni esempi senza una discussione dettagliata :

- $k$  bipoli senza terminali in comune possono essere considerati come un unico  $(2k)$ -polo con  $k$  porte tutte proprie.
- Un componente con  $2k$  terminali e  $k$  porte proprie può essere visto come un  $(2k)$ -polo in cui  $k - 1$  tra i  $2k - 1$  bipoli fittizi sono c.a.
- Un componente con  $k$  terminali può essere visto come un  $(2k - 1)$ -polo, in cui  $k - 1$  tra i  $2k - 2$  bipoli fittizi sono c.c.

**Esempio C :** La figura riporta un circuito costituito da due 7-poli complementari  $C_6^2$  e  $C_6^3$ . Siccome i bipoli fittizi  $v_2$  —  $v_3$  e  $v_4$  —  $v_5$  di  $C_6^2$  e il bipolo  $v_5$  —  $v_6$  di  $C_6^3$  sono dei c.a., alcuni bipoli fittizi sono delle porte proprie e precisamente i bipoli  $v_1$  —  $v_2$  e  $v_3$  —  $v_4$  di  $C_6^2$  e il bipolo  $v_6$  —  $v_7$  di  $C_6^3$ . Conseguentemente i bipoli fittizi del 7-polo che fronteggiano le porte proprie, precisamente i bipoli  $v_1$  —  $v_2$  e  $v_3$  —  $v_4$  di  $C_6^2$  e il bipolo

$v_6$  —  $v_7$  di  $C_6^a$  operano come porte proprie.

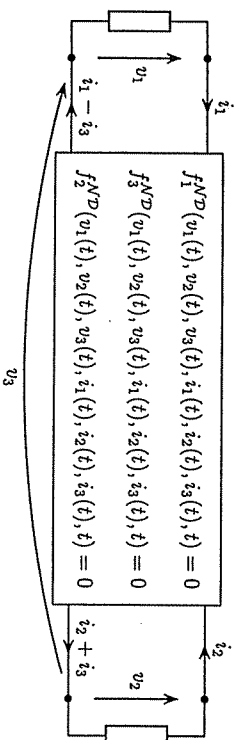


### 6.3 DOPPI BIPOLI

I concetti di porta propria e impropria introdotti nelle precedente sezione ci suggeriscono di esaminare i doppi bipoli, che, come dice il loro nome, sono i componenti descritti da due bipoli fittizi ovvero due porte, senza contare le eventuali porte laterali. Congiuntamente ai bipoli, essi sono i componenti più usati e di maggior interesse. Essi vengono suddivisi in: *impropri, tripolari e propri*.

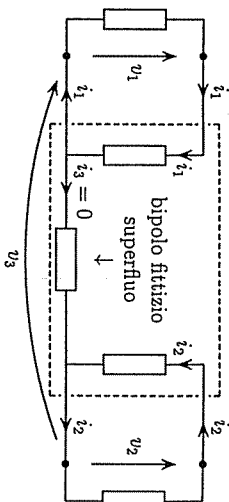
#### 6.3.1 Quadripoli operanti come doppi bipoli impropri (DBI)

Consideriamo un generico quadripolo i cui quattro terminali formino due porte improprie, cioè il cui quadripolo complementare è caratterizzato da due porte proprie, per esempio, è formato da due bipoli separati.



Per descrivere il quadripolo, introduciamo tre bipoli fittizi connessi a catena e numerati nell'ordine 1, 3, 2. Il primo e il secondo bipolo fittizio sono scelti coincidenti con le due porte improprie:

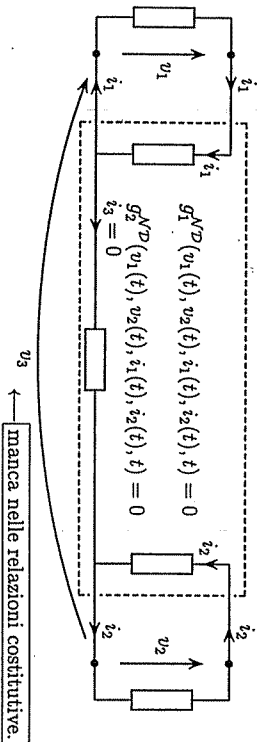
conseguentemente, la corrente  $i_3(t)$  fluente nel terzo bipolo fittizio è necessariamente nulla in quanto esso è l'unico ramo di un taglio di un grato (semplicemente connesso), come risulta nella figura seguente:



La corrente  $i_3(t)$  è posta uguale a zero nelle tre relazioni costitutive. Inoltre, manipolando le tre relazioni, possiamo ottenere tre altre relazioni, equivalenti alle precedenti, in cui la presenza di  $v_3(t)$  è limitata ad una sola delle tre relazioni:

$$\begin{aligned}
 f_1^{NP}(v_1(t), v_2(t), v_3(t), i_1(t), i_2(t), 0, t) &= 0 & g_1^{NP}(v_1(t), v_2(t), i_1(t), i_2(t), t) &= 0 \\
 f_3^{NP}(v_1(t), v_2(t), v_3(t), i_1(t), i_2(t), 0, t) &= 0 & g_3^{NP}(v_1(t), v_2(t), v_3(t), i_1(t), i_2(t), t) &= 0 \\
 f_2^{NP}(v_1(t), v_2(t), v_3(t), i_1(t), i_2(t), 0, t) &= 0 & g_2^{NP}(v_1(t), v_2(t), i_1(t), i_2(t), t) &= 0
 \end{aligned}$$

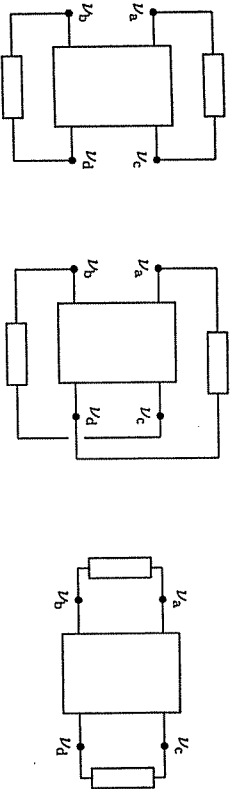
Se  $v_3(t)$  non è di nostro interesse, questa relazione può essere soppressa: ci troveremo di fronte ad una descrizione del quadripolo formata da due relazioni costitutive coinvolgenti le due tensioni e le due correnti alle due porte improprie:



Questo risultato ci consente di dire che il quadripolo opera come un *doppio bipolo improprio* (DBI), dal momento che il suo comportamento elettrico è simile a quello di un componente con due porte.

**Commento:** Siccome la porta intermedia (porta 3 del quadripolo) rimane esclusa, le tensioni alle due porte improprie non possono formare un albero. Conseguentemente le tensioni tra ogni coppia di terminali non appartengono alla stessa porta impropria non possono essere calcolate a partire dalle tensioni alle due porte improprie, in quanto l'unica relazione costitutiva coinvolgente  $v_3(t)$  (comunque fisicamente esistente) non viene considerata nel doppio bipolo improprio, che modella il quadripolo.

**Commento:** Un generico quadripolo può originare tre diversi doppi bipoli impropri a seconda di come i quattro terminali vengano collegati alle porte proprie del componente complementare, come illustrato nelle tre figure sottostanti:



**Terminologia :** Per essere rigorosi non sarebbe corretto affermare che :  
 questo quadripolo è un doppio bipolo improprio.

mentre sarebbe più appropriato, sebbene un pò pedante, dire che :

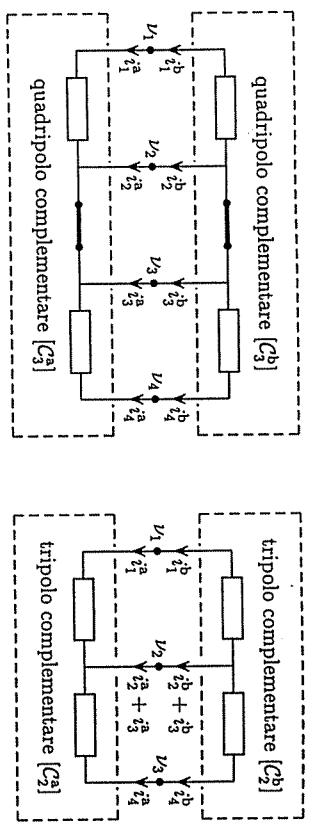
questo quadripolo, inserito in questo circuito, opera come un doppio bipolo improprio. ■

**6.3.2 Doppio bipoli tripolari (DBT)**

Un generico tripolo può essere considerato un *doppio bipolo tripolare* (DBT), poiché tra i tre terminali possono essere individuate due porte. Qualora necessario, queste porte sono chiamate *normali* in quanto la loro presenza non è assicurata da particolari relazioni costitutive, come per le porte proprie, o da particolari connessioni, come per le porte improprie. D'altra parte, un generico DBT può essere visto come un particolare quadripolo. Consideriamo un circuito costituito da due quadripoli complementari : scegliamo i tre bipoli fittizi del quadripolo a catena e assumiamo che il bipolo fittizio centrale (terzo) sia un c.c. (figura a sinistra) per entrambi i quadripoli. Questo significa che la corrente  $i_3(t)$  è nonvincolata e che  $v_3(t)$  è identicamente nulla. Conseguentemente, due terminali possono essere fusi e il quadripolo diventa un tripolo (doppio bipolo tripolare) (figura a destra) :

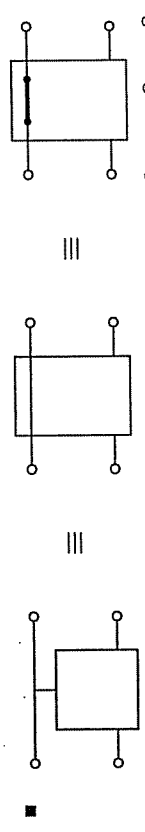
$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^{N^D}(v_1(t), v_2(t), v_3(t), i_1(t), i_2(t), t) = 0 \\ f_2^{N^D}(v_1(t), v_2(t), v_3(t), i_1(t), i_2(t), t) = 0 \\ v_3(t) = 0, \text{ con } i_3(t) \text{ nonvincolata} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_1^{N^D}(v_1(t), v_2(t), 0, i_1(t), i_2(t), t) = 0 \\ f_2^{N^D}(v_1(t), v_2(t), 0, i_1(t), i_2(t), t) = 0 \end{array} \right.$$

DBT equivalente



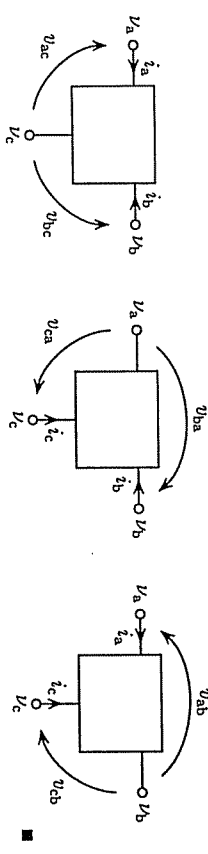
Le correnti in ciascuno dei due terminali creati dalle fusione dei due terminali del rispettivo quadripolo sono uguali alla somma delle correnti presenti nei terminali soppressi. ■

La figura seguente riporta i simboli grafici più diffusi per indicare i doppi bipoli tripolari :



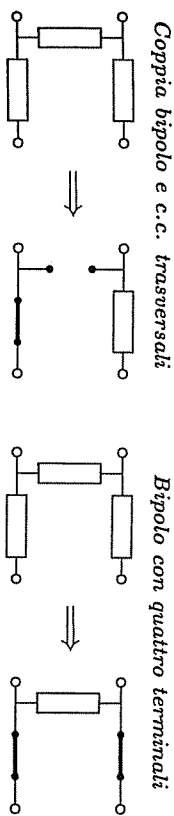
**Commento :** Le tensioni tra qualsiasi coppia di terminali di un doppio bipolo tripolare possono essere determinate da quelle delle due porte.

In genere un tripolo può dare origine a tre diversi doppi bipoli tripolari a seconda di quale dei tre terminali è comune alle due porte, in accordo alla tre seguenti figure.



**Commento :** Pensare a un transistor bipolare, le cui relazioni costitutive cambiano a seconda di quale terminale (emettitore, base, collettore) viene scelto come terminale comune.

**Avvertenza :** Rammemtiamo al lettore principiante che un transistor è un doppio bipolo tripolare in quanto ha tre terminali. Tra i transistori è ben noto il "transistore bipolare" (vedere il Corso introduttivo di Elettronica) : in questo caso l'aggettivo "bipolare" si riferisce alla struttura interna del transistor, che comunque ha tre terminali. ■  
 Vi sono casi particolari di quadripoli, operanti in genere come DBT, che si riducono a semplici bipoli in seguito alla contrazione del loro grafo. Tra i casi di maggior interesse vi sono il bipolo con quattro terminali e la coppia trasversale di un generico bipolo e un c.c. ■



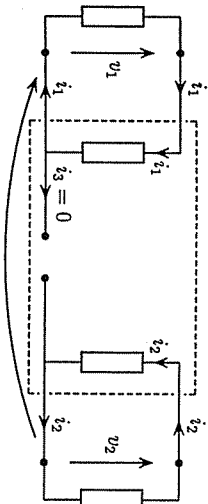
6.3.3 Doppî bipoli propri (DBP)

Un quadripolo in cui i quattro terminali formano due porte proprie, viene chiamato *doppio bipolo proprio* (DBP). I tre bipoli fittizi del quadripolo siano scelti a catena e numerati nell'ordine 1, 3, 2, in modo che il bipolo 3 coincida con un c.a. . In questo caso le relazioni costitutive del quadripolo sono tali che  $v_3(t)$  è nonvincolata e che  $i_3(t)$  è identicamente nulla. Conseguentemente, il bipolo 3 può essere rimosso e il quadripolo originario diventa equivalente a un DBP :

quadripolo con tre porte di cui un c.a.

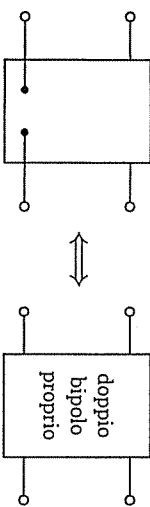
DBP equivalente

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^{ND}(v_1(t), v_2(t), i_1(t), i_2(t), i_3(t), t) = 0 \\ f_2^{ND}(v_1(t), v_2(t), i_1(t), i_2(t), i_3(t), t) = 0 \\ i_3(t) = 0, \text{ con } v_3(t) \text{ nonvincolata (c.a.)} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_1^{ND}(v_1(t), v_2(t), i_1(t), i_2(t), 0, t) = 0 \\ f_2^{ND}(v_1(t), v_2(t), i_1(t), i_2(t), 0, t) = 0 \end{array} \right.$$



Conseguentemente, il bipolo 3 può essere rimosso e il quadripolo originario diventa equivalente a un doppio bipolo proprio (DBP).

**Commenti :** Le tensioni tra ogni coppia di terminali non appartenenti alla stessa porta non possono venire determinate dalle due tensioni alle porte del quadripolo, in quanto la tensione  $v_3(t)$  non è vincolata. In genere esse potranno venire determinate una volta che il doppio bipolo proprio fosse conosciuto al resto del circuito (Vedere l'eccezione discussa nel Par. 6.3.5). Quindi l'associazione due a due dei quattro terminali per formare le due porte proprie è unica e suggerita dal comportamento elettrico del componente stesso, mentre la scelta delle due porte di un doppio bipolo tripolare è arbitraria. In principio, essendo un doppio bipolo proprio un componente con quattro terminali, noi potremmo rappresentarlo mediante tre bipoli fittizi. In questo caso l'analisi del circuito in cui il doppio bipolo proprio opera sarebbe inutilmente più pesante. ■



SIMBOLI DI UN QUADRIPOLLO CON UN C.A. INTERNO E (DBP).

6.3.4 Convenzioni di segno per i doppi bipoli

In principio siccome un generico doppio bipolo è descritto dalle tensioni  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  e dalle correnti  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ , vi sono  $2^4 = 16$  possibili diverse convenzioni di segno. Sarebbe insopportabilmente tedioso e pedante considerarle tutte : ne nascerrebbe una confusione nell'esecuzione dei calcoli numerici senza aggiungere alcunché di concettuale.

**Convenzione delle tensioni :** Innanzitutto esistono  $2^2 = 4$  possibili convenzioni per le due tensioni. In presenza di un DBT noi possiamo approfittare del terminale comune alle due porte per eliminare questa arbitrarietà : scegliamo come convenzioni per entrambe le tensioni quelle in cui la coda della freccia è dalla parte del suddetto terminale comune. In questo modo le (possibili) 16 convenzioni di riducono alle quattro (possibili) convenzioni per le due correnti.

In presenza di un DBP o DBI questa naturale scelta della convenzione delle due tensioni viene meno. Quindi la convenzione della tensione è stabilita per ciascuna porta dalla corrispondente freccia. In genere si scelgono le frecce rivolte verso l'alto ma questa scelta non è motivata dalla topologia dal momento che nessuno dei terminali di ciascuna porta ha un ruolo che lo distingue dagli altri, come nel caso dei DBT.

Alcuni tradizionalisti invece di usare le frecce preferiscono indicare con un pallino nero il terminale di ciascuna porta presso cui vi è la punta della freccia della tensione.

**Convenzioni delle correnti :** Una volta stabilite le convenzioni per le due tensioni, noi possiamo procedere come per i bipoli per le convenzioni delle correnti. Nella maggior parte dei casi ci troviamo di fronte a due scelte, anche se altre sono possibili. ■

**Convenzione cardinale :** Le correnti  $i_1$  e  $i_2$  vengono scelte in modo che ciascuna coppia  $v_1-i_1$  e  $v_2-i_2$  rispetti la convenzione normale. ■

**Convenzione noncardinale :** Le correnti  $i_1$  e  $i_2$  sono scelte in modo che la coppia  $v_1-i_1$  rispetti la convenzione normale e la coppia  $v_2-i_2$  quella nonnormale. ■

**Commento :** Vedremo nella Sez. 9.1 che la convenzione cardinale viene universalmente adottata per le rappresentazioni cardinali dei doppi bipoli e la convenzione noncardinale per quelle noncardinali. Questo spiega il nome scelto per le convenzioni. ■

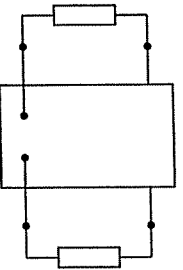
WWW.WWWW??? CONVENZIONI CARDINALI E NONCARDINALI PER I DBT E DBP-DBI.

### 6.3.5 DBP e DBT operanti come DBI

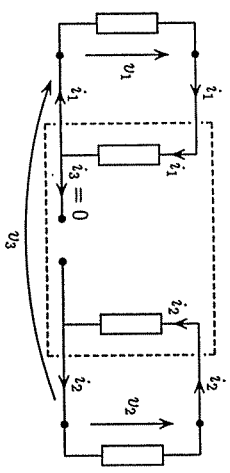
Consideriamo un circuito formato da un DBP o un DBT inserito tra due bipoli ovvero tra due porte proprie: siamo in presenza di un doppio bipolo (intrinsecamente) proprio o tripolare che opera come un DBI. Il grafo del circuito viene modificato come segue:

**Doppio bipolo proprio:** Il grafo è sconnesso (vedere Par. 3.1.5), in quanto si spezza in due sottografi per la presenza di un taglio con nessun ramo. Quindi solitamente  $n-2$  tagli nodali sono indipendenti. La tensione tra una qualsiasi coppia di nodi appartenenti a sottografi diversi non può essere definita fisicamente.

**Doppio bipolo tripolare:** Il grafo è semplicemente connesso, in quanto il terminale comune del DBT diventa un nodo cruciale del grafo (vedere Par. 3.2.2). Anche in questo caso, solamente  $n-2$  tagli nodali sono indipendenti. Al contrario, la tensione tra una qualsiasi coppia di nodi appartenenti a sottografi diversi può essere definita fisicamente.

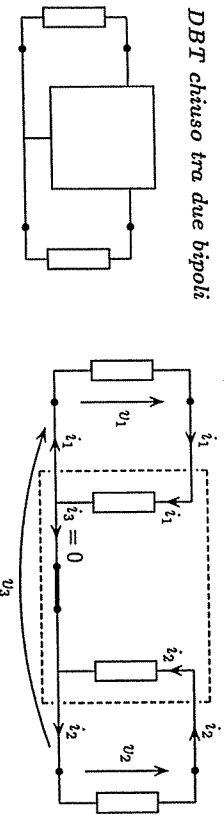


DBP chiuso tra due bipoli



Come esempio consideriamo un trasformatore reale, i cui due avvolgimenti siano connessi a due bipoli e siano elettricamente isolati tra loro.

DBT chiuso tra due bipoli



Come esempio consideriamo un trasformatore reale, i cui due avvolgimenti siano connessi a due bipoli e connessi elettricamente da un c.c.

**Commento:** Un quadripolo qualsiasi operante come DBI da origine a un grafo semplicemente connesso (vedere Sez. 3.1.5), in cui vi sono due nodi cruciali connessi dalla porta intermedia del quadripolo.

### 6.3.6 Simbologia per i componenti più usati

Per indicare i componenti, con il numero di porte, di un circuito, conviene introdurre una apposita simbologia, che metta in evidenza il numero delle porte e il loro tipo, riportata nel seguente quadro:

componente	terminali	porte	simbolo
bipolo (generico)	2	una porta (propria)	$C_1$
doppio bipolo tripolare	3	due porte normali	$C_{2r}$
doppio bipolo proprio	4	due porte proprie	$C_{2p}$
doppio bipolo improprio	4	due porte improprie	$C_{2i}$
doppio bipolo generico	3, 4	due porte qualsiasi	$C_3$
quadripolo generico	4	tre porte normali	$C_4$
k-porte generico	$k+1, k+2, \dots, 2k$	k porte qualsiasi	$C_k$

**Commento:** Il simbolo  $C_3$  denota un doppio bipolo qualsiasi, cioè un componente entro un circuito che può essere indifferentemente un DBT, DBP o un DBI. Il simbolo  $C$  privo di pedice significa che siamo in presenza di un componente qualsiasi senza alcun riferimento al numero di porte. Qualora due componenti dello stesso tipo siano presenti nello stesso circuito, essi verranno distinti con un simbolo in alto a destra:  $C_1^1, C_1^2, \dots, C_2^a, C_2^b, \dots$ . **Commento:** il termine "triplo bipolo", sebbene meno usato del termine "doppio bipolo", indica un componente con tre porte.

## 6.4 INVARIANZA AL RIBALTAMENTO E DIREZIONALITÀ

Vengono esaminate le relazioni costitutive tali che un bipolo ovvero un doppio bipolo goda di certe proprietà di invarianza: in particolare sono discussi i bipoli invarianti al ribaltamento dei terminali, definendo i bipoli bilaterali, e i doppi bipoli invarianti al ribaltamento delle porte, definendo i doppi bipoli simmetrici. Infine viene introdotto il concetto di direzionalità per i doppi bipoli.

### 6.4.1 Bipoli bilaterali/unilaterali

Il concetto di bilateralità / unilaterali è molto importante per qualsiasi bipolo.

**Definizione:** Sia  $\mathcal{X}$  il dominio costitutivo di un bipolo. Il bipolo è detto *bilaterale* se:

$$\forall [v(t) \ i(t)]^T \in \mathcal{X} \iff [-v(t) \ -i(t)]^T \in \mathcal{X}$$

Altrimenti il bipolo è detto *unilaterale*.

**Esempi:** Qui sotto sono riportati alcuni esempi di caratteristiche di bipoli bilaterali e unilaterali:

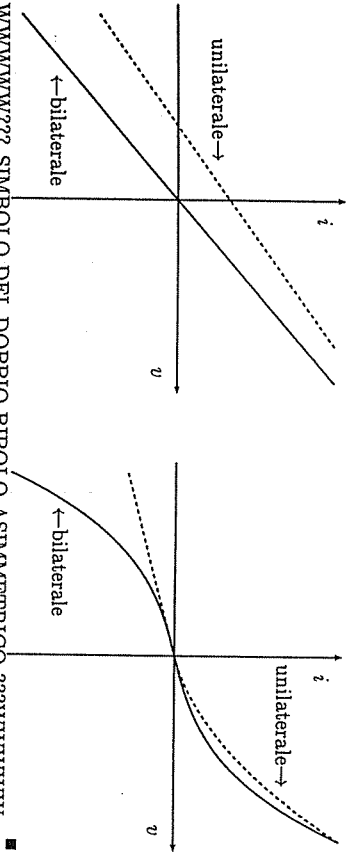
bipoli bilaterali

$$5v(t) - 3i(t) = 0, \quad 2v(t)^3 - i(t) = 0, \quad v(t) - 3 \frac{dv(t)}{dt} - 2i(t) = 0$$

bipoli unilaterali

$$3v(t) - 4i(t) = 2, \quad v(t)^2 - 3i(t) = 0, \quad 2v(t) - 3 \frac{dv(t)}{dt} - i(t) = 2$$

Nel caso particolare di un bipolo adinamico, tempo-invariante e bilaterale la caratteristica nel piano  $v-i$  è simmetrica rispetto all'origine, come risulta dalla seguente figura:



WWW? SIMBOLO DEL DOPPIO BIPOLO ASIMMETRICO ??? WWW  
 Commenti : La distinzione tra bipolo unilaterale / bilaterale ha conseguenze pratiche molto importanti :

**Bipolo bilaterale :** I due terminali di un bipolo fisico bilaterale non vengono contraddistinti da un qualche segno, dal momento che il comportamento del circuito rimane inalterato se essi vengono ribaltati. Per lo stesso motivo, il simbolo circuitale è simmetrico rispetto ai terminali.

**Bipolo unilaterale :** I due terminali di un bipolo fisico unilaterale sono distinguibili da un qualche segno per poterlo inserire correttamente nel circuito. Per lo stesso motivo, il simbolo circuitale non è simmetrico rispetto ai terminali.

La relazione costitutiva di un bipolo bilaterale rimane invariata se scambio tra loro le due convenzioni normali ovvero le due nonnormali. Sono bilaterali i resistori, induttori e condensatori lineari.

La relazione costitutiva di un bipolo unilaterale varia se scambio una convenzione normale con l'altra normale. Sono unilaterali le sorgenti impulsive di tensione e corrente e tutti i diodi.

**Consiglio :** Quando inserite una batteria nuova nell'apposito comparto di una radio portatile ricordatevi dell'unilateralità della batteria stessa. Quando invece inserite la batteria in una torcia elettrica ?

**Diagnosi :** Se vi rimanesse qualche dubbio sul concetto di bipolo bilaterale e unilaterale, chiedete a un rivenditore di materiale elettrico di sostituire la batteria di +4,5 volt, che vi ha appena venduto, con una di -4,5 volt. Nell'eventualità che il rivenditore vi rispondesse in malo modo, tiratevi su con un caffè nel bar accanto insistendo col barista di servirvelo in una tazzina col manico a sinistra invece che a destra.

**Terminologia :** I termini "unilaterale" e "bilaterale" non sono molto indovinati. Essi sono stati introdotti per analogia della terminologia usata in meccanica di vincolo "unilaterale" o "bilaterale". Questa analogia è azzeccata per un diodo ma non per una batteria o per un generico resistore nonlineare.

**6.4.2 Doppi bipoli simmetrici**

Indipendentemente dal fatto che un doppio bipolo sia DBT, DBP o un quadripolo che opera come DBI, la seguente definizione viene data :

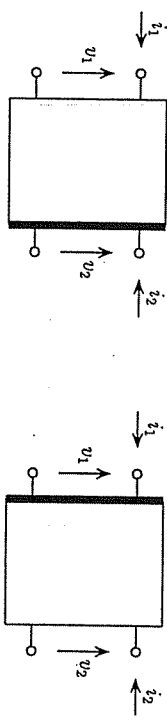
**Definizione :** Un doppio bipolo è chiamato *simmetrico* se le due equazioni costitutive

rimangono immutate, scambiando le due tensioni e le due correnti :

$$V [v_1(t) \ v_2(t) \ i_1(t) \ i_2(t)]^T \in \mathcal{X} \iff [v_2(t) \ v_1(t) \ i_2(t) \ i_1(t)]^T \in \mathcal{X}$$

Altrimenti viene detto *non-simmetrico*

**Commento :** Dal punto di vista circuitale, questa definizione implica che se ribaltiamo le due porte del doppio bipolo (vedere sottostante figura), le sue relazioni costitutive non mutano affatto :



**Commento :** La simmetria ha un importante risvolto pratico : dato un doppio bipolo fisico le due coppie di terminali costituenti le porte possono essere scambiate (ribaltamento tra le porte) tra loro senza modificare il circuito in cui il doppio bipolo è inserito.

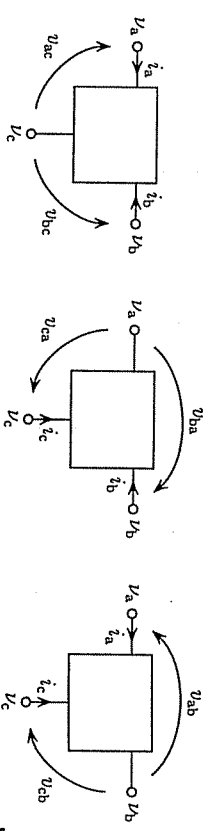
**Avvertenza :** La (uni/bi)lateralità di un bipolo riguarda il comportamento del bipolo in seguito al ribaltamento tra i due terminali dell'unica porta; mentre la (non)simmetria di un doppio bipolo riguarda il comportamento del doppio bipolo in seguito al ribaltamento tra le due porte.

**6.4.3 DBT equilibrati**

La seguente definizione ha un significato solamente per i doppi bipoli tripolari :

**Definizione :** Un DBT viene chiamato *equilibrato* quando le sue relazioni costitutive non cambiano al variare del terminale di riferimento (comune alle due porte). Più precisamente, se indichiamo con  $v_a, v_b$  e  $v_c$  i tre terminali e introduciamo le sei tensioni  $v_{ab}, v_{bc}, v_{ca}, v_{ba}, v_{cb}, v_{ac}$  e le tre correnti  $i_a, i_b, i_c$ , le relazioni costitutive  $f_1(\dots) = 0$  e  $f_2(\dots) = 0$  soddisfano alle condizioni seguenti :

$$\begin{aligned} f_1(v_{ac}(t), v_{bc}(t), i_a(t), i_b(t)) = 0 & , & f_2(v_{ac}(t), v_{bc}(t), i_a(t), i_b(t)) = 0 \\ f_1(v_{ba}(t), v_{ca}(t), i_b(t), i_c(t)) = 0 & , & f_2(v_{ba}(t), v_{ca}(t), i_b(t), i_c(t)) = 0 \\ f_1(v_{ab}(t), v_{cb}(t), i_c(t), i_a(t)) = 0 & , & f_2(v_{ab}(t), v_{cb}(t), i_c(t), i_a(t)) = 0 \end{aligned}$$



**Commento :** In pratica, non è necessario distinguere tra loro i tre terminali fisici di un

tripolo fisico equilibrato, in quanto la sua azione sul resto del circuito non risente del come essi siano connessi ai tre terminali fisici del tripolo complementare.

**Commento** : I DBT equilibrati sono largamente usati nei circuiti trifase per la trasmissione e distribuzione dell'energia elettrica : sono in genere costituiti da tre bipoli identici costituenti una stella o un triangolo (vedere appositi appunti monografici).

**Proprietà** : Il lettore può provare facilmente che :  
l'equilibratura di un DBT (3 vincoli)  $\implies$  la simmetria (2 vincoli) dello stesso

6.4.4 Doppî bipoli unidirezionali

Indifferentemente dal fatto che un doppio bipolo sia DBT, DBP o un quadripolo che opera come DBI, il concetto di *dirizzionalità* in un doppio bipolo è di notevole interesse pratico, in particolare nella circuiteria elettronica :

**Definizione** : un doppio bipolo è detto *unidirezionale* quando una delle due relazioni costitutive non coinvolge né la tensione né la corrente di una delle porte.

Un doppio bipolo è detto *zerodirezionale* quando ciascuna relazione costitutiva coinvolge solamente la tensione e corrente in una porta.

Altimenti, un doppio bipolo è detto *bidirezionale*, cioè quando non è né unidirezionale né zerodirezionale.

Le precedenti definizioni sono riassunte nel seguente quadro :

	Dirizzionalità dei doppi bipoli	
	prima relazione scalare	seconda relazione scalare
unidirezionale	porta d'ingresso	porta d'uscita
1 $\rightarrow$ 2	$f_1^{ND}(v_1(t), i_1(t), t) = 0$	$f_2^{ND}(v_1(t), i_1(t), v_2(t), i_2(t), t) = 0$
unidirezionale	porta d'uscita	porta d'ingresso
2 $\rightarrow$ 1	$f_1^{ND}(v_1(t), i_1(t), v_2(t), i_2(t), t) = 0$	$f_2^{ND}(v_2(t), i_2(t), t) = 0$
zerodirezionale	primo bipolo	secondo bipolo
	$f_1^{ND}(v_1(t), i_1(t), t) = 0$	$f_2^{ND}(v_2(t), i_2(t), t) = 0$
bidirezionale	in tutti i casi rimanenti	

La dimostrazione della seguente proprietà viene lasciata al lettore :

**Proprietà** : un doppio bipolo simmetrico non può essere unidirezionale.

**Commento** : la zerodirezionalità (2 vincoli) può essere vista come una "doppia unidirezionalità" 1  $\rightarrow$  2 (1 vincolo) e 1  $\leftarrow$  2 (1 vincolo)

6.5 AGGREGAZIONI DI COMPONENTI

Sono esaminate da un punto di vista topologico le aggregazioni più usate di componenti : connessioni "serie", "parallelo", "a stella" e "a triangolo" di bipoli, la connessione di un doppio bipolo chiuso su bipolo, la connessione trasversale di bipolo e DBT, la connessione di bipolo in serie al terminale comune di DBT, e infine le connessioni di due doppi bipoli : cascata, parallelo e serie.

6.5.1 Connessioni serie e parallelo, "a stella" e "a triangolo" di bipoli

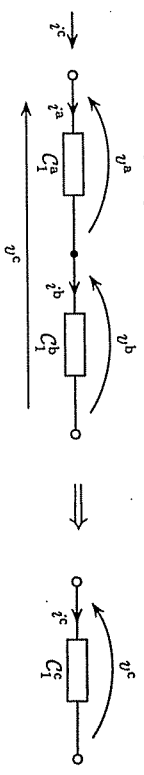
**Definizione** : Due bipoli sono connessi *in serie* se formano un taglio. **Definizione** : Due bipoli sono connessi *in parallelo* se formano una maglia.

**Commento** : Se il taglio è nodale si ottiene la definizione usuale della connessione serie di bipoli.

WWWWWW?? FARE FIGURA con nodo cruciale con quattro rami incidenti : essi sono due a due in serie, dal momento che formano due tagli di due rami ciascuno. Possono esserci nodi cruciali con sei rami incidenti : essi formano due stelle di bipoli. ???WWWWWW

6.5.2 La connessione serie

Consideriamo due bipoli generici connessi in serie (costituenti un taglio nodale) :

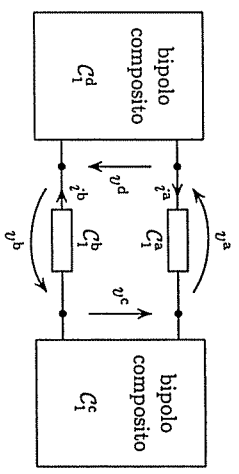


La connessione serie dei bipoli  $C_1^a$  e  $C_1^b$  da origine al bipolo composto  $C_1^c \equiv \text{Serie}\{C_1^a, C_1^b\}$ , in accordo alle seguenti relazioni topologiche :

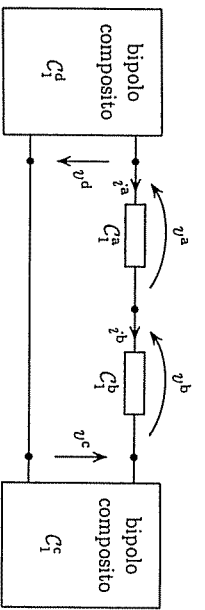
- le correnti fluenti in  $C_1^a$  e  $C_1^b$  coincidono :  $i^a = i^b$ .
- la corrente fluente in  $C_1^c$  coincide con la corrente comune a  $C_1^a$  e  $C_1^b$  :  $i^c = i^a$ .
- la tensione ai capi di  $C_1^c$  coincide con la somma delle tensioni ai capi di  $C_1^a$  e  $C_1^b$  :  $v^c = v^a + v^b$ .

Le precedenti relazioni sono scritte nel caso in cui i versi delle tensioni e correnti siano quelli indicati in figura : esse valgono anche nel caso in cui  $C_1^a$  e/o  $C_1^b$  siano sostituiti dalla porta di un multipolo.

Due bipoli sono in serie anche qualora essi costituiscono un taglio nonnodale, come indicato in figura. In questo caso la parte restante del circuito costituisce due bipoli composti.



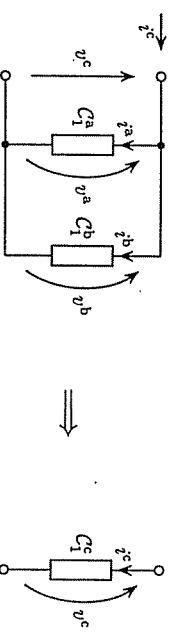
In definitiva noi siamo di fronte ad un'unica maglia costituita da quattro bipoli e possiamo spostare i singoli bipoli in modo che riformino un taglio nodale di due bipoli.



La connessione di bipoli in serie si estende immediatamente al caso di più di due bipoli.

### 6.5.3 La connessione parallela

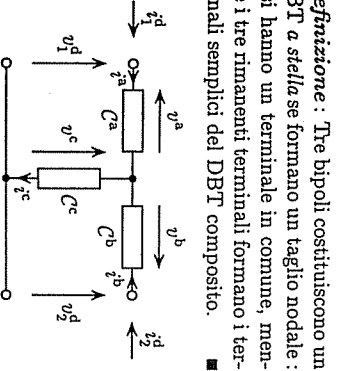
Consideriamo due bipoli generici connessi in parallelo (costituenti una maglia di due bipoli) :



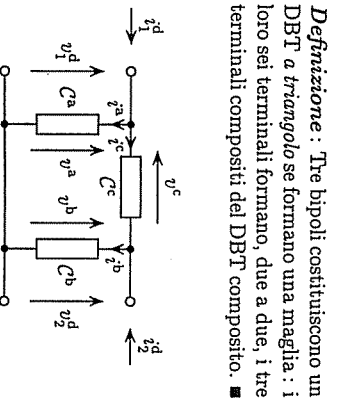
La connessione parallela dei bipoli  $C_1^a$  e  $C_1^b$  da origine al bipolo composto  $C_1^c \equiv C_1^a || C_1^b$ , in accordo alle seguenti relazioni topologiche :

- le tensioni ai capi di  $C_1^a$  e  $C_1^b$  coincidono :  $v^a = v^b$ .
- la tensione ai capi di  $C_1^c$  coincide con la tensione comune a  $C_1^a$  e  $C_1^b$  :  $v^c = v^a$ .
- la corrente fluente in  $C_1^c$  coincide con la somma delle correnti fluenti in  $C_1^a$  e di  $C_1^b$  :  $i^c = i^a + i^b$ .

Le precedenti relazioni sono scritte nel caso in cui i versi delle tensioni e correnti siano quelli indicati in figura. Esse valgono anche nel caso in cui il bipolo  $C_1^a$  e/o  $C_1^b$  siano sostituiti dalla porta di un multipolo. La connessione di bipoli in parallelo si estende immediatamente al caso di più di due bipoli.

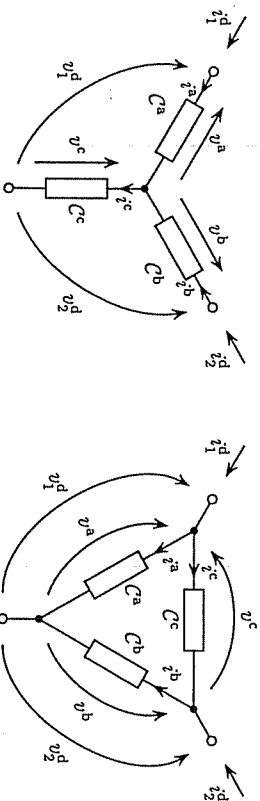


**Definizione :** Tre bipoli costituiscono un DBT a stella se formano un taglio nodale : essi hanno un terminale in comune, mentre i tre rimanenti terminali formano i terminali semplici del DBT composto. ■



**Definizione :** Tre bipoli costituiscono un DBT a triangolo se formano una maglia : i loro sei terminali formano, due a due, i tre terminali composti del DBT composto. ■

I suddetti doppi bipoli tripolari composti sono spesso disegnati con una diversa geometria, riportata nelle figure seguenti, che comunque non ha alcun significato fisico



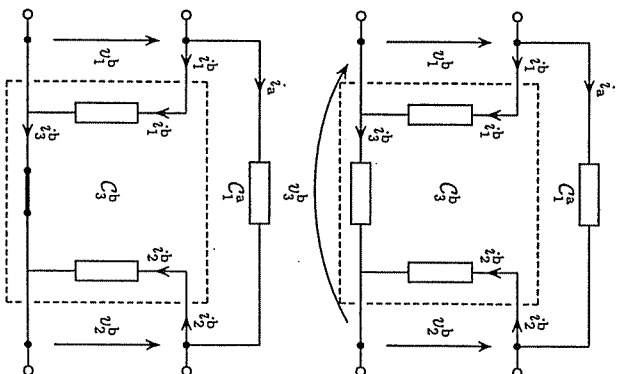
**Terminologia :** I termini "stella" e "triangolo" sono tipici dei circuiti per l'energia. Nei circuiti per l'informazione viene molto usato il termine "a triangolo".

Il termine "stella", di uso consolidato, non è altro che un sinonimo di "taglio nodale", se ricorriamo alla terminologia più usata per i grafi (vedere Cap. 3). Comunque in questi appunti noi la usiamo solamente come sinonimo di taglio nodale costituito da tre rami. Analogamente il termine "triangolo" è sinonimo di maglia costituita da tre rami. ■

### 6.5.4 Connessione trasversale di un bipolo e un DBT

Consideriamo l'aggregazione del bipolo  $C_1^a$  a due terminali di porte diverse del generico quadripolo  $C_3^b$  che da origine al quadripolo composto  $C_3^c$ . In questo caso il bipolo fittizio intermedio, anche qualora  $C_3^c$  operasse come DBI, è percorso dalla corrente  $i_3 = -i_a \neq 0$  : quindi  $C_3^c$  non è in grado di operare come DBI.

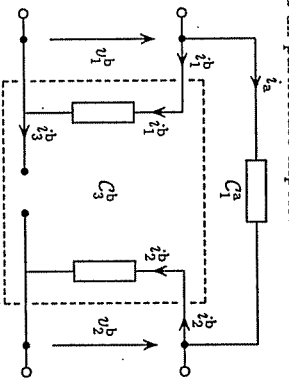
Qualora il bipolo fittizio intermedio sia un c.c., il quadripolo  $C_3^b$  si riduce a un DBT e, conseguentemente anche  $C_3^c$  è un DBT composto. Questa connessione, di notevole interesse pratico, prende il nome di *connessione trasversale* di un bipolo a un DBT. Essa può essere studiata come il parallelo di due DBT, avendo trasformato il bipolo  $C_1^a$  in un secondo DBT con l'aggiunta di un terzo terminale isolato (Cap. 3).





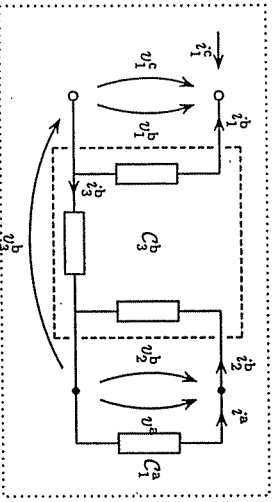
**Avvertenza :** La connessione a triangolo di tre bipoli (vedere Par. 6.5.3) può essere vista come la connessione trasversale di un bipolo a un particolare tripolo.

Qualora il bipolo fittizio intermedio sia un c.a., il quadripolo  $C_3^b$  si riduce a un DBP e, qualora  $C_3^c$  operi come DBI, il bipolo  $C_1^a$  forma un taglio di un solo ramo. Quindi la corrente  $i_a$  è nulla e la connessione risulta di limitato interesse. Qualora  $C_3^c$  operasse come un generico quadripolo, la connessione dovrebbe essere esaminata con connessione di un bipolo a due terminali di un quadripolo.



**6.5.5 Doppio bipolo chiuso su un bipolo**

La porta di destra (2) del quadripolo  $C_3^b$  è chiusa sul bipolo  $C_1^a$  dando origine al bipolo composto  $C_3^c \equiv$  definito dalla porta di sinistra (1) di  $C_3^b$ . Quindi la tensione e la corrente della prima porta del doppio bipolo coincidono con le corrispondenti grandezze del bipolo composto. Nel caso che  $C_3^b$  sia un generico quadripolo, esso opera come un DBI, dal momento che il bipolo fittizio intermedio (porta 3) forma un taglio di un unico ramo. Comunque in molti casi di interesse  $C_3^b$  può essere sia un DBT sia un DBP.



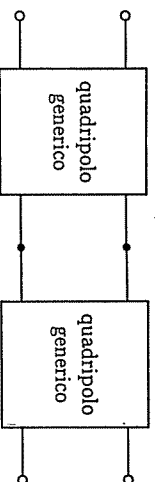
**6.5.6 Bipolo in serie al terminale comune di un DBT**

Il bipolo  $C_1^a$  è connesso in serie al terminale comune del DBT  $C_2^b$  dando origine al DBT composto  $C_3^c \equiv$  Commun $\{C_1^a, C_2^b\}$ . Le correnti del DBT composto coincidono con quelle del DBT aggregato, mentre le tensioni sono date dalle tensioni del DBT aggregato sommate alla tensione del bipolo in serie.

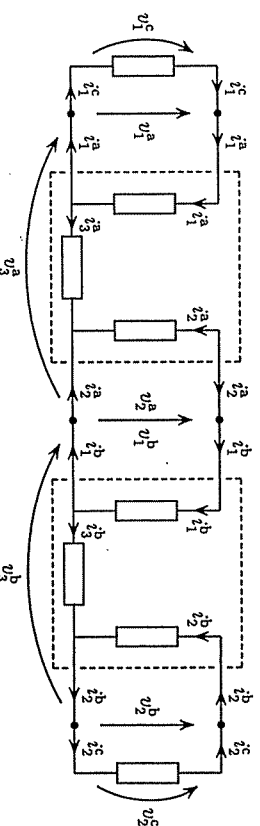
**Avvertenza :** La connessione a stella può essere vista come la connessione di un bipolo in serie al terminale comune di un particolare tripolo.

**6.5.7 Cascata di doppi bipoli**

La figura qui accanto mostra due quadripoli qualsiasi (QQ)  $C_3^a$  e  $C_3^b$  con una porta in comune : essi formano il quadripolo composto  $C_3^c$ .



Indicando i tre bipoli fittizi a catena di ciascun quadripolo e assumendo che il quadripolo composto sia chiuso su due bipoli (ovvero porte proprie), abbiamo :



In particolari condizioni, incontrate molto spesso nella pratica ed elencate nel sottostante quadro, la connessione di  $C_3^a$  e  $C_3^b$  può essere vista come la cascata di due doppi bipoli e il quadripolo composto  $C_3^c$  come un doppio bipolo composto.

**Quadro della cascata di due doppi bipoli**

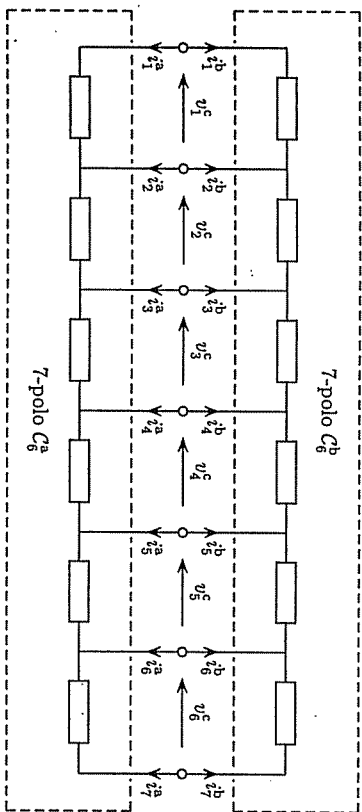
$C_3^a$	$C_3^b$	$C_3^c$	ulteriori commenti
DBT	DBT	DBT	cascata di due DBT costituenti un DBT
DBP	DBP	DBP	cascata di due DBP costituenti un DBP
DBP	DBT	DBP	cascata di un DBP e un DBT costituenti un DBP
DBT	DBP	DBP	cascata di un DBT e un DBP costituenti un DBP
QQ	DBP	DBP	$C_3^a$ opera come DBI $\implies$ cascata di un DBI e un DBP
DBP	QQ	DBP	$C_3^b$ opera come DBI $\implies$ cascata di un DBP e un DBI
DBT	QQ	DBT	se $C_3^a$ : DBI anche $C_3^b$ : DBI $\implies$ cascata di un DBT e un DBI
QQ	DBT	QQ	se $C_3^b$ : DBI anche $C_3^a$ : DBI $\implies$ cascata di un DBI e un DBT
QQ	QQ	QQ	se $C_3^a$ : DBI anche $C_3^b$ : DBI $\implies$ cascata di due DBI

**Prova :** esaminare i tagli di cui fanno parte le porte intermedie di  $C_3^a$  e  $C_3^b$  e verificare se esse fanno parte di tagli formati da un solo ramo.  
In presenza della cascata di due doppi bipoli, la tensione e la corrente della seconda porta

del doppio bipolo  $C_2^a$  coincidono con la tensione e la corrente prima porta del doppio bipolo  $C_2^b$ , mentre la tensione e la corrente della prima porta del doppio bipolo  $C_3^a$  e della seconda porta del doppio bipolo  $C_3^b$  coincidono con quelle del doppio bipolo composto.

6.5.8 Parallelo di due  $k$ -porte

La figura qui accanto mostra due  $k$ -porte qualsiasi  $C_k^a$  e  $C_k^b$  con la stessa struttura di porte normali, proprie, latenti ... Quindi le  $k$  porte di  $C_k^a$  e  $C_k^b$  corrispondono alle stesse coppie di terminali. Nel caso che i terminali corrispondenti dei due  $k$ -porte siano connessi insieme anche le  $k$ -porte sono connessi in parallelo e costituiscono un  $k$ -porta composto  $C_k^c$ . Nel caso del parallelo di due 7-porte, in cui abbiamo scelto i bipoli fittizi in modo analogo, abbiamo la figura seguente :



ATTENZIONE la FIGURA può essere interpretata erroneamente ???

Proprietà : le relazioni tra le tensioni e correnti dei due 7-porte originari e del 7-porta composto sono una banale generalizzazione di quelle del parallelo di due bipoli ( $k = 1$ ) :

$$v_1^c = v_1^a = v_1^b, \quad v_2^c = v_2^a = v_2^b, \quad \dots, \quad v_k^c = v_k^a = v_k^b$$

$$i_1^c = i_1^a + i_1^b, \quad i_2^c = i_2^a + i_2^b, \quad \dots, \quad i_k^c = i_k^a + i_k^b$$

6.5.9 Parallelo di doppi bipoli

La figura qui accanto mostra due quadripoli qualsiasi (QQ)  $C_3^a$  e  $C_3^b$  connessi in parallelo e costituenti il quadripolo composto  $C_3^c$ . In particolari condizioni, incontrate spesso nella pratica ed elencate nel sottostante quadro, la connessione di  $C_3^a$  e  $C_3^b$  può essere vista come il parallelo di due doppi bipoli e il quadripolo composto come un doppio bipolo.

Proprietà : le proprietà topologiche riguardanti la connessione parallelo di due doppi bipoli sono raccolte nel quadro :

Quadro del parallelo di due doppi bipoli

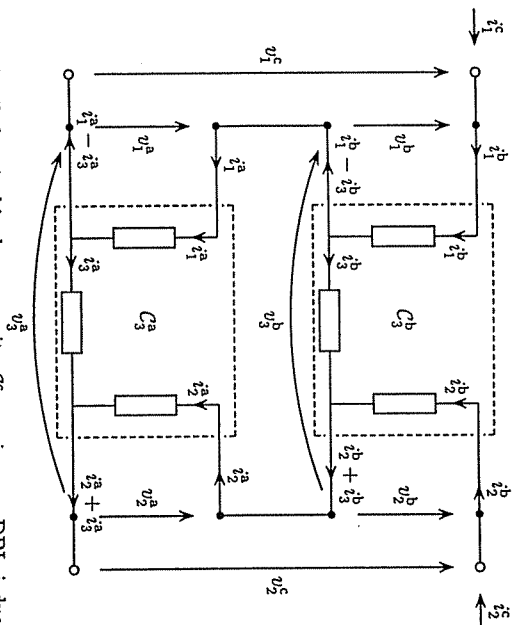
$C_3^a$	$C_3^b$	$C_3^c$	ulteriori commenti
DBT	DBT	DBT	parallelo di due DBT costituenti un DBT
DBP	DBP	DBP	parallelo di due DBP costituenti un DBP
DBT	DBP	DBT	parallelo di un DBT e un DBP costituenti un DBT
DBP	DBT	DBT	parallelo di un DBT e un DBP costituenti un DBT
QQ	DBP	QQ	se $C_3^c$ : DBI anche $C_3^a$ : DBI $\implies$ parallelo di un DBI e un DBP
DBP	QQ	QQ	se $C_3^c$ : DBI anche $C_3^b$ : DBI $\implies$ parallelo di un DBP e un DBI
QQ	DBT	DBT	$C_3^a$ non opera come DBI anche se $C_3^c$ opera come DBI
DBT	QQ	DBT	$C_3^b$ non opera come DBI anche se $C_3^c$ opera come DBI
DBT	DBT	DBT	$C_3^a$ e $C_3^b$ non operano come DBI anche se $C_3^c$ opera come DBI

Prova : la dimostrazione delle suddette affermazioni segue l'esame del ruolo delle porte intermedie di  $C_3^a$  e  $C_3^b$ . Cioè occorre verificare se esse costituiscono o non costituiscono un taglio di un solo ramo.

Quando siamo in presenza di due doppi bipoli in parallelo, le tensioni del doppio bipolo composto coincidono con quelle dei due doppi bipoli aggregati, mentre le correnti del doppio bipolo composto sono uguali alla somma delle rispettive correnti dei due doppi bipoli aggregati.

6.5.10 Serie di doppi bipoli

I due quadripoli qualsiasi (QQ)  $C_3^a$  e  $C_3^b$  sono rappresentati da tre bipoli fittizi ciascuno :  $C_3^a$  e  $C_3^b$  hanno una coppia di terminali in comune e formano il quadripolo composto  $C_3^c$ . Per entrambi abbiamo scelto tre bipoli fittizi a catena.



Anche nel caso che il doppio bipolo composto  $C_3^c$  operi come DBI, i due bipoli fittizi intermedi costituiscono un taglio, per cui le corrispondenti correnti  $i_3^a$  e  $i_3^b$  non sono in genere nulle. Quindi sia  $C_3^a$  sia  $C_3^b$  non operano come DBI. Qualora uno o entrambi i quadripoli  $C_3^a$  e  $C_3^b$  sono DBP/DBT, la connessione può essere considerata come la serie di due doppi bipoli, come discusso nel quadro seguente :

*Quadro delle condizioni per la serie di due doppi bipoli*

$C_3^a$	$C_3^b$	$C_3^c$	ulteriori commenti
DBT	DBT	QQ	se $C_3^a$ e $C_3^b$ speculari e $C_3^c$ : DBI $\implies$ serie di due DBT
DBP	DBP	DBP	serie di due DBP costituenti un DBP
DBT	DBP	DBT	serie di un DBT e un DBP costituenti un DBT
DBP	DBT	QQ	come il primo caso
QQ	DBP	QQ	se $C_3^c$ : DBI anche $C_3^a$ : DBI $\implies$ serie di un DBI e un DBP
DBP	QQ	QQ	$C_3^c$ : DBI anche $C_3^b$ : DBI $\implies$ serie di un DBP e un DBI
QQ	DBT	DBT	$C_3^c$ non opera come DBI anche se $C_3^a$ opera come DBI
DBT	QQ	DBT	$C_3^c$ non opera come DBI anche se $C_3^b$ opera come DBI
QQ	QQ	QQ	$C_3^a$ e $C_3^b$ non operano come DBI anche se $C_3^c$ opera come DBI

*Prova* : la dimostrazione delle suddette affermazioni segue l'esame del ruolo delle porte intermedie di  $C_3^a$  e  $C_3^b$ . Ciò occorre verificare se esse costituiscono o non costituiscono un

taglio di un solo ramo. Quando siamo in presenza di due doppi bipoli in serie, le correnti del doppio bipolo composto coincidono con quelle dei due doppi bipoli aggregati, mentre le tensioni del doppio bipolo composto sono uguali alla somma delle rispettive tensioni dei due doppi bipoli aggregati.

WWWWW??? DOPPI BIPOLI IN SERIE.

# 7 BIPOLI

## e CIRCUITI SEMPLICI ADINAMICI TEMPO-INVARIANTI e LINEARI

WWWWWW?? FIGURA EMBLEMATICA : rete a scala con entro tutti i bipoli notevoli compresi c.c., c.a., modelli di Thevenin e Norton

Con questo capitolo iniziamo l'analisi dei componenti e circuiti adinamici, tempo-invarianti e lineari, che terminerà con il Cap. 13, mentre l'analisi delle altre classi di componenti e circuiti (tempo-varianti e/o dinamici e/o nonlineari) è rinviato ai capitoli successivi al Cap. 13. Il presente capitolo si sofferma sui bipoli di questa classe, le loro connessioni serie e parallelo e i circuiti più semplici costituiti da questi bipoli.

**Sez. 7.1 : Bipoli generici :** Vengono esaminati i generici bipoli adinamici, tempo-invarianti e lineari, distinguendoli in bipoli impressivi o nonimpressivi, omogenei o nonomogenei, bilaterali e unilaterali ed analizzando le loro proprietà energetiche.

**Sez. 7.2 : Bipoli notevoli :** Tra i bipoli notevoli hanno un ruolo importante il *corto circuito* (c.c.), il *circuito aperto* (c.a.), la  *sorgente di tensione impressiva* (sVI), la  *sorgente di corrente impressiva* (sII), già incontrati nei CCap. 5 e 6, e il *resistore*. Infine vengono introdotti i *modelli di THEVENIN* e *NORTON* atti a rappresentare un generico bipolo.

**Sez. 7.3 : Serie e parallelo di bipoli :** Dall'esame delle *aggregazioni serie e parallelo* dei bipoli viene derivata la caratteristica del bipolo composto mediante facili ma importanti formule. Inoltre vengono enunciate le regole riguardanti la ripartizione della tensione e della corrente per i rispettivi *partitori resistivi di tensione e corrente*.

**Sez. 7.4 : Analisi di circuiti semplici :** Sono introdotti tre metodi di analisi di circuiti semplici caratterizzati da strutture serie, parallelo o miste di bipoli. I due *teoremi di MILLMAN* danno delle regole facili per analizzare i circuiti formati, rispettivamente, dal parallelo e dalla serie di bipoli. Infine, il *metodo della falsa posizione* consente di analizzare rapidamente i circuiti caratterizzati da una *struttura a scala* di bipoli.

**Sez. 7.5 : Generatori fisici : rendimento :** Una misura accurata di molti bipoli fisici, che in genere erogano potenza (chiamati usualmente *generatori*), consente di verificare che la loro caratteristica non è parallela a uno degli assi del piano  $v-i$ . Le *sorgenti nominali* hanno lo scopo di fornire modelli più accurati dei generatori. In particolare vengono introdotti i rendimenti del modello e i rendimenti reali delle sorgenti nominali.

### 7.1 BIPOLI GENERICI

Vengono esaminati i bipoli adinamici, tempo-invarianti e lineari, mettendo in rilievo le loro proprietà elettriche ed energetiche: in particolare i bipoli vengono suddivisi in *impressivi* o *nonimpressivi*, *omogenei* o *nonomogenei*.

#### 7.1.1 Classificazioni

**Rappresentazione implicita :** La relazione costitutiva di un generico bipolo adinamico tempo-invariante e lineare consiste in un'unica equazione scalare  $h^v v + h^i i = \hat{h}$ , in cui  $h^v$  e  $h^i$  non possono essere simultaneamente nulli. Essa descrive una generica retta nel piano  $v-i$  e prende il nome di *rappresentazione implicita* del bipolo. Per lo stesso bipolo possono esistere infinite rappresentazioni implicite equivalenti: esse si distinguono per un diverso fattore moltiplicativo comune ai tre coefficienti.

**Definizione :** La tensione  $v$  ovvero la corrente  $i$  viene detta *nonvincolata*, se non compare nella rappresentazione (implicita), cioè se  $h^v = 0$  ovvero  $h^i = 0$ .

**Sottoclassi :** I bipoli adinamici, tempo-invarianti e lineari sono suddivisi in quattro sottoclassi dipendenti dalla struttura dei tre coefficienti della rappresentazione implicita :

bipolo adin. tempo-inv. lineare	struttura dei coefficienti
omogeneo e impressivo	caso 1 $h^v = 0, h^i \neq 0$ caso 2 $h^v \neq 0, h^i = 0$ $\hat{h} = 0$
nonomogeneo e impressivo	caso 1 $h^v = 0, h^i \neq 0$ caso 2 $h^v \neq 0, h^i = 0$ $\hat{h} \neq 0$
omogeneo e nonimpressivo	$h^v \neq 0, h^i \neq 0$ $\hat{h} = 0$
nonomogeneo e nonimpressivo	$h^v \neq 0, h^i \neq 0$ $\hat{h} \neq 0$

Il termine "omogeneo" ["nonomogeneo"] significa che la situazione ( $v = 0, i = 0$ ) appartiene [non appartiene] al dominio costitutivo del bipolo. Quindi la caratteristica dei bipoli omogenei [nonomogenei] passa [non passa] per l'origine del piano  $v-i$ .

Il termine "impressivo" ["nonimpressivo"] significa che una delle grandezze è nonvincolata, mentre la rimanente assume un valore fisso. La caratteristica risulta parallela ad uno degli assi del piano  $v-i$ .

**Bipolo omogeneo associato :** Se annulliamo il termine noto  $\hat{h}$  di una rappresentazione implicita di un bipolo nonomogeneo, noi definiamo la caratteristica di un diverso bipolo. Questo bipolo viene chiamato *bipolo omogeneo associato* al precedente :

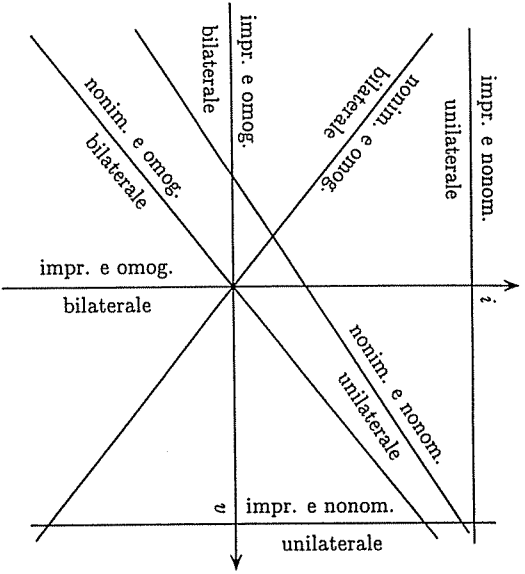
$$h^v v + h^i i = \hat{h} \implies h^v v + h^i i = 0$$

generico bipolo nonomogeneo  $\implies$  bipolo omogeneo associato

**Bilateralità e unilaterali :** In accordo alla definizione data nel Sez. 6.4, tutti i bipoli omogenei sono bilaterali, mentre i bipoli nonomogenei sono unilaterali. Infatti cambiando segno alla tensione alla corrente nella rappresentazione implicita, si ha :

$$h^v v + h^i i = 0 \implies -h^v v - h^i i = 0 \text{ (equivalente alla precedente)}$$

bilaterale :  $h^v v + h^i i = \hat{h} \implies -h^v v - h^i i = \hat{h}$  (non equivalente alla precedente) ■



BIPOLI IMPRESSIVI/NONIMPRESSIVI, OMOGENEI/NONOMOGENEI E UNILATERALI/BILATERALI.

**Valori ammissibili:** I valori di  $v$  [  $i$  ] per cui  $f(v, i) = 0$  ha una o più soluzioni nella  $i$  [  $v$  ] sono detti **valori ammissibili di tensione [corrente]**.

**Commento:** I bipoli nonimpressivi (caso:  $h^v \neq 0, h^i \neq 0$ ) ammettono ogni valore di tensione e corrente. I bipoli impressivi ammettono un solo valore ammissibile della corrente (nel caso  $h^v = 0$ ) ovvero della tensione (nel caso  $h^i = 0$ ).

**Rappresentazioni esplicite:** Una generica rappresentazione implicita di un bipolo diventa una **rappresentazione esplicita** qualora  $v$  ovvero  $i$  sia esplicitata a primo membro:

- Rappresentazione esplicita controllata in corrente  $v \leftarrow i$ :*  $v = r i + \hat{v}$ . Essa esiste se e solo se  $h^v \neq 0$ . In questo caso il bipolo è detto **controllabile in corrente**.
- Rappresentazione esplicita controllata in tensione  $i \leftarrow v$ :*  $i = g v + \hat{i}$ . Essa esiste se e solo se  $h^i \neq 0$ . In questo caso il bipolo è detto **controllabile in tensione**.

I parametri delle due rappresentazioni esplicite  $r, \hat{v}$ ,  $g$  e  $\hat{i}$  sono indicati con simboli specifici che ricordano il loro significato fisico.

**Commento:** Si può verificare immediatamente che i bipoli nonimpressivi sono controllabili sia in tensione sia in corrente. ■

**7.1.2 Potenza dei bipoli**

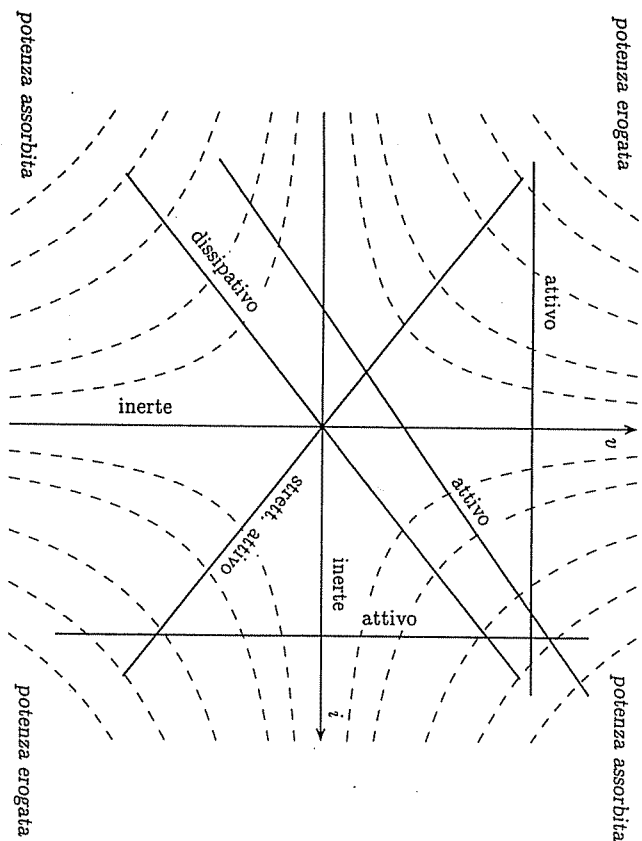
Il prodotto  $v i$  denota la potenza assorbita (con la convenzione normale) ovvero erogata (con la convenzione nonnormale). Il valore assoluto della potenza scambiata dal bipolo col resto del circuito coincide, in ogni caso, con l'area del rettangolo con due lati appoggiati ai due assi del piano  $v-i$  e col vertice opposto coincidente col punto della caratteristica in cui il bipolo si trova a operare. Il seguente quadro spiega il comportamento della potenza in ciascun quadrante del piano  $v-i$ :

Convenzione normale		Convenzione nonnormale	
quadrante	potenza	quadrante	potenza :
$v > 0, i > 0$	eroga potenza	$v > 0, i > 0$	eroga potenza
$v > 0, i < 0$	assorbe potenza	$v > 0, i < 0$	assorbe potenza
$v < 0, i > 0$	eroga potenza	$v < 0, i > 0$	eroga potenza
$v < 0, i < 0$	assorbe potenza	$v < 0, i < 0$	eroga potenza

Per analizzare la potenza che un bipolo scambia col resto del circuito, è necessario introdurre alcune definizioni per distinguere i diversi comportamenti energetici: esse risultano più comprensibili se tracciamo la caratteristica del bipolo nel piano  $v-i$ .

**Definizioni:** Un generico bipolo dinamico e lineare può essere classificato:

- Un bipolo è **inerte** quando la potenza assorbita  $p = 0$  in qualsiasi situazione elettrica: ogni punto della caratteristica giace su uno degli assi.
  - Un bipolo è **dissipativo** quando la potenza assorbita  $p \geq 0$  in qualsiasi situazione elettrica: la caratteristica giace nel primo e terzo quadrante (assi compresi).
  - Un bipolo è **strettamente attivo** quando la potenza assorbita  $p \leq 0$  in qualsiasi situazione elettrica: la caratteristica giace nel secondo e/o quarto quadrante (assi compresi).
  - Un bipolo è **attivo** quando la potenza assorbita  $p$  può essere sia positiva sia negativa: la caratteristica giace sia nel primo e/o terzo quadrante sia nel secondo e/o quarto quadrante. Per esempio, qualsiasi bipolo nonomogeneo e nonimpressivo. ■
- La seguente figura riporta le caratteristiche di alcuni bipoli con le suddette proprietà energetiche: in essa sono tracciate anche le iperboli equilaterale che rappresentano le curve con potenza erogata/assorbita  $v i = \text{costante}$ :



7.2 BIPOLI NOTEVOLI

In questa sezione esaminiamo i bipoli notevoli cioè i bipoli che hanno alcune peculiarità nella loro caratteristica e che sono nello stesso tempo modelli di bipoli fisici molto diffusi. Tra i bipoli notevoli rientrano il c.c., il c.a., le sVI e le sII già incontrati nei CCap. 5 e 6.

7.2.1 Quadro dei bipoli notevoli

Quadro dei bipoli *ad invarianti*, *tempo-invarianti* e *lineari*

rappresentazione implicita $h^v v + h^i i = \hat{h}$ (convenzione normale) dove i coefficienti $h^v$ e $h^i$ non possono essere simultaneamente nulli		<i>nonimpresivo</i> $h^v \neq 0, h^i \neq 0$ controllabile sia in tensione sia in corrente esistono le due rappresentazioni	
<i>impresivo</i> $h^v = 0, h^i \neq 0$ controllabile solo in tensione esiste l'unica rappresentazione	<i>impresivo</i> $h^v \neq 0, h^i = 0$ controllabile solo in corrente esiste l'unica rappresentazione	$i \leftarrow v$	$v \leftarrow i$
<i>omogeneo</i>	<i>omogeneo</i>	<i>circuito aperto</i> c.a. <sup>(1)</sup>	<i>corto circuito</i> c.c. <sup>(1)</sup>
$i(t) = 0$ $v$ nonvincolata	$v(t) = 0$ $i$ nonvincolata		
$p = 0$ $0 \leq p \leq 0$	$p = 0$ $0 \leq p \leq 0$	$i(t) = g v(t)$ $g \equiv$ conduttanza	$v(t) = r i(t)$ $r \equiv$ resistenza
$h = 0$ bilaterale	$h = 0$ bilaterale		
$p = g v^2$   $p = r i^2$	$0 \leq p < \infty \forall r = 1/g > 0$ $-\infty < p \leq 0 \forall r = 1/g < 0$	senza un nome specifico modello <sup>(2)</sup> di NORRÖN   modello <sup>(2)</sup> di THÉVENIN	
$p = g v^2$   $p = r i^2$	$0 \leq p < \infty \forall r = 1/g > 0$ $-\infty < p \leq 0 \forall r = 1/g < 0$	dissipativo $\forall r = 1/g > 0$ strett. attivo $\forall r = 1/g < 0$	
<i>nonomog.</i>	<i>nonomog.</i>	<i>sorgente di corrente</i> sII <sup>(1)</sup>	<i>sorgente di tensione</i> sVI <sup>(1)</sup>
$i = \hat{i}$ $v$ nonvincolata	$v = \hat{v}$ $i$ nonvincolata	$\hat{i} \equiv$ corrente impressa	$\hat{v} \equiv$ tensione impressa
$p = \hat{i} v$	$p = \hat{v} i$		
$-\infty < p < \infty$ attivo	$-\infty < p < \infty$ attivo	$\hat{i} \equiv$ corrente impressa $g \equiv$ conduttanza	$\hat{v} \equiv$ tensione impressa $r \equiv$ resistenza
$p = \hat{i} v + g v^2$	$p = \hat{v} i + r i^2$	modello <sup>(2)</sup> di NORRÖN   modello <sup>(2)</sup> di THÉVENIN	
$-\infty < p < \infty \forall r = 1/g > 0$ $-\infty < p \leq -\frac{\hat{v}^2}{4r} \forall r = 1/g < 0$ attivo $\forall r, g \in \mathbb{R}^1$	$-\infty < p < \infty \forall r = 1/g > 0$ $-\infty < p \leq -\frac{\hat{i}^2}{4r} \forall r = 1/g < 0$ attivo $\forall r, g \in \mathbb{R}^1$	senza un nome specifico modello <sup>(2)</sup> di THÉVENIN	
$p = \hat{i} v + g v^2$	$p = \hat{v} i + r i^2$	modello <sup>(2)</sup> di NORRÖN   modello <sup>(2)</sup> di THÉVENIN	
$-\infty < p < \infty \forall r = 1/g > 0$ $-\infty < p \leq -\frac{\hat{v}^2}{4r} \forall r = 1/g < 0$ attivo $\forall r, g \in \mathbb{R}^1$	$-\infty < p < \infty \forall r = 1/g > 0$ $-\infty < p \leq -\frac{\hat{i}^2}{4r} \forall r = 1/g < 0$ attivo $\forall r, g \in \mathbb{R}^1$	senza un nome specifico modello <sup>(2)</sup> di THÉVENIN	

<sup>(1)</sup> vedere Par. 7.2.2, <sup>(2)</sup> vedere Par. 7.2.3

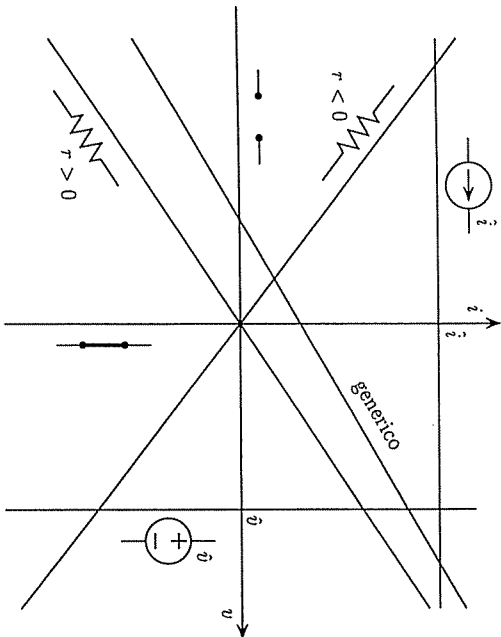
7.2.2 Piano della caratteristica

Esaminiamo i suddetti bipoli notevoli tracciandone la caratteristica nel piano  $v-i$  :

- La caratteristica del *corto circuito* coincide con l'asse della corrente, mentre la caratteristica del *circuito aperto* coincide con l'asse della tensione. Entrambi sono inerti. Notare che il c.c. e il c.a. sono stati introdotti già nella Sez. 6.1

- La caratteristica della *sorgente (impressiva) di tensione* è una retta parallela all'asse della corrente, mentre la caratteristica della *sorgente (impressiva) di corrente* è una retta parallela all'asse della tensione. Il termine "sorgente impressiva" indica le sorgenti ideali sia di tensione sia di corrente, quindi equivale al termine "sorgente ideale" molto usato nella letteratura. Entrambe sono attive. Notare che le sVi e le sIi sono state già introdotte nel Par. 5.6.1

- La caratteristica del *resistore* : è una retta inclinata passante per l'origine. Esso è dissipativo ( $r > 0$ , resistore positivo) ovvero strettamente attivo ( $r < 0$ , resistore negativo). La resistenza viene misurata in ohm  $[\Omega]$  e la conduttanza in siemens  $[S]$  ovvero  $[\Omega^{-1}]$ .



BIPOLI ADINAMICI, TEMPO-INVARIANTI E LINEARI NOTEVOLI

**Commento** : Il c.c. e il c.a. sono i bipoli omogenei associati, rispettivamente, alla sVi e alla sIi, mentre il bipolo omogeneo associato a un bipolo nonimpressivo e nonomogeneo è un resistore. Il quadro riporta nella parte superiore i bipoli omogenei associati a quelli nonomogenei riportati nella parte inferiore.

**Resistori con resistenza negativa** : Lo studente spesso si chiede se i resistori con resistenza negativa esistono o sono una inutile invenzione accademica per rendere più difficili gli esercizi per superare gli esami. Quasi tutti i resistori fisici disponibili hanno una resistenza positiva cioè assorbono potenza effettiva positiva in qualsiasi situazione si

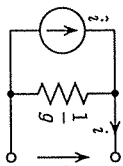
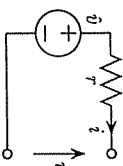
trovino a operare. Ma esistono resistori nonlineari che in certi tratti della caratteristica esibiscono pendenze negative della stessa. E se il resistore si trova ad operare in un tratto con pendenza negativa esso è equivalente a una sVi ovvero a una sIi con in serie ovvero parallelo un resistore con resistenza negativa. D'altra parte vedremo in seguito che quando in un bipolo composto sono presenti sorgenti pilotate (vedere Cap. 10) il bipolo stesso può risultare equivalente a un resistore con resistenza negativa, benché tutti i resistori al suo interno abbiano una resistenza positiva.

7.2.3 Modelli di Thévenin e Norton

Dal quadro generale dei bipoli nel Par. 7.2.1 abbiamo visto che per un bipolo nonimpressivo e nonomogeneo esistono due modelli equivalenti : essi sono stati descritti usando la convenzione normale.

Qui di seguito, assumendo la convenzione nonnormale per entrambe le rappresentazioni esplicite, riconsideriamo i due modelli :

Il **modello di THÉVENIN**, derivato dalla rappresentazione  $v = \hat{v} - r i$ , è costituito dalla serie di una  $\hat{V}(\hat{v})$  e un  $\mathcal{R}(r)$ , dove  $r$  ha il ruolo di *resistenza interna* :



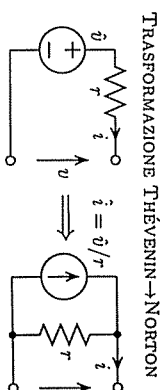
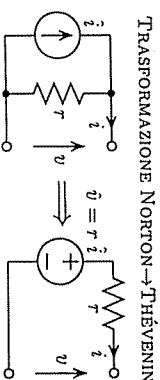
**Trasformazioni tra i modelli di Thévenin e di Norton**

Dalla rappresentazione  $i \leftarrow v$  possiamo ottenere, con una semplice operazione algebrica, la rappresentazione  $v \leftarrow i$  :

$$i = \hat{i} - g v \implies v = \hat{v} - r i$$

$$v = \hat{v} - r i \implies i = \hat{i} - g v$$

da cui possiamo stabilire le regole pratiche per passare da un modello all'altro :



**Terminologia** : THÉVENIN e NORTON sono universalmente noti per i rispettivi Teoremi (Cap. 11). Qui abbiamo dato i loro nomi anche ai modelli ottenuti dai due Teoremi. ■

**Commento** : La resistenza ovvero la conduttanza dei resistori presenti nei due modelli equivalenti è la stessa. Infatti essa coincide con la resistenza del bipolo omogeneo associato che non dipende dalla rappresentazione. Questo risultato è un caso particolare del primo teorema di equivalenza, che sarà enunciato per i modelli di componenti con un numero qualsiasi di porte nel Cap. 8. ■

**Commento** : Siccome i modelli di THÉVENIN e di NORTON di un bipolo non omogeneo e nonimpresivo sono equivalenti, ci si chiede se non basta conoscerne uno solo dei due per affrontare lo studio dei circuiti. In realtà è molto conveniente usare entrambi : ciascun modello è più appropriato per eseguire specifiche analisi e semplificazioni all'interno di un circuito (vedere Sez. 7.3).

Le rappresentazioni esplicite dei bipoli ci consentono di scrivere espressioni della potenza elettrica dei bipoli stessi.

**Potenza minima e massima** : La potenza erogabile ovvero assorbibile dai bipoli impressivi e non omogenei (sVi e sIi) non è soggetta ad alcun limite inferiore e superiore. Infatti la potenza,  $\hat{v}$   $i$  (per sVi) e  $\hat{i}$   $v$  (per sIi) consiste nel prodotto di una grandezza fissa e una nonvincolata. Per i bipoli nonimpresivi e non omogenei la potenza erogata può essere sia negativa sia positiva in dipendenza della situazione elettrica del bipolo. Tuttavia, essa non può assumere tutti i valori tra  $-\infty$  e  $+\infty$ .

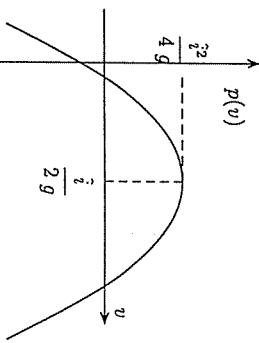
Assumendo la convenzione nonnormale per il bipolo, la potenza erogata  $p = v i$  può essere

espressa in funzione della tensione  $[p(v)]$  o della corrente  $[p(i)]$  :

Nel caso  $g > 0$  (più frequente), dalla rappresentazione  $i \leftarrow v$  otteniamo :

$$p(v) = i v - g v^2 = \frac{i^2}{4g} - \left( v\sqrt{g} - \frac{i}{2\sqrt{g}} \right)^2$$

il cui grafico è una parabola :



La potenza  $p(v)$  è compresa nell'intervallo :  $-\infty < p(v) \leq i^2/(4g)$ .  
Nel caso  $g < 0$  (più raro)  $p(v)$  risulta :

$$p(v) = -\frac{i^2}{4|g|} + \left( v\sqrt{|g|} + \frac{i}{2\sqrt{|g|}} \right)^2$$

il cui grafico è una parabola rivolta verso l'alto, mentre  $p(v)$  è compresa nell'intervallo :  $-i^2/(4g) \leq p(v) < +\infty$   $V v$ .

**Definizione** : La potenza massima  $p_{max}$  erogabile da un bipolo non omogeneo e nonimpresivo (con resistenza interna positiva) viene chiamata **potenza disponibile** del bipolo.

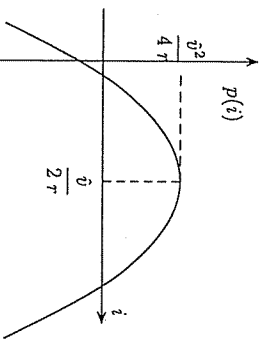
**Proprietà** : Dalle precedenti espressioni della potenza si ha che la potenza disponibile di un bipolo non omogeneo e nonimpresivo con resistenza interna  $r$  positiva è

$$p_{max} = \frac{\hat{v}^2}{4r} = \frac{i^2}{4g}$$

Nel caso  $r > 0$  (più frequente), dalla rappresentazione  $v \leftarrow i$  otteniamo :

$$p(i) = \hat{v}i - r i^2 = \frac{\hat{v}^2}{4r} - \left( i\sqrt{r} - \frac{\hat{v}}{2\sqrt{r}} \right)^2$$

il cui grafico è una parabola :



La potenza  $p(i)$  è compresa nell'intervallo :  $-\infty < p(i) \leq g \hat{v}^2/4$ .  
Nel caso  $r < 0$  (più raro),  $p(i)$  risulta :

$$p(i) = -\frac{\hat{v}^2}{4|r|} + \left( i\sqrt{|r|} + \frac{\hat{v}}{2\sqrt{|r|}} \right)^2$$

il cui grafico è una parabola rivolta verso l'alto, mentre  $p(i)$  è compresa nell'intervallo :  $-g \hat{v}^2/4 \leq p(i) < +\infty$   $V i$ .

**Proprietà** : Dalle precedenti espressioni della potenza si ha che la potenza disponibile di un bipolo non omogeneo e nonimpresivo con resistenza interna  $r$  positiva è

$$p_{max} = \frac{\hat{v}^2}{4r} = \frac{i^2}{4g}$$

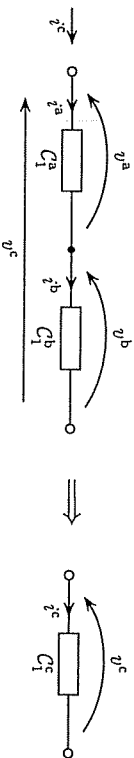
Questo valore massimo viene raggiunto per  $v = \hat{v}/(2g)$  ovvero per  $i = \hat{i}/(2r)$ .

### 7.3 SERIE E PARALLELO DI BIPOLI

Vengono esaminate le aggregazioni serie e parallelo di bipoli adinamici tempo-invarianti e lineari di maggior interesse : da questo esame sistematico viene derivata la caratteristica del bipolo composito. Alcune delle formule vengono usate frequentemente nella soluzione dei problemi di interesse pratico. Infine vengono enunciate le ben note regole per la ripartizione della tensione e della corrente all'interno dei rispettivi partitori resistivi di tensione e corrente.

#### 7.3.1 La connessione serie

Consideriamo due bipoli generici connessi in serie (costituenti un taglio nodale) :

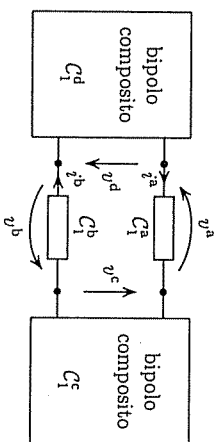


La connessione serie dei bipoli  $C^a$  e  $C^b$  da origine al bipolo composito  $C^c \equiv \text{Serie}\{C^a, C^b\}$ , in accordo alle seguenti relazioni topologiche :

- le correnti fluenti in  $C^a$  e  $C^b$  coincidono :  $i^a = i^b$ .
- la corrente fluente in  $C^c$  coincide con la corrente comune a  $C^a$  e  $C^b$  :  $i^c = i^a$ .
- la tensione ai capi di  $C^c$  coincide con la somma delle tensioni ai capi di  $C^a$  e  $C^b$  :  $v^c = v^a + v^b$ .

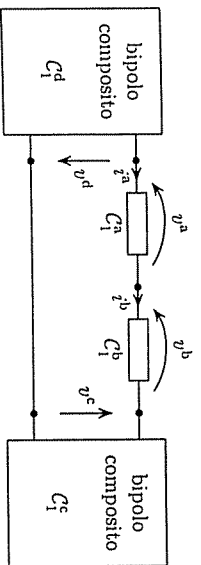
Le precedenti relazioni sono scritte nel caso in cui i versi delle tensioni e correnti siano quelli indicati in figura. Esse valgono anche nel caso in cui  $C^a$  e/o  $C^b$  siano sostituiti dalla porta di un multipolo.

Come detto nel Cap. 6 due bipoli sono in serie anche qualora essi costituiscono un taglio nonnodale, come indicato in figura. In questo caso la parte restante del circuito costituisce due bipoli compositi. In definitiva noi siamo di fronte ad un'unica maglia costituita da quattro bipoli e possiamo spostare i singoli bipoli in modo che riformino un taglio nodale.



GENERICI BIPOLI IN SERIE FORMANTI UN TAGLIO NONNODALE.



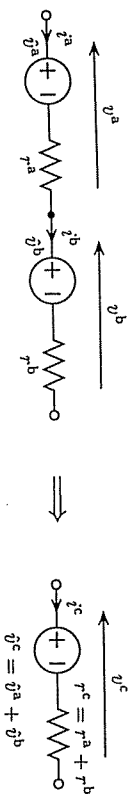


TRASFORMAZIONE DEL TAGLIO NONNODALE IN UNO NODALE.

La connessione di bipoli in serie si estende immediatamente al caso di più di due bipoli.

### 7.3.2 Connessione serie di bipoli controllabili in corrente

Qui analizziamo la serie di due bipoli adinamici nel caso in cui entrambi siano controllabili in corrente. Entrambi sono rappresentati dal modello di THEVENIN :



**Proprietà :** Il bipolo  $C_1^c \equiv \text{Serie}\{C_1^a, C_1^b\}$  composto dalla serie di due bipoli lineari e controllabili in corrente  $C_1^a$  e  $C_1^b$  è a sua volta lineare e controllabile in corrente con tensione impressa  $\hat{v}^c$  uguale alla somma delle tensioni impressa  $\hat{v}^a + \hat{v}^b$  e resistenza interna  $r^c$  uguale alla somma delle resistenze interne  $r^c = r_a + r_b$ , come risulta dalla somma delle rappresentazioni  $v \leftarrow i$  (modelli di THEVENIN) dei due bipoli :

$$\left. \begin{aligned} C_1^a : v^a = r_a i^a + \hat{v}^a \\ C_1^b : v^b = r_b i^b + \hat{v}^b \end{aligned} \right\} \Rightarrow v^a + v^b = (r_a + r_b) i^c + \hat{v}^a + \hat{v}^b \Rightarrow C_1^c : v^c = r^c i^c + \hat{v}^c$$

### 7.3.3 Connessione serie di bipoli notevoli

Nel caso in cui  $C_1^a$  e/o  $C_1^b$  non siano controllabili in corrente, la caratteristica del bipolo composto  $C_1^c$  deve essere calcolata in modo diverso.

Qui di seguito viene esaminato il bipolo composto  $C_1^c$  costituito dalla serie di due bipoli notevoli qualsiasi  $C_1^a$  e  $C_1^b$ . Tra queste vengono esaminate anche le connessioni serie di bipoli non controllabili in corrente.

WWWWWW??? IN TESTA al quadro non viene doppia riga ???WWWWW

Quadro della serie di due bipoli notevoli

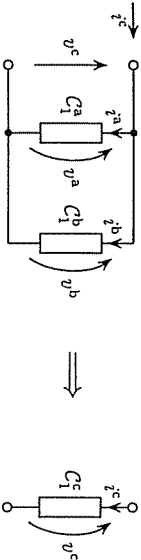
$C_1^b$	$C_1^a$				

- (1) le tensioni  $v^a$  e  $v^b$  non possono essere determinate.
  - (2) nel raro caso  $\hat{v}^a = -\hat{v}^b$  si ha un c.c.
  - (3) nel raro caso  $\hat{v}^a = \hat{v}^b$  si ha una sli, ma le tensioni  $v^a$  e  $v^b$  non possono essere determinate.
  - (4) nel raro caso  $r_a = -r_b$  si ha un c.c.
  - (5) "incomp." significa che la connessione è incompatibile.
- Commento :** Quando entrambi i bipoli connessi in serie sono controllabili in corrente, la caratteristica del bipolo composto risulta facilmente comprensibile. I casi più delicati da comprendere sono quelli in cui uno dei bipoli non risulta controllabile in corrente : cioè quando nella serie è coinvolta una sli ovvero un c.a. Infatti un generico bipolo in serie a una sli (c.a.) è equivalente alla sli (c.a.) stessa. Infatti la tensione  $v_c = v_a + v_b$

è nonvincolata essendo uguale alla la somma di due tensioni di cui una è a sua volta nonvincolata mentre la corrente  $i^c$  coincide necessariamente con quella della sfi. Quando entrambi i bipoli non sono controllabili in corrente la connessione serie è in genere incompatibile : eccetto il caso della serie di due c.c. o di due sfi con la stessa corrente impressa.

7.3.4 La connessione parallelo

Consideriamo due bipoli generici connessi in parallelo (cioè costituenti una maglia) :



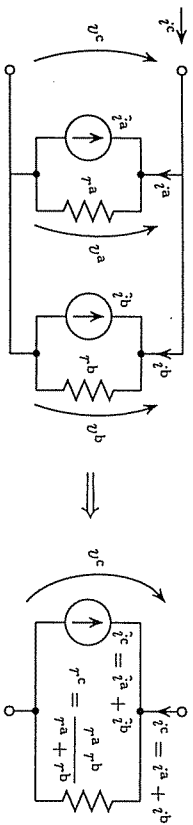
La connessione parallelo dei bipoli  $C_1^a$  e  $C_1^b$  da origine al bipolo composito  $C_1^c \equiv C_1^a || C_1^b$ , in accordo alle seguenti relazioni topologiche :

- le tensioni ai capi di  $C_1^a$  e  $C_1^b$  coincidono :  $v^a = v^b = v^c$ .
- la tensione ai capi di  $C_1^c$  coincide con la tensione comune a  $C_1^a$  e  $C_1^b$  :  $v^c = v^a = v^b$ .
- la corrente fluente in  $C_1^c$  coincide con la somma delle correnti fluenti in  $C_1^a$  e di  $C_1^b$  :  $i^c = i^a + i^b$ .

Le precedenti relazioni sono scritte nel caso in cui i versi delle tensioni e correnti siano quelli indicati in figura. Esse valgono anche nel caso in cui il bipolo  $C_1^a$  e/o  $C_1^b$  siano sostituiti dalla porta di un multipolo. La connessione di bipoli in parallelo si estende immediatamente al caso di più di due bipoli.

7.3.5 Connessione parallelo di bipoli controllabili in tensione

Qui analizziamo il parallelo di due bipoli nel caso frequente in cui entrambi siano controllabili in tensione. Entrambi sono rappresentati dal modello di Norton :



Proprietà : Il bipolo  $C_1^c \equiv \text{Paral}\{C_1^a, C_1^b\}$  composto dal parallelo dei bipoli lineari e controllabili in tensione  $C_1^a$  e  $C_1^b$  è a sua volta lineare e controllabile in tensione, con corrente impressa  $i^c$  uguale alla somma delle correnti impressa  $i^a = i^a + i^b$  e conduttanza interna  $g_c$  uguale alla somma delle conduttanze interne  $g_c = g_a + g_b$ , come risulta dalla somma delle rappresentazioni i ← v (modelli di Norton) dei due bipoli :

$$C_1^a : i^a = g_a v^a + \hat{i}^a$$

$$C_1^b : i^b = g_b v^b + \hat{i}^b$$

$$C_1^c : i^c = g_c v^c + \hat{i}^c$$

7.3.6 Connessione parallelo di due bipoli notevoli

Nel caso in cui  $C_1^a$  e/o  $C_1^b$  non siano controllabili in tensione, la caratteristica del bipolo composito  $C_1^c$  deve essere calcolata in modo diverso. Qui di seguito viene esaminato il bipolo composito  $C_1^c$  costituito dal parallelo di due bipoli notevoli qualsiasi  $C_1^a$  e  $C_1^b$ . Tra queste vengono esaminate anche le connessioni parallelo di bipoli non controllabili in tensione.

Quadro del parallelo di due bipoli notevoli


- (1) le correnti  $i^a$  e  $i^b$  non possono essere determinate.
- (2) nel raro caso  $g^a = g^b$  si ha una sVi, ma le correnti  $i^a$  e  $i^b$  non possono essere determinate.
- (3) nel raro caso  $i^a = -i^b$  si ha un c.a.

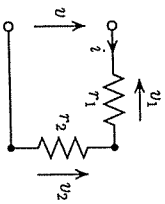
(4) nel raro caso  $g_n = -g_s$  si ha un c.a. (5) "incomp." significa che la connessione è incompatibile.

**Commento:** Quando entrano i bipoli connessi in parallelo sono controllabili in tensione, la caratteristica del bipolo composto risulta facilmente comprensibile. I casi più delicati da comprendere sono quelli in cui uno dei bipoli non risulta controllabile in tensione: ciò quando nel parallelo è coinvolta una sVi ovvero un c.c. Infatti un generico bipolo in parallelo a una sVi (c.c.) è equivalente alla sVi (c.c.) stessa. Infatti la corrente  $i_c = i_a + i_b$  è nonvincolata essendo uguale alla somma di due correnti di cui una è a sua volta nonvincolata mentre la tensione  $v^c$  coincide necessariamente con quella della sVi.

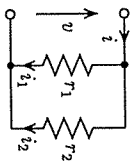
### 7.3.7 Partitori resistivi

La connessione serie e parallelo di resistori causa la ripartizione, rispettivamente, della tensione e della corrente tra i resistori che costituiscono le connessioni. Vengono enunciate le ben note e semplici regole per la ripartizione della tensione e della corrente.

#### Partitore semplice di tensione



#### Partitore semplice di corrente



**Regole:** Ciascuna delle due seguenti regole assume due forme diverse (equivalenti):

$$\frac{v_2}{v} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{g_1}{g_1 + g_2}$$

$$\frac{i_2}{i} = \frac{g_2}{g_1 + g_2} = \frac{r_1}{r_1 + r_2}$$

Formule analoghe esistono per i rapporti  $v_1/v$  e  $i_1/i$ .

Le formule sottografate sono le più usate e vengono in genere ricordate:

La tensione  $v$  viene ripartita ai capi dei singoli resistori in proporzione ai valori delle loro resistenze. ■

La corrente  $i$  viene ripartita tra i singoli resistori in proporzione ai valori delle loro conduttanze. ■

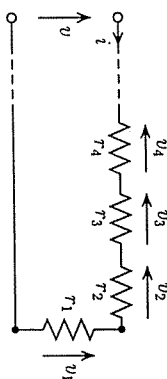
**Commento:** Comunque è molto usata anche la seconda formula per il partitore di corrente, che è espressa in funzione delle resistenze e non delle conduttanze. ■

**Prova:** Le tensioni  $v_1, v_2$  sono uguali al prodotto della rispettiva resistenza per la corrente  $i$  comune ai resistori. ■

**Prova:** Le correnti  $i_1, i_2$  sono uguali al prodotto della rispettiva conduttanza per la tensione  $v$  comune ai resistori. ■

**Partitori multipli:** Le due regole precedenti sono estese immediatamente al caso di connessione di più resistori:

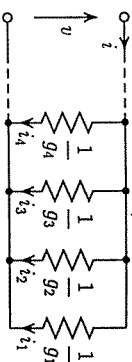
#### Partitore multiplo di tensione



La tensione  $v$  si suddivide ai capi dei singoli resistori in accordo alla

$$\frac{v_1}{v} = \frac{r_1}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + \dots}$$

#### Partitore multiplo di corrente



La corrente  $i$  si suddivide nei singoli resistori in accordo alla

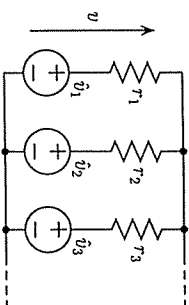
$$\frac{i_1}{i} = \frac{g_1}{g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + \dots}$$

## 7.4 ANALISI DI CIRCUITI SEMPLICI

Vengono qui esposti tre metodi di analisi di circuiti semplici con strutture costituite da bipoli in serie e/o in parallelo. I due teoremi di MILLMANN danno delle regole facili da ricordare per il calcolo di circuiti formati da bipoli in parallelo e in serie. Infine, il metodo della falsa posizione consente di analizzare rapidamente circuiti con struttura a scala, in cui i bipoli sono connessi alternativamente in serie e in parallelo.

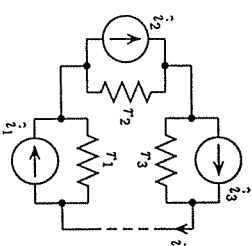
### 7.4.1 I due teoremi di Millmann per strutture parallelo e serie

**Primo teorema di Millmann:** Sia dato un circuito formato da bipoli nonomogenei e nonimpressivi incidenti l'unica coppia di nodi (cioè in parallelo). Assumiamo che i bipoli, controllabili sia in tensione sia in corrente, siano rappresentati dal modello di THÉVENIN.



La tensione  $v$  tra l'unica coppia di nodi risulta:

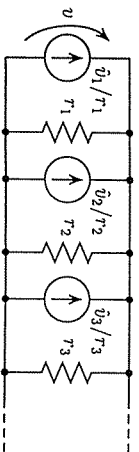
**Secondo teorema di Millmann:** Sia dato un circuito formato dalla serie di bipoli nonomogenei e nonimpressivi costituenti l'unica maglia del circuito. Assumiamo che i bipoli, controllabili sia in tensione sia in corrente, siano rappresentati dal modello di NORTON.



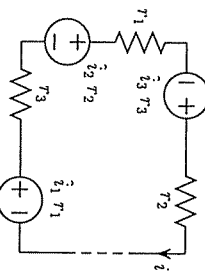
La corrente  $i$  fluente nell'unica maglia risulta:

$$v = \underbrace{\frac{\hat{v}_1/r_1 + \hat{v}_2/r_2 + \hat{v}_3/r_3 + \dots}{1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3 + \dots}}_{\text{correnti impresse}} \quad \blacksquare \quad \underbrace{\frac{\hat{i}_1 r_1 + \hat{i}_2 r_2 + \hat{i}_3 r_3 + \dots}{r_1 + r_2 + r_3 + \dots}}_{\text{tensioni impresse}}$$

**Prova :** Trasformiamo il circuito introducendo per ogni bipolo il modello di NORON :



**Prova :** Trasformiamo il circuito introducendo per ogni bipolo il modello di THIEVENIN :



la tensione  $v$  coincide con la somma delle correnti impresse divisa per la somma delle conduttanze dei resistori. ■

la corrente  $i$  coincide con la somma delle tensioni impresse divisa per la somma delle resistenze dei resistori. ■

**Commenti :** Possiamo ottenere i due teoremi di MILLMANN dal principio di sovrapposizione e dalle regole dei partitori : consideriamoli, per esempio, il primo teorema e scomponiamo il numeratore nella somma di singoli termini e le frazioni in somma di frazioni con il medesimo denominatore :

$$v = \frac{\hat{v}_1/r_1}{1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3 + \dots} + \frac{\hat{v}_2/r_2}{1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3 + \dots} + \frac{\hat{v}_3/r_3}{1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3 + \dots} + \dots$$

$$i = \frac{\hat{i}_1 r_1}{r_1 + r_2 + r_3 + \dots} + \frac{\hat{i}_2 r_2}{r_1 + r_2 + r_3 + \dots} + \frac{\hat{i}_3 r_3}{r_1 + r_2 + r_3 + \dots} + \dots$$

da cui si conclude che le due formule comprendono, rispettivamente, come casi particolari le regole dei partitori di tensione e corrente. ■

### 7.4.2 Estensione dei due teoremi di Millmann

Tra i bipoli del circuito connessi in parallelo ovvero in serie possono essere presenti anche resistori e semplici sVl. In questo caso le formule precedenti vengono completate nel modo seguente :

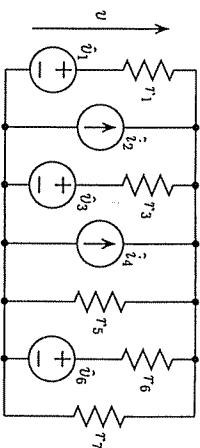
**Estensione del primo teorema**  
Le correnti impresse delle eventuali sVl vengono sommate al numeratore, mentre le conduttanze degli eventuali resistori vengono sommate al denominatore ■

**Estensione del secondo teorema**  
Le tensioni impresse delle eventuali sVl vengono sommate al numeratore, mentre le resistenze degli eventuali resistori vengono sommate al denominatore ■

**Prove :** Il lettore è invitato a ripetere le prove precedenti. ■

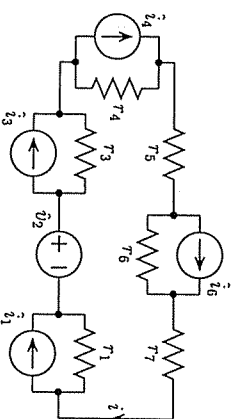
**Esempio A :** Sia dato il circuito in figura costituito dal parallelo di sette bipoli, di cui tre generici, due sVl e due resistori. La tensione  $v$  risulta :

$$v = \frac{\hat{v}_1/r_1 + \hat{v}_2 + \hat{v}_3/r_3 + \hat{i}_4 + \hat{v}_6/r_6}{1/r_1 + 1/r_3 + 1/r_5 + 1/r_6 + 1/r_7}$$



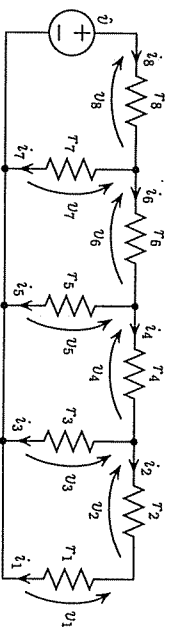
**Esempio B :** Sia dato il circuito in figura costituito dalla serie di sette bipoli, di cui quattro generici, una sVl e due resistori. La corrente  $i$  risulta :

$$i = \frac{\hat{i}_1 r_1 + \hat{v}_2 + \hat{i}_3 r_3 + \hat{i}_4 r_4 + \hat{i}_6 r_6}{r_1 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7}$$



### 7.4.3 Struttura a scala: regola della falsa posizione

La figura riporta un circuito a scala : partendo dal  $\mathcal{R}(r_1)$  sulla destra esso è costituito da una sequenza di resistori, connessi alternativamente in serie e parallelo : Il  $\mathcal{R}(r_2)$  è in serie al  $\mathcal{R}(r_1)$ , il  $\mathcal{R}(r_3)$  è in parallelo al  $\mathcal{R}(r_2)$  e  $\mathcal{R}(r_4)$  è in serie al  $\mathcal{R}(r_3)$  e così via.



Il circuito può essere analizzato con un metodo molto semplice ma applicabile solamente ai circuiti costituiti da bipoli costituenti una rete a scala.

**Regola :** Un circuito omogeneo a scala, alimentato da una sola sorgente impressiva, può essere analizzato :

- Sia  $v_0^{eff}$  la grandezza (in questo caso una tensione) impressa della sorgente impressiva. Assegnare un valore fittizio, in genere  $v_0^{eff} = 1$ , alla grandezza di interesse (in questo caso una tensione) del bipolo di destra.
- Risalire di bipolo in bipolo, da destra verso sinistra, al corrispondente valore fittizio  $v_0^{eff}$  della grandezza impressa (tensione o corrente), applicando a ogni passo la legge di Ohm e, alternativamente, una delle leggi di KIRCHHOFF, quella delle tensioni (per i bipoli in serie) e quella delle correnti (per i bipoli in parallelo). Assumendo  $v_0^{eff} = 1$

LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE TENSIONI	LEGGE DI OHM	LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE CORRENTI	LEGGE DI OHM
$v_1^{ft} = 1 \implies$	$i_1 = v_1^{ft}/r_1 \implies$	$i_2 = i_1 \implies$	$v_2 = r_2 i_2 \implies$
$v_3 = v_1 + v_2 \implies$	$i_3 = v_3/r_3 \implies$	$i_4 = i_2 + i_3 \implies$	$v_4 = i_4 r_4 \implies$
$v_5 = v_3 + v_4 \implies$	$i_5 = v_5/r_5 \implies$	$i_6 = i_4 + i_5 \implies$	$v_6 = i_6 r_6 \implies$
$v_7 = v_5 + v_6 \implies$	$i_7 = v_7/r_7 \implies$	$i_8 = i_6 + i_7 \implies$	$v_8 = i_8 r_8 \implies$
$v_8^{ft} = v_7 + v_8$			

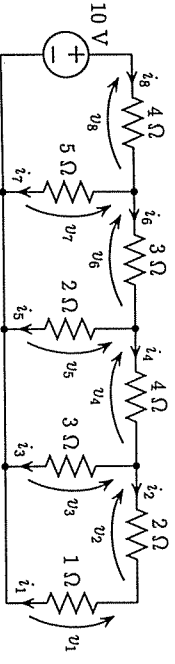
- Dal confronto del valore fittizio  $v_8^{ft}$  e di quello effettivo  $v_8^{eff}$  della grandezza impressa, il valore effettivo  $v_1^{eff}$  della grandezza di interesse risulta :  $v_1^{eff} = (v_8^{ft} / v_8^{eff}) v_1^{ft}$ .

**Prova :** La prova richiede l'applicazione di una proprietà generale comune a tutti i circuiti adinamici e lineari alimentati da un'unica sorgente impressiva e che incontreremo nella Sez. 11.4. Questa proprietà dice che in un circuito con un'unica sorgente impressiva tutte le tensioni e correnti di ramo sono proporzionali all'unica grandezza impressa.

**Commenti :** Il metodo può essere esteso anche a circuiti a scala costituiti da bipoli non omogenei.

**Avvertenza :** Se commettete un errore in uno dei semplici conti della "catena" di formule, vi ritrovate col risultato finale errato, senza possibilità di accorgervi di un eventuale errore intermedio. D'altra parte, quando inchiamate scendendo i gradini di una scala vi ritrovate un po' ammaccati ai piedi dell'ultimo gradino.

**Esempio A :** Consideriamo il circuito in figura, di cui siamo interessati a calcolare il valore effettivo  $v_1^{eff}$  della tensione  $v_1$ .



Provvisoriamente, assumiamo per  $v_1$  il valore fittizio  $v_1^{ft} = 1$  V e calcoliamo i valori (fittizi) di  $i_1, i_2, v_2, v_3, \dots$  fino al valore fittizio della tensione impressa  $v_8^{ft} = 90,3$  V, come riportato nella sottostante tabella :

LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE TENSIONI	LEGGE DI OHM	LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE CORRENTI	LEGGE DI OHM
$v_1^{ft} = 1 \text{ V} \implies$	$i_1 = 1 \text{ A} \implies$	$i_2 = 1 \text{ A} \implies$	$v_2 = 2 \text{ V} \implies$
$v_3 = 3 \text{ V} \implies$	$i_3 = 1 \text{ A} \implies$	$i_4 = 2 \text{ A} \implies$	$v_4 = 8 \text{ V} \implies$
$v_5 = 11 \text{ V} \implies$	$i_5 = 5,5 \text{ A} \implies$	$i_6 = 7,5 \text{ A} \implies$	$v_6 = 22,5 \text{ V} \implies$
$v_7 = 33,5 \text{ V} \implies$	$i_7 = 6,7 \text{ A} \implies$	$i_8 = 14,2 \text{ A} \implies$	$v_8 = 56,8 \text{ V} \implies$
$v_8^{ft} = 90,3 \text{ V}$			

Facendo la proporzione otteniamo il valore effettivo di  $v_1$  :

$$v_1^{eff} = \frac{v_1^{ft} v_8^{eff}}{v_8^{ft}} = \frac{1 \times 10}{90,3} \approx 0,1133 \text{ V}$$

## 7.5 GENERATORI FISICI : RENDIMENTO

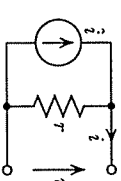
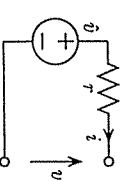
Se si misura accuratamente la caratteristica dei generatori (fisici), (per esempio la batteria di un'automobile), che in genere operano erogando potenza, si constata che la caratteristica non è parallela né all'asse delle correnti né all'asse delle tensioni del piano  $v-i$ . Per rappresentarli accuratamente introduciamo i modelli chiamati *sorgenti nonideali* di tensione ovvero corrente e i loro rendimenti energetici.

### 7.5.1 Premessa

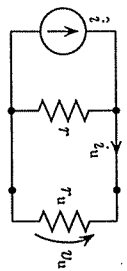
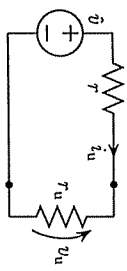
Per ragioni più storiche e pratiche che concettuali, sono usate le seguenti definizioni :

**Definizione :** Si chiama *sorgente non-ideale (reale) di tensione* un bipolo non-omogeneo e nonimpressivo con resistenza interna positiva di cui si usa preferibilmente il modello di THÉVENIN.

**Definizione :** Si chiama *sorgente nonideale (reale) di corrente* un bipolo nonomogeneo e nonimpressivo con resistenza interna positiva di cui si usa preferibilmente il modello di NORTON.



Connettiamo la sorgente nonideale su un carico  $\mathcal{R}(r_u)$  :



Per entrambi i modelli, calcoliamo i seguenti rapporti con la regola del corrispondente partitore :

$$\text{modello di THÉVENIN} \quad \eta^{Th} = \frac{v_u}{v} = \frac{r_u}{r_u + r_s}$$

$$\text{modello di NORTON} \quad \eta^{No} = \frac{i_u}{i} = \frac{g_u}{g_u + g_s}$$

dove  $r_s$  è la resistenza interna della sorgente e  $r_u$  è la resistenza del carico.

Notare che, per  $r_s \ll r_u$ ,  $\eta^{Th} \rightarrow 1$ , mentre, per  $r_s \gg r_u$ ,  $\eta^{No} \rightarrow 1$  : in questi casi la grandezza del carico si avvicina alla corrispondente grandezza impressa, cioè il comportamento del modello di THÉVENIN si avvicina a quello ideale della sVl e quello del modello di NORTON si avvicina a quello ideale della sIi.

### 7.5.2 Rendimento del modello

I rapporti  $\eta^{Th}$  e  $\eta^{No}$  introdotti nel paragrafo precedente per misurare "l'idealità" dei modelli delle sorgenti nonideali, hanno anche un significato energetico :

**Definizione :** Il *rendimento (del modello) di THÉVENIN e/o NORTON* di una sorgente nonideale è definito come il rapporto tra la potenza utile  $p_u$  assorbita dal carico e la potenza  $p_{imp}$  erogata dalla sorgente impressiva che compare all'interno del modello :

**Proprietà:** Il rendimento di THÉVENIN di una sorgente non ideale è uguale a  $\eta^{Th}$  :

$$P_u = \frac{i_u^2 r_u}{i_u^2 (r_u + r_s)} = \eta^{Th} \quad \blacksquare$$

**Proprietà:** Il rendimento di NORTON di una sorgente non ideale è uguale a  $\eta^{No}$  :

$$P_u = \frac{g_u^2 g_u}{g_u^2 (g_u + g_s)} = \eta^{No} \quad \blacksquare$$

Se confrontiamo il rendimento di THÉVENIN  $\eta^{Th}$  e quello di NORTON  $\eta^{No}$ , otteniamo due risultati discordanti. Infatti la definizione del rendimento coinvolge la potenza  $P_{imp}$  interna al bipolo "sorgente non ideale" e quindi non può essere determinato univocamente dalla caratteristica esterna del bipolo. Se la resistenza esterna  $r_u$  varia da  $0 \rightarrow +\infty$  :

$$\eta^{Th} \text{ varia da } 0 \rightarrow 1 \quad \eta^{No} \text{ varia da } 1 \rightarrow 0$$

Nel caso particolare  $r_u = r_s$  i rendimenti coincidono :  $\eta^{Th} = \eta^{No} = 1/2$ .

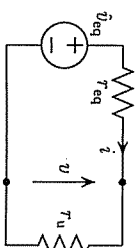
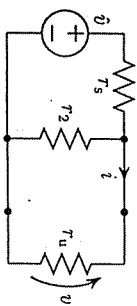
La somma dei rendimenti  $\eta^{Th} + \eta^{No}$  è sempre uguale a 1.

**Sorgente non ideale di tensione o di corrente ?** : In principio, ciascuna sorgente non ideale di tensione (modello di THÉVENIN) può essere sostituita da una sorgente non ideale di corrente (modello di NORTON equivalente) e viceversa, come risulta dalla discussione dell'equivalenza dei due modelli nel Par. 7.2.3. Per distinguere rigorosamente le sorgenti non ideali di tensione e le sorgenti non ideali di corrente occorre introdurre il concetto di **rendimento reale** che viene presentato nel prossimo paragrafo. ■

### 7.5.3 Rendimento reale

La distinzione tra le sorgenti di tensione e corrente non ideali diventa più rigorosa, se noi consideriamo il rendimento reale del bipolo fisico. Il rendimento del modello introdotto precedentemente non è assolutamente in grado di tenere conto di tutto quello che succede all'interno del componente fisico ma solamente degli scambi energetici col resto del circuito attraverso l'unica porta del bipolo. Infatti il componente fisico può generare al suo interno una potenza molto superiore a quella che può essere scambiata alla porta : ma una parte di questa potenza può essere dissipata nell'interno stesso. In molti casi questa dissipazione interna può provocare un deterioramento irreversibile del componente fisico. Noi chiamiamo **rendimento reale** il rendimento che tiene conto di tutte le potenze elettriche generate all'interno e di tutte quelle dissipate al suo interno e della potenza scambiata tramite la porta elettrica del bipolo. Esso può essere valutato solamente se conosciamo la struttura interna e non solamente la caratteristica esterna del bipolo fisico.

Per esempio consideriamo una batteria con un resistore connesso in parallelo, assumendo che il rendimento del modello di THÉVENIN della batteria sia uguale al rendimento reale della batteria stessa : questa assunzione corrisponde al ben noto fatto che una batteria a vuoto non dissipa energia. Ma il rendimento del modello di THÉVENIN del parallelo della batteria e del resistore si discosta dal rendimento reale del medesimo bipolo composto : la batteria in parallelo ad un resistore dissipa anche qualora fosse a vuoto.



Consideriamo la batteria con resistenza interna  $r_s$  e costruiamo un bipolo composto mettendo in parallelo un resistore di  $r_2$ . In rendimento reale  $\eta_r$  e il rendimento di THÉVENIN  $\eta^{Th}$  del bipolo composto risultano :

$$\eta_r = \frac{r_u r_2}{r_u r_2 + r_u r_2 + r_s r_2} \quad \eta^{Th} = \frac{r_u r_s + r_u r_2}{r_u r_s + r_u r_2 + r_s r_2}$$

da cui otteniamo :

$$\eta_r = \frac{r_u r_2}{r_u r_2 + r_u r_2 + r_s r_2} \quad \eta^{Th} = \frac{r_u r_2 (r_s/r_2 + 1)}{r_u r_s + r_u r_2 + r_s r_2}$$

Siccome  $1/(1 + r_u/r_2) < 1 + r_s/r_2$ , noi abbiamo che  $\eta_r < \eta^{Th}$ .

Un bipolo fisico, la cui caratteristica è lineare non impressiva e non omogenea, è considerato una sorgente non ideale di tensione qualora il rendimento reale sia vicino al rendimento del modello di THÉVENIN. In questo caso non si ha dissipazione interna e deterioramento del bipolo fisico qualora esso sia a vuoto.

**Commento :** Il confronto tra i rendimenti dei modelli e il rendimento reale ci consente di distinguere se il bipolo fisico è più vicino a una sorgente non ideale di tensione oppure a una sorgente non ideale di corrente. ■

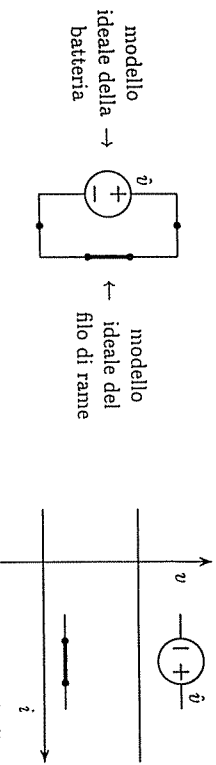
### 7.5.4 Conclusioni

In pratica la distinzione tra i termini sorgente non ideale di tensione o corrente dipende dalle tre seguenti motivazioni :

sorgente non ideale di tensione	sorgente non ideale di corrente
confronto tra la resistenza interna $r_s$ e la resistenza $r_u$ del carico	$r_s >> r_u$
confronto tra le grandezze impresse interne alle sorgenti e quelle misurate sul carico	$i_u \approx i$
$u_u \approx \hat{v}$	confronto tra i rendimenti dei due modelli
$\eta_r \approx \eta^{Th} >> \eta^{No}$	$\eta_r \approx \eta^{No} >> \eta^{Th}$
comportamento del bipolo fisico a vuoto e in corto a vuoto non dissipa mentre in corto si deteriora	comportamento del bipolo fisico a vuoto e in corto in corto non dissipa mentre a vuoto si deteriora

**Divagazione :** Un professore, apre il cofano della sua automobile e comincia a ragionare sulla alterne fortune della carriera accademica :

"Se il modello della batteria fosse una sorgente di tensione impressiva e se il modello del filo di rame fosse un corto circuito, la corrente sarebbe superiormente e/o inferiormente illimitata."



“Forse potrei afferrare il concetto di infinito per via sperimentale, suscitando l'invidia dei miei Chiarissimi Colleghi di Filosofia e di Fisica.”

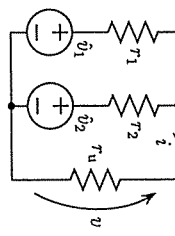
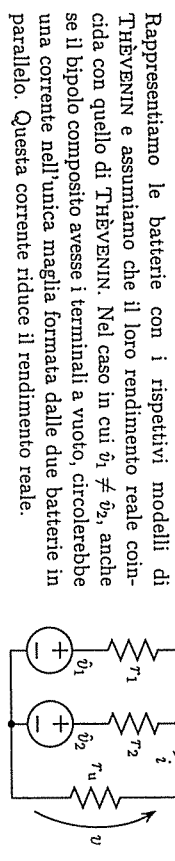
“Oppure potrei risolvere sperimentalmente il problema di trovare l'incrocio di due rette parallele, suscitando la gelosia dei miei Chiarissimi Colleghi di Matematica, che dopo lunghissimi secoli non ci sono ancora riusciti.”

Fieramente armato di cacciavite, egli connette il filo di rame ai morsetti della batteria e se ne va nell'aula per tenere la lezione sulle batterie. Finita la lezione egli applica gli estremi delle sue braccia al baule dell'automobile ed, erogando sudore, imprecazioni e potenza meccanica, la spinge fino al più vicino elettrante.

WWWWWW?? FARE FIGURA con caratteristiche del filo di rame e batteria reali.

**7.5.5 Sorgenti nonideali di tensione in parallelo**

Consideriamo un circuito fisico costituito da due batterie (per esempio quelle montate sugli autoveicoli) in parallelo e chiuse su un resistore (carico) :



Rivediamo le precedenti osservazioni esaminando i rendimenti di questo bipolo composto. **Rendimento reale** : Calcoliamo il rendimento di THÉVENIN e il rendimento reale del bipolo composto.

La potenza totale  $p_{mp}$  erogata dalle due sVi interne al bipolo composto e la potenza utile  $p_u$  assorbita dal carico risultano :

$$p_{mp} = \frac{\hat{v}_1 (\hat{v}_1 - v)}{r_1} + \frac{\hat{v}_2 (\hat{v}_2 - v)}{r_2} = \frac{\hat{v}_1^2}{r_1} + \frac{\hat{v}_2^2}{r_2} - \frac{(\hat{v}_1/r_1 + \hat{v}_2/r_2)v}{1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_u}$$

$$p_u = \frac{v^2}{r_u} = \frac{1}{r_u} \left( \frac{\hat{v}_1/r_1 + \hat{v}_2/r_2}{1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_u} \right)^2$$

Le formule precedenti sono sviluppate esprimendo la tensione  $v$  per mezzo del primo teorema di MILLMANN (Par. 7.4.1) :

$$v = \frac{\hat{v}_1/r_1 + \hat{v}_2/r_2}{1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_u}$$

Il rendimento reale del doppio bipolo composto è :

$$\eta_r = \frac{p_u}{p_{mp}} = \frac{1}{r_u} \left( \frac{\hat{v}_1/r_1 + \hat{v}_2/r_2}{1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_u} \right)^2 \frac{r_u}{\frac{\hat{v}_1^2}{r_1} + \frac{\hat{v}_2^2}{r_2} - \frac{(\hat{v}_1/r_1 + \hat{v}_2/r_2)v}{1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_u}}$$

$$\eta_r = \frac{(\hat{v}_1/r_1 + \hat{v}_2/r_2)^2 / r_u}{(1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_u) \left[ (\hat{v}_1 - \hat{v}_2)^2 / (r_1 r_2) + \hat{v}_1^2 / (r_1 r_u) + \hat{v}_2^2 / (r_2 r_u) \right]}$$

Il rendimento di THÉVENIN dello stesso bipolo composto

$$\eta_r \eta_n = \frac{r_u r_1 + r_u r_2}{r_u r_1 + r_u r_2 + r_1 r_2}$$

**è WWWWWW??? COMPLETARE IL CONFRONTO ??? WWWWWW**

Consideriamo il caso più interessante in cui  $\hat{v}_1 = \hat{v}_2$  e chiediamoci con quale legge la potenza  $p = p_1 + p_2$  erogata dal bipolo composto dal parallelo delle due sorgenti nonideali di tensione sia ripartita tra le due sorgenti.

**Proprietà** : La potenza erogata  $p$  è ripartita tra le due sorgenti in proporzione alle loro conduttanze interne  $1/r_1, 1/r_2$  :

$$p = p_1 + p_2 \implies \begin{cases} p_1 = v i_1 = v(v - \hat{v})/r_1 \\ p_2 = v i_2 = v(v - \hat{v})/r_2 \end{cases} \implies \begin{cases} p_1 \propto 1/r_1 \\ p_2 \propto 1/r_2 \end{cases}$$

Questa formula è strettamente legata alla regola del partitore di corrente (Par. 7.3.6) . **Commento** : Se le due sorgenti di tensione fossero ideali (resistenze interne nulle), non sarebbe possibili calcolare le correnti erogate da ciascuna delle sorgenti. Si ha un caso di indeterminazione parziale limitato a queste due correnti (vedere Par. 11.5.5).

**Commento** : L'estensione alle sorgenti nonideali di corrente in serie è immediata : qui non è sviluppata poiché di minor interesse.

**7.5.6 Potenza disponibile**

Ricordiamo dal Par. 7.1.3 che la potenza massima erogabile da una sorgente nonideale, comunemente detta potenza disponibile della sorgente,  $p_{disp}$ , è uguale :

$$p_{disp} = \frac{\hat{v}^2}{4r} = \frac{r^2}{4} r$$

dove  $r$  è la resistenza (positiva) interna,  $\hat{v}$  la tensione impressa del modello equivalente di THÉVENIN e  $i$  la corrente impressa del modello equivalente di NORTON. Questo risultato è indipendente dal modello equivalente (di THÉVENIN o NORTON) adottato per la sorgente nonideale in quanto viene presa in considerazione solamente la potenza erogata dalla sorgente nonideale e non quella erogata dalla sorgente impressiva interna al bipolo stesso, come nella definizione del rendimento (vedere Par. 7.3.2).

Notare che l'erogazione della potenza massima coincide con il caso  $r^* = r^j = 0.5$ . **Commento** : Non ha senso definire la potenza disponibile per le sorgenti impresse, dal momento che la potenza erogabile non è superiormente limitata.

WWWWWW??? FORSE il rendimento reale di un bipolo composto da svariate batterie è sempre minore al massimo tra i rendimenti di Thevenin e di Norton ??? WWWWWW

# 8 GENERICI MULTIPORTE

## ADINAMICI TEMPO-INVARIANTI e LINEARI

WWWWWW?? Fare disegno con un multiporta con all'interno del nocciolo una generica rappresentazione ibrida. ???WWWWWW

Questo capitolo prosegue l'analisi dei componenti adinamici tempo-invarianti e lineari, iniziata nel Cap. 7 coi bipoli, prendendo in considerazione i generici  $k$ -porte della stessa classe. Questa analisi richiede una buona conoscenza, seppur elementare, del calcolo matriciale.

**Sez. 8.1 : Generalità :** Le relazioni costitutive dei  $k$ -porte adinamici, tempo-invarianti e lineari consistono in sistemi sottodeterminati di  $k$  equazioni lineari nonomogenee in  $2k$  incognite, noti come *rappresentazioni implicite*. Sulla base della struttura delle rappresentazioni implicite i  $k$ -porte vengono distinti in *omogenei* o *nonomogenei* e *impressivi* o *nonimpressivi*.

**Sez. 8.2 : Rappresentazioni esplicite :** Le *rappresentazioni esplicite* dei  $k$ -porte sono ottenute da quelle implicite suddividendo le tensioni e correnti alle  $k$  porte in  $k$  grandezze indipendenti e  $k$  grandezze dipendenti. Esse sono suddivise a loro volta in *cardinali* e *noncardinali*.

**Sez. 8.3 : Grandezze impresses e primo teorema di equivalenza :** Le grandezze impresses, che compaiono nelle rappresentazioni esplicite, coincidono con le grandezze dipendenti qualora quelle indipendenti siano nulle. Esse possono essere rappresentate da  $k$  sorgenti impresse connesse in serie e/o parallelo alle porte del  $k$ -porta omogeneo associato (*primo teorema di equivalenza*).

**Sez. 8.4 : Parametri omogenei :** Ciascun parametro omogeneo delle rappresentazioni esplicite viene definito da un punto di vista circuitale, come rapporto tra una grandezza dipendente e una indipendente della rappresentazione, qualora le restanti grandezze indipendenti siano nulle.

**Sez. 8.5 : Potenza effettiva :** La potenza effettiva assorbita ovvero erogata dai  $k$ -porte viene ottenuta da quella virtuale per mezzo di una delle rappresentazioni cardinali. Da un punto di vista energetico i  $k$ -porte adinamici, tempo-invarianti e lineari vengono distinti in *dissipativi*, *inerti*, *strettamente attivi* e *attivi*.

**Sez. 8.6 : Reciprocità :** Sulla base delle proprietà delle *potenze virtuali incrociate* : i  $k$ -porte sono classificati in *reciproci*, *antireciproci* e *nonreciproci*. Inoltre il *teorema di reciprocità* consente di dimostrare la reciprocità dei  $k$ -porte composti da componenti reciproci e l'antireciprocità dei  $k$ -porte composti da componenti antireciproci.

**Sez. 8.7 : Appendice sulle forme quadratiche omogenee :** sono richiamate alcune nozioni riguardanti le forme quadratiche omogenee di una matrice quadrata necessarie per studiare le proprietà energetiche dei  $k$ -porte adinamici, tempo-varianti e lineari.

### 8.1 GENERALITÀ

Questa sezione introduce alcune informazioni preliminari sulle relazioni costitutive di generici  $k$ -porte adinamici, tempo-invarianti e lineari. Essi sono descritti da sistemi sottodeterminati di  $k$  equazioni lineari (in genere) nonomogenee in  $2k$  incognite chiamati comunemente *rappresentazioni implicite*. La struttura di queste rappresentazioni ci permette di distinguerli in  $k$ -porte *omogenee* o *nonomogenee* e *impressivi* o *nonimpressivi*. Siccome siamo in presenza di componenti tempo-invarianti, le tensioni e correnti non dipendono esplicitamente dal tempo  $t$  : quindi il simbolo matematico di queste grandezze sarà privo del "( $t$ )", cioè faremo le seguenti sostituzioni :  $v(t) \rightarrow v$ ,  $i(t) \rightarrow i$ .

#### 8.1.1 Rappresentazioni implicite dei $k$ -porte

**Proprietà :** Sia dato un  $k$ -porta le cui relazioni costitutive siano descritte dal seguente sistema sottodeterminato, usualmente chiamato *rappresentazione implicita* del  $k$ -porta :

$$H x = \hat{h} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} x = [v^T \ i^T]^T & \text{vettore delle } 2k \text{ incognite} \\ H & \text{matrice di } k \times 2k \text{ elementi costanti con rango pieno} \\ \hat{h} & \text{vettore di } k \text{ elementi costanti} \end{cases}$$

Il rango pieno di  $H$  garantisce l'indipendenza e la compatibilità delle  $k$  equazioni scalari. Il suddetto  $k$ -porta è adinamico, tempo-invariante e lineare.

**Prova :** La verifica della adinamicità e della tempo-invarianza segue immediatamente dal fatto che gli elementi di  $H$  e di  $\hat{h}$  non contengono l'operatore derivata e/o integrale e non dipendono dal tempo (vedere Cap. 5).

La linearità viene provata dal fatto che il dominio costitutivo  $\mathcal{X}$  è uno spazio affine : Date due qualsiasi situazioni elettriche  $x^{(1)}$  e  $x^{(2)}$  del  $k$ -porta si ha

$$\left. \begin{aligned} \forall x^{(1)} \in \mathcal{X} &\implies \alpha^{(1)} H x^{(1)} = \alpha^{(1)} \hat{h} \\ \forall \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \in \mathfrak{R} \text{ con } \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} = 1 &\implies H [\alpha^{(1)} x^{(1)} + \alpha^{(2)} x^{(2)}] = \hat{h} \\ \forall x^{(2)} \in \mathcal{X} &\implies \alpha^{(2)} H x^{(2)} = \alpha^{(2)} \hat{h} \end{aligned} \right\}$$

**Commento :** Esistono infinite rappresentazioni implicite (ovviamente equivalenti) del medesimo  $k$ -porta. D'altra parte i  $2k^2$  elementi della matrice  $H$  sono ridondanti. Per passare da una rappresentazione implicita all'altra è sufficiente pre-moltiplicare i due membri della  $H x = \hat{h}$  per una opportuna matrice  $k \times k$  nonsingolare.

**Partizione delle  $2k$  grandezze alle porte :** Il vettore che riunisce le  $k$  tensioni e  $k$  correnti alle porte di un  $k$ -porta può essere suddiviso in due sottovettori di dimensioni  $k$  :  $x = [x^a]^T [x^b]^T$ . Analogamente, anche la matrice  $H$  viene suddivisa nelle sottomatrici  $k \times k$   $H^a$  e  $H^b$ . La rappresentazione implicita può essere riscritta nella forma :

$$H x = \hat{h} \implies H^a x^a + H^b x^b = \hat{h}$$

**Questo :** Quante suddivisioni diverse sono possibili per lo stesso  $k$ -porta ?

**Risposta :** Dal calcolo combinatorio si ha che esse sono  $(2k)! / (k!)^2$ .



**Proprietà** : Esiste sempre una suddivisione  $H = [H^a \ H^b]$  tale che  $|H^b| \neq 0$ .

**Prova** : il rango pieno della matrice  $k \times 2k$   $H$  ci assicura che esiste almeno una sua sottomatrice di dimensioni  $k \times k$  con lo stesso rango (cioè nonsingolare).

**Definizione** : Sono chiamati *ammisibili* i valori di  $k$  grandezze elettriche per cui esiste una soluzione della rappresentazione implicita.

### 8.1.2 $k$ -porte omogenei o nonomogenei

**Definizione** : Come già accennato nel Cap. 5, un generico  $k$ -porta dinamico, tempo-invariante e lineare è *omogeneo* se il suo dominio costitutivo contiene l'origine  $0_{2k} \in \mathcal{X}$ .

Altrimenti il  $k$ -porta è detto *nonomogeneo*.

**Proprietà** : Assumiamo che il  $k$ -porta sia omogeneo. Dal momento che il dominio costitutivo  $\mathcal{X}$  è uno spazio lineare, la rappresentazione implicita assume la forma :

$$0_{2k} \in \mathcal{X} \implies H \ 0_{2k} = \hat{h} \implies \hat{h} = 0_k \implies H \ x = 0_k$$

mentre nei  $k$ -porte nonomogenei si ha necessariamente che  $\hat{h} \neq 0_k$ .

**Definizione** : Per ogni  $k$ -porta dinamico tempo-invariante lineare e nonomogeneo, noi possiamo definire il  *$k$ -porta omogeneo associato*, la cui caratteristica è ottenuta da quella di quello nonomogeneo annullando tutti i termini noti presenti :

$$H \ x = \hat{h} \qquad \qquad \qquad H \ x = 0_k$$

generico  $k$ -porta nonomogeneo  $\implies$   $k$ -porta omogeneo associato

**Commento** : La sostituzione di un  $k$ -porta lineare nonomogeneo col  $k$ -porta omogeneo associato equivale alla traslazione del dominio costitutivo (sottospazio affine) del  $k$ -porta originale nel corrispondente sottospazio lineare.

### 8.1.3 $k$ -porte impressivi o nonimpressivi

**Definizione** : Una tensione ovvero una corrente di un  $k$ -porta viene detta *nonvincolata*, se non compare nella rappresentazione implicita del  $k$ -porta stesso.

**Definizione** : Un  $k$ -porta dinamico lineare è *impressivo* quando  $k$  delle sue grandezze risultano nonvincolate.

Altrimenti il  $k$ -porta è detto *nonimpressivo*.

**Commento** : La precedente definizione implica che gli elementi delle  $k$  colonne di  $H$  corrispondenti alla grandezze nonvincolate siano necessariamente nulli.

**Proprietà** : Per ogni  $k$ -porta impressivo esiste una e una sola partizione :

$$H^a \ x^a + H^b \ x^b = \hat{h} \quad \text{tale che} \quad H^a = 0_{k,k} \ \text{e} \ |H^b| \neq 0$$

**Prova** : Dal momento che le grandezze in  $x^a$  sono nonvincolate, si ha  $H^a = 0_{k,k}$ . Se inoltre si avesse  $|H^b| = 0$ , verrebbe contraddetta l'ipotesi sul rango pieno di  $H$ .

**Proprietà** : Il sottovettore delle grandezze dipendenti  $x^b$  di un  $k$ -porta impressivo ha un valore fisso, indipendente dal circuito in cui si trovasse a operare.

**Prova** : Siccome  $H^a = 0_{k,k}$  e  $|H^b| \neq 0$ , si ha che :

$$0_{k,k} \ x^a + H^b \ x^b = \hat{h} \implies x^b = [H^b]^{-1} \hat{h} \quad \text{con} \ x^a \ \text{nonvincolato}$$

**Commento** : Un  $k$ -porta impressivo impone i valori delle grandezze in  $x^b$  al  $k$ -porta complementare, mentre le grandezze in  $x^a$  sono determinate da quest'ultimo.

## 8.2 RAPPRESENTAZIONI ESPLICITE

Questa sezione introduce le rappresentazioni esplicite dei  $k$ -porta dinamici, tempo-invarianti e lineari : esse sono basate sulla separazione delle tensioni e correnti in grandezze indipendenti e dipendenti. Le condizioni per la loro esistenza sono discusse. Le rappresentazioni esplicite sono molto importanti dal momento che sono le uniche usate in pratica e consentono di costruire dei modelli circuitali del  $k$ -porta medesimo.

### 8.2.1 Definizione e controllabilità

Sia data una partizione  $x = [x^a]^T \ [x^b]^T$  delle  $2k$  grandezze di un  $k$ -porta, tale che la matrice  $H^b$  che premoltiplica il sottovettore  $x^b$  sia nonsingolare.

**Definizione** : La rappresentazione implicita può essere trasformata nella rappresentazione equivalente :

$$\begin{array}{ccc} \text{rappresentazione implicita} & \implies & \text{rappresentazione esplicita} \\ H^a x^a + H^b x^b = \hat{h} & & x^b = [H^b]^{-1} H^a x^a + [H^b]^{-1} \hat{h} \end{array}$$

la quale viene riscritta con una notazione più compatta :  $x^b = H^{ba} x^a + \hat{x}^b$

La suddetta rappresentazione è detta *esplicita*, in quanto le *grandezze dipendenti*  $x^b$  sono espresse in funzione delle *grandezze indipendenti*  $x^a$ . Quando necessario, una specifica rappresentazione esplicita viene indicata dal simbolo  $x^b \leftarrow x^a$ .

**Definizione** : Fissando il vettore indipendente  $x^a$  nella rappresentazione esplicita  $x^b \leftarrow x^a$ , il vettore dipendente  $x^b$  rimane univocamente fissato. Questo fatto viene ricordato dicendo che il  $k$ -porta è *controllabile nelle grandezze appartenenti a*  $x^a$ .

**Commento** : Qualora la rappresentazione  $x^b \leftarrow x^a$  non fosse definita, esiste almeno una equazione algebrica scalare  $h^T x^a$ , dovuta alla singolarità di  $H^b$ , che coinvolge solamente le grandezze elettriche appartenenti a  $x^a$ . In questo caso il  $k$ -porta non è controllabile nella  $x^a$ .

**Commento** : Diverse rappresentazioni esplicite (ovviamente tra loro equivalenti) dello stesso  $k$ -porta possono generalmente essere definite : ognuna è associata a una specifica partizione del vettore  $x$  in  $x^a$  e  $x^b$ . Il numero di rappresentazioni esplicite effettivamente esistenti dello stesso  $k$ -porta non è mai superiore a  $(2k)/(k!)^2$ .

**Commento** : Esiste (almeno) una rappresentazione esplicita in quanto esiste (almeno) una partizione  $H^a x^a + H^b x^b = \hat{h}$  in cui  $|H^b| \neq 0$ . I  $k$ -porta impressivi ammettono una e una sola rappresentazione esplicita, come già detto in precedenza.

**Commento** : Le rappresentazioni esplicite possono essere considerate come particolari rappresentazioni implicite. Indicando con  $I_{k,k}$  la matrice identità  $k \times k$ , si ha :

$$x^b = H^{ba} x^a + \hat{x}^b \implies \begin{bmatrix} -H^{ba} & I_{k,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^a \\ x^b \end{bmatrix} = \hat{x}^b$$

Per una qualsiasi rappresentazione  $x^b = H^{ba} x^a + \hat{x}^b$ , le quattro sottoclassi dei  $k$ -porta dinamici, tempo-invarianti e lineari, già discusse nella Sez. 8.1, vengono riportate :

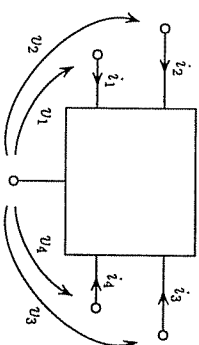
Quadro dei $k$ -porte lineari	impressivi $H^{ba} = 0_{k,k}$	nonimpressivi $H^{ba} \neq 0_{k,k}$
omogenei	$\hat{x}^b = 0_k$	$x^b = H^{ba} x^a$
nonomogenei	$\hat{x}^b \neq 0_k$	$x^b = H^{ba} x^a + \hat{x}^b$

### 8.2.2 Rappresentazioni cardinali e noncardinali

In dipendenza del tipo di partizione  $x = [[x^a]^T [x^b]^T]^T$ , alcune classi di rappresentazioni esplicite sono individuate :

**Definizione :** Una rappresentazione esplicita è detta *cardinale* qualora la tensione e la corrente di ciascuna porta siano separate : una tra le grandezze indipendenti  $x^a$  e l'altra tra le grandezze dipendenti  $x^b$ .

**Commento :** In genere per le rappresentazioni cardinali di un generico  $k$ -porta si usa una convenzione normale per ciascuna porta (vedere Par. 6.3.4). Inoltre si usa ordinare le grandezze in ciascuno dei vettori dipendenti e indipendenti in accordo alla numerazione delle porte. La figura a fianco mostra un 4-porta riportando le tensioni e correnti indipendenti (a cespuglio) definite con la convenzione normale.



Tra le rappresentazioni cardinali si distinguono :

- La *rappresentazione controllata in corrente* in cui  $x^a \equiv i$  e  $x^b \equiv v$ . Essa viene usualmente scritta con simboli specifici :  $v = R i + \hat{v}$ , dove  $R$  è detta *matrice resistenza* e  $\hat{v}$  è il vettore delle tensioni impresse. Nel caso di un 4-porta abbiamo :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \end{bmatrix}$$

- La *rappresentazione controllata in tensione* in cui  $x^a \equiv v$  e  $x^b \equiv i$ . Essa viene usualmente scritta con simboli specifici :  $i = G v + \hat{i}$ , dove  $G$  è detta *matrice conduttanza* e  $\hat{i}$  è il vettore delle correnti impresse. Nel caso di un 4-porta abbiamo :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \\ \hat{i}_4 \end{bmatrix}$$

- Le rimanenti rappresentazioni cardinali sono dette *rappresentazioni ibride*, in quanto sia in  $x^a$  sia in  $x^b$  vi sono sia tensioni sia correnti. In principio esistono molte rappresentazioni ibride. Per esempio, consideriamo una rappresentazione ibrida di

un 4-porta :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \\ \hat{v}_4 \end{bmatrix}$$

**Definizione :** Una rappresentazione esplicita è detta *noncardinale* quando esiste almeno una porta la cui tensione e corrente appartengano allo stesso vettore,  $x^a$  oppure  $x^b$ .  
 WWWWWWW?? Le convenzioni di segno per ciascuna porta possono essere le più diverse, a parte il caso dei doppi bipoli (vedere Sez. 9 xxx).  
 WWWWWWW?? FARE FIGURA ???WWWWWW

Tra le rappresentazioni noncardinali si distinguono le :

- Le *rappresentazioni di trasmissione*, in cui ogni coppia tensione e corrente alla stessa porta appartiene al medesimo sottovettore  $x^a$  ovvero  $x^b$ . Per esempio, consideriamo una rappresentazione di trasmissione di un 4-porta :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \\ v_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \\ v_4 \\ i_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{i}_4 \end{bmatrix}$$

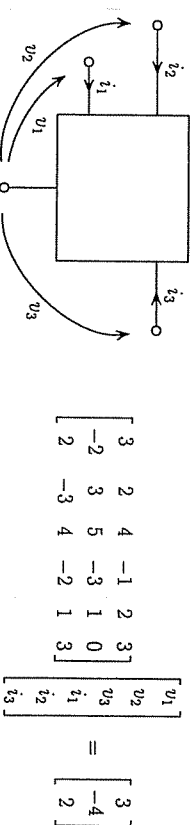
- Le rimanenti rappresentazioni noncardinali non vengono considerate, dal momento che sono poco usate e comunque non hanno un nome specifico.

**Commento :** Le uniche rappresentazioni definite anche per i bipoli sono quelle controllate in tensione e corrente (vedere Sez. 7.1). Le sei rappresentazioni possibili per i doppi bipoli saranno discusse nella Sez. 9.1 : tra esse le uniche rappresentazioni noncardinali sono quelle di trasmissione.

### 8.2.3 Esempi sul calcolo delle rappresentazioni esplicite

Questo paragrafo considera due esempi riguardanti il calcolo di rappresentazioni esplicite di  $k$ -porte.

**Esempio A :** Consideriamo il sottostante 3-porta adinamico, tempo-invariante e lineare nonomogeneo, con le tensioni e correnti indipendenti a cespuglio. Calcoliamo la rappresentazione esplicita  $(v_1, i_2, v_3) \leftarrow (i_1, v_2, i_3)$  del 3-porta, assumendo di conoscere la rappresentazione implicita riportata a destra :



Riscriviamo la rappresentazione implicita separando le grandezze dipendenti  $v_1, i_2, v_3$  e le

grandezze indipendenti  $i_1, v_2, i_3$  in accordo alla rappresentazione esplicita che intendiamo calcolare :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{grand. dipendenti}} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{grand. indipendenti}} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La matrice che premoltiplica il sottovettore delle grandezze dipendenti è nonsingolare. Se non lo fosse il 3-porta non ammetterebbe la rappresentazione  $(v_1, i_2, v_3) \leftarrow (i_1, v_2, i_3)$ . Moltiplicando l'equazione per l'inversa della suddetta matrice si perviene alla

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Eseguido l'inversione della matrice, otteniamo

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & -4 & 6 \\ 18 & 4 & -23 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & -4 & 6 \\ 18 & 4 & -23 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Eseguido i prodotti delle matrici, otteniamo la rappresentazione ibrida  $(v_1, i_2, v_3) \leftarrow (i_1, v_2, i_3)$  richiesta :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 32 \\ -16 & -117 & 15 \\ 13 & 26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 25 \\ -8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

**Esempio B :** Questo esempio riguarda il cambiamento della rappresentazione ibrida  $(v_1, i_2, v_3) \leftarrow (i_1, v_2, i_3)$  di un 3-porta alla nuova rappresentazione ibrida  $(v_1, v_2, i_3) \leftarrow (i_1, i_2, v_3)$ . Riscriviamo la suddetta rappresentazione nella forma apparentemente implicita :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \\ v_2 \\ i_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ripetendo la procedura seguita nell'esempio precedente, noi mettiamo in evidenza le grandezze dipendenti e indipendenti della rappresentazione  $(v_1, v_2, i_3) \leftarrow (i_1, i_2, v_3)$  a cui intendiamo pervenire :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}}_{\text{grand. dipendenti}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{grand. indipendenti}} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Moltiplicando l'equazione per l'inversa della sottomatrice che premoltiplica il sottovettore delle grandezze dipendenti si ottiene :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Eseguido l'inversione della matrice e i prodotti conseguenti, otteniamo la rappresentazione ibrida } (v_1, v_2, i_3) \leftarrow (i_1, i_2, v_3) : \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 8.2.4 Uso pratico delle rappresentazioni esplicite

In pratica qualsiasi  $k$ -porta viene sempre descritto per mezzo di una delle rappresentazioni esplicite : infatti, rispetto alle rappresentazioni implicite, i parametri presenti si riducono agli elementi presenti in una matrice  $k \times k$  e in un vettore di  $k$  elementi. Per il loro uso occorre tener presente che :

- Siccome per la maggior parte dei  $k$ -porte esistono più rappresentazioni esplicite, la scelta della rappresentazione esplicita dipende dalle analisi che si devono affrontare; conseguentemente, ognuna delle rappresentazioni esplicite di un  $k$ -porta può essere di volta in volta più appropriata delle altre. Comunque, molti doppi bipoli di largo uso ammettono solo alcune tra le sei rappresentazioni (vedere Cap. 10).
- Ogni rappresentazione esplicita consente di trovare un diverso modello equivalente del  $k$ -porta, come sarà dimostrato dal primo teorema di equivalenza nella Sez. 8.3 e dai modelli cardinali e noncardinali dei doppi bipoli (vedere Cap. 10).
- Gli elementi del vettore dei termini noti di ciascuna rappresentazione esplicita hanno il ruolo di grandezze impresse che verrà esaminato nella prossima sezione.

- Gli elementi della matrice (parametri omogenei) di ciascuna rappresentazione esplicita assumono un significato fisico molto importante che verrà esaminato nella Sez. 8.4.

## 8.3 GRANDEZZE IMPRESSE E PRIMO TEOREMA DI EQUITVALENZA

Questa sezione esamina il significato fisico delle grandezze impresse presenti nelle rappresentazioni esplicite di un generico  $k$ -porta. Il primo teorema di equivalenza dimostra che il suddetto  $k$ -porta nonomogeneo è equivalente al  $k$ -porta omogeneo associato e ad alcune sorgenti impresse connesse in serie o parallelo alle porte. Quindi i  $k$ -porte nonimpressivi e nonomogenei possono essere trascurati.

### 8.3.1 Significato delle grandezze impresse

**Proprietà :** Il vettore dei termini noti  $\hat{x}^b$ , detto anche *vettore delle grandezze impresse o vettore impresso*, presente in ciascuna rappresentazione esplicita di un  $k$ -porta nonomogeneo  $x^b = H^{ba} x^a + \hat{x}^b$  coincide col vettore delle grandezze dipendenti  $x^b$ , qualora sia annullato il vettore delle grandezze indipendenti  $x^a$  :

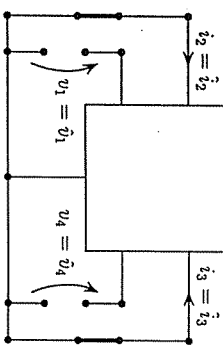
$$[x^b]_{x^a = 0_k} = H^{ba} 0_k + \hat{x}^b = \hat{x}^b$$

È possibile dare una interpretazione circuitale alla suddetta equazione, dal momento che la nullità delle grandezze indipendenti può essere realizzata connettendo ad ogni porta del  $k$ -porta un :

1. Un c.c. alla  $\mu$ -esima porta se la tensione  $v_\mu$  è tra le variabili indipendenti  $x^a$  e la corrente  $i_\mu$  tra quelle dipendenti  $x^b$ .
2. Un c.a. alla  $\mu$ -esima porta se la corrente  $i_\mu$  è tra le variabili indipendenti  $x^a$  e la tensione  $v_\mu$  tra quelle dipendenti  $x^b$ .
3. Un nullatore alla  $\mu$ -esima porta se sia la tensione  $v_\mu$  sia la corrente  $i_\mu$  sono tra le variabili indipendenti  $x^a$ .
4. Un noratore alla  $\mu$ -esima porta se sia la tensione  $v_\mu$  sia la corrente  $i_\mu$  sono tra le variabili dipendenti  $x^b$ .

L'inserimento di un nullatore e noratore (casi 3 e 4 qui sopra) è richiesto solamente in presenza di rappresentazioni noncardinali. Comunque i nullatori e noratori sono presenti nello stesso numero.

**Esempio A :** Consideriamo il 4-porta nella figura sottostante a sinistra. Le quattro tensioni e correnti del 4-porta sono a cespuglio e definite con la convenzione normale. Consideriamo la rappresentazione ibrida  $(v_1, i_2, i_3, v_4) \leftarrow (i_1, v_2, v_3, i_4)$  a destra.



$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \\ \hat{v}_4 \end{bmatrix}$$

L'annullamento delle quattro grandezze indipendenti  $i_1, v_2, v_3$  e  $i_4$  comporta la connessione di due c.a. e due c.c. alle porte, come indicato nella figura. In questo caso le grandezze impresse  $\hat{v}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3$  e  $\hat{v}_4$  presenti nella rappresentazione coincidono coi valori delle rispettive grandezze dipendenti  $v_1, i_2, i_3$  e  $v_4$ .

**Esempio B :** DA FARE per Rappresentazione noncardinale ???????????

### 8.3.2 Primo Teorema di equivalenza

Vediamo meglio la relazione che esiste tra un generico  $k$ -porta nonomogeneo  $C_k$  e il  $k$ -porta omogeneo associato  $C_k^a$ .

**Teorema :** sia dato un  $k$ -porta lineare nonomogeneo e nonimpressivo  $C_k$  descritto dalla rappresentazione esplicita  $x^b \leftarrow x^a : x^b = H^{ba} x^a + \hat{x}^b$ . Il  $k$ -porta  $C_k^a$  è equivalente al  $k$ -porta composto in genere dal  $k$ -porta omogeneo associato  $C_k^a$ , e da  $k$  sorgenti impresse connesse alle porte di  $C_k^a$  : esse sono in serie, se sono sVi, e in parallelo, se sono sIi :

$$C_k \equiv \text{Aggreg}\{C_k^a, \text{sorgenti impr.}\}$$

Le sorgenti impresse sono meno di  $k$ , qualora alcuni elementi di  $\hat{x}^b$  siano nulli.

**Prova :** Giacuna delle  $k$  equazioni scalari della rappresentazione esplicita  $x^b \leftarrow x^a$  assume una delle due forme :

$$\begin{array}{ll} \text{per ciascuna tensione dipendente} & \text{per ciascuna corrente dipendente} \\ v_\mu = \underbrace{h_{\mu 1}^a x_1^a + h_{\mu 2}^a x_2^a + \dots + h_{\mu k}^a x_k^a}_{\text{in serie}} + \hat{v}_\mu & i_\nu = \underbrace{h_{\nu 1}^a x_1^a + h_{\nu 2}^a x_2^a + \dots + h_{\nu k}^a x_k^a}_{\text{in parallelo}} + \hat{i}_\nu \\ \text{compon. omogeneo associato} & \text{compon. omogeneo associato} \\ \text{sVi} & \text{sIi} \end{array}$$

Le suddette equazioni stabiliscono una eguaglianza tra la grandezza dipendente, tensione  $v_\mu$  ovvero corrente  $i_\nu$  a primo membro, e una somma di termini a secondo membro; ciascuno di questi termini (eccetto l'ultimo) è caratterizzato dal prodotto di una grandezza indipendente in  $x^a$  e da un elemento della matrice  $H^{ba}$ . L'ultimo termine a secondo membro,  $\hat{v}_\mu$  ovvero  $\hat{i}_\nu$ , non comprende alcuna grandezza indipendente e ha necessariamente le medesime dimensioni fisiche della grandezza dipendente a primo membro.

Confondiamo queste equazioni con le corrispondenti equazioni del  $k$ -porta omogeneo associato. I termini a secondo membro comprendenti una variabile in  $x^a$  rimangono inalterati, mentre viene a mancare la grandezza impressa  $\hat{v}_\mu$  ovvero  $\hat{i}_\nu$ .

Assumiamo che le  $k$  porte del  $k$ -porta siano state scelte seguendo un grato a cespuglio :

$$\begin{array}{ll} \text{tensione dipendente: } v_\mu^b & \text{corrente dipendente: } i_\nu^b \end{array}$$

si tiene conto della tensione costante  $\hat{v}_\mu$  si tiene conto della corrente costante  $\hat{i}_\nu$  connettendo in serie al terminale dove finisce la corrispondente corrente  $i_\mu^b$  una sVi con tensione impressa  $\hat{v}_\mu$ . la corrispondente tensione  $v_\mu^b$  una sIi con corrente impressa  $\hat{i}_\nu$ .

Qui di seguito riassumiamo la regola per connettere le sorgenti impresse alla generica  $\mu$ -esima porta del  $k$ -porta omogeneo associato :

1. Se la tensione  $v_\mu$  è tra le variabili indipendenti  $x^a$  e la corrente  $i_\mu$  tra quelle dipendenti  $x^b$ , occorre connettere una sIi di corrente impressa  $\hat{i}_\mu$  in parallelo alla  $\mu$ -esima porta.
2. Se la corrente  $i_\mu$  è tra le variabili indipendenti  $x^a$  e la tensione  $v_\mu$  tra quelle dipendenti  $x^b$ , occorre connettere una sVi di tensione impressa  $\hat{v}_\mu$  in serie alla  $\mu$ -esima porta.
3. Se sia la tensione  $v_\mu$  sia la corrente  $i_\mu$  sono tra le variabili indipendenti  $x^a$ , non si deve connettere alcuna sorgente impressa alla  $\mu$ -esima porta.
4. Se sia la tensione  $v_\mu$  sia la corrente  $i_\mu$  sono tra le variabili dipendenti  $x^b$ , occorre connettere due sorgenti impresse alla  $\mu$ -esima porta : una sVi di tensione impressa  $\hat{v}_\mu$  in serie e una sIi di corrente impressa  $\hat{i}_\mu$  in parallelo. L'ordine della connessione delle due sorgenti alla  $\mu$ -esima porta può essere qualsiasi. ■

Nel caso di rappresentazioni cardinali noi incontriamo solamente i primi due casi, mentre in quelle noncardinali incontriamo anche il terzo e il quarto.

RIPRENDERE ESEMPIO usato per definire grandezze impresse.

FIG. WWWWW??? ESEMPI DI MODELLI EQUIVALENTI OTTENUTI TRAMITE IL PRIMO TEOREMA DI EQUIVALENZA (GRAFO A CESPUGLIO)

*Commento* : Lo schema delle sorgenti impresse di tensione e/o corrente diventa più complicato quando l'albero delle porte del  $k$ -porta non è un cespuglio. Infatti quando uno dei terminali della porta non è in comune con altre porte, la  $sVi$  può essere connessa convenientemente in serie a questo terminale. In caso contrario una  $sVi$  connessa in serie a un terminale in comune con altre porte altera anche la tensione di queste porte. Questo effetto indesiderato può essere compensato mettendo in serie ai terminali delle porte adiacenti altre  $sVi$  con tensione impressa opportuna e così via. Un semplice esempio può illustrare il metodo.

RIPRENDERE ESEMPIO usato per definire grandezze impresse.

FIG. ESEMPI DI MODELLI EQUIVALENTI OTTENUTI TRAMITE IL PRIMO TEOREMA DI EQUIVALENZA (GRAFO A CATENA)

*Risultati* : I valori delle correnti fluenti nei c.c. e noratori e delle tensioni ai capi dei c.a. e noratori coincidono con le grandezze impresse delle  $sVi$  e  $sIi$  connesse alle porte.

FIG. INTERPRETAZIONE CIRCUITALE DEI PARAMETRI IMPRESSIVI

Questo risultato ci consente di concludere che :

*l'esistenza dei suddetti modelli equivalenti ci consente di limitare la discussione ai  $k$ -porte omogenei dal momento che quelli nonomogenei possono essere ottenuti da quelli omogenei associati connettendo  $k$  sorgenti impresse alle porte.*

*gli unici componenti impressivi nonomogenei di interesse sono quelli con due soli terminali (bipoli) : le sorgenti impresse di tensione e corrente ( $sVi$  e  $sIi$ ).*

*Commento* : I modelli di THEVENIN e NORTON incontrati nella Sez. 7.2 costituiscono un caso particolare di questo teorema applicato ai bipoli ( $k = 1$ ).

### 8.3.3 Confronto tra i diversi modelli

Diversi modelli equivalenti a un dato  $k$ -porta nonimpressivo e nonomogeneo esistono, uno per ciascuna rappresentazione esplicita esistente. Il  $k$ -porta omogeneo associato rimane sempre lo stesso in ciascuno dei modelli equivalenti. Quindi i diversi modelli si distinguono l'un dall'altro per la diversa struttura delle sorgenti impresse connesse alle porte del  $k$ -porta omogeneo associato e per i diversi valori delle loro grandezze impresse. WWWWW??? Fare tre esempi di applicazioni del primo teorema di equivalenza : ciascuno con un 3-porta : due rappresentazioni cardinali e una noncardinale.

*Commento* : I precedenti diversi modelli equivalenti dello stesso  $k$ -porta possono essere considerati come casi particolari di un modello equivalente più generale con un numero ridondante di sorgenti impresse (una  $sVi$  e una  $sIi$  per ciascuna porta).

FIG. MODELLO EQUIVALENTE GENERALE CON NUMERO RIDONDANTE DI SORGENTI IMPRESSIVE

Consideriamo il  $k$ -porta omogeneo  $C_k$  associato a  $C_k$  e colleghiamo in parallelo a ogni porta una  $sIi$  e quindi in serie a ciascuna porta una  $sVi$ . Per stabilire l'equivalenza con i  $k$  termini noti presenti nelle relazioni costitutive occorre verificare  $k$  equazioni, una per ogni porta, in  $2k$  grandezze impresse delle sorgenti. In genere esistono infinite soluzioni dal momento che siamo di fronte a un sistema sottodeterminato. Se riusciamo a trovare tra le infinite soluzioni una o più soluzioni in cui  $k$  tra le  $2k$  grandezze impresse sono nulle, ci troviamo di fronte ai  $k$ -porte equivalenti ottenuti direttamente dalle rappresentazioni esplicite.

## 8.4 PARAMETRI OMOGENEI

Viene discusso il significato circuitale degli elementi delle matrici delle rappresentazioni cardinali, usualmente chiamati *parametri omogenei*. I parametri omogenei delle matrici noncardinali saranno discussi, limitatamente ai doppi bipoli, nella Sez. 9.3.

### 8.4.1 Significato dei parametri omogenei delle matrici cardinali

Per un qualsiasi  $k$ -porta gli elementi della matrice  $H^{ba}$  di una rappresentazione esplicita  $x^b = H x^a + \hat{x}^b$ , chiamati *parametri omogenei*, possono venire determinati da opportune prove circuitali sul  $k$ -porta omogeneo associato, cioè annullando le grandezze impresse. L'elemento  $h_{\mu\nu}^{ba}$  della matrice  $H^{ba}$  è uguale al rapporto tra la  $\mu$ -esima grandezza dipendente  $x_\mu^b$  e la  $\nu$ -esima grandezza indipendente  $x_\nu^a$ , qualora le rimanenti grandezze indipendenti in  $x^a$  siano azzerate.

$$h_{\mu\nu}^{ba} = \begin{bmatrix} x_\mu^b \\ x_\nu^a \end{bmatrix} \Big|_{x_k^a = 0, \forall k \neq \nu} = \left[ \begin{array}{c} \text{grandezza dipend.} \\ \text{grandezza indep.} \end{array} \right] \text{ con altre grand. indep. nulle}$$

WWWWWW?? FARE DUE ESEMPI (cardinale e noncardinale) di  $k$ -porte omogenei in cui  $k - 1$  grandezze indipendenti sono annullate mediante c.c. c.a. e nullatori facendo una figura. WWWWWW?? COPIARE dal Cap. 9 sui Doppi Bipoli ???WWWWW

**Estensione ai  $k$ -porte nonomogenei** : una definizione un poco più generale dei parametri omogenei presenti nella rappresentazione esplicita di un  $k$ -porta nonomogeneo può essere data. Essa è basata sul rapporto incrementale delle stesse grandezze presenti nella formula riportata qui sopra.

Consideriamo di fare due misure caratterizzate da due valori diversi  $(x_a^b)''$  e  $(x_a^b)'$  della grandezza indipendente che sta a denominatore della definizione del parametro omogeneo. Avremo anche due valori diversi  $(x_b^a)''$  e  $(x_b^a)'$  della grandezza dipendente che sta a numeratore :

$$h_{\mu\nu}^{ba} = \frac{[(x_b^a)'' - (x_b^a)']}{[(x_a^b)'' - (x_a^b)']} x_k^a = 0, \forall k \neq \nu \equiv \left[ \frac{\text{incr. grand. dipend.}}{\text{incr. grand. indep.}} \right] \text{ con altre grand. indep. nulle}$$

Nel caso di una matrice cardinale, ogni parametro omogeneo risulta uguale al rapporto tra una grandezza dipendente e una indipendente (il cui valore viene imposto connettendo a una porta un'opportuna sorgente impressiva sVi o sIi), mentre le altre grandezze indipendenti vengono azzerate (connettendo un c.a. o un c.c. alla porta corrispondente). Gli elementi sulla diagonale principale corrispondono a resistenze o conduttanze in quanto rapporti di grandezze elettriche alla stessa porta, mentre gli altri elementi sono rapporti di grandezze a porte diverse e possono essere dei seguenti quattro tipi :

**Quadro dei tipi di parametri omogenei**

	tensione indipendente	corrente indipendente
grandezza dipendente alla stessa porta	$\frac{i_\mu}{v_\mu}$ (conduttanza)	$\frac{v_\mu}{i_\mu}$ (resistenza)
tensione dipendente $\mu \neq \nu$	$\frac{v_\mu}{v_\nu}$ (rapporto di tensioni)	$\frac{v_\mu}{i_\nu}$ (transresistenza)
corrente dipendente $\mu \neq \nu$	$\frac{i_\mu}{v_\nu}$ (transconduttanza)	$\frac{i_\mu}{i_\nu}$ (rapporto di correnti)

**8.5 POTENZA EFFETTIVA**

La conoscenza delle rappresentazioni cardinali di un  $k$ -porta consente di esprimere la potenza effettiva assorbita dal  $k$ -porta stesso in funzione delle grandezze indipendenti della rappresentazione. Questa sezione esamina la potenza dei componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari. In base alle proprietà della potenza i  $k$ -porte vengono distinti in dissipativi, inerti, strettamente attivi e attivi. L'espressione della potenza mediante le rappresentazioni cardinali non sono considerate perché di minor interesse.

**8.5.1 Espressione della potenza**

**Proprietà** : La potenza (effettiva) assorbita da un  $k$ -porta adinamico, tempo-invariante e lineare può essere espressa per il tramite di una qualsiasi delle rappresentazioni cardinali

$x^b = H^{ba} x^a + \hat{x}^b$  :

$$p = [x^a]^T x^b = [x^a]^T [H^{ba} x^a + \hat{x}^b] = \underbrace{[x^a]^T H^{ba} x^a}_{\text{term. quadratici}} + \underbrace{[x^a]^T \hat{x}^b}_{\text{term. lineari}}$$

L'espressione è una *forma quadratica* dipendente dalle grandezze indipendenti (vettore  $x^a$ ) della rappresentazione cardinale : se il componente è nonomogeneo ovvero omogeneo, la forma quadratica è, rispettivamente nonomogenea ovvero omogenea, in quanto sono presenti ovvero assenti i termini lineari. L'appendice posta alla fine di questo capitolo richiama alcuni concetti sulle forme quadratiche omogenee.

**Commento** : L'espressione della potenza tramite una rappresentazione noncardinale è più complicata e meno usata. Un esempio sarà incontrato nella Sez. 10.6.

**8.5.2 Classificazione energetica dei  $k$ -porte**

Viene qui presentata la classificazione dei  $k$ -porte adinamici, tempo-invarianti e lineari, basata sulle proprietà della potenza effettiva assorbita dal  $k$ -porta stesso. Essa coincide con quella discussa per i bipoli nella Sez. 7.1.

**Definizione** : in base alle proprietà della potenza  $p$  ovvero del lavoro  $w$  un componente adinamico con dominio costitutivo  $\mathcal{X}$  viene classificato nel modo seguente :

**Quadro delle classificazioni energetiche dei componenti adinamici**

	Proprietà della potenza e del lavoro	
definizione del componente	$p =$ potenza assorbita	$w =$ lavoro assorbito
dissipativo	se $\infty > p \geq 0 \forall [v^T \ i^T]^T \in \mathcal{X}$	$w$ monotono crescente
strettamente attivo	se $-\infty < p \leq 0 \forall [v^T \ i^T]^T \in \mathcal{X}$	$w$ monotono decrescente
inerte	se $p = 0 \forall [v^T \ i^T]^T \in \mathcal{X}$	$w = 0$
attivo	in tutti i casi rimanenti	

**Commento** : Un  $k$ -porta inerte non implica che ogni sua porta sia inerte. Infatti la potenza effettiva di un  $k$ -porta è data da  $p = \sum_{\mu=1}^k p_\mu$  e la nullità del primo membro non implica affatto la nullità di ogni termine del secondo membro. Nella Sez. 10.6 incontreremo il trasformatore ideale e il giratore che sono doppi bipoli inerti.

**8.5.3 Rappresentazioni cardinali e proprietà energetiche**

Dalla forma quadratica della potenza possiamo dedurre alcune proprietà energetiche dei  $k$ -porte adinamici, tempo-invarianti e lineari :

**Proprietà** : Qualsiasi  $k$ -porta nonomogeneo (sia impressivo sia nonimpressivo) è attivo. In nessun caso può essere strettamente attivo, dissipativo o inerte.

**Prova** : In  $x^a = 0$  la forma quadratica nonomogenea della potenza è nulla e nello stesso tempo le sue derivate parziali rispetto a  $x^a$  non sono tutte nulle. Quindi per valori di  $x^a$  nell'intorno di 0 la potenza assume valori sia positivi sia negativi.

**Proprietà:** Le proprietà energetiche di un  $k$ -porta omogeneo, che ammetta una o più rappresentazioni cardinali, dipendono dalla matrice  $H^{ba}$  della rappresentazione cardinale, dal momento che l'espressione della potenza è una forma quadratica omogenea  $p = [x^a]^T H^{ba} x^a$ :

matrice	dissipativo	strett. attivo	inerte	attivo
$H^{ba}$	(semi)definita positiva	(semi)definita negativa	antisimmetrica	in tutti gli altri casi

**Commento:** Come caso particolare, si ha che un  $k$ -porta omogeneo e impressivo può solamente essere inerte (se ammette almeno una rappresentazione cardinale). Infatti  $H^{ba} = 0_{k,k}$  oppure attivo (se non ammette alcuna rappresentazione cardinale). Infatti quando la tensione e la corrente di una porta sono entrambe tra le variabili indipendenti, la potenza in questa porta può assumere qualsiasi valore.

## 8.6 RECIPROCIITÀ

Il concetto di reciprocità e antireciprocità si ritrova in molti campi della fisica e dell'ingegneria. Nel caso dei circuiti esso consente di classificare i componenti in reciproci, antireciproci e nonreciproci. Inoltre un teorema molto generale, garantisce la reciprocità [antireciprocità] dei  $k$ -porte costituiti da componenti reciproci [antireciproci]. In questa sezione ci limitiamo a presentare questo concetto nell'ambito dei  $k$ -porte adinamici, tempo-invarianti e lineari, rinviando al Cap. 16 l'estensione ai componenti dinamici.

### 8.6.1 Reciprocità e antireciprocità di un componente

Per introdurre la reciprocità di un componente, occorre premettere la definizione delle potenze (virtuali) incrociate:

**Definizione:** Sia  $\mathcal{X}$  il dominio costitutivo di un componente. Consideriamo una coppia qualsiasi di situazioni  $[[v^j]^T [z^j]^T]^T \in \mathcal{X}$  e  $[[v'^j]^T [z'^j]^T]^T \in \mathcal{X}$ . Introduciamo le potenze (virtuali) incrociate  $p^j$  e  $p'^j$  definite dall'interscambio delle tensioni e correnti presenti nelle due situazioni:

$$p^j = [v^j]^T z'^j = [z^j]^T v'^j, \quad p'^j = [v'^j]^T z^j = [z'^j]^T v^j$$

Ora siamo in grado di introdurre i componenti reciproci.

**Definizione:** Un componente adinamico tempo-invariante e lineare è detto *reciproco* se le due potenze incrociate coincidono per qualsiasi coppia di situazioni:

$$p^j = [v^j]^T z'^j = p'^j = [v'^j]^T z^j \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \forall [[v^j]^T [z^j]^T]^T \in \mathcal{X} \\ \forall [[v'^j]^T [z'^j]^T]^T \in \mathcal{X} \end{cases}$$

Altrimenti un componente è detto *nonreciproco*.

**Definizione:** Un componente adinamico tempo-invariante e lineare è detto *antireciproco* se la somma delle due potenze incrociate è nulla per qualsiasi coppia di situazioni:

$$p^j + p'^j = [v^j]^T z'^j + [v'^j]^T z^j = 0 \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \forall [[v^j]^T [z^j]^T]^T \in \mathcal{X} \\ \forall [[v'^j]^T [z'^j]^T]^T \in \mathcal{X} \end{cases}$$

**Proprietà:** Un componente lineare nonomogeneo è né reciproco né antireciproco.

**Prova:** Viene lasciata al lettore.

**Proprietà:** Il c.c. e il c.a. sono sia reciproci sia antireciproci.

**Prova:** Le due potenze incrociate sono nulle.

**Proprietà:** Un resistore è reciproco.

**Prova:** Consideriamo la rappresentazione cardinale  $v = r \ i$  del resistore. Le due potenze incrociate risultano coincidenti:

$$p^j = v'^j z^j = (r \ i'^j) z^j = r \ i^j z^j, \quad p'^j = v^j z'^j = (r \ i^j) z'^j = r \ i^j z'^j$$

### 8.6.2 Verifica della reciprocità e antireciprocità dei $k$ -porta

Esaminiamo le condizioni a cui deve soddisfare la matrice di un  $k$ -porta omogeneo affinché esso sia reciproco o antireciproco. Cominciamo con le rappresentazioni controllate in corrente e in tensione. Successivamente proseguiremo con una generica rappresentazione cardinale.

**Rappresentazione controllata in corrente:** Consideriamo un  $k$ -porta omogeneo di cui esista la rappresentazione controllata in corrente  $v = R \ i$ . Le due potenze incrociate sono esprimibili nella forme:

$$p^j = [v^j]^T z'^j = [R \ i^j]^T z'^j = [i^j]^T [R]^T z'^j, \quad p'^j = [v'^j]^T z^j = [i'^j]^T [R]^T z^j$$

**Proprietà:** Il  $k$ -porta è reciproco se e solo se la matrice resistenza  $R$  è simmetrica.

**Proprietà:** Il  $k$ -porta è antireciproco se e solo se la matrice  $R$  è antisimmetrica.

**Prova:** Le suddette proprietà, riguardanti le potenze incrociate qualsiasi sia la coppia di situazioni elettriche, implicano che sia nulla la differenza (per provare la reciprocità) e la somma (per provare l'antireciprocità) delle due potenze incrociate:

$$p^j \mp p'^j = [z^j]^T [R]^T z'^j \pm [z'^j]^T [R]^T z^j = [z^j]^T [R^T \pm R] z^j = 0 \implies R^T = \pm R$$

che dimostra entrambe le proprietà.

**Rappresentazione controllata in tensione:** Consideriamo un  $k$ -porta omogeneo di cui esista la rappresentazione controllata in tensione:  $i = G \ v$ .

**Proprietà:** Il  $k$ -porta è reciproco se e solo se la matrice  $G$  è simmetrica.

**Proprietà:** Il  $k$ -porta è antireciproco se e solo se la matrice  $G$  è antisimmetrica.

**Prova:** Esse sono analoghe a quelle per la rappresentazione controllata in corrente. Consideriamo una generica rappresentazione cardinale del  $k$ -porta. Questa generica rappresentazione comprende come casi particolari le due precedenti.

**Generica rappresentazione cardinale:** Consideriamo un  $k$ -porta omogeneo di cui esista una rappresentazione cardinale. Ordinando opportunamente le porte, una qualsiasi rappresentazione cardinale di un  $k$ -porta omogeneo assume la forma:

$$\begin{bmatrix} v^a \\ z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{aa} & H^{av} \\ H^{ia} & H^{iv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^a \\ v^b \end{bmatrix}$$

In questo caso le potenze incrociate assumono le forme:

$$p^j = [v^j]^T z'^j = [(z^a)^T]^T [(v^a)^T] + [(z^b)^T]^T [(v^b)^T], \quad p'^j = [v'^j]^T z^j = [(z^a)^T]^T [(v^a)^T] + [(z^b)^T]^T [(v^b)^T]$$

$$p^j = [(z^a)^T]^T [H^{aa}]^T (z^a)^T + [(v^b)^T]^T [[H^{aa}]^T + H^{ia}] (z^a)^T + [(v^b)^T]^T [H^{iv}] (v^b)^T$$

$$p'' = [(z^a)^T]^T [H^{vi}]^T (z^a)^v + [(v^b)^T]^T [H^{wv}]^T + H^{ii} (z^a)^v + [(v^b)^T]^T H^{iv} (v^b)^v$$

**Proprietà** : Un qualsiasi  $k$ -porta omogeneo di cui esista una rappresentazione cardinale è reciproco se e solo se le sottomatrici  $H^{vi}$ ,  $H^{wv}$ ,  $H^{ii}$  e  $H^{iv}$  della matrice cardinale soddisfano alle tre seguenti proprietà :

$$H^{vi} = [H^{vi}]^T \quad , \quad [H^{wv}]^T = -H^{ii} \quad , \quad H^{iv} = [H^{iv}]^T \quad \blacksquare$$

Questa proprietà viene ricordata agevolmente nella forma : Un  $k$ -porta omogeneo di cui è nota una matrice cardinale  $H$  è reciproco se e solo se ciascuna coppia di elementi in posizione simmetrica  $h_{\mu\nu}$  e  $h_{\nu\mu}$  con  $\mu \neq \nu$  di  $H$  soddisfa alle condizioni :

$h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$  qualora essi rappresentino delle trasresistenze o transconduttanze

$h_{\mu\nu} = -h_{\nu\mu}$  qualora essi rappresentino dei rapporti di tensione e/o di corrente

**Proprietà** : Un qualsiasi  $k$ -porta omogeneo di cui esista una rappresentazione cardinale è antireciproco se e solo se le sottomatrici  $H^{vi}$  e  $H^{iv}$  sono antisimmetriche e le matrici  $H^{ii}$  e  $H^{wv}$  soddisfano alla  $[H^{wv}]^T = -H^{ii}$ .

Questa proprietà viene ricordata agevolmente nella forma :

Un  $k$ -porta omogeneo di cui è nota una generica matrice cardinale  $H$  è antireciproco se e solo se la matrice è antisimmetrica.

**Prove** : Le suddette proprietà, riguardanti le potenze incrociate qualsiasi sia la coppia di situazioni, implicano che sia nulla la differenza (per provare la reciprocità) e la somma (per provare l'antireciprocità) delle due potenze incrociate :

$$p' \mp p'' = [(z^a)^T]^T [H^{vi}]^T \mp H^{wv} (z^a)^v + [(v^b)^T]^T [H^{wv}]^T + H^{ii} (z^a)^v \mp [(v^b)^T]^T [H^{wv}]^T + H^{ii} (z^a)^v + [(v^b)^T]^T [H^{iv}] \mp [H^{wv}]^T (v^b)^v = 0$$

è assicurata qualora siano nulle le matrici

$$[H^{vi}]^T \mp H^{wv} = 0 \quad , \quad [H^{wv}]^T + H^{ii} = 0 \quad , \quad [H^{iv}] \mp [H^{wv}]^T = 0$$

che dimostra la proprietà.

**Rappresentazioni noncardinali** : Anche le matrici noncardinali devono soddisfare certe condizioni, qualora il  $k$ -porta sia reciproco. Dal momento che in questo caso le condizioni diventano più complesse, ci limiteremo a fornire le condizioni per le matrici noncardinali  $T'$  e  $T''$  dei doppi bipoli nel Par. 9.4.2.  $\blacksquare$

**Reciprocità tradizionale** : Molti testi forniscono una definizione meno generale dei  $k$ -porte reciproci : essi prendono in considerazione solamente i  $k$ -porte che ammettono la matrice  $R$  e/o la matrice  $G$ . Un  $k$ -porta è chiamato reciproco se la matrice  $R$  ovvero  $G$  è simmetrica. Questa definizione è meno generale dal momento che non può prendere in considerazione i  $k$ -porte reciproci, di cui non sono definite queste due matrici, come, per esempio, il trasformatore ideale (vedere Sez. 10.6). L'uguaglianza tra i parametri omogenei  $T_{\mu\nu}$  e  $T_{\nu\mu}$  della matrice  $R$  può essere interpretata considerando la loro definizione (vedere Sez. 8.4). L'uguaglianza implica che se connettiamo una sfi alla  $\mu$ -esima porta e un c.a. alle restanti porte e misuriamo la tensione  $v_\mu$  e se connettiamo la stessa sfi alla  $\nu$ -esima porta e un c.a. alle restanti porte e misuriamo la tensione  $v_\nu$ , le due tensioni  $v_\nu$  e  $v_\mu$  risultano uguali.

WWWWWW??? FARE FIGURA in cui si vede un doppio bipolo chiuso su una sfi e un alcuni c.a e su alcuni c.a. e una sfi, le tensioni ai capi dei c.a. non cambiano ???WWWWWW

### 8.6.3 Teorema di reciprocità

WWWWWW??? SPOSTARE QUESTO PARAGRAFO NEL CAP. 11 ???WWWWWW

Il concetto di reciprocità ci consente di introdurre un teorema fondamentale :

**Teorema** : Sia dato il componente composito  $C^c \equiv \{C^1, C^2, C^3, \dots\}$  in cui i componenti aggregati  $C^1, C^2, C^3, \dots$  sono supposti reciproci. Il componente composito  $C^c$  è a sua volta reciproco.

**Teorema** : Sia dato il componente composito  $C^c \equiv \{C^1, C^2, C^3, \dots\}$  in cui i componenti aggregati  $C^1, C^2, C^3, \dots$  sono supposti antireciproci. Il componente composito  $C^c$  è a sua volta antireciproco.

**Prove** : Consideriamo due situazioni elettriche diverse, a cui il componente composito e quelli aggregati al suo interno siano soggetti, e le due potenze incrociate :

componente :	$p_c^c$		componenti :	$p_1^1, p_2^2, p_3^3, \dots$
composito :	$p_c^c$	,	aggregati :	$p_1^1, p_2^2, p_3^3, \dots$

Per il corollario della potenza virtuale (Cap. 2) le potenze incrociate  $p_c^c$  e  $p_c^c$  coincidono con la somma delle rispettive potenze incrociate dei componenti aggregati :

$$p_c^c = p_1^1 + p_2^2 + p_3^3 + \dots \quad , \quad p_c^c = p_1^1 + p_2^2 + p_3^3 + \dots$$

Le ipotesi  $p_1^1 = \mp p_1^1, p_2^2 = \mp p_2^2, p_3^3 = \mp p_3^3, \dots$  implicano necessariamente  $p_c^c = \mp p_c^c$ .  $\blacksquare$

**Commento** : Il teorema di reciprocità ci consente di affermare che, indipendentemente dal numero di terminali, i componenti composti esclusivamente da bipoli omogenei (resistori, c.a., c.c.) sono necessariamente reciproci.  $\blacksquare$

**Commento** : Un componente composito di componenti nonreciproci è in genere ma non necessariamente nonreciproco. Nella Sez. 10.6 vedremo come una coppia di sVpV ovvero di sIpI, doppi bipoli tipicamente unidirezionali, può costituire un trasformatore ideale, che è un doppio bipolo reciproco.

**Commento** : Nella letteratura il teorema di reciprocità viene spesso enunciato in una forma meno generale di quella presentata qui, dal momento che considera solo circuiti costituiti esclusivamente da bipoli. Questa forma afferma che un multiporta costituito da soli resistori è reciproco.  $\blacksquare$



## 8.7 APPENDICE SULLE FORME QUADRATICHE OMOGENEE

### 8.7.1 Matrici asimmetriche, simmetriche e antisimmetriche

Richiamiamo alcune definizioni riguardanti le matrici quadrate.

**Definizione** : Una matrice quadrata è detta *simmetrica* se gli elementi di ogni coppia simmetrica rispetto alla diagonale principale sono uguali.

Altrimenti la matrice è detta *asimmetrica*.

**Definizione** : Una matrice quadrata è detta *antisimmetrica* se ogni elemento della diagonale principale è nullo e gli elementi di ogni coppia simmetrica rispetto alla diagonale stessa sono opposti.

**Esempi** : Qui sono riportate tre matrici  $3 \times 3$  :

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 5 & 8 & -2 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -2 & 7 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

asimmetrica

simmetrica

antisimmetrica

**Proprietà** : Se  $A$  è una qualsiasi matrice asimmetrica, possiamo scomporla nella somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica :

$$A = A^{\text{sim}} + A^{\text{ant}} \quad \text{dove} \quad A^{\text{sim}} = 1/2[A + A^T] \quad \text{e} \quad A^{\text{ant}} = 1/2[A - A^T]$$

dove le matrici  $A^{\text{sim}}$  e  $A^{\text{ant}}$  sono, rispettivamente, la *componente simmetrica* e *antisimmetrica* della generica matrice  $A$ .

Riscriviamo la precedente proprietà per una matrice  $3 \times 3$  nella forma distesa :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & (a_{12} + a_{21})/2 & (a_{13} + a_{31})/2 \\ (a_{21} + a_{12})/2 & a_{22} & (a_{23} + a_{32})/2 \\ (a_{31} + a_{13})/2 & (a_{32} + a_{23})/2 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (a_{12} - a_{21})/2 & (a_{13} - a_{31})/2 \\ (a_{21} - a_{12})/2 & 0 & (a_{23} - a_{32})/2 \\ (a_{31} - a_{13})/2 & (a_{32} - a_{23})/2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Esempio** : Qui riportiamo la scomposizione di una matrice asimmetrica  $3 \times 3$  nella somma della componente simmetrica e di quella antisimmetrica :

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 8 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

asimmetrica                      simmetrica                      antisimmetrica

### 8.7.2 Forme quadratiche omogenee

Richiamiamo brevemente le forme quadratiche omogenee associate alle matrici quadrate.

**Definizione** : A qualsiasi matrice quadrata  $A$  (in genere asimmetrica) possiamo associare la cosiddetta *forma quadratica omogenea* definita come  $F(x) = x^T A x$ .

**Proprietà** : La forma quadratica di qualsiasi matrice è nulla per  $x = 0$ .

**Esempio** : Calcoliamo la forma quadratica omogenea

$$F(x) \text{ associata alla matrice } 3 \times 3 \text{ qui a fianco : } \begin{bmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 5 & 8 & -2 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$F(x) = 7x_1^2 + 8x_2^2 + 6x_3^2 + (-3 + 5)x_1x_2 + (4 + 4)x_1x_3 + (-2 - 1)x_2x_3$$

$$F(x) = 7x_1^2 + 8x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2x_3$$

**Definizioni** : Una matrice quadrata qualsiasi (in genere asimmetrica) è chiamata :

1. *definita positiva* se  $F(x) > 0 \forall x \neq 0$ .
2. *semidefinita positiva* se  $F(x) \geq 0 \forall x \neq 0$ .  
La disegguazione deve essere verificata col segno "=" per almeno un valore di  $x \neq 0$ .
3. *definita negativa* se  $F(x) < 0 \forall x \neq 0$ .
4. *semidefinita negativa* se  $F(x) \leq 0 \forall x \neq 0$ .  
La disegguazione deve essere verificata col segno "=" per almeno un valore di  $x \neq 0$ .
5. *indefinita* in tutti i rimanenti casi.

Queste definizioni introdotte per le matrici sono immediatamente estese alle forme quadratiche stesse.

**Proprietà** : Consideriamo una qualsiasi matrice antisimmetrica: la sua forma quadratica risulta identicamente nulla, come può essere verificato per una generica matrice  $3 \times 3$  :

$$F(x) = (a_{12} - a_{21})x_1x_2 + (a_{13} - a_{31})x_1x_3 + (a_{23} - a_{32})x_2x_3 = 0$$

**Proprietà** : La forma quadratica associata a una qualsiasi matrice asimmetrica è uguale alla forma quadratica associata alla componente simmetrica della matrice stessa.

$$F(x) = x^T A x = x^T [A^{\text{sim}} + A^{\text{ant}}] x = x^T A^{\text{sim}} x + x^T A^{\text{ant}} x = x^T A^{\text{sim}} x$$

**Commento** : tradizionalmente i testi di algebra delle matrici introducono le definizioni precedenti limitatamente alle matrici simmetriche, dal momento che ad ogni forma quadratica possiamo associare una ed una sola matrice simmetrica.

### 8.7.3 Proprietà delle forme quadratiche omogenee

Tutto quello che segue riguarda le forme quadratiche di matrici simmetriche. I risultati valgono anche per quelle asimmetriche se si ha la precauzione di scomporre nella somma della componente simmetrica e di quella antisimmetrica. A questo fine noi accenniamo a due diversi metodi per verificare la definitività di una matrice simmetrica.

Il primo metodo è basato sull'analisi degli autovalori (necessariamente reali) affinché le matrici simmetriche siano (semi)definite positive o negative :

1. La matrice simmetrica  $k \times k$   $A$  è definita positiva se e solo se tutti i suoi  $k$  autovalori sono positivi.

- La matrice simmetrica  $k \times k$   $A$  è semidefinita positiva se e solo se tutti i suoi  $k$  autovalori sono nonnegativi, con la condizione che almeno uno sia nullo.
- La matrice simmetrica  $k \times k$   $A$  è definita negativa se e solo se tutti i suoi  $k$  autovalori sono negativi.
- La matrice simmetrica  $k \times k$   $A$  è semidefinita negativa se e solo se tutti i suoi  $k$  autovalori sono nonpositivi, con la condizione che almeno uno sia nullo.

Il secondo metodo è basato sulla verifica del segno del determinante di alcune opportune sottomatrici della matrice (simmetrica). Per esempio, nel caso di matrici  $2 \times 2$  si ha:

- La matrice simmetrica  $2 \times 2$   $A$  è definita positiva se e solo se  $a_{11} > 0$  e  $|A| = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$ .
- La matrice simmetrica  $2 \times 2$   $A$  è semidefinita positiva se e solo se  $a_{11} \geq 0$  e  $|A| = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$  con il vincolo che una delle due disequazioni sia un'eguaglianza.
- La matrice simmetrica  $2 \times 2$   $A$  è definita negativa se e solo se  $a_{11} < 0$  e  $|A| = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$ .
- La matrice simmetrica  $2 \times 2$   $A$  è semidefinita negativa se e solo se  $a_{11} \leq 0$  e  $|A| = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$  con il vincolo aggiuntivo che una delle due disequazioni sia un'eguaglianza.

5. Con riferimento ai precedenti punti 2 e 4, nel caso in cui  $a_{11} = 0$  e  $|A| = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$ , solamente l'elemento  $a_{22} \neq 0$ . In questo caso la matrice è risultata semidefinita, positiva per  $a_{22} > 0$  ovvero negativa per  $a_{22} < 0$ . Nel caso in cui anche  $a_{22} = 0$  la forma quadratica risulta identicamente nulla.

**Esempi:** Le seguenti matrici simmetriche sono:

$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$	,	$\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$	,	$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$	,	$\begin{bmatrix} -16 & 8 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$	,	$\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$
definita		semidefinita		definita		semidefinita		indefinita
positiva		positiva		negativa		negativa		

**Esempi:** Le seguenti matrici asimmetriche sono:

$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$	,	$\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$	,	$\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$	,	$\begin{bmatrix} -16 & 12 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$	,	$\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$
definita		semidefinita		definita		semidefinita		indefinita
positiva		positiva		negativa		negativa		

**Interpretazione geometrica:** La forma quadratica omogenea di una matrice  $2 \times 2$  definita positiva ha la forma geometrica di una scodella, mentre quella di una matrice  $2 \times 2$  definita negativa ha la forma geometrica di un budino scodellato dalla stessa. La forma quadratica omogenea di una matrice  $2 \times 2$  semidefinita positiva ha la forma geometrica di una grondaia, mentre quella di una matrice  $2 \times 2$  semidefinita negativa ha la forma geometrica di una grondaia rovesciata. Infine la forma quadratica di una matrice

indefinita ha le forma di una sella di cavallo. ■  
 WWWWWW??? FARE FIGURE con curve di livello centrate e scentrate delle forme quadratiche omogenee, e nonomogenee: una figura per definita positiva, semidefinita positiva, eccettera. DUPLICARE figure con ellissi dal Cap. 3 ???WWWWWW  
 Per le matrici  $3 \times 3$  si ha:

- La matrice simmetrica  $3 \times 3$   $A$  è definita positiva se e solo se  $a_{11} > 0$ ,  $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$  e  $|A| > 0$ .
- La matrice simmetrica  $3 \times 3$   $A$  è semidefinita positiva se e solo se  $a_{11} \geq 0$ ,  $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$  e  $|A| \geq 0$  con il vincolo aggiuntivo che almeno una delle tre disequazioni sia un'eguaglianza.
- La matrice simmetrica  $3 \times 3$   $A$  è definita negativa se e solo se  $a_{11} < 0$ ,  $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$  e  $|A| < 0$ .
- La matrice simmetrica  $3 \times 3$   $A$  è semidefinita negativa se e solo se  $a_{11} \leq 0$ ,  $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$  e  $|A| \leq 0$  con il vincolo aggiuntivo che almeno una delle tre disequazioni sia un'eguaglianza.

**Esempi:** Le seguenti simmetriche matrici sono:  
 WWWWWW??? CONTROLLARE Le matrici qui sotto ???WWWWWW

$\begin{bmatrix} 5 & 0,5 & 1,5 \\ 0,5 & 3 & 1,5 \\ 1,5 & 1,5 & 4 \end{bmatrix}$	,	$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0,5 \\ -3 & 5 & 3 \\ 0,5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$	,	$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 1,5 \\ 0 & -6 & -2 \\ 1,5 & -2 & -4 \end{bmatrix}$	,	$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0,5 \\ 3 & -10 & -4 \\ 0,5 & -4 & -4 \end{bmatrix}$	,	$\begin{bmatrix} 5 & 0,5 & -1 \\ 0,5 & -2 & 3,5 \\ -1 & 3,5 & 3 \end{bmatrix}$
definita		semidefinita		definita		semidefinita		indefinita
positiva		positiva		negativa		negativa		

**Esempi:** Le seguenti matrici asimmetriche sono:

$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$	,	$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$	,	$\begin{bmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$	,	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -10 & -4 \\ 1 & -4 & -4 \end{bmatrix}$	,	$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$
definita		semidefinita		definita		semidefinita		indefinita
positiva		positiva		negativa		negativa		

# 9 GENERICI DOPPI BIPOLI ADINAMICI TEMPO-INVARIANTI e LINEARI

WWWWWW?? DISEGNO EMBLEMA DEL CAPITOLO un generico doppio bipolo con accanto una generica rappresentazione ibrida ???WWWWWW

Questo capitolo si sofferma sulle rappresentazioni esplicite e sulle proprietà dei generici doppi bipoli adinamici tempo-invarianti e lineari, partendo dalle conoscenze acquisite nel Cap. 8 sui generici  $k$ -porte della stessa classe. Il capitolo termina con i tripoli a stella, a triangolo e i doppi bipoli impropri a ponte.

**Sez. 9.1 : Rappresentazioni esplicite :** Le sei rappresentazioni esplicite dei doppi bipoli sono suddivise nelle quattro cardinali e due noncardinali. Le formule per passare dalla matrice di una rappresentazione all'altra insieme alle condizioni per la loro esistenza sono discusse.

**Sez. 9.2 : Grandezze impresse :** Analogamente ai  $k$ -porte, le due grandezze impresse presenti nelle rappresentazioni esplicite coincidono con le grandezze indipendenti, qualora quelle indipendenti siano nulle. Applicando il primo teorema di equivalenza a ciascuna rappresentazione viene ottenuto il corrispondente modello equivalente costituito dal doppio bipolo omogeneo associato e due sorgenti impresse.

**Sez. 9.3 : Parametri omogenei :** I parametri omogenei delle sei rappresentazioni esplicite sono definiti da un punto di vista circuitale, come rapporto tra due opportune grandezze della rappresentazione.

**Sez. 9.4 : Proprietà :** Le proprietà dei doppi bipoli adinamici, tempo-invarianti e lineari vengono investigate : proprietà energetiche, reciprocità, antireciprocità, simmetria, equilibrio, e direzionalità. Le condizioni a cui devono soddisfare i parametri delle rappresentazioni, qualora il doppio bipolo soddisfi alle suddette proprietà, sono introdotte.

**Sez. 9.5 : Tripoli resistivi a stella e a triangolo :** Per la loro diffusione vengono introdotti i DBR costituiti dall'aggregazione a "T" (stella) e a "II" (triangolo) di tre bipoli adinamici, tempo-invarianti, lineari e omogenei. Inoltre vengono derivate le formule per trasformare un tripolo a "T" in un tripolo a "II" equivalente.

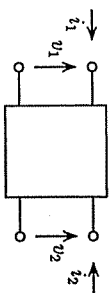
**Sez. 9.6 : Ponti resistivi :** Vengono introdotti i *quadrupoli a ponte* operanti come DBI, calcolando le loro matrici resistenza e conduttanza e discutendo le loro proprietà e condizioni di equilibrio.

## 9.1 RAPPRESENTAZIONI ESPLICITE

In analogia ai generici  $k$ -porte adinamici, tempo-invarianti e lineari, questa sezione introduce le rappresentazioni esplicite dei doppi bipoli adinamici, tempo-invarianti e lineari. Le condizioni per la loro esistenza sono discusse. Come nel Cap. 8, essendo in presenza di componenti tempo-invarianti, le tensioni e correnti non dipendono esplicitamente dal tempo  $t$  e useremo come simbolo  $v_1, v_2, i_1$  e  $i_2$ .

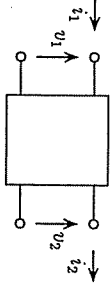
### 9.1.1 Rappresentazioni cardinali

Consideriamo un generico doppio bipolo adinamico, tempo-invariante e lineare, sia proprio, tripolare e improprio. In accordo al Cap. 8, esistono quattro rappresentazioni cardinali. Ciascuna rappresentazione cardinale può essere derivata da una generica rappresentazione implicita se e solo se è verificata la condizione riportata nell'ultima colonna del sottostante quadro. I sei parametri presenti in queste rappresentazioni sono definiti avendo adottato la convenzione cardinale per il doppio bipolo (vedere Par. 6.3.4).

	$\begin{bmatrix} h_{11}^v & h_{12}^v \\ h_{21}^v & h_{22}^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11}^i & h_{12}^i \\ h_{21}^i & h_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{i}_2 \end{bmatrix}$		
1) <i>controllata in corrente</i> ( $v_1, v_2$ ) $\leftarrow$ ( $i_1, i_2$ )	$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}$	$h_{11}^v \quad h_{22}^v - h_{12}^v h_{21}^v \neq 0$	
2) <i>controllata in tensione</i> ( $i_1, i_2$ ) $\leftarrow$ ( $v_1, v_2$ )	$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \end{bmatrix}$	$h_{11}^i \quad h_{22}^i - h_{12}^i h_{21}^i \neq 0$	
3) <i>prima ibrida</i> ( $v_1, i_2$ ) $\leftarrow$ ( $i_1, v_2$ )	$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}^v & h_{12}^v \\ h_{21}^v & h_{22}^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{i}_2 \end{bmatrix}$	$h_{11}^v \quad h_{22}^v - h_{12}^v h_{21}^v \neq 0$	
4) <i>seconda ibrida</i> ( $i_1, v_2$ ) $\leftarrow$ ( $v_1, i_2$ )	$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}^i & h_{12}^i \\ h_{21}^i & h_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}$	$h_{11}^i \quad h_{22}^i - h_{12}^i h_{21}^i \neq 0$	

### 9.1.2 Rappresentazioni noncardinali

In accordo al Cap. 8, per i doppi bipoli adinamici, tempo-invarianti e lineari solo due rappresentazioni noncardinali possono essere definite : entrambe sono *rappresentazioni di trasmissione* in cui ogni coppia tensione e corrente della stessa porta appartiene al medesimo vettore delle grandezze dipendenti ovvero indipendenti. Ciascuna di queste rappresentazioni esiste effettivamente se e solo se è verificata la condizione riportata nell'ultima colonna : i parametri sono definiti avendo adottato la convenzione noncardinale discussa nel Par. 6.3.4.

generica rappresentazione implicita			
$\begin{bmatrix} h_{11}^n & h_{12}^n \\ h_{21}^n & h_{22}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11}^i & h_{12}^i \\ h_{21}^i & h_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{h}_1 \\ \hat{h}_2 \end{bmatrix}$			
rappresentazioni noncardinali	grand. dipen.	matrice indip.	grand. impres. per l'esistenza
5) di trasmissione diretta $(v_1, i_1) \leftarrow (v_2, i_2)$	$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}'' & t_{12}'' \\ t_{21}'' & t_{22}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{i}_1 \end{bmatrix}$		$h_{11}^n h_{21}^i - h_{21}^n h_{11}^i \neq 0$
6) di trasmissione inversa $(v_2, i_2) \leftarrow (v_1, i_1)$	$\begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}'' & t_{12}'' \\ t_{21}'' & t_{22}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_2 \\ \hat{i}_2 \end{bmatrix}$		$h_{22}^n h_{12}^i - h_{12}^n h_{22}^i \neq 0$

**Questio :** Dal momento che la rappresentazione di trasmissione inversa è poco usata, perché viene elencata insieme alle altre ?

**Risposta :** Per impedire che qualcuno si svegli di buon mattino sostenendo di avere trovato una nuova rappresentazione dei doppi bipoli.

### 9.1.3 Esempio

Consideriamo una generica rappresentazione implicita di un doppio bipolo adinamico, tempo-invariante, lineare nonomogeneo : ciascuna delle sei coppie di colonne facenti parte delle due matrici  $2 \times 2$  è linearmente indipendente. In questo caso tutte le sei rappresentazioni esplicite sono definite. I risultati sono riportati nel quadro :

Dalla rappresentazione implicita a fianco otteniamo tutte e sei le rappresentazioni esplicite		3	2	$v_1$	$v_2$	$i_1$	$i_2$	$v_1$	$v_2$	$i_1$	$i_2$
1)	$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$	2)	$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$								
3)	$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4/3 \\ -8/3 \end{bmatrix}$	4)	$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$								
5)	$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$	6)	$\begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$								

**Avvertenza :** Da questo esempio risulta evidente che le grandezze impresse, rappresentate dallo stesso simbolo nelle diverse rappresentazioni esplicite (vedere Par. 9.2.1) sono numericamente diverse, dal momento che rappresentano tensioni o correnti della stessa porta ma con connessioni diverse all'altra porta (c.c., c.a., nullatore).

**Rappresentazione grafica :** Le rappresentazioni esplicite dei doppi bipoli possono essere visualizzate graficamente da due famiglie di rette, una famiglia per ciascuna equazione scalare. Una delle grandezze indipendenti in ascissa, l'altra come parametro della famiglia e la grandezza dipendente in ordinata. Questa rappresentazione grafica è molto usata per i doppi bipoli nonlineari (transistori).

FIG. RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE CARATTERISTICHE DI UN DOPIO BIPOLI

### 9.1.4 Cambiamento di una rappresentazione esplicita

Questa sezione considera due esempi della trasformazione di una rappresentazione esplicita di un doppio bipolo nonomogeneo in un'altra rappresentazione mediante semplici passaggi algebrici.

**Esempio A :** Sia dato un doppio bipolo, di cui conosciamo la rappresentazione controllata in corrente  $(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$  e calcoliamo la sua prima rappresentazione ibrida  $(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$ .

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A questo scopo esaminiamo le due equazioni della rappresentazione  $(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$  : nella  $v_1 = 4 i_1 + 2 i_2 + 4$  vi sono due grandezze dipendenti,  $v_1$  e  $i_2$ , e una indipendente,  $i_1$ , della prima rappresentazione ibrida, mentre nella seconda  $v_2 = 1 i_1 + 3 i_2 + 3$  vi sono due grandezze indipendenti,  $i_1$  e  $v_2$ , e una dipendente,  $i_2$ , della stessa rappresentazione. Questa equazione può essere trasformata direttamente nella seconda equazione scalare della prima rappresentazione ibrida :  $i_2 = -1/3 i_1 + 1/3 v_2 - 1$ . Sostituendo questa espressione nella prima equazione della rappresentazione  $(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$ , si ha la prima equazione della prima rappresentazione ibrida :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Quindi la prima rappresentazione ibrida in forma vettoriale è :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

**Esempio B :** Sia dato un doppio bipolo, di cui conosciamo la rappresentazione controllata in tensione  $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$  e calcoliamo la rappresentazione controllata in corrente  $(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$ .

Le grandezze  $v_1$  e  $v_2$  sono indipendenti nella rappresentazione nota, mentre sono dipendenti della rappresentazione che intendiamo calcolare. Quindi isoliamo il vettore delle tensioni a primo membro, moltiplicando i due membri della rappresentazione nota per l'inversa della matrice :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,1 & 0,3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,1 & 0,3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

Eseguiamo l'inversione numerica della matrice e sostituendola si ottiene proprio la rappresentazione controllata in corrente :

$$\begin{bmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,1 & 0,3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

inversione della matrice

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,8 \\ -1,6 \end{bmatrix}$$

rappres. controllata in corrente

### 9.1.5 Formule per le trasformazioni tra le matrici di doppi bipoli

Questo paragrafo considera tutte le possibili trasformazioni delle rappresentazioni esplicite di doppi bipoli omogenei fornendo le trasformazioni da un matrice all'altra, congiuntamente alle condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di queste trasformazioni. Esse sono ottenute tramite semplici operazioni algebriche, che il lettore può sviluppare per proprio conto, seguendo le procedure illustrate nel paragrafo precedente.

$$R = \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ |G| & g_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |H'| & h'_{12} \\ -h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -h''_{12} \\ h''_{11} & h''_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |T'| & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t''_{22} & t''_{21} \\ t''_{21} & t''_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t''_{12} & t''_{11} \\ t''_{11} & t''_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -t''_{12} \\ -t''_{21} & t''_{22} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ |R| & r_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |H''| & h''_{12} \\ -h''_{21} & h''_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{12} & -|T''| \\ -1 & t'_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t''_{12} & t''_{11} \\ t''_{11} & -t''_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t''_{12} & t''_{11} \\ t''_{11} & -t''_{12} \end{bmatrix}$$

$$H' = \begin{bmatrix} |R| & r_{12} \\ r_{22} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{11} & g_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |H''| & h''_{12} \\ -h''_{21} & h''_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{12} & -|T''| \\ -1 & t'_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t''_{12} & t''_{11} \\ t''_{11} & -t''_{12} \end{bmatrix}$$

$$H'' = \begin{bmatrix} 1 & -r_{12} \\ r_{11} & |R| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |G| & g_{12} \\ g_{22} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{22} & -h'_{12} \\ |H'| & h'_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{21} & -|T'| \\ t'_{11} & t'_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t''_{21} & t''_{22} \\ t''_{22} & -t''_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t''_{21} & t''_{22} \\ t''_{22} & -t''_{21} \end{bmatrix}$$

$$T' = \begin{bmatrix} r_{21} & |R| \\ 1 & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_{22} & -1 \\ g_{21} & g_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -|H'| & -h'_{11} \\ h'_{21} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h'_{22} \\ h'_{21} & h'_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |T''| & t''_{12} \\ -t''_{21} & t''_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |T''| & t''_{12} \\ -t''_{21} & t''_{11} \end{bmatrix}$$

$$T'' = \begin{bmatrix} r_{22} & -|R| \\ r_{12} & r_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_{11} & 1 \\ g_{12} & -g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -h'_{11} \\ h'_{12} & h'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -|H''| & h''_{22} \\ h''_{12} & h''_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t''_{22} & t''_{21} \\ t''_{21} & t''_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t''_{22} & t''_{21} \\ t''_{21} & t''_{11} \end{bmatrix}$$

**Avvertenza:** In ciascuna delle quaterne delle formule di trasformazione i quattro elementi della matrice a cui si intende pervenire hanno un fattore a denominatore in comune. Questo fattore coincide con uno dei quattro elementi della matrice di partenza ovvero col suo determinante. La eventuale nullità di questo fattore significa che la trasformazione non è possibile dal momento che la matrice a cui si intende pervenire non esiste. Quindi la condizione a cui devono soddisfare i quattro elementi della matrice di partenza può essere individuata direttamente dalle stesse formule di trasformazione, come spiegato qui di seguito :

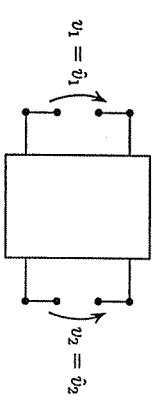
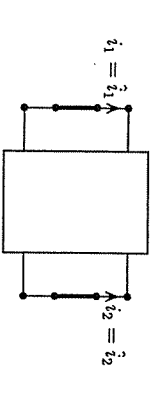
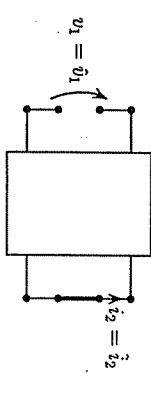
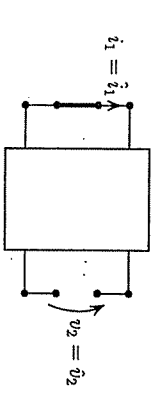
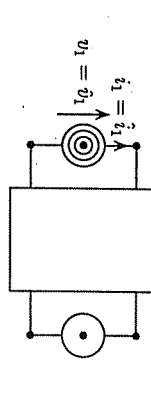
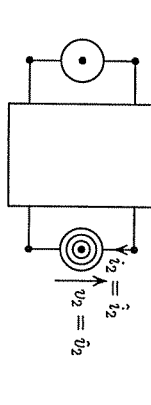
trasformaz. tra matrici	condizione di esistenza	trasformaz. tra matrici	condizione di esistenza	trasformaz. tra matrici	condizione di esistenza
$R \rightarrow G$	$ R  \neq 0$	$H' \rightarrow R$	$h'_{22} \neq 0$	$T' \rightarrow R$	$t'_{21} \neq 0$
$R \rightarrow H'$	$r_{22} \neq 0$	$H' \rightarrow G$	$h'_{11} \neq 0$	$T' \rightarrow G$	$t'_{12} \neq 0$
$R \rightarrow H''$	$r_{11} \neq 0$	$H' \rightarrow H''$	$ H'  \neq 0$	$T' \rightarrow H'$	$t'_{22} \neq 0$
$R \rightarrow T'$	$r_{21} \neq 0$	$H' \rightarrow T'$	$h'_{21} \neq 0$	$T' \rightarrow H''$	$t'_{11} \neq 0$
$G \rightarrow T''$	$r_{12} \neq 0$	$H' \rightarrow T''$	$h'_{12} \neq 0$	$T'' \rightarrow T''$	$ T''  \neq 0$
$G \rightarrow R$	$ G  \neq 0$	$H'' \rightarrow R$	$h''_{11} \neq 0$	$T'' \rightarrow R$	$t''_{21} \neq 0$
$G \rightarrow H'$	$g_{11} \neq 0$	$H'' \rightarrow G$	$h''_{22} \neq 0$	$T'' \rightarrow G$	$t''_{12} \neq 0$
$G \rightarrow H''$	$g_{22} \neq 0$	$H'' \rightarrow H'$	$ H''  \neq 0$	$T'' \rightarrow H'$	$t''_{22} \neq 0$
$G \rightarrow T'$	$g_{21} \neq 0$	$H'' \rightarrow T'$	$h''_{21} \neq 0$	$T'' \rightarrow H''$	$t''_{11} \neq 0$
$G \rightarrow T''$	$g_{12} \neq 0$	$H'' \rightarrow T''$	$h''_{12} \neq 0$	$T'' \rightarrow T''$	$ T''  \neq 0$

## 9.2 GRANDEZZE IMPRESSE

Questa sezione esamina il significato circuitale (fisico) delle grandezze impresse presenti nelle rappresentazioni esplicite di generici doppi bipoli dinamici tempo-invarianti e lineari nonomogenei. Inoltre sono presentati i modelli equivalenti di questi doppi bipoli nonomogenei costituiti dal doppio bipolo omogeneo associato e due sorgenti impresse.

### 9.2.1 Grandezze impresse dei doppi bipoli

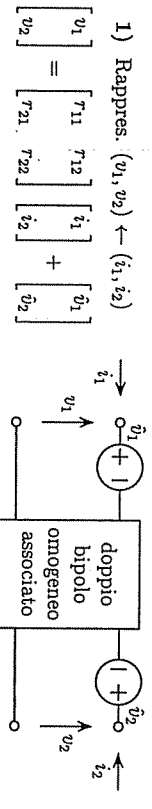
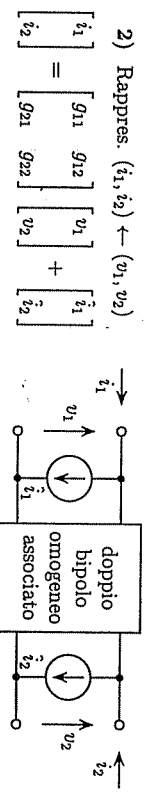
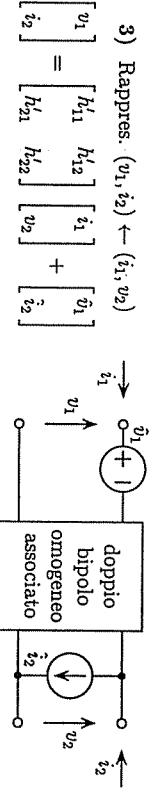
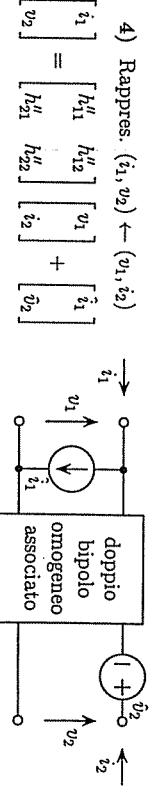
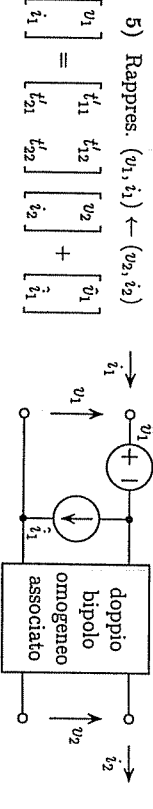
Qui di seguito riportiamo in dettaglio l'interpretazione circuitale delle grandezze impresse presenti nelle rappresentazioni cardinali dei doppi bipoli. Come visto nel Cap. 8 per i generici k-porte, le grandezze impresse coincidono con i valori che assumono le grandezze dipendenti qualora quelle indipendenti siano nulle: a questo scopo è sufficiente connettere c.c. e/o c.a. (per le rappresentazioni cardinali) ovvero un nullatore e un noratore (per le rappresentazioni noncardinali) alle due porte del doppio bipolo.

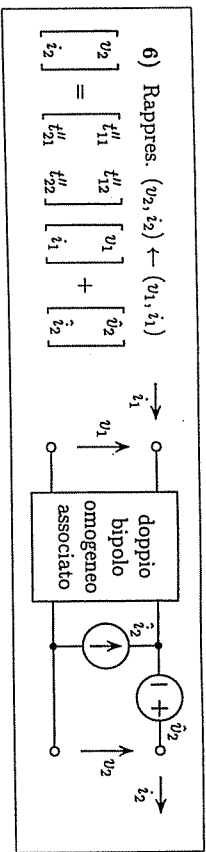
<p>1) <i>Rappres. controllata in corrente</i></p> <p><math>v_1 = v_1</math>  <math>i_1 = i_2 = 0</math> alla porta 1</p> <p><math>v_2 = v_2</math>  <math>i_1 = i_2 = 0</math> alla porta 2</p> 	<p>2) <i>Rappres. controllata in tensione</i></p> <p><math>i_1 = i_1</math>  <math>v_1 = v_2 = 0</math> alla porta 1</p> <p><math>i_2 = i_2</math>  <math>v_1 = v_2 = 0</math> alla porta 2</p> 
<p>3) <i>Prima rappresentaz. ibrida</i></p> <p><math>v_1 = v_1</math>  <math>i_1 = i_2 = 0</math> alla porta 1</p> <p><math>i_2 = i_2</math>  <math>i_1 = i_2 = 0</math> alla porta 2</p> 	<p>4) <i>Seconda rappresentaz. ibrida</i></p> <p><math>i_1 = i_1</math>  <math>v_1 = i_2 = 0</math> alla porta 1</p> <p><math>v_2 = v_2</math>  <math>v_1 = i_2 = 0</math> alla porta 2</p> 
<p>5) <i>Rappres. di trasmissione diretta</i></p> <p><math>v_1 = v_1</math>  <math>v_2 = i_2 = 0</math> alla porta 1</p> <p><math>i_1 = i_1</math>  <math>v_2 = i_2 = 0</math> alla porta 2</p> 	<p>6) <i>Rappres. di trasmissione inversa</i></p> <p><math>v_2 = v_2</math>  <math>v_1 = i_1 = 0</math> alla porta 2</p> <p><math>i_2 = i_2</math>  <math>v_1 = i_1 = 0</math> alla porta 1</p> 

**Attenzione** : le suddette grandezze impresse di rappresentazioni diverse possono essere indicate con lo stesso simbolo ma non sono affatto coincidenti. Per esempio, il simbolo  $v_1$  è usato con significati diversi nelle rappresentazioni 1, 3, 5 e analogamente il simbolo  $i_2$  nelle rappresentazioni 2, 3, 6, come è evidente dalle loro definizioni. ■

9.2.2 Il primo teorema di equivalenza per i doppi bipoli

Questo paragrafo esamina i modelli dei doppi bipoli non omogenei ottenuti tramite il primo teorema di equivalenza (vedere Par. 8.3.2). Questi modelli sono, in genere, costituiti da due sorgenti impresse, che tengono conto dei due termini impressivi che compaiono nella corrispondente rappresentazione esplicita, e dal doppio bipolo omogeneo associato. Nei quattro modelli cardinali vi è una sorgente impressiva per ciascuna porta, mentre nei due modelli noncardinali, le due sorgenti impresse sono connesse alla medesima porta, come risulta dai quadri seguenti.

<p>1) Rappres. <math>(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)</math></p> <p><math>v_1 = \begin{bmatrix} r_{11} &amp; r_{12} \\ r_{21} &amp; r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}</math></p> 
<p>2) Rappres. <math>(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)</math></p> <p><math>i_1 = \begin{bmatrix} g_{11} &amp; g_{12} \\ g_{21} &amp; g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \end{bmatrix}</math></p> 
<p>3) Rappres. <math>(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)</math></p> <p><math>v_1 = \begin{bmatrix} h'_{11} &amp; h'_{12} \\ h'_{21} &amp; h'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{i}_2 \end{bmatrix}</math></p> 
<p>4) Rappres. <math>(i_1, v_2) \leftarrow (v_1, i_2)</math></p> <p><math>i_1 = \begin{bmatrix} h''_{11} &amp; h''_{12} \\ h''_{21} &amp; h''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}</math></p> 
<p>5) Rappres. <math>(v_1, i_1) \leftarrow (v_2, i_2)</math></p> <p><math>v_1 = \begin{bmatrix} t'_{11} &amp; t'_{12} \\ t'_{21} &amp; t'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{i}_1 \end{bmatrix}</math></p> 

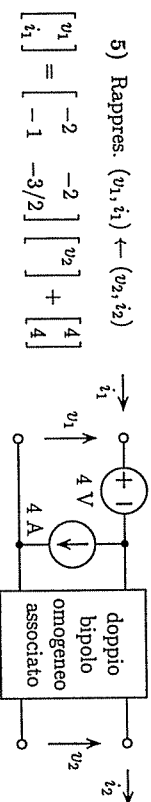
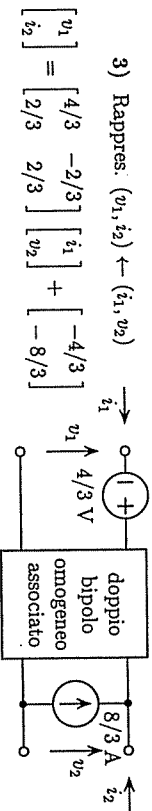
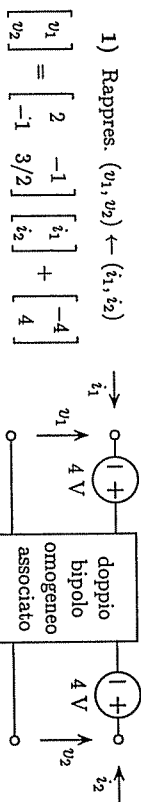


**Avvertenza:** Come già discusso nella Sez. 8.3, il doppio bipolo omogeneo associato è comune ai sei modelli.

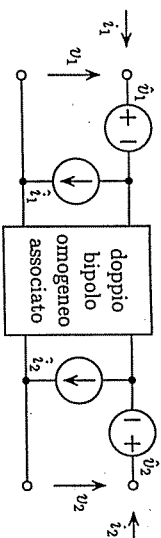
### 9.2.3 Confronto tra i diversi modelli

Diversi modelli equivalenti a un dato doppio bipolo nonimpressivo e nonomogeneo esistono, uno per ciascuna rappresentazione esplicita esistente. Il doppio bipolo omogeneo associato rimane sempre lo stesso in ciascuna dei modelli equivalenti: i modelli si distinguono l'un dall'altro per la diversa struttura delle sorgenti impresse connesse alle porte del doppio bipolo omogeneo associato e per i diversi valori delle loro grandezze impresse.

**Esempio:** Il seguente esempio riguardano tre tra le sei rappresentazioni esplicite del doppio bipolo esaminato nel Par. 9.1.3: esse danno origine a tre diversi modelli:



**Commento:** I precedenti diversi modelli equivalenti dello stesso doppio bipolo possono essere considerati come casi particolari di un modello equivalente più generale con un numero ridondante di sorgenti impresse (una  $\hat{V}$  e una  $\hat{I}$  per ciascuna porta), riportato nella sottostante figura:



Per stabilire l'equivalenza occorre tener conto che i due parametri impressivi presenti in ciascuna rappresentazione esplicita del DB dipendono dalle quattro grandezze impresse delle due  $\hat{V}$  e delle due  $\hat{I}$  presenti nel modello. Quindi esistono infinite scelte di queste quattro grandezze impresse, che danno origine alla stessa coppia di parametri impressivi delle rappresentazione. Tra queste infinite scelte noi possiamo scegliere quelle per cui due delle quattro grandezze impresse delle sorgenti sono nulle: queste scelte corrispondono ai sei modelli visti nel Par. 9.2.2.

## 9.3 PARAMETRI OMOGENEI

Esaminiamo il significato circuitale dei quattro elementi della matrice di ciascuna rappresentazione esplicita di un doppio bipolo, chiamati *parametri omogenei*. In questa interpretazione circuitale noi assumiamo che il doppio bipolo sia omogeneo.

### 9.3.1 Parametri omogenei delle matrici cardinali dei DB

Qui di seguito riportiamo l'interpretazione circuitale dei quattro parametri omogenei presenti nelle quattro matrici cardinali  $R, G, H'$  e  $H''$  dei doppi bipoli:

#### 1) Parametri della matrice resistenza $R$

$r_{11} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \hat{i}_1 \end{bmatrix}_{i_2=0}$ resistenza della porta 1 con la porta 2 a vuoto	$r_{12} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \hat{i}_2 \end{bmatrix}_{i_1=0}$ la tensione della porta 2 e la corrente della porta 1 con la porta 2 a vuoto
$r_{21} = \begin{bmatrix} v_2 \\ \hat{i}_1 \end{bmatrix}_{i_2=0}$ la tensione della porta 2 e la corrente della porta 1 con la porta 2 a vuoto	$r_{22} = \begin{bmatrix} v_2 \\ \hat{i}_2 \end{bmatrix}_{i_1=0}$ la tensione della porta 1 e la corrente della porta 2 con la porta 1 a vuoto

2) Parametri della matrice conduttanza  $G$

$g_{11} = \begin{bmatrix} i_1 \\ v_1 \end{bmatrix}_{v_2=0}$ conduttanza della porta 1 con la porta 2 in corto $g_{21} = \begin{bmatrix} i_2 \\ v_1 \end{bmatrix}_{v_2=0}$ transconduttanza tra la corrente della porta 2 e la tensione della porta 1 con la porta 2 in corto	$g_{12} = \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_{v_1=0}$ transconduttanza tra la corrente della porta 1 e la tensione della porta 2 con la porta 1 in corto $g_{22} = \begin{bmatrix} i_2 \\ v_2 \end{bmatrix}_{v_1=0}$ conduttanza della porta 2 con la porta 1 in corto
---	---

3) Parametri della prima matrice ibrida  $H'$

$h'_{11} = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}_{i_2=0}$ resistenza della porta 1 con la porta 2 in corto $h'_{21} = \begin{bmatrix} i_2 \\ i_1 \end{bmatrix}_{i_2=0}$ rapporto tra le correnti delle porte 2 e 1 con la porta 2 in corto	$h'_{12} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_{i_1=0}$ rapporto tra le tensioni delle porte 1 e 2 con la porta 1 a vuoto $h'_{22} = \begin{bmatrix} i_2 \\ v_2 \end{bmatrix}_{i_1=0}$ conduttanza della porta 2 con la porta 1 a vuoto
--	---

4) Parametri della seconda matrice ibrida  $H''$

$h''_{11} = \begin{bmatrix} i_1 \\ v_1 \end{bmatrix}_{i_2=0}$ conduttanza della porta 1 con la porta 2 a vuoto $h''_{21} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}_{i_2=0}$ rapporto tra le tensioni delle porte 2 e 1 con la porta 2 a vuoto	$h''_{12} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}_{v_1=0}$ rapporto tra le correnti delle porte 1 e 2 con la porta 1 in corto $h''_{22} = \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}_{v_1=0}$ resistenza della porta 2 con la porta 1 in corto
---	--

9.3.2 Interpretazione circuitale dei parametri omogenei delle rappresentazioni noncardinali

La definizione dei parametri omogenei di ciascuna matrice noncardinale sono un po' diverse da quelle delle matrici cardinali già esaminate nel paragrafo precedente.

**Prima interpretazione:** I parametri omogenei possono essere definiti dal rapporto tra una grandezza dipendente e una indipendente solo se usiamo l'accortezza di connettere un bipolo patologico alla porta di cui sia la tensione sia la corrente sono grandezze indipendenti. Dal punto di vista pratico questa soluzione non è affatto opportuna.

5) Parametri della matrice di trasmissione diretta  $T'$ : prima interr.

$t'_{11} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_{i_2=0}$ rapporto delle tensioni con la porta 2 chiusa su nullatore in serie a $\mathcal{Y}$ $t'_{21} = \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_{i_2=0}$ transconduttanza tra la corrente della porta 1 e la tensione della porta 2 su nullatore in serie a $\mathcal{Y}$	$t'_{12} = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}_{v_2=0}$ transresistenza tra la tensione della porta 1 e la corrente della porta 2 su nullatore in paral. a $\hat{\mathcal{X}}$ $t'_{22} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}_{v_2=0}$ rapporto tra le correnti delle porte 1 e 2 su nullatore in paral. a $\hat{\mathcal{X}}$
---	---

6) Parametri della matrice di trasmissione inversa  $T''$ : prima interr.

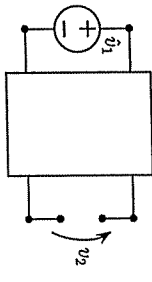
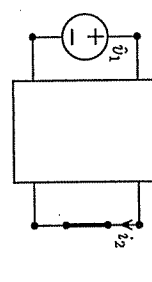
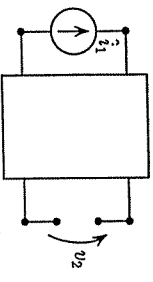
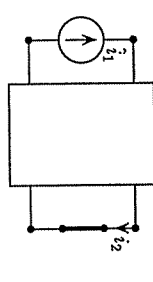
$t''_{11} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}_{i_1=0}$ rapporto delle tensioni con la porta 1 chiusa su nullatore in serie a $\mathcal{Y}$ $t''_{21} = \begin{bmatrix} i_2 \\ v_1 \end{bmatrix}_{i_1=0}$ transconduttanza tra la corrente della porta 2 e la tensione della porta 1 su nullatore in serie a $\mathcal{Y}$	$t''_{12} = \begin{bmatrix} v_2 \\ i_1 \end{bmatrix}_{v_1=0}$ transresistenza tra la tensione della porta 2 e la corrente della porta 1 su nullatore in paral. a $\hat{\mathcal{X}}$ $t''_{22} = \begin{bmatrix} i_2 \\ i_1 \end{bmatrix}_{v_1=0}$ rapporto tra le correnti delle porte 1 e 2 su nullatore in paral. a $\hat{\mathcal{X}}$
---	---

**Commento:** il metodo della falsa posizione per l'analisi dei circuiti con struttura a scala (vedere Par. 7.4.3) è parente stretto del metodo per calcolare i parametri omogenei della matrice  $T'$ .

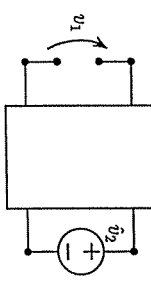
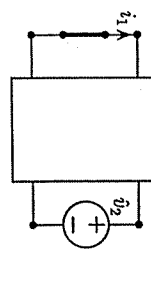
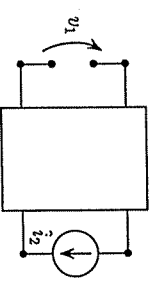
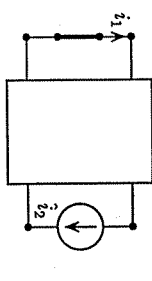


**Seconda interpretazione circuitale :** Si può evitare l'introduzione del nullatore per definire i parametri omogenei di una rappresentazione noncardinale, se si accetta di definire il parametro omogeneo come il rapporto di una grandezza indipendente e una dipendente. I quattro parametri delle matrici sono tutti definiti come il rapporto della grandezza impressa della sorgente impressiva connessa a una porta (grandezza indipendente) e la tensione o corrente misurata (grandezza dipendente) all'altra porta del doppio bipolo, mentre la restante grandezza indipendente viene azzerata. I seguenti quadri riportano le definizioni dei quattro elementi delle due matrici di trasmissione :

5) Parametri della matrice di trasmissione  $T'$  : seconda interr.

$t'_{11} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_{i_2=0}$ rapporto delle tensioni delle porte 1 e 2 con la porta 2 a vuoto		$t'_{12} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ i_2 \end{bmatrix}_{v_2=0}$ la tensione della porta 1 e la corrente della porta 2 con la porta 2 in corto	
$t'_{21} = \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_{i_2=0}$ transconduttanza tra la corrente della porta 1 e la tensione della porta 2 con la porta 2 a vuoto		$t'_{22} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}_{v_2=0}$ rapporto tra le correnti delle porte 1 e 2 con la porta 2 in corto	

6) Parametri della matrice di trasmissione inversa  $T''$  : seconda interr.

$t''_{11} = \begin{bmatrix} \hat{v}_2 \\ v_1 \end{bmatrix}_{i_1=0}$ rapporto delle tensioni delle porte 2 e 1 con la porta 1 a vuoto		$t''_{12} = \begin{bmatrix} \hat{v}_2 \\ i_1 \end{bmatrix}_{v_1=0}$ la tensione della porta 2 e la corrente della porta 1 con la porta 1 in corto	
$t''_{21} = \begin{bmatrix} i_2 \\ v_1 \end{bmatrix}_{i_1=0}$ transconduttanza tra la corrente della porta 2 e la tensione della porta 1 con la porta 1 a vuoto		$t''_{22} = \begin{bmatrix} i_2 \\ i_1 \end{bmatrix}_{v_1=0}$ rapporto tra le correnti delle porte 2 e 1 con la porta 1 in corto	

9.4 PROPRIETÀ DEI DOPPI BIPOLI

Partendo dai risultati teorici sui  $k$ -porte, presentati nel Cap. 8, esaminiamo le condizioni a cui devono soddisfare le rappresentazioni esplicite affinché un doppio bipolo sia dissipativo, attivo, inerte, strettamente attivo, ovvero reciproco, antireciproco, nonreciproco, ovvero unidirezionale, bidirezionale, zerodirezionale, simmetrico, asimmetrico, equilibrato.

9.4.1 Potenza nei doppi bipoli omogenei

In analogia ai  $k$ -porte, qualsiasi doppio bipolo nonomogeneo (vedere Sez. 8.5) è attivo. Il discorso è più articolato per i doppi bipoli omogenei la cui potenza assorbita  $p$ , limitatamente alle rappresentazioni cardinali (l'espressione della potenza mediante le rappresentazioni noncardinali è poco usata), è una forma quadratica omogenea nelle due grandezze indipendenti :

Rappresentazione

forma quadratica della potenza assorbita  $p$

- 1)  $(v_1 \ v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$   $p = i^T R i = i^T [R + R^T] i/2$
- 2)  $(i_1 \ i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$   $p = v^T G v = v^T [G + G^T] v/2$
- 3)  $(v_1 \ i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$   $p = [i_1 \ v_2] H' [i_1 \ v_2]^T = [i_1 \ v_2] [H' + (H')^T] [i_1 \ v_2]^T/2$
- 4)  $(i_1 \ v_2) \leftarrow (v_1, i_2)$   $p = [v_1 \ i_2] H'' [v_1 \ i_2]^T = [v_1 \ i_2] [H'' + (H'')^T] [v_1 \ i_2]^T/2$

Per verificare se un doppio bipolo omogeneo sia dissipativo, strettamente attivo, attivo, o inerte (vedere Par. 8.5.2), occorre esaminare la forma quadratica omogenea associata alle rispettive matrici  $R$ ,  $G$ ,  $H'$ ,  $H''$ , la quale forma coincide a sua volta con quella associata alle corrispondenti matrici simmetriche  $[R + R^T]/2$ ,  $[G + G^T]/2$ ,  $[H' + [H'^T]/2]$ ,  $[H'' + [H''^T]/2]$ . Qui di seguito vengono riportate le condizioni a cui devono soddisfare le matrici delle rappresentazioni cardinali affinché un doppio bipolo omogeneo sia dissipativo, inerte, strettamente attivo e attivo. Esse sono basate sul segno di un termine della diagonale principale e del determinante della matrice simmetrica associata (vedere Par. 8.7.2):

*Quadro delle rappresentazioni cardinali e delle prestazioni energetiche*

matrice	dissipativo	inerte	strettamente attivo	attivo
	$p \geq 0$	$p = 0$	$p \leq 0$	
$R$	$r_{11}r_{22} \geq (r_{12} + r_{21})^2/4$ $r_{11} \geq 0$	$r_{11} = r_{22} = 0$ $r_{12} = -r_{21}$	$r_{11}r_{22} \geq (r_{12} + r_{21})^2/4$ $r_{11} \leq 0$	casì rimanenti
$G$	$g_{11}g_{22} \geq (g_{12} + g_{21})^2/4$ $g_{11} \geq 0$	$g_{11} = g_{22} = 0$ $g_{12} = -g_{21}$	$g_{11}g_{22} \geq (g_{12} + g_{21})^2/4$ $g_{11} \leq 0$	casì rimanenti
$H'$	$h'_{11}h'_{22} \geq (h'_{12} + h'_{21})^2/4$ $h'_{11} \geq 0$	$h'_{11} = h'_{22} = 0$ $h'_{12} = -h'_{21}$	$h'_{11}h'_{22} \geq (h'_{12} + h'_{21})^2/4$ $h'_{11} \leq 0$	casì rimanenti
$H''$	$h''_{11}h''_{22} \geq (h''_{12} + h''_{21})^2/4$ $h''_{11} \geq 0$	$h''_{11} = h''_{22} = 0$ $h''_{12} = -h''_{21}$	$h''_{11}h''_{22} \geq (h''_{12} + h''_{21})^2/4$ $h''_{11} \leq 0$	casì rimanenti

**Commento:** nella Sez. 10.6 incontreremo il trasformatore ideale e il giratore, che sono appunto doppi bipoli inerti.

**Attenzione:** Nel caso particolare in cui solamente un elemento della diagonale principale sia nonnullo (cioè  $(\cdot)_{11} = 0$ ,  $(\cdot)_{22} \neq 0$  [ovvero  $(\cdot)_{11} \neq 0$ ,  $(\cdot)_{22} = 0$ ],  $(\cdot)_{12} = 0$  e  $(\cdot)_{21} = 0$ ) la matrice risulta semidefinita positiva ovvero negativa in accordo al segno dell'unico elemento nonnullo (vedere appendice in fondo al Cap. 8).

**9.4.2 Reciprocità**

Esaminiamo le reciprocità (antireciprocità) dei doppi bipoli: per le rappresentazioni cardinali si può facilmente estendere le proprietà presentate nella Sez. 8.6 per i generici  $k$ -porte. Qui ci limitiamo a considerare le rappresentazioni noncardinali, non considerate precedentemente.

**Proprietà:** La reciprocità di un doppio bipolo, di cui siano note le matrici  $T'$  e  $T''$ , implica che il determinante della matrice sia unitario:  $|T'| = 1$  e  $|T''| = 1$ .

**Prova:** Ci limitiamo a provare la proprietà per la matrice  $T'$ . Esprimiamo le due potenze incrociate in funzione delle due grandezze indipendenti  $i_2$  e  $v_2$ :

$$p' = v_1' i_1' - v_2' i_2' = (t'_{11} v_2' + t'_{12} i_2') (t'_{21} v_2' + t'_{22} i_2') - v_2' i_2'$$

$$p'' = v_1'' i_1'' - v_2'' i_2'' = (t''_{11} v_2'' + t''_{12} i_2'') (t''_{21} v_2'' + t''_{22} i_2'') - v_2'' i_2''$$

Calcoliamo la differenza delle stesse:  $p' - p'' = (t'_{11} t''_{22} - t'_{12} t''_{21} - 1) (v_2' i_2'' - i_2' v_2'')$ . Imponendo la condizione  $p' = p''$ , per qualsiasi valore di  $v_2'$ ,  $i_2'$ ,  $v_2''$  e  $i_2''$ , si ottiene:

$$|T'| - 1 = 0 \implies |T'| = 1.$$

**Proprietà:** L'antireciprocità di un doppio bipolo implica che la matrice  $T'$  e  $T''$  sia diagonale o antidiagonale e che il suo determinante  $|T'|$  e  $|T''|$  sia, rispettivamente, 1 o -1.

**Prova:** Ci limitiamo a provare la proprietà per la matrice  $T'$ . Esprimiamo la somma delle due potenze incrociate in funzione delle grandezze indipendenti  $i_2$  e  $v_2$ :

$$p' + p'' = (t'_{11} v_2 + t'_{12} i_2 - 1) (v_2 i_2 + v_1 i_2) + 2 t'_{11} v_2 i_2 + 2 t'_{12} t'_{22} i_2^2$$

Imponendo  $p' + p'' = 0$  per qualsiasi valori  $v_2$ ,  $i_2$ ,  $v_1$  e  $i_2$ , si ottiene:

$$t'_{21} = 0, \quad t'_{12} = 0, \quad t'_{11} t'_{22} = 1 \quad \text{oppure} \quad t'_{11} = 0, \quad t'_{22} = 0, \quad t'_{12} t'_{21} = 1$$

**9.4.3 Verifica dei vincoli di simmetria**

WWWWWW??? DUPLICARE PARTE di questo paragrafo con la figura nella definizione di doppio bipolo simmetrico nel CAPITOLO 6. ???WWWWWW

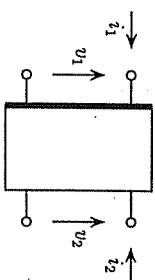
Nel Par. 6.4.2 erano stati definiti i doppi bipoli simmetrici. Per i doppi bipoli dinamici, tempo-invarianti e lineari omogenei questa definizione implica che un doppio bipolo è simmetrico quando sono verificati due vincoli tra i quattro elementi della matrice. Essi sono riportati nel Par. 9.4.7 alla fine di questa sezione. Qui di seguito verifichiamo i vincoli della simmetria limitatamente alle matrici  $R$ ,  $H'$  e  $T'$ .

La figura seguente descrive il significato del ribaltamento delle due porte di un doppio bipolo. La prima figura riporta un generico doppio bipolo in cui la linea spessa serve a distinguere le due porte indipendentemente dai pedici delle tensioni e correnti delle porte stesse. La figura centrale ribalta le due porte lasciando immutata la rispettiva numerazione. La terza figura scambia la numerazione delle due porte: a sinistra la porta 1 e a destra la porta 2. Se i doppi bipoli della prima e terza figura hanno la stessa rappresentazione, il doppio bipolo è simmetrico.

**Matrice R:** Consideriamo la rappresentazione controllata in corrente del doppio bipolo, in accordo alla equazione matriciale e alla figura sottostanti:

rappresentazione del DB

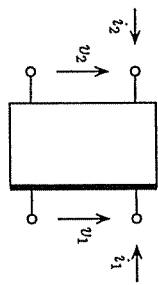
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$



Nella sovrastante equazione matriciale scambiamo le tensioni e le correnti delle due porte:  $v_1 \longleftrightarrow v_2$  e  $i_1 \longleftrightarrow i_2$ . Questa operazione algebrica corrisponde, dal punto di vista fisico, al ribaltamento delle due porte del DB, come indicato nella figura sottostante:

ribaltamento delle porte

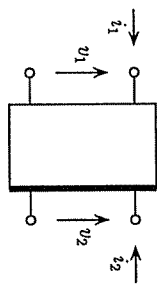
$$\begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ i_1 \end{bmatrix}$$



Nella sovrastante equazione matriciale, riordiniamo le grandezze  $v_1, v_2, i_1$  e  $i_2$  nell'ordine iniziale : questo corrisponde a rinumerare le porte, come indicato nella figura sottostante :

riordino della rappresentazione

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{22} & r_{21} \\ r_{12} & r_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$



Confrontando quest'ultima espressione matriciale con la prima, e più precisamente i quattro elementi delle matrici, si ha che il doppio bipolo è simmetrico se e solo se :  $r_{11} = r_{22}$  e  $r_{12} = r_{21}$ . Questo risultato ci assicura che un doppio bipolo simmetrico, di cui esista la matrice  $R$ , è anche reciproco.

**Matrice  $H'$  :** Consideriamo la prima rappresentazione ibrida  $(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$  del doppio bipolo e riscriviamola scambiando  $v_1 \leftrightarrow v_2$  e  $i_1 \leftrightarrow i_2$ . Infine trasformiamo le equazioni, riordinando  $v_1, v_2, i_1$  e  $i_2$  in accordo alla rappresentazione a sinistra :

riappresentazione del DB      ribaltamento delle porte      riordino della rappresentazione

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ i_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & -h'_{21} \\ -h'_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Confrontando i quattro elementi della matrice a sinistra con quelli della matrice a destra si ha che il doppio bipolo è simmetrico se e solo se :

$$h'_{11} = \frac{h_{11}}{|H'|} \quad , \quad h'_{12} = -\frac{h_{21}}{|H'|} \quad , \quad h'_{21} = -\frac{h_{12}}{|H'|} \quad , \quad h'_{22} = \frac{h_{22}}{|H'|}$$

In genere queste quattro uguaglianze sono verificate se  $|H'| = 1$  e  $h'_{12} = -h'_{21}$ . Questo risultato ci dice che un generico doppio bipolo simmetrico, di cui esista la matrice  $H'$ , è "in genere" anche reciproco.

La suddetta affermazione ammette un'eccezione : infatti le uguaglianze tra i quattro elementi delle matrici sono verificate anche in un altro caso molto particolare ma significativo

$$h'_{11} = h'_{22} = 0 \quad , \quad h'_{12} = \pm 1 \quad , \quad h'_{21} = \pm 1$$

che verrà discusso nel Par. 9.4.5 .

**Matrice  $T'$  :** Consideriamo la rappresentazione di trasmissione diretta  $(v_1, i_1) \leftarrow (v_2, i_2)$  del doppio bipolo e riscriviamola scambiando  $v_1 \leftrightarrow v_2$  e  $i_1 \leftrightarrow i_2$ . Infine trasformiamo le equazioni, riordinando  $v_1, v_2, i_1$  e  $i_2$  in accordo alla rappresentazione a sinistra :

riappresentazione del DB      ribaltamento delle porte      riordino della rappresentazione

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ i_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t'_{22}}{|T'|} & \frac{t'_{12}}{|T'|} \\ \frac{t'_{21}}{|T'|} & \frac{t'_{11}}{|T'|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

Confrontando i quattro elementi della matrice a sinistra con quelli della matrice a destra si ha che il doppio bipolo è simmetrico se e solo se :

$$t'_{11} = \frac{t'_{22}}{|T'|} \quad , \quad t'_{12} = \frac{t'_{12}}{|T'|} \quad , \quad t'_{21} = \frac{t'_{21}}{|T'|} \quad , \quad t'_{22} = \frac{t'_{11}}{|T'|}$$

In genere queste quattro uguaglianze sono verificate se  $|T'| = 1$  e  $t'_{11} = t'_{22}$ . Questo risultato ci dice che un generico doppio bipolo simmetrico, di cui esista la matrice  $T'$ , è in genere anche reciproco.

La suddetta affermazione ammette un'eccezione : infatti le uguaglianze tra i quattro elementi delle matrici sono verificate anche in un altro caso molto particolare ma significativo

$$t'_{12} = t'_{21} = 0 \quad , \quad t'_{11} = \pm 1 \quad , \quad t'_{22} = \pm 1$$

che verrà discusso nel Par. 9.4.5 .

9.4.4 Verifica dei vincoli di equilibrio

WWWWWW DA FARE vedere Par. 6.3.3

9.4.5 Un doppio bipolo molto strano : simmetrico e nonreciproco

Fra i cultori di teoria dei circuiti è diffusa l'idea che i doppi bipoli simmetrici siano necessariamente reciproci. Ricordiamo che la definizione di doppio bipolo simmetrico è stata data nel Par. 6.4.2 (doppio bipolo non varia in seguito al ribaltamento) e quella di  $k$ -porta reciproco nella Sez. 8.6 (uguaglianza delle potenze incrociate). Nel precedente paragrafo le condizioni di simmetria per le matrici  $H'$  e  $T'$  possono essere verificate anche in due casi molto particolari tra loro equivalenti

$$h'_{11} = h'_{22} = 0 \quad , \quad h'_{12} = h'_{21} = \pm 1 \quad ; \quad t'_{12} = t'_{21} = 0 \quad , \quad t'_{11} = -t'_{22} = \pm 1$$

Quando la simmetria del doppio bipolo è verificata da queste particolari condizioni, ci troviamo in presenza di un doppio bipolo dinamico, tempo invariante lineare e omogeneo, di cui sono definite le quattro matrici

$$H' = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad H'' = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad T' = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{bmatrix} \quad , \quad T'' = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{bmatrix}$$

che risulta non reciproco e simmetrico.

Le sue relazioni costitutive sono :  $v_1 = v_2$  ,  $i_1 = i_2$  (convezione cardinale).

Se la seconda porta viene chiusa su un resistore di resistenza  $r_u$  la prima porta presenta una resistenza di valore  $-r_u$  :

$$r_{ing} = \frac{t'_{11} r_u + t'_{12}}{t'_{21} r_u + t'_{22}} = \frac{\pm 1 \times r_u + 0}{0 \mp 1} = -r_u$$

Esso prende il nome di *convertitore negativo di resistenza*.

### 9.4.6 Verifica dei vincoli di direzionalità

È immediata la verifica delle due seguenti proprietà per una qualsiasi rappresentazione implicita dei doppi bipoli adinamici, tempo-invarianti, lineari e omogenei :

**Proprietà :** Un doppio bipolo è unidirezionale se la sottomatrice  $2 \times 2$  estratta dalla matrice  $2 \times 4 H$  (matrice di una generica rappresentazione implicita) relativa alle variabili della porta pilotata è singolare.

**Proprietà :** Un doppio bipolo è zerodirezionale se entrambe le sottomatrici  $2 \times 2$  di  $H$  relative alle variabili di una delle porte sono singolari.

**Proprietà :** Per le quattro rappresentazioni cardinali, un doppio bipolo è unidirezionale  $1 \rightarrow 2$  ovvero  $2 \rightarrow 1$  qualora l'elemento  $( )_{12}$  ovvero  $( )_{21}$  della matrice è nullo. In queste condizioni la prima ovvero la seconda delle relazioni costitutive coinvolge solamente le grandezze della prima ovvero seconda porta :

$$\text{Direz. } 1 \rightarrow 2 : v_1 = r_{11} i_1 \quad , \quad i_1 = g_{11} v_1 \quad , \quad v_1 = h'_{11} i_1 \quad , \quad i_1 = h''_{11} v_1$$

$$\text{Direz. } 2 \rightarrow 1 : v_2 = r_{22} i_2 \quad , \quad i_2 = g_{22} v_2 \quad , \quad v_2 = h'_{22} i_2 \quad , \quad i_2 = h''_{22} v_2$$

**Proprietà :** Se la matrice  $T'$  esiste, la unidirezionalità  $1 \rightarrow 2$  del doppio bipolo richiede che la resistenza d'ingresso  $r_{ing}$  non dipenda da  $v_2$  e  $i_2$ .

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} \implies r_{ing} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{t'_{11} v_2 + t'_{12} i_2}{t'_{21} v_2 + t'_{22} i_2}$$

La resistenza d'ingresso  $r_{ing}$  non dipende da  $v_2$  e  $i_2$  se e solo se il numeratore e il denominatore, ciascuno dei quali dipende sia da  $v_2$  sia da  $i_2$ , coincidono a meno di un fattore moltiplicativo costante :  $t'_{11} v_2 + t'_{12} i_2$  proporzionale a  $t'_{21} v_2 + t'_{22} i_2$   $\forall v_2, i_2$ , che si verifica qualora il determinante  $|T'| = t'_{11} t'_{22} - t'_{12} t'_{21}$  sia nullo.

**Proprietà :** Analogamente al caso precedente, se la matrice  $T''$  esiste, la unidirezionalità  $2 \rightarrow 1$  del doppio bipolo richiede che  $|T''| = 0$ .

**Diagnosi :** Ricordate la favola del lupo e dell'agnello che si abbeveravano allo stesso ruscello : il lupo più in alto e l'agnello più in basso. Il lupo sporcava l'acqua che l'agnello beveva ma non viceversa. La favola è proprio basata sulla unidirezionalità del ruscello la cui corrente scorre sempre nello stesso verso.

### 9.4.7 Riepilogo delle matrici di doppi bipoli reciproci, simmetrici, equilibrati e unidirezionali

Le condizioni a cui devono soddisfare i quattro elementi di ciascuna matrice, cardinale e noncardinale, di un doppio bipolo omogeneo affinché il doppio bipolo sia unidirezionale, zerodirezionale, equilibrato, simmetrico e reciproco sono riassunte nel seguente quadro. Il numero di condizioni dipende dalla proprietà considerata.

*Quadro dei doppi bipoli adinamici tempo-invarianti lineari e equilibrati, simmetrici, reciproci e unidirezionali*

	equilibrato <sup>(1)</sup>		zerodirezionale <sup>(2)</sup>	
	simmetrico <sup>(3)</sup>	reciproco	unidirez. $1 \rightarrow 2$	unidirez. $1 \leftarrow 2$
<b>R</b>	$r_{12} = r_{21}$	$r_{11} = r_{22}$	$r_{11} = 2r_{12}$	$r_{21} = 0$
<b>G</b>	$g_{12} = g_{21}$	$g_{11} = g_{22}$	$g_{11} = -2g_{12}$	$g_{21} = 0$
<b>H'</b>	$h'_{12} = -h'_{21}$	$ H'  = 1$	$h'_{12} = 1/2$	$h'_{12} = 0$
<b>H''</b>	$h''_{12} = -h''_{21}$	$ H''  = 1$	$h''_{12} = -1/2$	$h''_{12} = 0$
<b>T'</b>	$ T'  = 1$	$t'_{11} = t'_{22}$	$t'_{11} = 2$	$ T'  = 0$
<b>T''</b>	$ T''  = 1$	$t''_{11} = t''_{22}$	$t''_{11} = 2$	nondefinita

**Commenti :** Il suddetto quadro richiede alcune precisazioni.

- (1) L'equilibratura (3 vincoli) implica la simmetria (2 vincoli).
- (2) La simmetria (2 vincoli) implica quasi sempre la reciprocità (1 vincolo). L'eccezione è discussa nel Par. 9.4.5, in cui è introdotto un doppio bipolo simmetrico ma non reciproco.
- (3) La zerodirezionalità (2 vincoli) può essere interpretata come una "doppia unidirezionalità" :  $1 \rightarrow 2$  e  $1 \leftarrow 2$ .
- (4) La reciprocità implica l'impossibilità della unidirezionalità.
- (5) La nonreciprocità implica l'impossibilità della zerodirezionalità.
- (6) Le matrici  $T'$  e  $T''$  non sono definite in un doppio bipolo zerodirezionale.

### 9.5 TRIPOLI RESISTIVI "A STELLA" E "A TRIANGOLO"

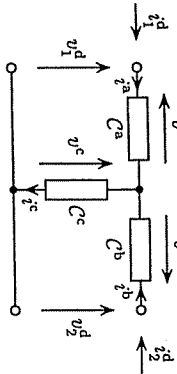
Vengono introdotti i tripoli (DBT) costituiti dall'aggregazione "a stella" e "a triangolo" di tre resistori il cui uso è molto diffuso. Vengono derivate le formule per trasformare un tripolo "a stella" in un tripolo "a triangolo" equivalente.

#### 9.5.1 Connessioni a stella e a triangolo

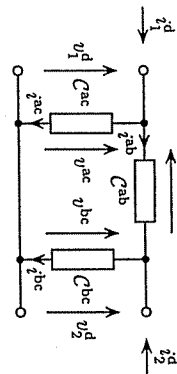
Consideriamo i DBT composti a stella e a triangolo costituiti da tre generici bipoli : queste aggregazioni implicano le seguenti relazioni tra le tensioni e correnti dei tre bipoli

aggregati e del DBT composito :

**DBT a Stella**



**DBT a Triangolo**



Siccome i tre bipoli della stella costituiscono un taglio nodale, la corrente  $i^c$  eguaglia la somma delle correnti  $i^a$  e  $i^b$  :

Siccome i tre bipoli del triangolo costituiscono una maglia, la tensione  $v^{ab}$  eguaglia la differenza delle tensioni  $v^{ac}$  e  $v^{bc}$  :

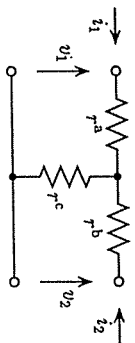
Le correnti  $i_1^d$  e  $i_2^d$  del  $C_{21}^d$  coincidono con le correnti  $i^a$  e  $i^b$ , rispettivamente :  $i_1^d = i^a$  e  $i_2^d = i^b$ .

Le tensioni  $v_1^d$  e  $v_2^d$  del  $C_{21}^d$  sono date dalle tensioni  $v^{ac}$  e  $v^{bc}$  sommate alla tensione  $v^c$  :

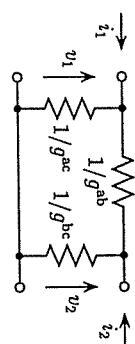
**9.5.2 Sintesi dei DBT a stella e a triangolo**

Introduciamo la seguente simbologia per i tripoli a stella ("T<sup>m</sup>") e a triangolo (II). I tre terminali di entrambi i tripoli siano indicati da a, b, c : c sia il terminale comune alle due porte e le coppie (a,c) e (b,c) identifichino le prime e la seconda porta :

**DBT a stella di resistori** : i bipoli del DBT a stella sono tre resistori :



**DBT a triangolo di resistori** : i bipoli del DBT a triangolo sono tre resistori :



La matrice **R** del DBT a stella risulta :

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^a + r^c & r^c \\ r^c & r^b + r^c \end{bmatrix}$$

La matrice **G** del DBT a triangolo risulta :

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{ac} + g^{ab} & -g^{ab} \\ -g^{ab} & g^{bc} + g^{ab} \end{bmatrix}$$

Gli elementi delle suddette matrici sono calcolati applicando le loro definizioni introdotte in Par. 9.3.1.

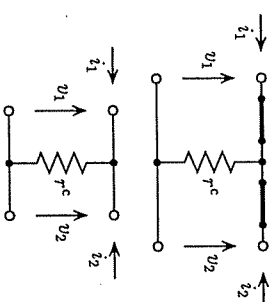
La struttura della due suddette matrici ci consente di dimostrare la seguente proprietà : Quando un tripolo è omogeneo e reciproco si possono (non sempre) ottenere tripoli equivalenti composti solamente di bipoli :

**Proprietà** : sia **R** la matrice resistenza (simmetrica) di un doppio bipolo tripolare e reciproco. Esso è equivalente a un tripolo resistivo a "T<sup>m</sup>" i cui resistori hanno resistenze  $r^a = r_{11} - r_{12}$ ,  $r^b = r_{22} - r_{12}$ ,  $r^c = r_{12}$ .

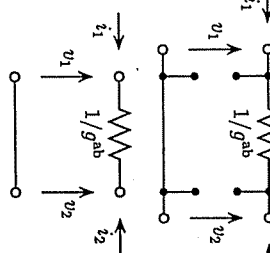
**Proprietà** : sia **G** la matrice conduttanza (simmetrica) di un doppio bipolo tripolare e reciproco. Esso è equivalente a un tripolo resistivo a "II<sup>m</sup>" i cui resistori hanno conduttanze  $g^{ac} = g_{11} + g_{12}$ ,  $g^{bc} = g_{22} + g_{12}$ ,  $g^{ab} = -g_{12}$ .

**Casi particolari** : Due casi particolari vengono incontrati molto spesso : il primo è derivato da un tripolo a stella in cui i resistori in serie alle due porte sono sostituiti da due c.c. ed il secondo è derivato da un tripolo a triangolo in cui i resistori in parallelo alle due porte sono sostituiti da due c.a.

**RESISTORE CON QUATTRO TERMINALI**



**RESISTORE E C.C. TRASVERSALI**



La matrice **R** ha tutti gli elementi uguali :

$$\begin{bmatrix} r^c & r^c \\ r^c & r^c \end{bmatrix}$$

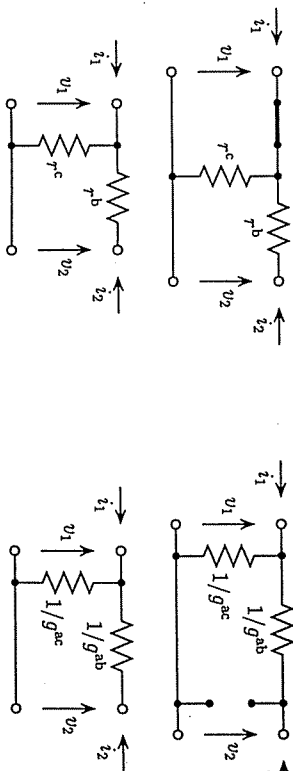
La matrice **G** ha tutti gli elementi uguali a meno del segno :

$$\begin{bmatrix} g^{ab} & -g^{ab} \\ -g^{ab} & g^{ab} \end{bmatrix}$$

Infatti questo DBT è un tripolo a "T<sup>m</sup>" con  $r^a = r^b = 0$ .

Infatti questo DBT è in tripolo a "II<sup>m</sup>" con  $g^{ac} = g^{bc} = 0$ .

**Commento** : Anche un doppio bipolo a "I<sup>m</sup>" può essere visto come un caso particolare sia del DBT a "T<sup>m</sup>" sia del DBT a II, come risulta dalle due seguenti figure.



9.5.3 Trasformazione stella → triangolo

Per doppi bipoli tripolari omogenei e reciproci è spesso conveniente passare dal modello a "Y" (stella) al modello a "T" (triangolo) :

**Proprietà :** Le conduttanze o resistenze del tripolo a triangolo sono date dalle resistenze o conduttanze del tripolo a stella tramite tre diverse ma equivalenti terne di formule. Uguagliamo gli elementi delle matrici conduttanze dei tripoli a triangolo e a stella :

$$\begin{bmatrix} g^{ac} + g^{ab} & -g^{ab} \\ -g^{ab} & g^{bc} + g^{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^a + r^c & r^c \\ r^c & r^b + r^c \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{r^a r^b + r^a r^c + r^b r^c} \begin{bmatrix} r^b + r^c & -r^c \\ -r^c & r^a + r^c \end{bmatrix}$$

DBT a triangolo  DBT a stella

**Prima terna :** Dalla uguaglianza delle due matrici, elemento per elemento, si ottiene una terna di formule simmetriche :

$$g^{bc} = \frac{r^a}{r^a r^b + r^a r^c + r^b r^c}, \quad g^{ac} = \frac{r^b}{r^a r^b + r^a r^c + r^b r^c}, \quad g^{ab} = \frac{r^c}{r^a r^b + r^a r^c + r^b r^c}$$

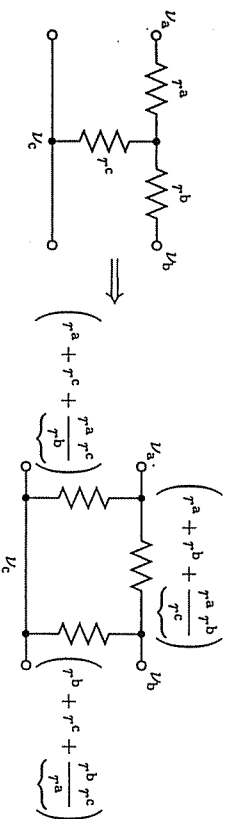
**Seconda terna :** Moltiplicando il numeratore e il denominatore di ciascuna formula per il fattore  $g^a g^b g^c$ , si ottiene un'altra terna :

$$g^{bc} = \frac{g^b g^c}{g^a + g^b + g^c}, \quad g^{ac} = \frac{g^a g^c}{g^a + g^b + g^c}, \quad g^{ab} = \frac{g^a g^b}{g^a + g^b + g^c}$$

**Terza terna :** Invertendo i due membri di ogni formula si ottiene una ulteriore terna :

$$r^{bc} = r^b + r^c + \frac{r^b r^c}{r^a}, \quad r^{ac} = r^a + r^c + \frac{r^a r^c}{r^b}, \quad r^{ab} = r^a + r^b + \frac{r^a r^b}{r^c}$$

**Conclusioni pratiche :** La terza terna di formule è la più facile da ricordare e la più conveniente per l'esecuzione dei calcoli : essa assomiglia a quella della serie di due resistori a parte l'aggiunta del termine sottolineato dalla graffa, come indicato in figura :



La resistenza di ciascun resistore del tripolo a triangolo equivalente è uguale alla somma delle resistenze dei due resistori del tripolo a stella incidenti gli stessi terminali sommati al loro prodotto diviso per la terza resistenza della stella. ■

**Infortunio professionale :** Nel mezzo della prova orale di un esame di profitto l'autore stava per cacciare via uno studente che stava usando delle "formule stravaganti" per eseguire

la trasformazione stella→triangolo. Le formule "stravaganti" costituiscono la terza terna, riportata nella figura. ■

**Commento :** La trasformazione stella→triangolo modifica la topologia del circuito in cui è inserito il tripolo : il numero dei nodi decresce di un'unità perché sparisce il nodo al centro della stella, mentre il numero di maglie cresce di un'unità dovuta al fatto che il triangolo forma una nuova maglia. ■

9.5.4 Trasformazione triangolo → stella

Per doppi bipoli tripolari omogenei e reciproci è spesso utile passare dallo schema a "T" (triangolo) a quello a "Y" (stella) :

**Proprietà :** Le conduttanze o resistenze del tripolo a stella sono date dalle resistenze o conduttanze del tripolo a triangolo tramite tre diverse ma equivalenti terne di formule. Uguagliamo gli elementi delle matrici resistenza dei tripoli a stella e a triangolo :

$$\begin{bmatrix} r^a + r^c & r^c \\ r^c & r^b + r^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{ac} + g^{ab} & -g^{ab} \\ -g^{ab} & g^{bc} + g^{ab} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{g^{ab} g^{ac} + g^{ab} g^{bc} + g^{ac} g^{bc}} \begin{bmatrix} g^{bc} + g^{ab} & g^{ab} \\ g^{ab} & g^{ac} + g^{ab} \end{bmatrix}$$

DBT a stella  DBT a triangolo

**Prima terna :** Dalla uguaglianza delle due matrici, elemento per elemento, si ottiene una terna di formule simmetriche

$$r^a = \frac{g^{bc}}{g^{ab} g^{ac} + g^{ab} g^{bc} + g^{ac} g^{bc}}, \quad r^b = \frac{g^{ac}}{g^{ab} g^{ac} + g^{ab} g^{bc} + g^{ac} g^{bc}}, \quad r^c = \frac{g^{ab}}{g^{ab} g^{ac} + g^{ab} g^{bc} + g^{ac} g^{bc}}$$

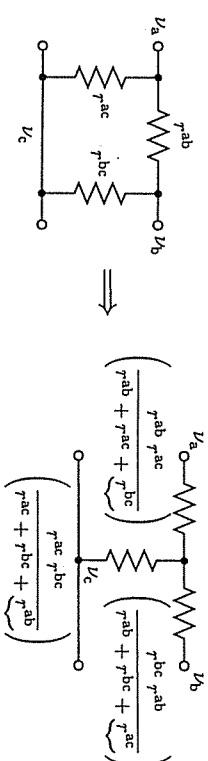
**Seconda terna :** Moltiplicando il numeratore e il denominatore di ogni formula per il fattore  $r^{ac} r^{bc} r^{ab}$  si ottiene un'altra terna :

$$r^a = \frac{r^{ab} r^{bc}}{r^{ab} + r^{bc} + r^{ac}}, \quad r^b = \frac{r^{ab} r^{bc}}{r^{ab} + r^{bc} + r^{ac}}, \quad r^c = \frac{r^{ac} r^{bc}}{r^{ab} + r^{bc} + r^{ac}}$$

**Terza terna :** Invertendo i due membri di ogni formula si ottiene una ulteriore terna :

$$g^a = g^{ab} + g^{ac} + \frac{g^{ab} g^{ac}}{g^{bc}}, \quad g^b = g^{ab} + g^{bc} + \frac{g^{ab} g^{bc}}{g^{ac}}, \quad g^c = g^{ac} + g^{bc} + \frac{g^{ac} g^{bc}}{g^{ab}}$$

**Conclusioni pratiche :** La seconda terna di formule è più facile da ricordare e la più conveniente per l'esecuzione dei calcoli : essa assomiglia a quella del parallelo di due resistori a parte l'aggiunta al denominatore del termine sottolineato dalla graffa, come indicato in figura.



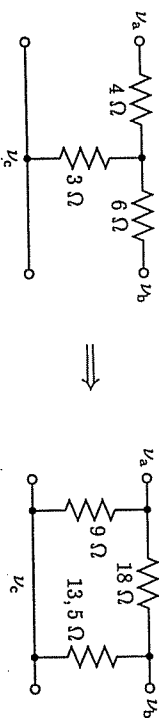
La resistenza di ciascun resistore del tripolo a stella equivalente è uguale al prodotto delle resistenze dei due resistori del tripolo a triangolo incidenti lo stesso terminale divisa per la somma della tre resistenze del triangolo.

**Commento:** la trasformazione triangolo→stella modifica la topologia del circuito in cui è inserito il tripolo: il numero dei nodi cresce di un'unità a causa del centro della stella, mentre il numero di maglie decresce di un'unità per la scomparsa del triangolo.

**9.5.5 Esempi**

**Esempio A:** La figura riporta un DBT a stella di cui sono note le tre resistenze  $r^a, r^b$  e  $r^c$ . Le resistenze del DBT a triangolo equivalente risultano:

$$r^{ac} = 4 + 3 + \frac{4 \times 3}{6} = 9 \Omega, \quad r^{bc} = 6 + 3 + \frac{6 \times 3}{4} = 13,5 \Omega, \quad r^{ab} = 4 + 6 + \frac{4 \times 6}{3} = 18 \Omega$$



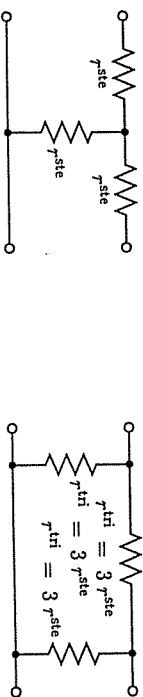
**Esempio B:** Assumiamo ora di conoscere un DBT a triangolo le cui resistenze sono  $r^{ac} = 9 \Omega, r^{bc} = 13,5 \Omega$  e  $r^{ab} = 18 \Omega$  riportate in figura. Le resistenze del tripolo a stella equivalente risultano:

$$r^a = \frac{9 \times 18}{9 + 18 + 13,5} = 4 \Omega, \quad r^b = \frac{18 \times 13,5}{9 + 18 + 13,5} = 6 \Omega, \quad r^c = \frac{9 \times 13,5}{9 + 18 + 13,5} = 3 \Omega$$

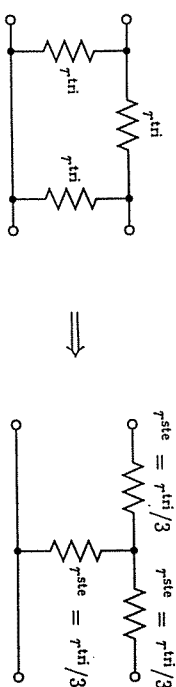
Abbiamo ritrovato i valori delle resistenze della stella da cui siamo partiti. Questo dimostra che le formule sono corrette.

**9.5.6 Casi particolari delle trasformazioni**

**Tripolo a stella equilibrato:** Se le tre resistenze della stella sono uguali ( $r^{ste}$ ) il tripolo è equilibrato (vedere Par. 6.4.3): le formule della trasformazione stella→triangolo si semplificano notevolmente, come può essere provato, uguagliando le tre resistenze della stella nelle formule precedenti:  $r^{tri} = 3 r^{ste}$ .



**Tripolo a triangolo equilibrato:** Se le tre resistenze del triangolo sono uguali ( $r^{tri}$ ) il tripolo è equilibrato (vedere Par. 6.4.3): la trasformazione triangolo→stella si semplifica notevolmente, come può essere provato, uguagliando le tre resistenze del triangolo nelle formule precedenti:  $r^{ste} = \frac{r^{tri}}{3}$ .



**Tripolo a stella simmetrico:** Se le due resistenze in serie alle due porte del tripolo a stella (ovvero in parallelo alle due porte del tripolo a triangolo) sono uguali il tripolo è simmetrico (vedere Par. 9.4.3). In questo caso la trasformazione si semplifica:

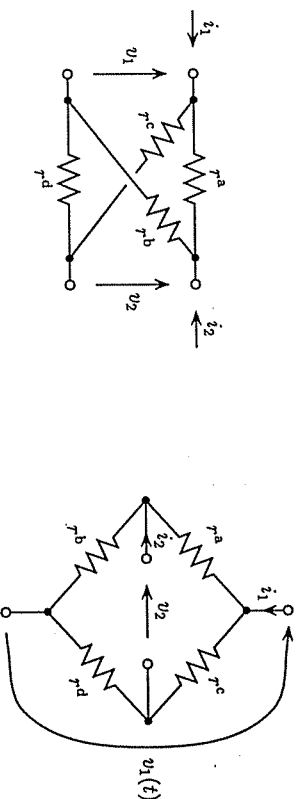
$$r^{ac} = r^{bc} = r^a + 2 r^c, \quad r^{ab} = 2 r^a + (r^a)^2 / r^c$$

**Tripolo a triangolo simmetrico:** Se le due resistenze in parallelo alle due porte del tripolo a triangolo sono uguali il tripolo è simmetrico: la trasformazione si semplifica:

$$r^a = r^b = \frac{r^{ac} r^{ab}}{2 r^{ac} + r^{ab}}, \quad r^c = \frac{(r^{ac})^2}{2 r^{ac} + r^{ab}}$$

**9.6 PONTI RESISTIVI**

Anche i ponti resistivi sono molto diffusi: essi sono quadripoli costituiti da quattro resistori  $\mathcal{R}(r_a = 1/g_a), \mathcal{R}(r_b = 1/g_b), \mathcal{R}(r_c = 1/g_c)$  e  $\mathcal{R}(r_d = 1/g_d)$ . Noi li esaminiamo nel caso, invero molto frequente, che essi operino come doppi bipoli impropri. In questo caso essi sono noti come *doppi bipoli a ponte*. Notare che i quattro resistori formano, nello stesso tempo, sia una maglia sia un taglio.



PONTE RESISTIVO OPERANTE COME DBI

STESSO PONTE RESISTIVO RIDISEGNATO

Siccome il quadripolo a ponte è omogeneo e opera come DBI, bisogna ricorrere a una matrice per descriverne il comportamento: le matrici cardinali sono le più usate:

Matrice resistenza  $R$

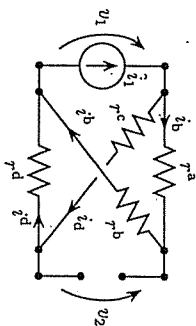
$$\begin{bmatrix} (r_a + r_b)(r_c + r_d) & r_b r_c - r_a r_d \\ r_a + r_b + r_c + r_d & r_a + r_b + r_c + r_d \\ \frac{r_b r_c - r_a r_d}{r_a + r_b + r_c + r_d} & \frac{(r_a + r_c)(r_b + r_d)}{r_a + r_b + r_c + r_d} \end{bmatrix}$$

Matrice conduttanza  $G$

$$\begin{bmatrix} (g_a + g_c)(g_b + g_d) & g_b g_c - g_a g_d \\ g_a + g_b + g_c + g_d & g_a + g_b + g_c + g_d \\ \frac{g_b g_c - g_a g_d}{g_a + g_b + g_c + g_d} & \frac{(g_a + g_b)(g_c + g_d)}{g_a + g_b + g_c + g_d} \end{bmatrix}$$

Ogni elemento di  $R$  e  $G$  può essere calcolato applicando la definizione dei parametri omogenei di un doppio bipolo (vedere Sez. 9.3). Qui ci limitiamo a sviluppare i calcoli per  $R$ .

La resistenza a vuoto  $r_{11} = u_1/i_1$  coincide con quella del parallelo dei  $\mathcal{R}(r_a) \parallel \mathcal{R}(r_b)$  e  $\mathcal{R}(r_c) \parallel \mathcal{R}(r_d)$  (vedere figura). Analogamente la resistenza  $r_{22}$  coincide con quella del parallelo dei  $\mathcal{R}(r_a) \parallel \mathcal{R}(r_c)$  e  $\mathcal{R}(r_b) \parallel \mathcal{R}(r_d)$ .



La transresistenza  $r_{21}$  è calcolata osservando che la corrente impressa  $i_1$  si suddivide nelle correnti  $i_b$  e  $i_d$  che vengono calcolate mediante la regola del partitore:

$$i_b = i_1 \frac{r_c + r_d}{r_a + r_b + r_c + r_d}, \quad i_d = i_1 \frac{r_a + r_b}{r_a + r_b + r_c + r_d}$$

Consideriamo la maglia costituita dalla seconda porta del ponte e dai  $\mathcal{R}(r_b)$  e  $\mathcal{R}(r_d)$ : la tensione  $u_2$  a vuoto alla seconda porta risulta:

$$u_2 = u_b - u_d = i_b r_b - i_d r_d \implies r_{21} = \left[ \frac{u_2}{i_1} \right]_{i_2 = 0} = \frac{r_b r_c - r_a r_d}{r_a + r_b + r_c + r_d}$$

Analogamente può essere calcolata l'altra transresistenza  $r_{12}$ , che comunque coincide con  $r_{21}$  dal momento che il DBT a ponte è reciproco. ■

**Proprietà:** Uguagliando le resistenze a vuoto delle due porte, si ottiene la condizione necessaria e sufficiente affinché il DBI a ponte sia simmetrico:

$$r_{11} = r_{22} \implies r_a r_c + r_b r_d = r_a r_b + r_c r_d$$

**Commento:** Dall'esame degli elementi delle matrici  $R$  e  $G$  risulta che, anche nel caso usuale in cui le quattro resistenze  $r_a, r_b, r_c$  e  $r_d$  siano positive, le transresistenze  $r_{12} = r_{21}$  ovvero le transconduttanze  $g_{12} = g_{21}$  possono risultare positive, nulle o negative. ■

**Equilibrio del ponte:** il ponte risulta zerodirezionale qualora  $r_{12} = r_{21} = 0$  ovvero  $g_{12} = g_{21} = 0$ , cioè  $r_a r_d = r_b r_c$ . In questo caso si usa dire che il ponte è in equilibrio. Questa regola viene ricordata nel modo seguente:

L'equilibrio del ponte viene raggiunto quando i due prodotti delle resistenze dei resistori opposti del ponte sono uguali.

Nel caso che il ponte sia in equilibrio le matrici  $R$  e  $G$  assumono l'aspetto:

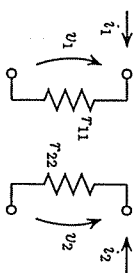
Matrice resistenza  $R$

$$\begin{bmatrix} \frac{r_c (r_a + r_b)}{r_a + r_c} & 0 \\ 0 & \frac{(r_a + r_c)r_b}{r_a + r_b} \end{bmatrix}$$

Matrice conduttanza  $G$

$$\begin{bmatrix} \frac{r_a + r_c}{r_c (r_a + r_b)} & 0 \\ 0 & \frac{r_a + r_b}{r_b (r_a + r_b)} \end{bmatrix}$$

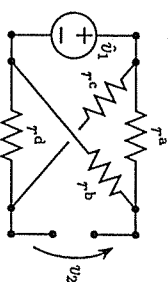
La forma diagonale delle matrici  $R$  e  $G$  di un ponte resistivo in equilibrio ci suggerisce un modello equivalente costituito da due resistori separati di resistenza  $r_1 = r_{11} = 1/g_{11}$  alla prima porta e di resistenza  $r_2 = r_{22} = 1/g_{22}$  alla seconda porta, come riportato in figura.



**Ponte a vuoto:** Quando il ponte è alimentato da una  $\mathcal{V}$  alla prima porta e la seconda porta è a vuoto, esso può essere visto come il parallelo di due partitori di tensione. Quindi il rapporto tra la tensione alla seconda porta e la tensione alla prima porta, può essere ottenuto facendo la differenza tra i rapporti di tensione dei due partitori, cioè:

$$\alpha_v = \left[ \frac{u_2}{u_1} \right]_{i_2 = 0} = \frac{r_b}{r_a + r_b} - \frac{r_d}{r_c + r_d} = \frac{r_b r_c - r_a r_d}{[r_a + r_b][r_c + r_d]}$$

La conoscenza del rapporto  $\alpha_v$  è sufficiente per esaminare il comportamento del ponte qualora la seconda porta rimanga a vuoto. In caso di equilibrio si ha  $\alpha_v = 0$ . ■





# 10 NULLORE SORGENTI PILOTATE TRASFORMATORE IDEALE e GIRATORE

WWWWWW??? FIGURA EMBLEMA contiene i simboli grafici dei sette doppi bipoli notevoli alcuni in versione DBT e altri in versione DBP ???WWWWWW

Questo capitolo esamina i doppi bipoli dinamici, tempo-invarianti e lineari omogenei di tipo elementare nel senso che la loro matrice contiene non più di un parametro indipendente. Essi costituiscono il modello idealizzato di specifici doppi bipoli fisici e, nello stesso tempo, servono come mattoni per realizzare modelli adeguati di generici doppi bipoli fisici.

**Sez. 10.1 :** *Doppi bipoli impressivi con rappresentazione cardinale* : I doppi bipoli impressivi, sia omogenei sia nonomogenei, descritti da una rappresentazione cardinale, hanno dei modelli equivalenti costituiti esclusivamente da due bipoli impressivi (c.c., c.a.,  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{I}$ ), uno per ciascuna porta. Il loro studio è superfluo per la loro banalità.

**Sez. 10.2 :** *Nullore* : Il nullore è un doppio bipolo omogeneo e impressivo, di cui esiste solamente la matrice  $\mathcal{Y}'$ . Esso è l'idealizzazione estrema dell'amplificatore operazionale. Vengono discusse le condizioni necessarie e sufficienti per inserirlo in un circuito e la sua scomposizione nella coppia di bipoli patologici : *nullatore* e *norlore*.

**Sez. 10.3 :** *Le quattro sorgenti pilotate* : Le quattro sorgenti pilotate hanno un ruolo di assoluto rilievo tra i doppi bipoli omogenei e nonimpressivi : esse sono i più semplici doppi bipoli che non siano riconducibili all'aggregazione di bipoli, a parte il già citato nullore. La connessione in serie o in parallelo delle due porte della medesima sorgente pilotata può dare origine a situazioni patologiche.

**Sez. 10.4 :** *Modelli cardinali e noncardinali di k-porte generici* : Le sorgenti pilotate, congiuntamente ai bipoli, sono in grado di realizzare modelli di qualsiasi k-porta dinamico, tempo-invariante e lineare. Nel caso dei doppi bipoli, questi modelli sono derivati da una rappresentazione cardinale (*modelli cardinali*) o noncardinale (*modelli noncardinali*).

**Sez. 10.5 :** *Sorgenti pilotate nonideali* : Le sorgenti pilotate nonideali sono un modello più aderente alla realtà che non quelle ideali ; per esempio, esse sono usate come modelli degli amplificatori. La resistenza della porta pilotante e della porta pilotata sono né nulle né infinite contrariamente al caso ideale.

**Sez. 10.6 :** *Trasferitori ideali* : Il trasformatore ideale e il giratore sono gli unici doppi bipoli, omogenei e nonimpressivi, che a ogni istante trasferiscono potenza da una porta all'altra lasciandola invariata. Mentre il trasformatore ideale è reciproco, il giratore è antireciproco. Infine vengono discusse alcune trasformazioni circuitali coinvolgenti questi doppi bipoli.

## 10.1 DOPPI BIPOLI IMPRESSIVI CON RAPPRESENTAZIONE CARDINALE

I doppi bipoli impressivi (sia omogenei sia nonomogenei) sono definiti da un'unica rappresentazione cardinale, la cui matrice è necessariamente nulla. Il loro modello consiste in una coppia di bipoli impressivi (c.c. e/o c.a. e/o  $\mathcal{V}$  e/o  $\mathcal{I}$ ). Se i doppi bipoli sono tripolari, esistono altri modelli equivalenti ma ridondanti costituiti da tre sorgenti impressivo.

### 10.1.1 Doppi bipoli impressivi definiti da una rappresentazione cardinale

Limitandoci alle rappresentazioni cardinali, possiamo definire quattro doppi bipoli impressivi omogenei, uno per ciascuna rappresentazione, e analogamente quattro nonomogenei. Essi sono esaminati nei due quadri seguenti :

*Quadro dei doppi bipoli impressivi e omogenei con rappresentazione cardinale*

rappresentazione $(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$ $v_1 = 0, v_2 = 0$ $i_1$ e $i_2$ nonvincolate	rappresentazione $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$ $i_1 = 0, i_2 = 0$ $v_1$ e $v_2$ nonvincolate	rappresentazione $(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$ $v_1 = 0, i_2 = 0$ $i_1$ e $v_2$ nonvincolate	rappresentazione $(i_1, v_2) \leftarrow (v_1, i_2)$ $i_1 = 0, v_2 = 0$ $v_1$ e $i_2$ nonvincolate
<p>modello equivalente (DBT)</p>	<p>modello equivalente (DBP)</p>		

**Quattro dei doppi bipoli impressivi e non omogenei con rappresentazione cardinale**

rappresentazione $(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$ $v_1 = \hat{v}_1, v_2 = \hat{v}_2$ $i_1$ e $i_2$ nonvincolate	rappresentazione $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$ $i_1 = \hat{i}_1, i_2 = \hat{i}_2$ $v_1$ e $v_2$ nonvincolate	rappresentazione $(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$ $v_1 = \hat{v}_1, i_2 = \hat{i}_2$ $i_1$ e $v_2$ nonvincolate	rappresentazione $(i_1, v_2) \leftarrow (v_1, i_2)$ $i_1 = \hat{i}_1, v_2 = \hat{v}_2$ $v_1$ e $i_2$ nonvincolate
Modello equivalente (DBP)	Modello equivalente (DBP)	Modello equivalente (DBP)	Modello equivalente (DBP)
Modello equivalente (DBT)	Modello equivalente (DBT)	Modello equivalente (DBT)	Modello equivalente (DBT)

**Commento :** In accordo al primo teorema di equivalenza (Sez. 8.3), ciascuno dei quattro doppi bipoli non omogenei è equivalente al doppio bipolo omogeneo associato con due sorgenti impresse connesse opportunamente alle porte, come risulta evidente dal confronto dei due quadri precedenti.

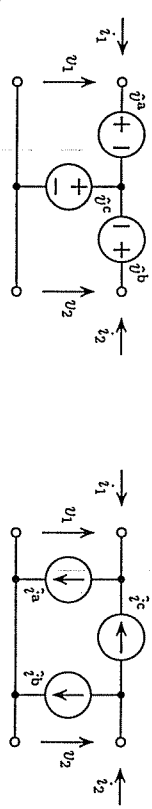
**Commento :** I quattro doppi bipoli omogenei sono inerti in quanto entrambe le potenze  $v_1 i_1$  e  $v_2 i_2$  assorbite dalle due porte sono nulle, mentre quelli non omogenei sono attivi.

**Commento :** Tutti questi doppi bipoli sono zerdirezionali, come risulta evidente dal loro modello costituito da una coppia di bipoli. Quindi essi non raggiungono niente di nuovo ai bipoli impressivi (c.c., c.a.,  $\hat{V}$  e  $\hat{I}$ ) incontrati nella Sez. 7.2.

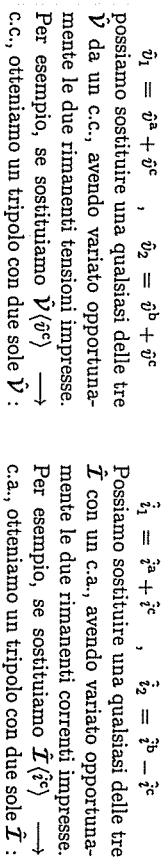
**10.1.2 Tripoli impressivi con struttura a "T"/"π"**

Nel caso che il doppio bipolo impressivo sia tripolare e ammetta la rappresentazione  $(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$ , esistono due modelli equivalenti e ridondanti costituiti da tre  $\hat{V}$  :

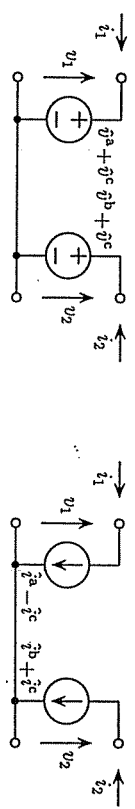
**Stella- $\hat{V}$  :** Consideriamo un DBT a "T" costituito da una  $\hat{V}(\hat{v}^a)$ , una  $\hat{V}(\hat{v}^b)$  e una  $\hat{V}(\hat{v}^c)$ .



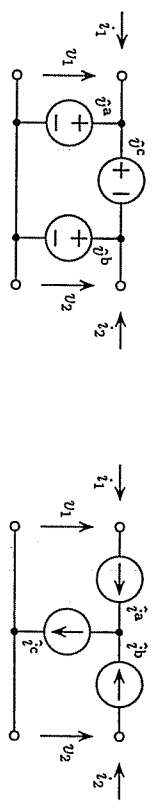
Siccome una delle tre tensioni impresse è ridondante dal momento che esse soddisfano a solo due relazioni  $\hat{v}_1 = \hat{v}^a + \hat{v}^c, \hat{v}_2 = \hat{v}^b + \hat{v}^c$  possiamo sostituire una qualsiasi delle tre  $\hat{V}$  da un c.c., avendo variato opportunamente le due rimanenti tensioni impresse. Per esempio, se sostituiamo  $\hat{V}(\hat{v}^c)$  c.c., otteniamo un tripolo con due sole  $\hat{V}$  :



Siccome una delle tre correnti impresse è ridondante dal momento che esse soddisfano a solo due relazioni  $\hat{i}_1 = \hat{i}^a + \hat{i}^c, \hat{i}_2 = \hat{i}^b - \hat{i}^c$  possiamo sostituire una qualsiasi delle tre  $\hat{I}$  con un c.a., avendo variato opportunamente le due rimanenti correnti impresse. Per esempio, se sostituiamo  $\hat{I}(\hat{i}^c)$  c.a., otteniamo un tripolo con due sole  $\hat{I}$  :

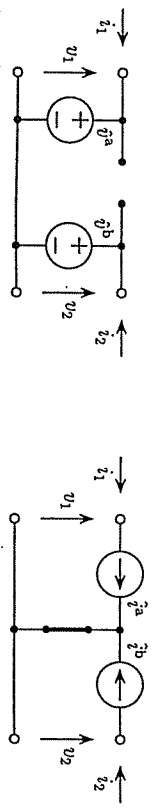


**Triangolo- $\hat{V}$  :** Consideriamo un DBT a "π" costituito da tre  $\hat{V}$  :



Le tre tensioni impresse devono necessariamente soddisfare la relazione  $\hat{v}^a = \hat{v}^b + \hat{v}^c$

Possiamo sostituire una qualsiasi delle tre  $\hat{V}$  con un c.a.



Ridisegniamo i due doppi bipoli rimuovendo i simboli ormai superflui del c.c. e del c.a. :



**Commenti :** Questi modelli equivalenti di tripoli impressivi consentono di semplificare circuiti apparentemente complessi. ■

## 10.2 NULLORE

Il *nullore* è un doppio bipolo omogeneo e impressivo, di cui esiste solamente la matrice  $T'$  oppure  $T''$ . Esso è l'idealizzazione estrema di un doppio bipolo fisico molto diffuso noto come *amplificatore operazionale*. Vengono discusse le condizioni per inserirlo in un circuito e la sua scomposizione nella coppia di bipoli patologici : *nullatore* e *noratore*.

### 10.2.1 Doppi bipoli impressivi definiti dalle rappresentazioni noncardinali

Consideriamo i doppi bipoli impressivi definiti da una rappresentazione noncardinale: né incontriamo due omogenei e due nonomogenei che sono esaminati nei due seguenti quadri :

#### Quadro dei doppi bipoli impressivi e omogenei con rappresentazione noncardinale

<p>rappresentazione <math>(v_1, i_1) \leftarrow (v_2, i_2)</math></p> $\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_1 = 0 \end{cases}$ <p>nullatore</p>	<p>rappresentazione <math>(v_2, i_2) \leftarrow (v_1, i_1)</math></p> $\begin{cases} v_2 \text{ nonvincolata} \\ i_2 \text{ nonvincolata} \end{cases}$ <p>noratore</p>	<p>rappresentazione <math>(v_2, i_2) \leftarrow (v_1, i_1)</math></p> $\begin{cases} v_1 \text{ nonvincolata} \\ i_1 \text{ nonvincolata} \end{cases}$ <p>noratore</p>	<p>rappresentazione <math>(v_2, i_2) \leftarrow (v_1, i_1)</math></p> $\begin{cases} v_2 = 0 \\ i_2 = 0 \end{cases}$ <p>nullatore</p>
<p>Simbolo circuitale (DBP)</p>	<p>Simbolo circuitale (DBT)</p>	<p>Simbolo circuitale (DBP)</p>	<p>Simbolo circuitale (DBT)</p>

#### Quadro dei doppi bipoli impressivi e nonomogenei con rappresentazione noncardinale

<p>rappresentazione <math>(v_1, i_1) \leftarrow (v_2, i_2)</math></p> $\begin{cases} v_1 = \hat{v}_1 \\ i_1 = \hat{i}_1 \end{cases}$ <p>nullatore traslato</p>	<p>rappresentazione <math>(v_2, i_2) \leftarrow (v_1, i_1)</math></p> $\begin{cases} v_2 \text{ nonvincolata} \\ i_2 \text{ nonvincolata} \end{cases}$ <p>noratore</p>	<p>rappresentazione <math>(v_2, i_2) \leftarrow (v_1, i_1)</math></p> $\begin{cases} v_1 \text{ nonvincolata} \\ i_1 \text{ nonvincolata} \end{cases}$ <p>noratore</p>	<p>rappresentazione <math>(v_2, i_2) \leftarrow (v_1, i_1)</math></p> $\begin{cases} v_2 = \hat{v}_2 \\ i_2 = \hat{i}_2 \end{cases}$ <p>nullatore traslato</p>
<p>Simbolo circuitale (DBP)</p>	<p>Simbolo circuitale (DBT)</p>	<p>Simbolo circuitale (DBP)</p>	<p>Simbolo circuitale (DBT)</p>

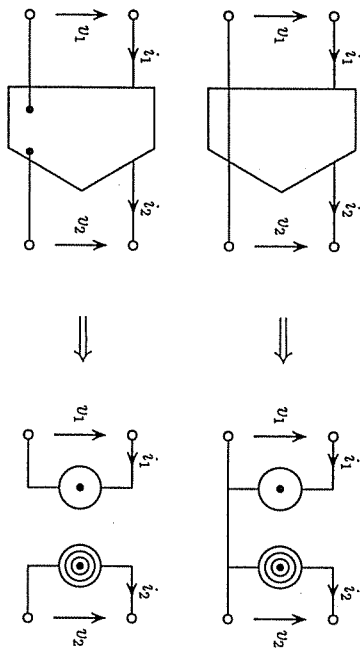
**Commento :** Il nullore è attivo in quanto nell'espressione della potenza assorbita  $p = v_1 i_1 - v_2 i_2 = -v_2 i_2$  le grandezze indipendenti  $v_2$  e  $i_2$  non risultano vincolate. Lo stesso dicasi per il nullore ribaltato.

**Commento :** Il nullore e il nullore ribaltato non ammettono altre rappresentazioni esplicite oltre a quella che è stata usata per definirli. Questo risultato è "banale", poiché il nullore è impressivo.

**Commento :** Si può verificare immediatamente che questi due doppi bipoli sono coincidenti se noi ribaltiamo le due porte. La porta in cui sono nulle la tensione e la corrente è detta porta d'ingresso (nullatore) e l'altra porta in cui la tensione e la corrente sono nonvincolate (noratore) porta d'uscita.

**Simbolo :** Non esiste un simbolo grafico universalmente accettato per il nullore. Noi adottiamo quello introdotto in questa sezione.

**Scomposizione "patologica" del nullore :** Siccome nessuna delle due relazioni costitutive del nullore coinvolge simultaneamente grandezze di porte diverse, possiamo scomporre il nullore in due bipoli, uno per porta. Ma questi due bipoli, già incontrati nel Cap. 6, risultano patologici, dal momento che il bipolo della porta d'ingresso (chiamato *nullatore*) è caratterizzato dalla coppia di equazioni  $v = 0, i = 0$ , mentre quello della porta d'uscita (chiamato *noratore*) non è soggetto ad alcun vincolo. Questo fatto viola l'ipotesi che ogni bipolo sia caratterizzato da un'unica equazione (vedere Cap. 5).



Esistono possono essere accettati all'interno di un circuito nonpatologico, purché compaiano a coppie per mantenere un numero totale di relazioni costitutive del circuito coincidente col numero di rami : le patologie del nullatore e del noratore si compensano tra di loro.

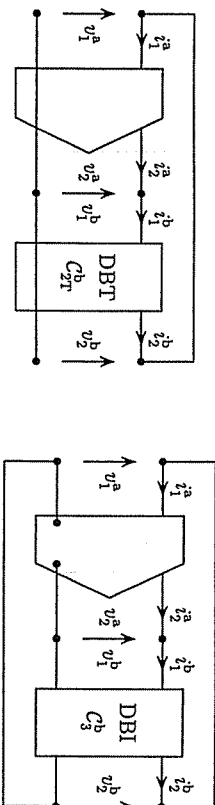
**Terminologia :** Il fatto che la porta d'ingresso del nullore sia rappresentata da un nullatore è comunemente ricordato dagli esperti di circuitaria elettronica dicendo che essa costituisce una "massa virtuale".

**10.2.2 Connessioni di un nullore**

Il nullore è tutt'altro che banale da interpretare circuitualmente e crea un pò di disorientamento a chi lo incontra per la prima volta, come risulterà nel seguito.

**Connessioni patologiche :** Il nullore non può essere chiuso su due bipoli, uno per porta. Infatti esso darebbe origine a un circuito patologico, in cui \$v\_2\$ e \$i\_2\$ non possono essere determinate e \$v\_1\$ e \$i\_1\$ sono soggette a troppi vincoli. Siano \$f\_1(v\_1, i\_1) = 0\$ e \$f\_2(v\_2, i\_2) = 0\$ le relazioni costitutive dei due bipoli connessi alla prima e seconda porta del nullore e \$\mathcal{K}\_1\$ e \$\mathcal{K}\_2\$ i loro rispettivi domini costitutivi. Se \$\mathcal{K}\_1\$ non contiene la soluzione \$v\_1 = 0, i\_1 = 0\$, il circuito risulta impossibile (incompatibilità della prima porta), mentre qualsiasi \$(v\_2, i\_2) \in \mathcal{K}\_2\$ soddisfa il circuito (indeterminatezza della seconda porta). Quindi il "modello nullore" di un doppio bipolo fisico chiuso tra due bipoli non ha alcun significato : in questo caso è necessario cercare un modello più sofisticato del doppio bipolo fisico.

Consideriamo un circuito generico al cui interno vi sia inserito un nullore : se il nullore è tripolare il componente complementare ad esso è necessariamente un DBT, mentre se il nullore è un DBP il componente complementare è necessariamente un quadrupolo operante come DBI (vedere le due figure). Quindi in entrambi i casi per esaminare la possibile patologia di un generico circuito contenente un nullore è sufficiente considerare il doppio bipolo (tripolare o proprio) complementare allo stesso.



NULLORE TRIPOLARE E NULLORE PROPRIO CHIUSI SU UN GENERICO DBT E QUADRUPOLO.

**Connessione nonpatologica :** La connessione di un nullore all'interno di un circuito non è patologica se e solo se il doppio bipolo complementare ammette la rappresentazione di trasmissione diretta \$(v\_1, i\_1) \leftarrow (v\_2, i\_2)\$, avendo definito la tensioni e correnti in accordo alla figura.

**Prova :** Partendo dalla rappresentazione di trasmissione diretta del doppio bipolo \$C\_2^b\$ complementare al nullore noi possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} v_1^b \\ i_1^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^b & t_{12}^b \\ t_{21}^b & t_{22}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^b \\ i_2^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1^b \\ \hat{i}_1^b \end{bmatrix} \implies \begin{cases} v_1^b = \hat{v}_1^b \\ i_1^b = \hat{i}_1^b \end{cases} \text{ poiché } \begin{cases} v_2^b = 0 \\ i_2^b = 0 \end{cases}$$

In questo caso il sistema lineare che descrive il circuito comprendente il nullore è nonsingolare. Infatti imponendo le condizioni dovute alla porta d'ingresso del nullore, si ottengono in modo univoco i valori della tensione e corrente della porta d'uscita del nullore coincidenti con quelle d'ingresso del generico doppio bipolo.

$$v_2^b = v_1^b = 0, \quad i_2^b = i_1^b = 0 \implies v_1^b = \hat{v}_1^b, \quad i_1^b = \hat{i}_1^b$$

**Commento :** Si può verificare che una coppia di bipoli tra loro separati da origine a un DBT zeri-direzionale, la cui matrice \$T^b\$ non esiste (vedere Par. 9.4.7).

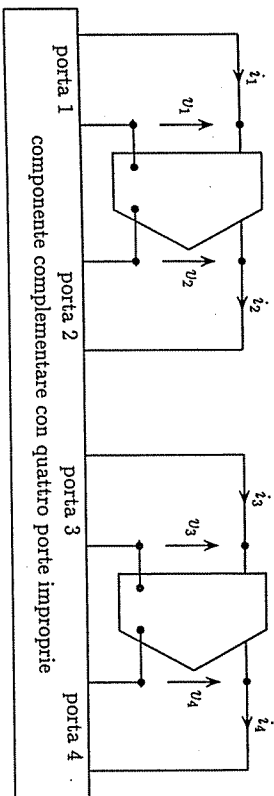
**Commento :** nel Cap. 13 sarà visto che la cascata di un nullore e un generico doppio bipolo omogeneo che ammetta la matrice \$T^b\$ è equivalente al nullore stesso.

**10.2.3 Equivalenza di circuiti con più nullori**

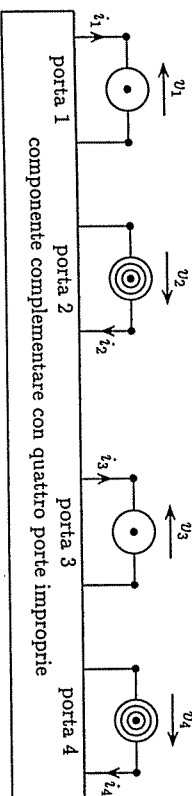
Dall'introduzione della scomposizione di un nullore in un nullatore e un noratore, si ha immediatamente la seguente proprietà :

**Proprietà :** in un circuito con più nullori le porte d'ingresso (cioè i nullatori) di due nullori qualsiasi possono essere scambiate tra loro e, analogamente, le porte d'uscita (cioè i noratori) senza alterare il circuito.

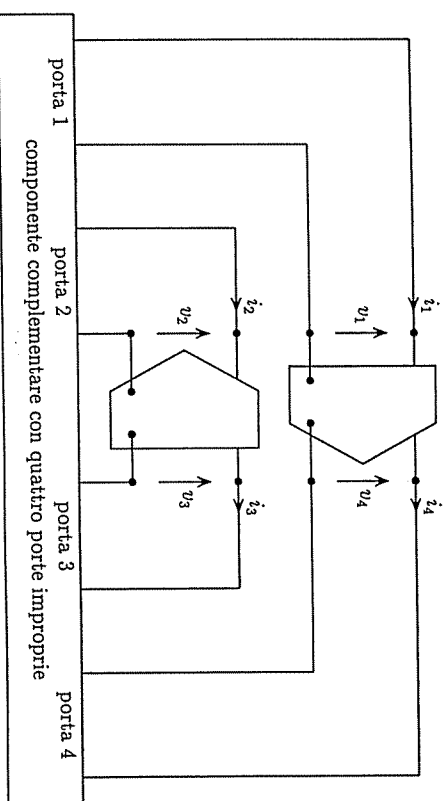
**Prova :** Consideriamo un generico circuito contenente due nullori. Esso risulta scomposto nei due nullori (supposti propri) e nel componente (composito) complementare :



Sostituendo ciascuna porta d'ingresso dei nullori con un nullatore e ciascuna porta d'uscita con un noratore, otteniamo il circuito equivalente costituito dai componenti (composito) complementare, due nullatori e due noratori :



È evidente che nel suddetto circuito l'accoppiamento tra le porte d'ingresso e d'uscita viene a mancare e quindi i nullori possono essere ripristinati associando il nullatore connesso alla porta 1 con il noratore connesso alla porta 4 ed il nullatore connesso alla porta 3 con il noratore connesso alla porta 2, come illustrato nella seguente figura :



Commento : se in un circuito vi è un sottoalbero formato da  $k - 1$  nullatori connessi a  $k$

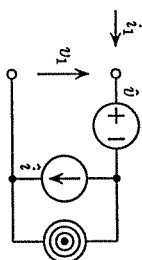
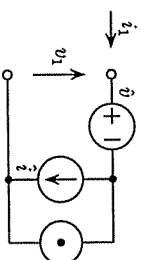
nodi essi possono essere rimpiazzati da un diverso sottoalbero di  $k - 1$  nullatori connessi agli stessi  $k$  nodi.

Commento : Se in un circuito vi è un sottoalbero formato da  $k - 1$  noratori connessi a  $k$  nodi essi possono essere rimpiazzati da un diverso sottoalbero di  $k - 1$  noratori connessi agli stessi  $k$  nodi.

Commento : La scomposizione di un nullore in due bipoli patologici è strettamente collegata all'impossibilità di connettere un nullore tra due bipoli qualsiasi (Par. 10.2.2).  
 Commento : Il nullore non è zero-direzionale nonostante che ciascuna delle relazioni costitutive coinvolga solamente le grandezze di una porta.

#### 10.2.4 Connessioni di nullatori e noratori con sorgenti impresse

Consideriamo un bipolo costituito dal parallelo di un nullatore e una  $\hat{X}(\hat{v})$  a loro volta connessi in serie a una  $\hat{V}(\hat{v})$ .



Il bipolo composito è a sua volta patologico dal momento che ha una caratteristica coincidente col punto isolato di coordinate  $\hat{v} = \hat{v}$  e  $\hat{i} = \hat{i}$  nel piano  $v-i$ . È ancora un noratore.

#### 10.2.5 Gli amplificatori operazionali nella pratica

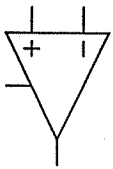
Se andate da un rivenditore di materiale elettronico e chiedete di acquistare un nullore, il rivenditore, se è gentile, vi dirà che non li tiene in magazzino e che comunque non sono sul catalogo di nessuna casa produttrice di componenti elettronici. Se insistete che un professore del Politecnico ve ne ha parlato a lungo, egli risponderà, con ragione, che dei professori del giorno d'oggi è meglio non fidarsi troppo. Infatti il nullore è il modello idealizzato al massimo di un componente fisico molto noto che è comunemente chiamato *amplificatore operazionale* (OA) e disponibile presso qualsiasi rivenditore. L'uso estesissimo di questo componente fisico è proprio dovuto alle sue proprietà che sono conservate dal suo modello idealizzato (nullore).

Che cosa dobbiamo conoscere dell'OA che non sia già stato detto per il nullore ? In realtà un amplificatore operazionale è dotato di 6-10 piedini (terminali fisici) tra cui vi sono i quattro terminali che definiscono le due porte nel nullore. I rimanenti terminali hanno scopi ausiliari che saranno chiariti nei Corsi di Elettronica : per esempio due servono per l'alimentazione positiva (tipicamente +15 V) e negativa (tipicamente -15 V), mentre uno dei terminali della porta d'uscita coincide con la massa del circuito. Inoltre i due piedini che definiscono la porta d'ingresso sono contraddistinti da un "+" e da un "-". Questa distinzione è significativa solo nel momento in cui l'OA sia considerato come una

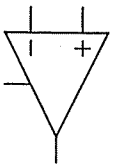
$V_V$  con guadagno  $\alpha$  molto elevato ma non  $\infty$ . Infatti il segno di  $\alpha$  è molto importante per usare correttamente l'OA: se  $1/\alpha = 0$  il segno di  $\alpha$  non è di alcun interesse, mentre se  $1/\alpha \neq 0$  benché molto piccolo, è molto importante distinguere i due casi  $1/\alpha > 0$  e  $1/\alpha < 0$ .

**Avvertenza:** Gli ingegneri elettronici che si occupano di analisi e progetti di circuiti elettronici hanno preso l'abitudine di rappresentare gli OA con un triangolo dotato di tre terminali. Qualsiasi gatto, se avesse l'uso della parola, si offenderebbe col pittore che lo ritraesse con solo tre zampe.

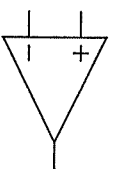
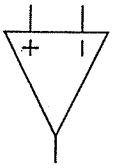
Lo studente alle prime armi, di fronte a un siffatto simbolo, potrebbe congetturare che esso sia un doppio bipolo tripolare: quindi essendo le correnti fluenti nei due terminali della porta d'ingresso nulle, anche la corrente nel restante terminale dovrebbe essere nulla per la Legge di Kirchhoff delle correnti. In realtà questa rappresentazione grafica "equivoca" degli OA comporta la presenza di un quarto terminale che non viene disegnato sottintendendo che esso è connesso con il nodo che rappresenta la massa del circuito fisico.



SIMBOLI GRAFICI "CORRETTI" DELL'OA.



SIMBOLI GRAFICI "EQUIVOCI" DELL'OA.



### 10.3 LE QUATTRO SORGENTI PILOTATE

Le quattro sorgenti pilotate hanno un ruolo di assoluto rilievo tra i doppi bipoli omogenei e nonimpressivi: esse sono i più semplici doppi bipoli che non siano riconducibili all'aggregazione di bipoli, a parte il nullore incontrato nella Sez. 10.2. Con "più semplice" si intende che esse sono caratterizzate da un solo parametro omogeneo nonnullo.

#### 10.3.1 Definizione

Ciascuna sorgente pilotata è un doppio bipolo nonimpressivo omogeneo e unidirezionale  $1 \rightarrow 2$  definito da una specifica matrice cardinale in cui solo l'elemento  $( )_{2,1}$  è nonnullo:

#### Quadro delle quattro sorgenti pilotate $1 \rightarrow 2$

rappresentazione $(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$ 	rappresentazione $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$ 	rappresentazione $(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$ 	rappresentazione $(i_1, v_2) \leftarrow (v_1, i_2)$ 
$v_1 = 0, v_2 = r_m i_1$ $i_2$ nonvincolata	$i_1 = 0, i_2 = g_m v_1$ $v_2$ nonvincolata	$v_1 = 0, i_2 = \beta i_1$ $v_2$ nonvincolata	$i_1 = 0, v_2 = \alpha v_1$ $i_2$ nonvincolata
Parametro di pilotaggio delle sorgenti pilotate $1 \rightarrow 2$			
$r_m$	$g_m$	$\beta$	$\alpha$
Nome specifico e acronimo delle sorgenti pilotate $1 \rightarrow 2$			
sorgente di tensione pilotata in corrente $V_T$	sorgente di corrente pilotata in tensione $I_V$	sorgente di corrente pilotata in corrente $I_T$	sorgente di tensione pilotata in tensione $V_V$
Simbolo circuitale (caso DBT) delle sorgenti pilotate $1 \rightarrow 2$			
Simbolo circuitale (DBP) delle sorgenti pilotate $1 \rightarrow 2$			
Matrice di trasmissione diretta "T" delle sorgenti pilotate $1 \rightarrow 2$			
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/r_m & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1/g_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/\beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

**Definizioni:** La porta 1 viene chiamata *porta pilotante* ovvero *porta d'ingresso*, mentre la porta 2 viene chiamata *porta pilotata* ovvero *porta d'uscita*.

**Commento:** Ciascuna sorgente pilotata è attiva, in quanto la potenza coinvolge una grandezza nonvincolata ( $v_2$  o  $i_2$ ):  $-\infty < p = v_2 i_2 < +\infty$ .

**Commento:** Ciascuna sorgente pilotata, oltre alla matrice cardinale, da cui è definita, ammette solo la matrice di trasmissione diretta, riportata nel quadro.

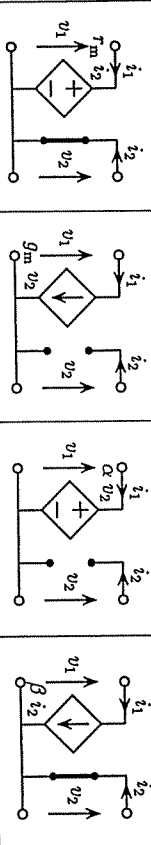
**Sorgenti pilotate ribaltate:** Se l'unico elemento nonnullo fosse il  $( )_{1,2}$ , avremmo quattro sorgenti pilotate unidirezionali  $2 \rightarrow 1$ : In questo caso, la porta 1 sarebbe la porta

pilotata e la porta 2 la porta pilotante. Queste sorgenti pilotate sono a tutti gli effetti coincidenti con quelle definite precedentemente, una volta ribaltate le due porte, come risulta dal seguente quadro.

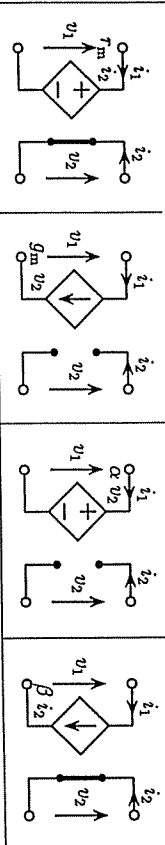
**Quadro delle quattro sorgenti pilotate 2 → 1 (ribaltate)**

<p>rappresentazione  <math>(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)</math></p> <p><math>v_1 = r_m i_2, v_2 = 0</math>  <math>i_1</math> nonvincolata</p>	<p>rappresentazione  <math>(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)</math></p> <p><math>i_1 = g_m v_2, i_2 = 0</math>  <math>v_1</math> nonvincolata</p>	<p>rappresentazione  <math>(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)</math></p> <p><math>v_1 = \alpha v_2, i_2 = 0</math>  <math>i_1</math> nonvincolata</p>	<p>rappresentazione  <math>(i_1, v_2) \leftarrow (v_1, i_2)</math></p> <p><math>i_1 = \beta i_2, v_2 = 0</math>  <math>v_1</math> nonvincolata</p>
<p><math>r_m</math>  <i>transresistenza</i></p>	<p><math>g_m</math>  <i>transconduttanza</i></p>	<p><math>\alpha</math>  <i>guadagno di tensione</i></p>	<p><math>\beta</math>  <i>guadagno di corrente</i></p>
<p>Nome specifico e acronimo delle sorgenti pilotate 2 → 1  <i>sorgente di tensione sorgente di corrente pilotata in corrente</i>  <math>\mathcal{V}_X</math></p>	<p>Nome specifico e acronimo delle sorgenti pilotate 2 → 1  <i>sorgente di corrente sorgente di tensione pilotata in tensione</i>  <math>\mathcal{I}_Y</math></p>	<p>Nome specifico e acronimo delle sorgenti pilotate 2 → 1  <i>sorgente di tensione sorgente di tensione pilotata in tensione</i>  <math>\mathcal{V}_Y</math></p>	<p>Nome specifico e acronimo delle sorgenti pilotate 2 → 1  <i>sorgente di corrente sorgente di corrente pilotata in corrente</i>  <math>\mathcal{I}_X</math></p>

**Simbolo circuitale (DBT) delle sorgenti pilotate 2 → 1**



**Simbolo circuitale (DBP) delle sorgenti pilotate 2 → 1**



Matrice di trasmissione inversa  $T''$  delle sorgenti pilotate 2 → 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/r_m & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1/g_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/\beta \end{bmatrix}$$

**Nota storica:** L'importanza delle sorgenti pilotate è dovuta alla semplicità del loro modello piuttosto che alla loro aderenza a componenti fisici. Da un punto di vista storico, il loro uso si è diffuso insieme a quello dei componenti fisici chiamati *tubi elettronici* (o *valvole*), il cui uso è ora limitato ad applicazioni specialistiche. Essi hanno consentito di introdurre nella tecnologia l'amplificazione di segnali elettrici indispensabili per le comunicazioni elettriche: presentemente essi sono stati sostituiti dai transistori in quasi tutte

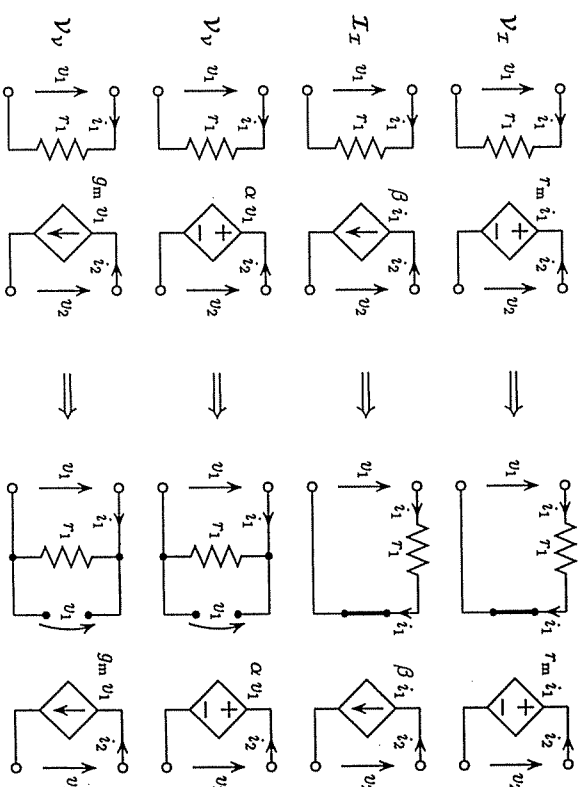
le applicazioni. Le sorgenti pilotate, unitamente ad altri componenti, hanno consentito di costruire un modello di questi componenti fisici.

**10.3.2 Simboli circuitali**

In genere le quattro sorgenti pilotate ideali sono rappresentate da simboli grafici privi del rettangolo che caratterizza un generico doppio bipolo:

- La porta pilotante viene rappresentata da un c.c. (per le  $\mathcal{V}_Y$  e  $\mathcal{I}_X$ ) ovvero un c.a. (per le  $\mathcal{V}_Y$  e  $\mathcal{I}_Y$ ). Accanto viene indicata la grandezza pilotante.
- La porta pilotata viene indicata graficamente in modo simile alla corrispondente sorgente impressiva, avendo sostituito il cerchietto con un rombo. La grandezza pilotante pre-moltiplicata per il valore del parametro di pilotaggio (cioè,  $r_m$  per la  $\mathcal{V}_X$ ,  $g_m$  per la  $\mathcal{I}_Y$ ,  $\beta$  per la  $\mathcal{I}_X$  e  $\alpha$  per la  $\mathcal{V}_Y$ ) è segnata accanto al rombo.

Questa notazione ci ricorda che i due rami costituiscono le due porte di un medesimo doppio bipolo e, nello stesso tempo, conserva traccia della (unica) relazione costitutiva che coinvolge le variabili di entrambe le porte. In molti casi la tensione pilotante di una  $\mathcal{V}_X$  e  $\mathcal{I}_Y$  non finisce in un c.c. ma in un resistore: la porta pilotante è un c.c. latente in serie al resistore stesso, come risulta dalle figure sottostanti.



**Commento:** Le argomentazioni suddette saranno riprese nella Sez. 10.5 dedicata alle

sorgenti pilotate nonideali.

**Avvertenza** : alcuni testi lasciano il cerchietto al posto del rombo. Questa scelta può risultare pericolosa per i principianti perchè può suggerire che le sorgenti pilotate siano anch'esse nonomogenee come quelle impresse.

### 10.3.3 Confronto delle sorgenti pilotate col nullo

Come riportato nell'apposito quadro ciascuna delle sorgenti pilotate ammette anche la matrice di trasmissione diretta  $T'$  che presenta un solo elemento nonnullo. L'esistenza della  $T'$  ci consente di confrontare le quattro sorgenti pilotate col nullo, nonostante che esse non siano equivalenti tra loro :

**Proprietà** : Facendo tendere  $\rightarrow 0$  l'unico elemento nonnullo della matrice  $T'$  di ciascuna sorgente pilotata, possiamo verificare che ciascuna di esse è equivalente al nullo, qualora il rispettivo parametro di pilotaggio tenda  $\rightarrow \infty$ .

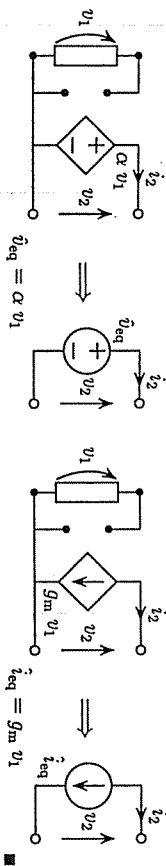
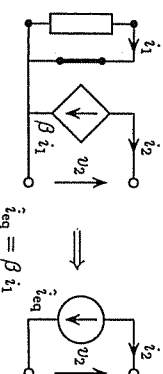
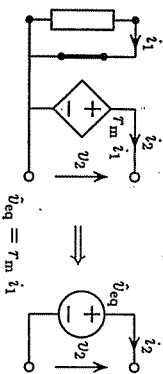
**Commento** : Un nullo (amplificatore operazionale) fisico è realizzato mettendo in cascata più sorgenti pilotate (usualmente note come *stadi amplificatori*). Infatti il prodotto dei parametri di pilotaggio delle sorgenti pilotate da origine a un parametro di pilotaggio molto elevato (vedere Par. 13.1.4). Questo argomento sarà approfondito nei Corsi di Elettronica.

**Diagnosi** : Una sorgente pilotata più guadagna e più assomiglia a un nullo. Questo può captare anche agli esseri umani : più guadagnano, più sono ricchi e più assomigliano a delle nullità.

### 10.3.4 Connessione di un bipolo a una porta di una sorgente pilotata

Le quattro sorgenti pilotate sono caratterizzate dal fatto che la grandezza elettrica non-pilotata alla porta d'uscita è nonvincolata. Inoltre la grandezza alla porta d'ingresso che non pilota l'uscita è sempre nulla.

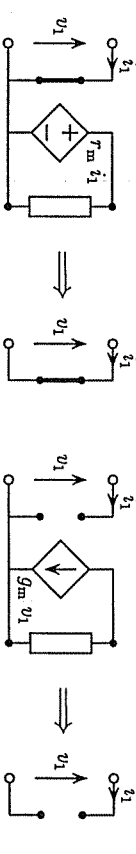
**Bipolo connesso alla porta pilotante** : Dalle precedenti considerazioni è facile concludere che la porta pilotata, quando la porta pilotante è chiusa su un bipolo equivalente a : Se la porta pilotante di una  $V_r$  ovvero una  $V_v$  viene connessa a un bipolo nonomogeneo, la porta pilotata diventa equivalente a una  $V$  in quanto la corrente d'uscita  $i_2$  resta nonvincolata (eccetto casi di incompatibilità tra il bipolo e la porta pilotante). Nel caso che il bipolo sia omogeneo (resistore, c.a. o c.c.), la porta pilotata equivale a un c.c.



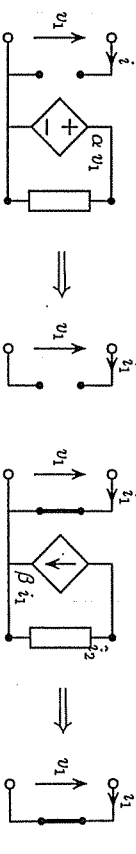
**Commento** : Quanto detto qui sopra vale anche nel caso che il bipolo connesso alla porta pilotante sia dinamico e/o tempo-variante e/o nonlineare. Alla porta d'uscita si vede sempre una sorgente impressiva tempo-invariante o tempo-variante.

**Bipolo connesso alla porta pilotata** : Esaminiamo il bipolo composito visto alla porta pilotante, quando la porta pilotata viene connessa a un bipolo.

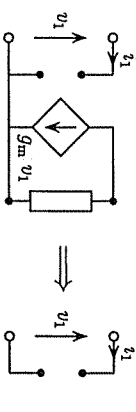
#### $V_r$ chiusa su un bipolo



#### $V_v$ chiusa su un bipolo

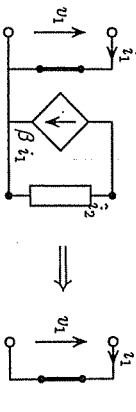


#### $I_v$ chiusa su un bipolo



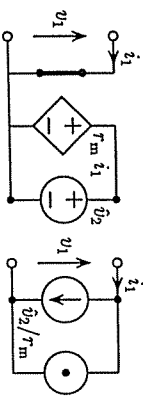
Un bipolo controllabile in tensione connesso in parallelo alla porta d'uscita di una  $V_r$  ovvero una  $V_v$  non ha alcun effetto sulla caratteristica del bipolo equivalente visto alla porta pilotante in seguito alla unidirezionalità della sorgente.

**Connessioni patologiche** : Quanto detto sopra ha un'eccezione importante dal punto di vista concettuale : se la porta pilotata di una sorgente pilotata fosse chiusa su una sorgente impressiva dello stesso tipo, la porta pilotante sarebbe patologica : la caratteristica corrisponde a un unico punto nel piano  $v-i$  :



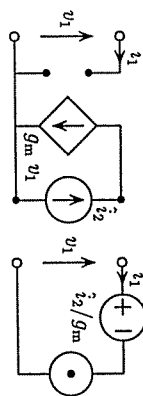


$\mathcal{V}_x$  chiusa su una  $\mathcal{V}$



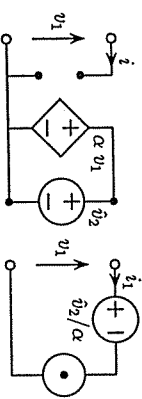
Dalle relazioni  $v_2 = 0$ ,  $i_2 = R_m i_1$  e  $i_2$  nonvincolata, si deduce che la porta pilotante è equivalente al parallelo di un nullatore e di una  $\hat{\mathcal{I}}(i_2/R_m)$ .

$\mathcal{I}_V$  chiusa su una  $\hat{\mathcal{I}}$



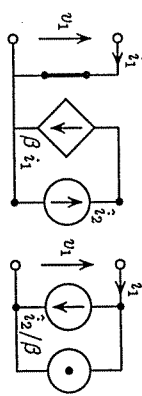
Dalle relazioni  $i_1 = 0$ ,  $i_2 = g_m v_1$  e  $v_2$  nonvincolata, si deduce che la porta pilotante è equivalente alla serie di un nullatore e di una  $\hat{\mathcal{V}}(i_2/g_m)$ .

$\mathcal{V}_y$  chiusa su una  $\mathcal{V}$



Dalle relazioni  $i_1 = 0$ ,  $i_2 = \alpha v_1$  e  $i_2$  nonvincolata, si deduce che la porta pilotante è equivalente alla serie di un nullatore e di una  $\hat{\mathcal{V}}(i_2/\alpha)$ .  
Le suddette patologie sparirebbero se al posto delle sorgenti pilotate ideali fossero usati modelli più complessi come le sorgenti pilotate nonideali (vedere Sez. 10.5).

$\mathcal{I}_X$  chiusa su una  $\hat{\mathcal{I}}$



Dalle relazioni  $v_1 = 0$ ,  $i_2 = \beta i_1$  e  $v_2$  nonvincolata, si deduce che la porta pilotante è equivalente al parallelo di un nullatore e di una  $\hat{\mathcal{I}}(i_2/\beta)$ .  
Le suddette patologie sparirebbero se al posto delle sorgenti pilotate ideali fossero usati modelli più complessi come le sorgenti pilotate nonideali (vedere Sez. 10.5).

10.3.5 Serie delle due porte di una sorgente pilotata

A volte si incontra la connessione serie delle due porte di una sorgente pilotata tripolare, che in questo caso costituisce un bipolo composto.

I due terminali del bipolo composto coincidono con i due terminali superiori di ciascuna porta, mentre il terminale comune alle due porte resta inaccessibile. Conseguentemente, se adottiamo la convenzione cardinale per le tensioni  $v_1$ ,  $v_2$  e correnti  $i_1$  e  $i_2$  della sorgente pilotata tripolare e se indichiamo con  $v$  e  $i$  le grandezze del bipolo composto, abbiamo

$$i = i_1 = -i_2$$

$$v = v_1 = v_2$$

Il bipolo composto creato in alcuni casi può risultare patologico, dal momento che due grandezze di porte diverse sono coinvolte nella medesima relazione costitutiva. Il seguente quadro riporta i bipoli composti e le loro relazioni costitutive:

Quadro delle connessioni serie delle due porte delle sorgenti pilotate

<p>La serie delle due porte di una <math>\mathcal{V}_X(R_m i_1)</math> equivale a un <math>\mathcal{R}(-R_m)</math> <sup>(1)</sup>:</p>	<p>La serie delle due porte di una <math>\mathcal{I}_V(g_m v_1)</math> equivale a un c.a.:</p>
<p>La serie delle due porte di una <math>\mathcal{V}_Y(\alpha v_1)</math>, qualora <math>\alpha \neq 1</math>, equivale a un c.a.:</p>	<p>La serie delle due porte di una <math>\mathcal{V}_Y(\alpha v_1)</math>, qualora <math>\alpha = 1</math>, equivale a un nullatore:</p>
<p>La serie delle due porte di una <math>\mathcal{I}_X(\beta i_1)</math>, qualora <math>\beta \neq -1</math>, equivale a un c.a.:</p>	<p>La serie delle due porte di una <math>\mathcal{I}_X(\beta i_1)</math>, qualora <math>\beta = -1</math>, equivale a un notatore:</p>

<sup>(1)</sup> La resistenza  $-R_m$  può essere sia positiva sia negativa.

10.3.6 Parallelo delle due porte di una sorgente pilotata

A volte si incontra la connessione parallelo delle due porte di una sorgente pilotata tripolare, che in questo caso costituisce un bipolo composto. I due terminali superiori delle due porte, connessi tra loro, costituiscono uno dei terminali del bipolo, mentre l'altro è costituito dal terminale comune alle due porte. Conseguentemente, se adottiamo la convenzione cardinale per le tensioni  $v_1$ ,  $v_2$  e correnti  $i_1$  e  $i_2$  della sorgente pilotata tripolare e se indichiamo con  $v$  e  $i$  le grandezze del bipolo composto, abbiamo

$$i = i_1 + i_2$$

$$v = v_1 = v_2$$

Il bipolo composto in alcuni casi può risultare patologico, dal momento che due grandezze di porte diverse sono coinvolte nella medesima relazione costitutiva. Il seguente quadro riporta i bipoli composti e le loro relazioni costitutive:

**Quadro delle connessioni parallele delle due porte delle sorgenti pilotate**

<p>Il parallelo delle due porte di una <math>\mathcal{V}_X(\tau_m i_1)</math> equivale a un c.c.:</p>	<p>Il parallelo delle due porte di una <math>\mathcal{I}_Y(g_m v_1)</math> equivale a un <math>\mathcal{R}(1/g_m)</math> (<sup>1</sup>):</p>
<p>Il parallelo delle due porte di una <math>\mathcal{V}_Y(\alpha v_1)</math>, qualora <math>\alpha \neq 1</math>, equivale a un c.c.:</p>	<p>Il parallelo delle due porte di una <math>\mathcal{V}_Y(\alpha v_1)</math>, qualora <math>\alpha = 1</math>, equivale a un nortatore:</p>
<p>Il parallelo delle due porte di una <math>\mathcal{I}_X(\beta i_1)</math>, qualora <math>\beta \neq -1</math>, equivale a un c.c.</p>	<p>Il parallelo delle due porte di una <math>\mathcal{I}_X(\beta i_1)</math>, qualora <math>\beta = -1</math>, equivale a un nullatore:</p>

(<sup>1</sup>) La resistenza  $1/g_m$  può essere sia positiva sia negativa

**Commento :** C'è chi studia i circuiti elettronici introducendo le sorgenti pilotate e c'è chi studia gli stessi circuiti senza ricorrere alle sorgenti pilotate. C'è chi si pulisce il naso con il fazzoletto e chi se lo pulisce stringendolo in mezzo a due mattoni.

**10.4 MODELLI CARDINALI E NONCARDINALI DI k-PORTE GENERALI**

L'uso delle sorgenti pilotate è molto diffuso benché non rappresentino per proprio conto il modello di uno specifico componente fisico. Infatti esse sono indispensabili per tener conto dell'interazione tra tensioni e/o correnti di porte diverse di un k-porta. Congiuntamente ai bipoli già introdotti nella Sez. 7.2, esse sono in grado di realizzare un modello di qualsiasi multipolo adinamico, tempo-invariante e lineare, di cui sia definita almeno una rappresentazione cardinale. Siccome questi diversi modelli fanno riferimento a una rappresentazione cardinale o noncardinale, essi saranno chiamati *modelli cardinali* o *modelli noncardinali* di un doppio bipolo. Questi modelli hanno lo stesso ruolo svolto dai modelli di Thévenin e Norton per i bipoli.

**10.4.1 Modelli cardinali dei k-porte**

Nella Sez. 10.3 le quattro sorgenti pilotate sono definite dalle matrici cardinali in cui un solo elemento, fuori della diagonale e costituente il parametro di pilotaggio, è nonnullo.

**Questo :** Possiamo associare a ciascuno degli elementi fuori della diagonale di una qualsiasi matrice cardinale una sorgente pilotata il cui parametro di pilotaggio coincide con l'elemento ?

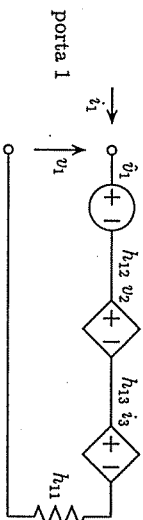
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}$$

La risposta è positiva e la diamo con l'aiuto del seguente esempio riguardante un 3-porta:

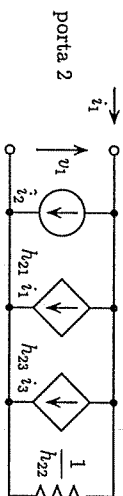
WWWWWW?? Le tre figure successive (con le tre porte) potrebbero essere fuse in un'unica figura di tutto il 3-porta. Inoltre fare figura del 3-porte con entro la rappresentazione ibrida ?????????

Esaminiamo separatamente ciascuna delle tre equazioni scalari che costituiscono la rappresentazione cardinale del 3-porta :

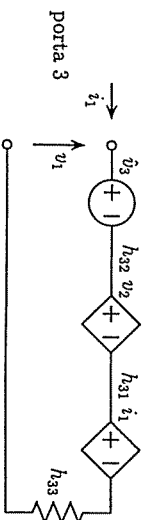
**Porta 1 :** La prima equazione scalare suddivide la tensione  $v_1$  nella somma dei quattro termini  $h_{11} i_1, h_{12} v_2, h_{13} i_3$  e  $\hat{v}_1$ , che corrispondono a quattro componenti. Quindi la prima porta è costituita dalla serie del  $\mathcal{R}(\tau_1 = h_{11})$ , della porta pilotata della  $\mathcal{V}_Y(\alpha v_2 = h_{12} v_2)$ , della porta pilotata della  $\mathcal{V}_X(\tau_m i_3 = h_{13} i_3)$ , e della  $\mathcal{V}(\hat{v}_1)$ .



**Porta 2 :** La seconda equazione scalare suddivide la corrente  $i_2$  nella somma dei quattro termini  $h_{21} i_1, h_{22} v_2, h_{23} i_3$  e  $i_2$ , che corrispondono a quattro componenti. Quindi la seconda porta è costituita dal parallelo del  $\mathcal{R}(\tau_2 = 1/h_{22})$ , della porta pilotata della  $\mathcal{I}_X(\beta i_1 = h_{21} i_1)$ , della porta pilotata della  $\mathcal{I}_X(\beta i_3 = h_{23} i_3)$ , e della  $\mathcal{I}(\hat{i}_2)$ .



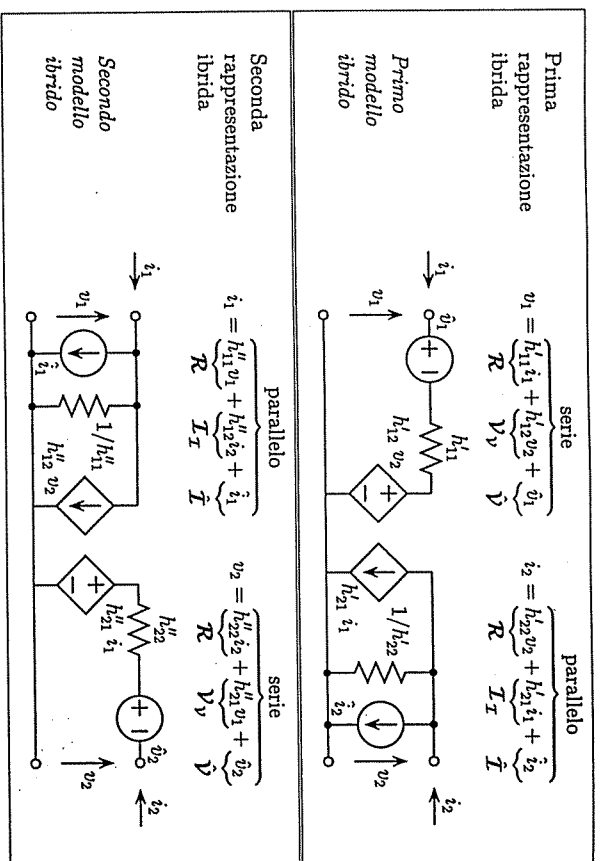
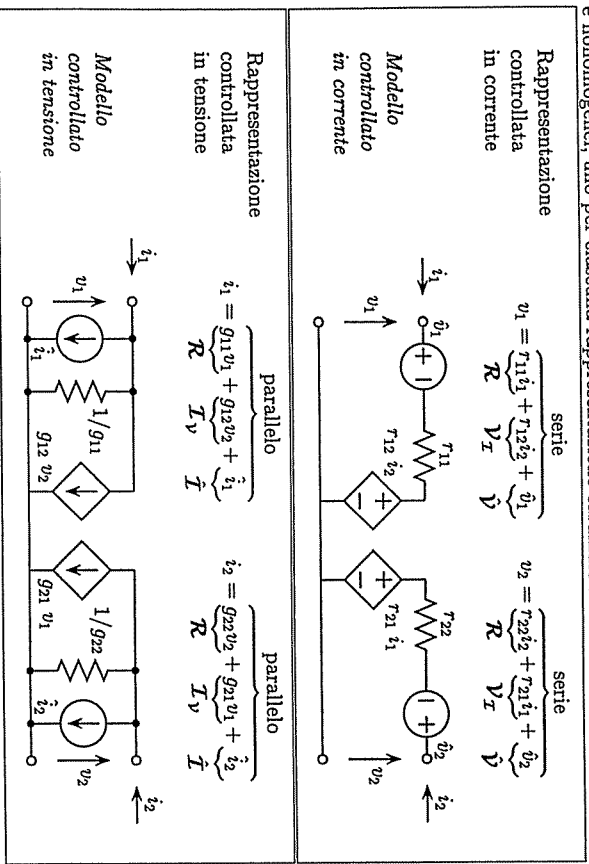
**Porta 3 :** La terza equazione scalare suddivide la tensione  $v_3$  nella somma dei quattro termini  $h_{31} i_1, h_{32} v_2, h_{33} i_3$  e  $\hat{v}_3$ , che corrispondono a quattro componenti. Quindi la terza porta è costituita dalla serie del  $\mathcal{R}(\tau_3 = h_{33})$ , della porta pilotata della  $\mathcal{V}_Y(\alpha v_2 = h_{32} v_2)$ , della porta pilotata della  $\mathcal{V}_X(\tau_m i_1 = h_{31} i_1)$ , e della  $\mathcal{V}(\hat{v}_3)$ .



**Conclusioni :** Questo esempio mostra chiaramente come il modello di un  $k$ -porta, di cui sia nota una delle rappresentazioni cardinali, sia costruito. Ciascun elemento della diagonale principale di qualsiasi matrice cardinale è interpretato come la resistenza di un resistore in serie alla rispettiva porta ovvero una conduttanza di un resistore in parallelo alla rispettiva porta. Ciascun elemento fuori della diagonale da origine ad una porta pilotata di una delle quattro sorgenti pilotate : se la porta pilotata è connessa in serie alla porta, la sorgente è del tipo  $V_Y$  ovvero  $V_X$ , mentre se è connessa in parallelo alla porta essa è del tipo  $T_Y$  ovvero  $T_X$ . La grandezza pilotante è la grandezza indipendente di un'altra porta. Il modello ottenuto con questa procedura viene chiamato **modello cardinale** del  $k$ -porta. ■

**10.4.2 Modelli cardinali dei doppi bipoli**

I seguenti due quadri riportano i quattro modelli cardinali dei generici doppi bipoli lineari e nonomogenei, uno per ciascuna rappresentazione cardinale :

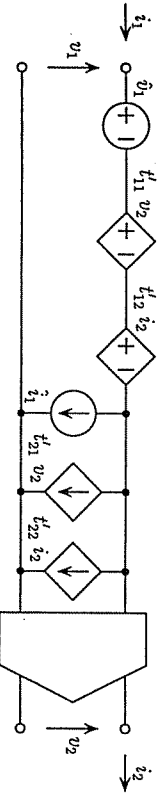


**Proprietà :** Se il doppio bipolo è unidirezionale, rimane una sola sorgente pilotata nei corrispondenti modelli cardinali. ■

**10.4.3 Modelli noncardinali dei doppi bipoli**

Qui si seguito riportiamo i modelli derivati dalle rappresentazioni noncardinali limitatamente ai doppi bipoli. Essi sono costituiti da un nullo e quattro sorgenti pilotate. Cominciamo dalla matrice di trasmissione diretta  $T'$  : ciascuno dei quattro elementi da origine a una sorgente pilotata. Ciascuna di queste sorgenti ha la porta pilotata connessa alla porta 1 e la grandezza pilotante è una grandezza della porta 2. Una volta estratte le quattro sorgenti pilotate, lo studente sprovveduto potrebbe pensare di avere completato il modello noncardinale con le quattro sorgenti pilotate. Egli commetterebbe un gravissimo errore. Infatti dopo l'estrazione delle quattro sorgenti pilotate, rimane un doppio bipolo, definito dalle relazioni  $v_1 = 0$  e  $i_1 = 0$ , la cui matrice  $T'$  risulta nulla, che rappresenta inequivocabilmente un nullo. Notare che in la tensione e la corrente alla seconda porta del nullo sono nonvincolate : ma nel modello noncardinale qui discusso questa grandezza risultano vincolate dal momento che pilotano le quattro sorgenti pilotate. In conclusione dalla matrice  $T'$  di un doppio bipolo qualsiasi, si ottiene un modello noncardinale costituito da un nullo e con in serie alla prima porta due sorgenti di tensione pilotate, rispettivamente, dalla tensione e corrente alla seconda porta del nullo e con in parallelo sempre alla prima porta due sorgenti di corrente pilotate, rispettivamente, dalla tensione e corrente alla seconda porta :

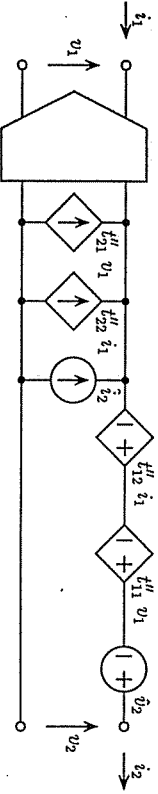
5) rappresentazione ( $v_1, i_1$ ) $\leftarrow$ ( $v_2, i_2$ )	serie $v_1 = \underbrace{h'_{11}v_2 + h'_{12}i_2}_{V_V} + \underbrace{\hat{v}_1}_{V_X}$	parallelo $i_1 = \underbrace{h'_{22}i_2 + h'_{21}v_2}_{I_X} + \underbrace{\hat{i}_1}_{I_V}$
---	--	--



RAPPRESENTAZIONE DI TRASMISSIONE DIRETTA E CORRISPONDENTE MODELLO

Ogni elemento della matrice  $T''$  da origine a una sorgente connessa alla porta 2 e pilotata da una grandezza della porta 1. Infine rimane la matrice  $T'' = 0$  cioè un nullo ribaltato. Si ottiene un doppio bipolo equivalente con struttura ribaltata rispetto a quello precedente:

6) rappresentazione ( $v_2, i_2$ ) $\leftarrow$ ( $v_1, i_1$ )	serie $v_2 = \underbrace{h''_{11}v_1 + h''_{12}i_1}_{V_V} + \underbrace{\hat{v}_2}_{V_X}$	parallelo $i_2 = \underbrace{h''_{22}i_1 + h''_{21}v_1}_{I_X} + \underbrace{\hat{i}_2}_{I_V}$
---	--	--



RAPPRESENTAZIONE DI TRASMISSIONE INVERSA E CORRISPONDENTE MODELLO

Commento : Questi modelli noncardinali sono alquanto scomodi e perciò poco popolari. Essi sono stati introdotti per completezza e non per la loro dubbia utilità. ■

### 10.5 SORGENTI PILOTATE NONIDEALI

QUESTA SEZIONE potrebbe essere condensata sfruttando le conoscenze sui modelli cardinali dei doppi bipoli visti nella Sez. 10.4

Le sorgenti pilotate ideali, introdotte nella Sez. 10.3, sono, a volte, dei modelli non sufficientemente adeguati di componenti fisici di ampio interesse: tra questi gli amplificatori lineari. In particolare, sia la resistenza della porta d'ingresso sia quella della porta d'uscita sono supposte essere nulle oppure infinite, la qual cosa spesso non è accettabile per i componenti fisici. Quindi, partendo da ciascuna delle quattro sorgenti pilotate ideali occorre costruire un modello nonideale, in cui entrambe le resistenze sono finite.

#### 10.5.1 Definizione

Definizione : Una sorgente pilotata nonideale (reale) è un doppio bipolo omogeneo nonimpressivo e unidirezionale con le resistenze alle due porte positive e finite. ■

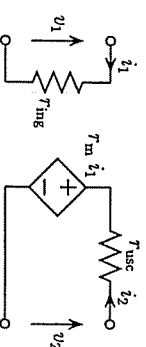
Proprietà : Una sorgente pilotata nonideale ammette tutte le rappresentazioni esplicite eccetto la matrice di trasmissione inversa  $T''$ . Le rappresentazioni cardinali  $R, G, H'$ ,  $H''$  hanno l'elemento ( $h_{12}$  nullo e gli elementi ( $h_{11}$  e ( $h_{22}$  positivi. Il determinante della matrice  $T'$  è nullo, dal momento che il doppio bipolo è unidirezionale  $1 \rightarrow 2$ . ■

#### 1) rappresentazione ( $v_1, v_2$ ) $\leftarrow$ ( $i_1, i_2$ )

$$\begin{bmatrix} R_{mg} & 0 \\ T_m & R_{usc} \end{bmatrix} \quad v_1 = R_{mg} i_1$$

$$v_2 = R_m i_1 + R_{usc} i_2$$

Modello controllato in corrente

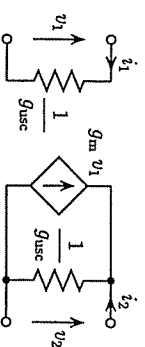


#### 2) rappresentazione ( $i_1, i_2$ ) $\leftarrow$ ( $v_1, v_2$ )

$$\begin{bmatrix} g_{mg} & 0 \\ g_m & g_{usc} \end{bmatrix} \quad i_1 = g_{mg} v_1$$

$$i_2 = g_m v_1 + g_{usc} v_2$$

Modello controllato in tensione

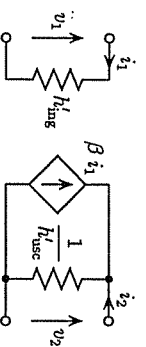


#### 3) rappresentazione ( $v_1, i_2$ ) $\leftarrow$ ( $i_1, v_2$ )

$$\begin{bmatrix} h'_{mg} & 0 \\ \beta & h'_{usc} \end{bmatrix} \quad v_1 = h'_{mg} i_1$$

$$i_2 = \beta i_1 + h'_{usc} v_2$$

Primo modello ibrido

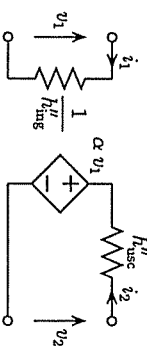


#### 4) rappresentazione ( $i_1, v_2$ ) $\leftarrow$ ( $v_1, i_2$ )

$$\begin{bmatrix} h''_{mg} & 0 \\ \alpha & h''_{usc} \end{bmatrix} \quad i_1 = h''_{mg} v_1$$

$$v_2 = \alpha v_1 + h''_{usc} i_2$$

Secondo modello ibrido



#### 10.5.2 Equivalenza dei quattro modelli

Da ciascuna matrice cardinale noi otteniamo il modello della sorgente pilotata nonideale applicando il metodo introdotto nel Par. 10.4.2 per un generico doppio bipolo : in questo caso l'unidirezionalità  $1 \rightarrow 2$  della sorgente pilotata nonideale comporta che una delle sorgenti pilotate ideali presenti nel modello sia assente, perché l'elemento ( $h_{12}$  è nullo.

Dalla Sez. 7.5 noi sappiamo che una  $V$  e una  $I$  non possono assolutamente essere tra loro equivalenti, mentre una sorgente di tensione nonideale può essere equivalente ad una sorgente di corrente nonideale. Per le sorgenti pilotate nonideali succede un fatto analogo : ciascuna di esse ammette tutte e quattro le rappresentazioni cardinali. Da ciascuna di esse otteniamo quattro modelli diversi ma equivalenti, ciascuno caratterizzato da una specifica sorgente pilotata ideale e due resistori.

È facile passare da uno schema all'altro come risulta dal seguente quadro :

**Quadro delle equivalenze tra le sorgenti pilotate nonideali**

1)	$\begin{bmatrix} r_{mg} & 0 \\ r_m & r_{usc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g_{mg} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{mg} & 0 \\ \beta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_m} & \alpha \\ h''_{mg} & h'_{usc} \end{bmatrix}$
2)	$\begin{bmatrix} g_{mg} & 0 \\ g_m & g_{usc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r_{mg} & r_{usc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h'_{mg} & h'_{usc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h''_{mg} & \alpha \\ h''_{usc} & 1 \end{bmatrix}$
3)	$\begin{bmatrix} h'_{mg} & 0 \\ \beta & h'_{usc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{mg} & 0 \\ r_m & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g_m & g_{usc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h''_{mg} & h''_{usc} \end{bmatrix}$
4)	$\begin{bmatrix} h''_{mg} & 0 \\ \alpha & h''_{usc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r_{mg} & r_{usc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{mg} & 0 \\ g_m & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h'_{mg} \\ h'_{usc} & 1 \end{bmatrix}$

Le precedenti equivalenze tra i quattro modelli delle sorgenti pilotate nonideali ci permettono di concludere che :

La resistenza d'ingresso e la resistenza d'uscita sono comuni ai quattro modelli

$$r_{mg} = \frac{1}{g_{mg}} = h'_{mg} = \frac{1}{h''_{mg}} \quad r_{usc} = \frac{1}{g_{usc}} = \frac{1}{h'_{usc}} = h''_{usc}$$

mentre il parametro di pilotaggio dipende dal modello della sorgente pilotata

**Commento :** possono esserci sorgenti pilotate nonideali in cui una delle porte è ancora ideale :

- Qualora l'elemento ( )<sub>11</sub> della matrice sia nullo, la porta pilotante risulta ideale.
- Qualora l'elemento ( )<sub>22</sub> della matrice sia nullo, la porta pilotata risulta ideale.

In questi casi non sono definiti tutti e quattro i modelli.

**Potenza :** L'esame delle relazioni costitutive delle sorgenti pilotate nonideali ci consente di affermare che la porta pilotante di qualsiasi sorgente pilotata nonideale è dissipativa, mentre quella pilotata è attiva, in quanto essa può sia erogare sia assorbire potenza a seconda della situazione elettrica.

Se sommiamo le potenze assorbite dalle due porte, si conclude che le sorgenti pilotate nonideali possono essere dissipative o attive. Le condizioni per cui una sorgente pilotata nonideale è dissipativa coincidono con le condizioni per cui la corrispondente matrice cardinale risulta (semi)definita positiva (vedere Par. 9.4.1).

Qui sotto riportiamo la condizioni per cui ognuno dei quattro modelli è dissipativo :

- modello controllato in corrente : dissipativo se  $r_{mg} r_{usc} \geq (r_m/2)^2$
- modello controllato in tensione : dissipativo se  $g_m g_{usc} \geq (g_m/2)^2$
- primo modello ibrido : dissipativo se  $r_{mg}/r_{usc} \geq (\beta/2)^2$
- secondo modello ibrido : dissipativo se  $r_{usc}/r_{mg} \geq (\alpha/2)^2$

Nella maggior parte dei casi di interesse i parametri di pilotaggio ( $r_m$ ,  $g_m$ ,  $\beta$  e  $\alpha$ ) sono sufficientemente elevati in modo che le sorgenti pilotate nonideali risultano attive. ■

**10.5.3 Trasformazioni tra i modelli cardinali**

Le precedenti equivalenze tra i quattro possibili modelli cardinali di una sorgente pilotata nonideale appaiono piuttosto noiosi e pedanti. Nella pratica, si può passare da un modello all'altro con delle trasformazioni circuitali piuttosto semplici e molto utili. Teniamo presente che sia la resistenza d'ingresso sia quella d'uscita rimangono invariate in tutti e quattro i modelli, mentre solamente la sorgente pilotata ideale interna al modello varia da un modello all'altro. La sostituzione di questa può essere eseguita in accordo alle semplici regole :

**Cambiamento della grandezza pilotante :** Una sorgente pilotata nonideale del tipo  $V_y$  e  $I_x$  con resistenza in parallelo alla porta d'ingresso può essere sostituita da una sorgente nonideale del tipo  $V_x$  e  $I_y$  con la resistenza d'ingresso  $r_{mg}$  in serie alla porta pilotante. Ovviamente vale lo scambio inverso. Queste trasformazioni implicano i seguenti cambiamenti dei "guadagni" delle sorgenti pilotate :

modello da sostituire	→	modello sostitutivo
$V_y$ con transresistenza $r_m$	→	$V_y$ con rapporto $\alpha = r_m/r_{mg}$
$I_x$ con transconduttanza $g_m$	→	$I_x$ con rapporto $\beta = g_m r_{mg}$
$I_x$ con rapporto $\beta$	→	$I_y$ con transconduttanza $g_m = \beta/r_{mg}$
$V_y$ con rapporto $\alpha$	→	$V_x$ con transresistenza $r_m = \alpha r_{mg}$

**WWW'WWW'??? CAMBIAMENTO DELLA GRANDEZZA PILOTANTE**

**Cambiamento della grandezza pilotata :** una sorgente nonideale del tipo  $V_y$  e  $V_x$  con resistenza d'uscita  $r_{usc}$  in serie alla porta d'uscita può essere sostituita da una sorgente nonideale del tipo  $I_y$  e  $I_x$ , rispettivamente, con una resistenza dello stesso valore in parallelo alla porta d'uscita. Ovviamente vale lo scambio inverso. Queste trasformazioni implicano i seguenti cambiamenti dei "guadagni" delle sorgenti pilotate :

modello da sostituire		modello sostitutivo
$V_X$ con transresistenza $r_m$	$\rightarrow$	$V_X$ con rapporto $\beta = r_m/r_{usc}$
$I_Y$ con transconduttanza $g_m$	$\rightarrow$	$V_Y$ con rapporto $\alpha = g_m r_{usc}$
$I_X$ con rapporto $\beta$	$\rightarrow$	$V_X$ con transresistenza $r_m = \beta r_{usc}$
$V_Y$ con rapporto $\alpha$	$\rightarrow$	$I_Y$ con transconduttanza $g_m = \alpha/r_{usc}$

WWWWWW??? CAMBIAMENTO DELLA GRANDEZZA PILOTATA

**Commento** : Le precedenti trasformazioni riguardanti la porta d'uscita delle sorgenti pilotate nonideali sono analoghe alle ben più note trasformazioni tra i modelli di Thévenin e quello di Norton di un bipolo nonimpessivo e nonomogeneo (vedere Sez. 7.2). ■  
WWWWWW FARE ESEMPI NUMERICI

10.5.4 Doppio bipolo fisico : amplificatore

Uno qualsiasi dei quattro modelli di sorgenti pilotate è un buon modello, per lo meno a frequenze non troppo elevate, di un doppio bipolo fisico, chiamato usualmente *amplificatore* molto usato nei circuiti elettronici. Esso è costituito da transistori, resistori, .... A frequenze piuttosto elevate il modello dell'amplificatore diventa inevitabilmente dinamico per la presenza di elementi dinamici parassiti all'interno dei transistori. Spesso anche a frequenze molto basse il modello diventa dinamico per la presenza di condensatori appositamente aggiunti per eliminare tensioni e correnti costanti.

Sia data una sorgente pilotata nonideale, di cui usiamo il modello con  $V_Y$ , chiusa tra una sorgente (bipolo) nonideale con resistenza interna  $r_s$  e un carico di resistenza  $r_u$ . Calcoliamo il guadagno di tensione, corrente e potenza :

rapporto	nome
$A_v = \frac{v_2}{\hat{v}} = \frac{\alpha r_{ing} r_u}{(r_s + r_{ing})(r_{usc} + r_u)}$	guadagno di tensione
$A_i = A_v \frac{r_s + r_{ing}}{r_u} = \frac{\beta r_s r_{usc}}{(r_s + r_{ing})(r_{usc} + r_u)}$	guadagno di corrente
$A_p = A_v A_i$	guadagno di potenza

Nelle suddette formule abbiamo usato la convenzione noncardinale per le sorgenti pilotate nonideali.

Partendo dalle definizioni dei guadagni, possiamo ottenere diverse espressioni degli stessi in funzione dei parametri della sorgente pilotata nonideale, della resistenza interna della sorgente e della resistenza del carico.

WWWWWWWW??? Vedere tesi di C. Beccari e di Sedra-Smith ???WWWWWW

10.6 TRASFERITORI IDEALI

Sono introdotti due doppi bipoli omogenei e nonimpessivi, di notevole interesse sia teorico sia pratico, che sono, nello stesso tempo, simili e dissimili tra di loro : il trasformatore ideale e il giratore. Essi sono gli unici doppi bipoli, che a ogni istante trasferiscono potenza da una porta all'altra lasciandola invariata, cioè essi non assorbono e non erogano potenza, cioè, in accordo alla definizione data nel Par. 9.4.1, sono inerti.

10.6.1 Alla ricerca dei trasferitori (ideali) di potenza

Indaghiamo sui doppi bipoli omogenei con l'intento di trovare, se esistono, doppi bipoli con le seguenti prestazioni energetiche :

Ciascuna delle porte è in grado di assorbire o erogare potenza.

la potenza che è assorbita da una porta è uguale a quella erogata dall'altra.

quindi, essendo la potenza complessiva nulla, essi sono inerti.

Essi possono essere considerati "trasferitori (ideali) di potenza".

La potenza  $p$  espressa in funzione di  $v_2$  e  $i_2$  per mezzo della matrice  $T'$  è :

$$p = v_1 i_1 - v_2 i_2 = (t'_{11} v_2 + t'_{12} i_2)(t'_{21} v_2 + t'_{22} i_2) - v_2 i_2$$

$$p = (t'_{11} t'_{21}) v_2^2 + (t'_{12} t'_{22}) i_2^2 + (t'_{11} t'_{22} + t'_{12} t'_{21} - 1) v_2 i_2$$

La condizione  $p = 0$   
 $V (v_2, i_2) \in \mathbb{R}^2$  implica la nullità dei tre coefficienti :  
 3 equazioni  $\begin{cases} t'_{11} t'_{21} = 0 \\ t'_{12} t'_{22} = 0 \\ t'_{11} t'_{22} + t'_{12} t'_{21} = 1 \end{cases}$  nelle 4 incognite  $\begin{cases} t'_{11} \\ t'_{12} \\ t'_{21} \\ t'_{22} \end{cases}$   
 otteniamo il sistema nonlineare sottodeterminato di :

**Soluzioni** : Le infinite soluzioni del suddetto sistema coincidono con quelle di due sistemi più semplici :

$$\underbrace{\begin{cases} t'_{12} = 0, & t'_{11} t'_{21} = 1 \\ t'_{12} = 0, & t'_{11} t'_{22} = 1 \end{cases}}_{\text{I valori di } t'_{11}, t'_{12}, t'_{21} \text{ e } t'_{22} \text{ che risolvono il sistema a sinistra definiscono un doppio bipolo la cui matrice di trasmissione } T' \text{ risulta diagonale e con determinante } |T'| = 1 :}$$

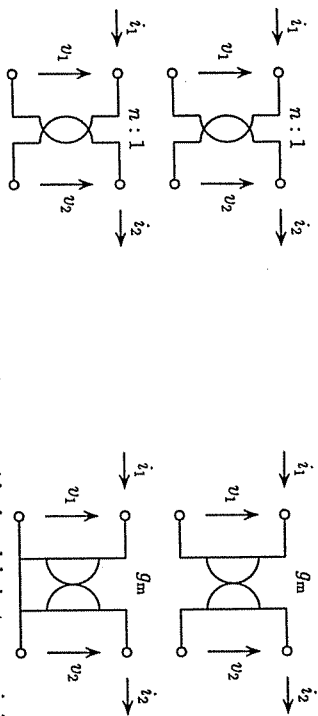
$$T' = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{cases} t'_{11} = 0, & t'_{22} = 0 \\ t'_{12} t'_{21} = 1 \end{cases}}_{\text{I valori di } t'_{11}, t'_{12}, t'_{21} \text{ e } t'_{22} \text{ che risolvono il sistema a destra definiscono un doppio bipolo la cui matrice di trasmissione } T' \text{ risulta antididagonale e con determinante } |T'| = -1 :}$$

$$T' = \begin{bmatrix} 0 & 1/g_m \\ g_m & 0 \end{bmatrix}$$

Questo doppio bipolo è chiamato *trasformatore ideale* (tr.id.) e il parametro  $n$  è chiamato *rapporto di trasformazione*.  
 Questo doppio bipolo è chiamato *giratore* e il parametro  $g_m$  è chiamato *transconduttanza di girazione*.

Qui sotto sono riportati i simboli grafici del triad. e del giratore sia propri sia tripolari.



Confrontando le matrici di trasmissione del trasformatore ideale e del giratore con i risultati sulla reciprocità incontrati nel Par. 9.4.2, si ha che :

il tr.id. è sia reciproco sia antireciproco      il giratore è antireciproco

### 10.6.2 Altre rappresentazioni del tr.id. e del giratore

Sia il tr.id. sia il giratore sono stati introdotti mediante la matrice di trasmissione diretta. Esaminiamo quali altre rappresentazioni possono essere definite per entrambi.

Le due equazioni  $v_1 = n v_2$  e  $i_1 = i_2/n$       Le due equazioni  $v_1 = i_2/g_m$  e  $i_1 = g_m v_2$  ci dicono che il trasformatore ideale non ammette le rappresentazioni

$(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$  ,       $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$        $(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$        $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$

Le rimanenti rappresentazioni cardinali del trasformatore ideale e del giratore esistono. Ciascuna di esse introduce un modello cardinale (vedere Par. 10.4.2) costituito esclusivamente da due sorgenti pilotate.

Consideriamo la prima matrice ibrida del tr.id. e la matrice resistenza del giratore :

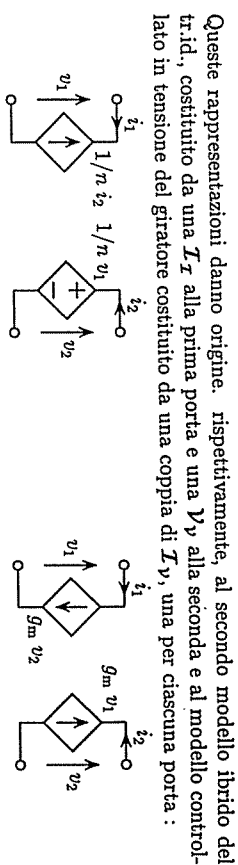
$$H^T = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \text{ antisimmetrica} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & -1/g_m \\ 1/g_m & 0 \end{bmatrix} \text{ antisimmetrica}$$



Queste rappresentazioni danno origine, rispettivamente, al primo modello ibrido del tr.id., costituito da una  $\mathcal{V}$  alla prima porta e una  $\mathcal{I}_X$  alla seconda e al modello controllato in corrente del giratore costituito da una coppia di  $\mathcal{V}_X$ , una per ciascuna porta :

$$H'' = \begin{bmatrix} 0 & -1/n \\ 1/n & 0 \end{bmatrix} \text{ antisimmetrica} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & g_m \\ -g_m & 0 \end{bmatrix} \text{ antisimmetrica}$$

Consideriamo la seconda matrice ibrida del tr.id. e la matrice conduttanza del giratore :



Queste rappresentazioni danno origine, rispettivamente, al secondo modello ibrido del tr.id., costituito da una  $\mathcal{I}_X$  alla prima porta e una  $\mathcal{V}_Y$  alla seconda e al modello controllato in tensione del giratore costituito da una coppia di  $\mathcal{I}_Y$ , una per ciascuna porta :

**Commento :** il fatto che le matrici cardinali esistenti sia del tr.id. sia del giratore siano antisimmetriche ci conferma che entrambi sono inerti (vedere Par. 9.4.1).

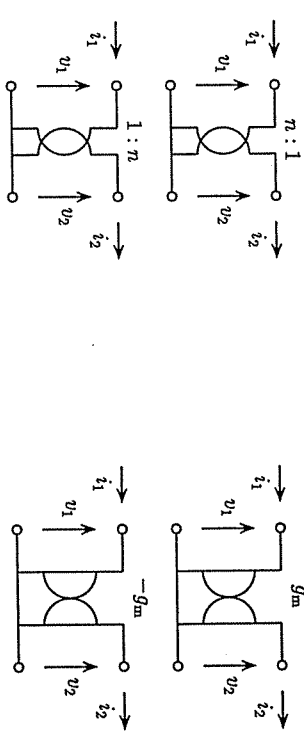
Inoltre il trasformatore ideale e il giratore ammettono la rappresentazione di trasmissione inversa  $T''$ , ottenuta dall'inversione di  $T'$  :

$$T''' = \begin{bmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \text{ diagonale} \qquad T'' = \begin{bmatrix} 0 & 1/g_m \\ g_m & 0 \end{bmatrix} \text{ antidagonale}$$

### Ribaltamento del tr.id. e del giratore :

**Proprietà :** Se ribaltiamo un trasformatore ideale otteniamo un altro tr.id. con rapporto di trasformazione inverso (vedere espressione della matrice  $T''$ ). ■

**Proprietà :** Se ribaltiamo un giratore otteniamo un altro giratore con una conduttanza di girazione cambiata di segno (vedere espressione della matrice  $T''$ ). ■



**Commento :** si incontrano le stesse equivalenze anche nel caso che il tr.id. e il giratore fossero propri. ■

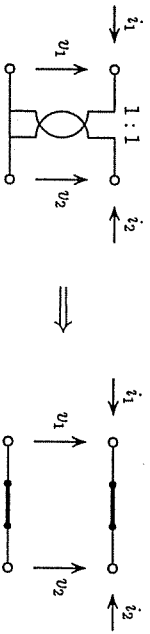
### 10.6.3 Il trasformatore ideale

Il trasformatore ideale è molto importante da un punto di vista concettuale : esso è caratterizzato dalla matrice  $T'$  diagonale e con determinante unitario, come indicato nel Par. 10.6.2.

**Avertenza :** Benché il trasformatore ideale sia reciproco, non esiste un modello costituito da tre bipoli connessi a  $T'''$  o a  $T''$ . Infatti se esistessero i modelli a  $T'''$  e a  $T''$

del tr.id., esisterebbero anche le matrici  $R$  e  $G$ .

**Proprietà:** nel caso particolare che  $n = 1$  cioè  $T' = T'' = I_{2,2}$ , il tr.id. tripolare degenera in una coppia di c.c. trasversali, che può essere vista come un *connettore ideale* (vedere figura sottostante). Questa proprietà non vale se il tr.id. è proprio.



**Commento:** La maggior parte dei testi adotta come simbolo circuitale del tr.id. una coppia di induttori (vedere Cap. 16) separati da tre linee parallele. Questo simbolo ci ricorda la storia del tr.id. introdotto, originariamente, come modello estremamente idealizzato degli induttori accoppiati. Purtroppo questo simbolo circuitale può trarre in inganno perché può suggerire l'idea errata che il tr.id. sia un componente dinamico come lo sono gli induttori accoppiati e il trasformatore fisico.

**Il trasformatore ideale e il trasformatore fisico:** il trasformatore ideale costituisce un buon modello di un componente reale, noto semplicemente come trasformatore (elettrico), qualora questo sia soggetto a tensioni/correnti né troppo lente né troppo rapide. Il suddetto componente fisico è di larghissimo uso, particolarmente negli impianti per la trasmissione e distribuzione dell'energia elettrica e può pesare anche molte tonnellate. Esso è essenzialmente costituito da due avvolgimenti di  $N_1$  e  $N_2$  spire di materiale conduttore avvolte attorno al medesimo nucleo di materiale ferromagnetico laminato (vedere monografia sull'energia elettrica); gli estremi dei due avvolgimenti costituiscono i quattro terminali del trasformatore fisico: qualora il trasformatore fisico sia soggetto a tensioni e correnti sinusoidali il trasformatore ideale costituisce un modello moderatamente accurato dello stesso, in cui il rapporto di trasformazione  $n = t'_1 = 1/t''_2$  coincide col rapporto del numero di spire  $N_1/N_2$  dei due avvolgimenti. Un modello più accurato del trasformatore fisico richiederebbe di tenere conto che in esso sono presenti effetti dinamici tutt'altro che trascurabili e una limitata dissipazione di potenza. In particolare, il tr.id. costituisce un "modello clamorosamente errato" di un trasformatore fisico, qualora siano in presenza di tensioni e correnti costanti: infatti un trasformatore fisico in regime costante diventa un doppio bipolo zero-direzionale, mentre un tr.id. funziona indifferentemente in regime costante e in regime sinusoidale. Su questo argomento si ritornerà nel Cap. 16, parlando degli induttori accoppiati e, più in dettaglio, negli appunti monografici sull'energia elettrica.

10.6.4 Il giratore

Il giratore è caratterizzato dalla matrice  $T'$  antidiagonale e con  $|T'| = -1$ .

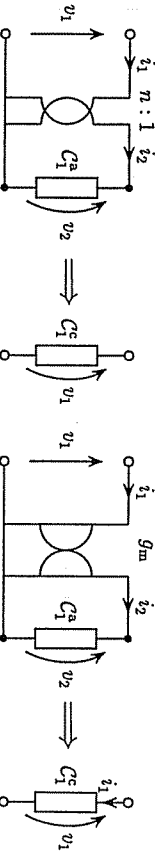
**Avvertenza:** Benché esistano le matrici  $R$  e  $G$  del giratore, non esiste un modello del giratore costituito da tre bipoli connessi a "T" o a "II". Infatti, un modello costituito da soli resistori sarebbe reciproco, mentre il giratore è antireciproco.

**Nota storica:** Il giratore è stato proposto sulla carta da Tellegen (1948 ?) per le

sue proprietà teoriche: primo doppio bipolo nonreciproco e non attivo. Successivamente è stato realizzato un giratore fisico mediante semiconduttori: per esempio tramite due nullori. WWWWWW? FARE DISEGNO dall' HANDBOOK WWWWWW? **Etimologia:** Il nome "giratore" è stato proposto da Tellegen: forse egli aveva previsto che questo nuovo doppio bipolo avrebbe fatto girare le ●● a molti studenti che lo incontrano per la prima (e anche la seconda ...) volta in un esercizio ?

10.6.5 Trasformatore ideale e giratore chiusi su un bipolo

Supponiamo di chiudere la porta 2 di un tr.id. o di un giratore sul generico bipolo  $C^a$  e di esaminare la caratteristica del bipolo composto  $C^a$  visto alla porta 1.



La caratteristica  $f_c^{ND}(v_1, i_1) = 0$  di  $C^a$  viene ottenuta dalla caratteristica  $f_a^{ND}(v_2, i_2) = 0$  di  $C^a$  in accordo alle:

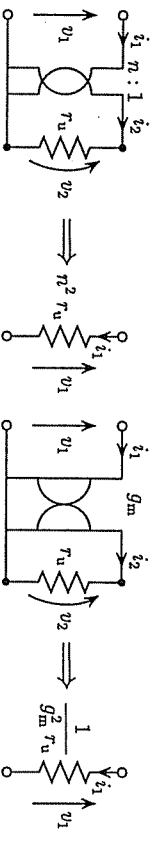
$$\begin{aligned} \text{tr.id. : } f_c^{ND}(v_1, i_1) = 0 &\equiv f_a^{ND}(v_1/n, i_1, n) = 0 \\ \text{giratore : } f_c^{ND}(v_1, i_1) = 0 &\equiv f_a^{ND}(i_1/g_m, v_1, g_m) = 0 \end{aligned}$$

il tr.id. altera per due fattori scala (uno inverso dell'altro) la tensione e la corrente.

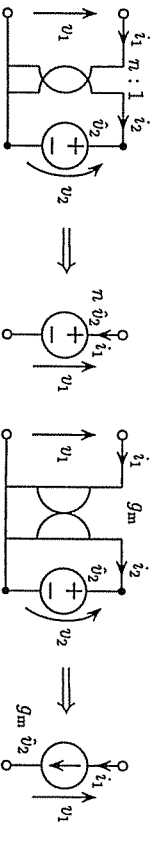
il giratore scambia tra loro la tensione e la corrente e le altera per due fattori (uno inverso dell'altro)

**Casi di interesse:** Se il generico bipolo  $C^a$  si cui viene chiuso il tr.id. ovvero il giratore è un particolare bipolo notevole, noi otteniamo le seguenti equivalenze:

Trasformatore ideale e giratore chiusi su un resistore



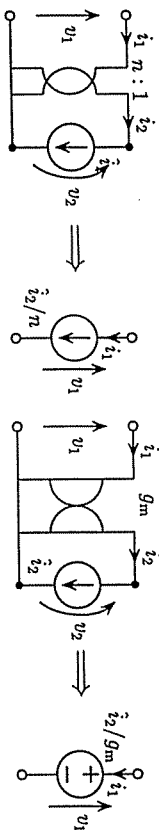
Trasformatore ideale e giratore chiusi su una Y.



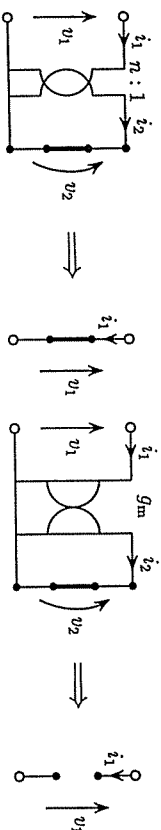
Trasformatore ideale e giratore chiusi su una I.



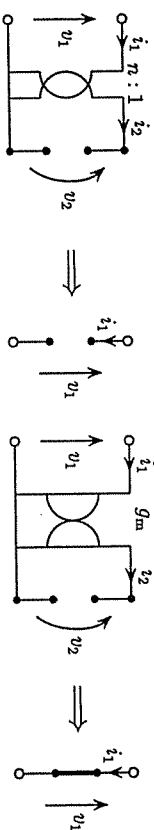




Trasformatore ideale e giratore chiusi su un corto circuito.



Trasformatore ideale e giratore chiusi su un circuito aperto.



**Commento :** Le formule suddette possono essere utilizzate anche nel caso desiderassimo calcolare il modello equivalente della porta d'uscita con la prima porta chiusa su un bipolo. Occorre tenere presente che il tr.id. e il giratore ribaltati sono sempre un tr.id. con rapporto di trasformazione inverso e un giratore con transconduttanza di girazione cambiata di segno (vedere Par. 10.6.3).

**Commento :** Nel Cap. 13 verranno prese in considerazione la cascata di un tr.id. e di un giratore con altri doppi bipoli.

### 10.6.6 WWWWWW Cambio delle porte dei doppi bipoli

Esaminare come mutano le relazioni costitutive dei doppi bipoli elementari, quando fossero tripolari, discossi in questo capitolo se cambio i bipoli fittizi che definiscono le due porte. Occorre dimostrare che :

La dissipatività, inerzia eccetera (comportamento energetico) e la (anti)reciprocità di un componente non cambiano al cambiare delle porte, perchè sono proprietà che dipendono dalla potenza effettiva o virtuale. La potenza in un DBT non dipende dalla porte scale. Mentre la simmetria e la direzionalità dipendono in genere dalla scelta delle porte del DBT.

Un tr.id. rimane ancora un tr.id. con diverso rapporto di trasformazione ???

Un giratore rimane ancora un giratore con diversa resistenza di girazione ???

Un nullo resta un nullo ??? E le quattro sorgenti pilotate ???

WWWWW??? Fare esempi in cui cambiano le tensioni e correnti indipendenti.

**e-mail per l'autore:** Siamo i transistori che operiamo all'interno del tuo pc collaborando con te alla stesura di questo testo. Noi non abbiamo l'abitudine di intervenire in faccende che dopo tutto dovrebbero riguardare esclusivamente l'autore del testo, ma dopo aver letto l'intervento dei resistori, non possiamo stare ulteriormente zitti. I resistori si vantano di essere numerosi ma si sono dimenticati di parlare del loro ruolo. In effetti il ruolo più importante all'interno di ciascun chip è svolta proprio da noi transistori. È la nostra ben nota nonlinearietà che consente di mandare a memoria il testo in tempi molto brevi. I resistori svolgono l'umilissimo ruolo di polarizzarci ma siamo noi che forniamo la memoria : come tutti sanno essi sono componenti passivi mentre noi siamo attivi. Per di più sono così dissipati che finiscono di sottrarci una parte delle risorse energetiche necessarie per svolgere il nostro lavoro. Inoltre noi abbiamo un terminale in più dei resistori, che ne hanno tanti quante le zampe di una gallina.

**e-mail per l'autore :** A questo punto anch'io sono costretto ad intervenire. I transistori si spacciano per componenti attivi !!! Ma come fanno a sostenere questo dal momento che è ben noto che i transistori si riscaldano ne più ne meno dei resistori quindi sono anch'essi dissipativi. E sostengo questo a ragion veduta : sono io che trasmetto loro l'energia, che essi dissipano. Per di più i transistori fanno molto rumore rendendo la vita stressante a tutti gli inquinati del pc. Circola una voce che dice che siano un po' drogati. Sarebbe ora di far loro un controllo antidoping poiché hanno sempre meno voglia di lavorare : la moderna tecnologia è costretta ad impiegarne un numero sempre maggiore per rimediare alla poca voglia di lavorare di ciascuno di loro. Ed io devo alimentarne un numero sempre più elevato mentre io resto solo a sobbarcarmi un lavoro enorme. E tu autore non mi sei nemmeno riconoscente e, invece di parlare di me, parli di un mio sosia che chiami trasformatore ideale. Non ha certo la mia prestanza fisica (io sono di ferro e rame), mentre esso è di carta nel senso che è stato inventato sulla carta da qualche accademico che non aveva niente di meglio da fare. Delle volte ho l'impressione che tu abbia il timore di passare per un docente sorpassato nel parlare di me che sono ormai centenario e considerato fuori moda. Ma se anche i più moderni computer hanno bisogno di me per tirare avanti. E poi sono così perfetto che in questo secolo sono cambiato ben poco e sono quasi giunto all'eternità se mi confronti coi chip che vivono al mio fianco e che passano di moda nel giro di pochi mesi. Ne ho visti passare molti sempre diversi ma sempre uguali nel durare pochi mesi, mentre io resisto da più di un secolo.

il trasformatore interno all'alimentatore del tuo pc

fine del capitolo 10

# 11 PROPRIETÀ dei CIRCUITI ADINAMICI TEMPO-INVARIANTI e LINEARI

WWWWWW??? FIGURA EMBLEMA : Fare una figura che evocò il principio di sovrapposizione in cui vi sono molto  $\hat{v}$  e  $\hat{i}$  e poi una sola alla volta.  
WWWWWW??? Spostare qui il Teorema di reciprocità ???

Questo capitolo considera le soluzioni e le proprietà dei circuiti e dei componenti composti costituiti esclusivamente da componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari. Qualsiasi metodo di analisi conduce alla costruzione di un sistema di equazioni algebriche lineari e nonomogenee, e con coefficienti indipendenti dal tempo. Questo sistema risulta determinato nell'analisi dei circuiti, mentre risulta sottodeterminato nell'analisi dei componenti composti.

**Sez. 11.1 : Metodo totale :** L'analisi di un circuito consiste nel calcolare le tensioni e correnti di ramo ovvero alcune di esse una volta nota la topologia e le relazioni costitutive. Le Leggi di KIRCHHOFF e le relazioni costitutive formano un unico sistema di equazioni algebriche lineari, seguendo il metodo totale, già introdotto nel Sez. 5.4.

**Sez. 11.2 : Circuiti patologici :** Se la matrice del sistema è singolare a causa dell'interazione tra la topologia e le relazioni costitutive, il sistema ammette nessuna soluzione oppure infinite soluzioni : in questi casi il modello del circuito risulta *patologico*.

**Sez. 11.3 : Ri-collocazione delle sorgenti impresse :** Lasciando inalterati i componenti omogenei del circuito e ricollocando le sorgenti impresse, possiamo giungere a un nuovo circuito equivalente al precedente.

**Sez. 11.4 : Teorema di sovrapposizione :** Nel caso in cui il circuito sia nonpatologico, la semplicità del sistema lineare, costruito col metodo totale di analisi, consente di stabilire in modo diretto e facile alcune proprietà e teoremi : tra cui spicca il principio di sovrapposizione.

**Sez. 11.5 : Analisi dei componenti composti :** Per semplificare circuiti piuttosto complessi può convenire sostituire un gruppo di componenti con un unico componente (composito) equivalente. Viene derivato dal metodo totale un metodo generale, nella pratica poco usato ma concettualmente importante, per risolvere questo problema nel caso in cui tutti i componenti siano dinamici, tempo-invarianti e lineari.

**Sez. 11.6 : Proprietà dei componenti composti :** L'analisi delle relazioni costitutive di un componente composto col metodo precedente consente di stabilire in modo diretto e facile alcune proprietà e teoremi di equivalenza per i componenti formati dall'aggregazione di componenti dinamici tempo-invarianti e lineari. Tra questi vengono discussi come casi particolari, i ben noti teoremi di THÉVENIN e NORTON.

**Sez. 11.7 : Proprietà energetiche :** Questa sezione prende in considerazione alcuna proprietà di natura energetica comuni sia ai componenti composti sia ai circuiti.

**Sez. 11.8 : Appendice sui sistemi algebrici :** richiama alcuni concetti sui sistemi di equazioni algebriche lineari e sulle loro soluzioni.

## 11.1 METODO TOTALE

L'analisi di un circuito consiste nel calcolare le tensioni e correnti di ramo ovvero una parte delle stesse una volta che siano note la topologia del circuito (con le Leggi di KIRCHHOFF) e le relazioni costitutive dei suoi componenti. Il metodo totale, già introdotto per componenti generici nella Sez. 5.4, viene qui ripreso nel caso in cui tutti i componenti siano dinamici, tempo-invarianti e lineari. Conseguentemente, qualsiasi sistema di equazioni che descrive il circuito è algebrico (cioè privo di derivate e integrali delle grandezze incognite), lineare e con coefficienti indipendenti dal tempo.

Come nei Capitoli precedenti le grandezze incognite, tensioni e correnti di ramo, tensioni di nodo, correnti cicliche, ..., non dipendono dal tempo  $t$ . Quindi useremo i simboli delle grandezze incognite :  $v^{nod}(t) \rightarrow v^{nod}$ ,  $v(t) \rightarrow v$ ,  $i(t) \rightarrow i$ , ...

### 11.1.1 Rappresentazioni unificate

Come già accennato nella Sez. 5.5 per i  $k$ -porte generici, le rappresentazioni di tutti i componenti di un circuito dinamico, tempo-invariante e lineare possono essere riconsiderate come un unico sistema sottodeterminato di  $m$  equazioni in  $2m$  incognite, che svolge il ruolo di *rappresentazione unificata* :

**Rappresentazioni unificate esplicite :** Raccogliendo le rappresentazioni esplicite di tutti i componenti in un unico sistema lineare (sottodeterminato), otteniamo necessariamente una *rappresentazione unificata esplicita* :

$$\begin{bmatrix} v^b \\ i^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{vv} & H^{vi} \\ H^{iv} & H^{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^a \\ i^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}^b \\ \hat{i}^b \end{bmatrix}$$

I vettori  $\begin{bmatrix} v^a \\ i^a \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} v^b \\ i^b \end{bmatrix}$ , sono costituiti dal *colage* delle grandezze indipendenti e dipendenti presenti nelle rappresentazioni esplicite di ciascun componente. In generale, le grandezze alla stessa porta possono essere entrambe indipendenti o entrambe dipendenti o una indipendente e una dipendente. Il vettore  $\begin{bmatrix} \hat{v}^b \\ \hat{i}^b \end{bmatrix}$  contiene le grandezze (tensioni e/o correnti) impresse di tutti i componenti. La matrice del sistema risultante diagonale a blocchi : ciascun blocco corrisponde ad un componente e ha le dimensioni coincidenti col numero delle porte.

**Rappresentazioni unificate cardinali :** Una rappresentazione unificata esplicita è cardinale se è derivata dal *colage* di rappresentazioni cardinali di tutti i componenti. In questo caso vale ancora l'equazione matematica valida per una generica rappresentazione unificata, ma sia il vettore delle grandezze indipendenti  $\begin{bmatrix} v^a \\ i^a \end{bmatrix}$  sia il vettore delle grandezze dipendenti  $\begin{bmatrix} v^b \\ i^b \end{bmatrix}$  contengono una e una sola grandezza per ciascuna porta.

Spesso una generica rappresentazione esplicita viene indicata con la notazione

$$H^v v + H^i i = \hat{v}$$

Pur essendo ciascuna equazione scalare una rappresentazione esplicita, questa notazione non ci costringe a distinguere le grandezze indipendenti e quelle dipendenti, mentre ci permette di concludere che i termini noti coincidono con le grandezze impresse diversamente da quello che capita per una generica rappresentazione implicita.

**Rappresentazioni unificate controllabili in corrente** [ tensione ] : Se e solo se tutti i componenti sono controllabili in corrente [ tensioni ], esiste la corrispondente rappresentazione unificata. In questi due casi si preferisce usare un'apposita notazione :

$$(v \leftarrow i) \quad v = R i + \dot{v} \quad , \quad (i \leftarrow v) \quad i = G v + \dot{i}$$

in cui  $R$  e  $G$  sono matrici  $m \times m$  con una struttura diagonale a blocchi. I vettori  $v$  e  $i$  raggruppano, rispettivamente, le tensioni e le correnti di ramo. ■

### 11.1.2 Costruzione del sistema di equazioni lineari

Il sistema di equazioni del metodo totale per un circuito adinamico, tempo-invariante e lineare viene costruito mediante un banalissimo "collage" delle Leggi di KIRCHHOFF e delle relazioni costitutive (vedere Sez. 5.4) :

- Costruire il grafo orientato, scegliere il nodo di riferimento e costruire il vettore delle grandezze incognite raggruppando le tensioni di nodo, le tensioni di ramo e le correnti di ramo  $[(v^{nod})^T \ v^T \ i^T]^T$  per un totale di  $2m + n - 1$  incognite.
- Costruire la matrice incidenza  $A$  di dimensioni  $(n - 1) \times m$  (vedere Par. 3.5.5).
- Scrivere la Legge di KIRCHHOFF delle tensioni nella forma :  $v = A^T v^{nod}$ .
- Scrivere la Legge di KIRCHHOFF delle correnti nella forma :  $A i = 0_{n-1}$ .
- Scrivere le relazioni costitutive dei componenti mediante una rappresentazione (essimplicita) unificata ( $m$  equazioni) della forma :  $H^v v + H^i i = \dot{u}$ , dove  $H^v$  e  $H^i$  sono matrici  $m \times m$  diagonali a blocchi, in cui ogni blocco contiene i parametri del corrispondente componente omogeneo associato e ha la dimensione coincidente col numero delle porte. Gli elementi nonnulli del vettore  $\dot{u}$  rappresentano le grandezze impresse del circuito.

Il sistema completo di equazioni assume la forma :

$$\left. \begin{array}{l} v = A^T v^{nod} \\ A i = 0_{n-1} \\ H^v v + H^i i = \dot{u} \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \rightarrow \\ n-1 \rightarrow \\ m \rightarrow \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} -A^T \\ 0_{n-1, n-1} \\ 0_{m, n-1} \end{array} \begin{array}{c} I_{m, m} \\ 0_{n-1, m} \\ A \end{array} \begin{array}{c} 0_{m, m} \\ A \\ \end{array} \begin{bmatrix} v^{nod} \\ v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_{n-1} \\ \dot{u} \end{bmatrix}$$

Le tre variabili intere contrassegnate da tre graffette verticali, a sinistra della matrice del sistema, indicano il numero di righe (equazioni) delle sottomatrici del sistema, mentre le tre variabili intere contrassegnate da tre graffette orizzontali, sotto la medesima matrice, indicano il numero di colonne (incognite) delle medesime sottomatrici. Il simbolo  $I_{m, m}$  denota la matrice identità  $m \times m$ , mentre il simbolo  $0$  denota matrici (con doppio indice) o vettori colonna (con singolo indice) di elementi tutti nulli: gli indici denotano le dimensioni.

### 11.1.3 Descrizione del sistema

Da un'ispezione diretta del sistema lineare le seguenti considerazioni possono essere fatte :

- Il numero di equazioni del sistema eguaglia il numero di incognite. Questo significa che il modello "promette" di essere adeguato, ammesso che la matrice del sistema sia nonsingolare.
  - Il vettore dei termini noti contiene come unici elementi nonnulli le grandezze impresse definite dalle rappresentazioni esplicite scelte per i componenti nonomogenei.
  - La matrice del sistema risulta suddivisa in nove sottomatrici :  
Le matrici  $0_{m, m}$ ,  $0_{n-1, n-1}$ ,  $0_{n-1, m}$  e  $0_{m, n-1}$ , i cui elementi sono tutti nulli.  
La matrice identità (diagonale)  $I_{m, m}$ .  
Le matrici  $A$  e  $A^T$  con al massimo due elementi nonnulli in ciascuna colonna e riga, rispettivamente (vedere Par. 3.5.5).  
Le matrici diagonali a blocchi  $H^v$  e  $H^i$ .  
Quindi la matrice del sistema di equazioni è *sparse*, nel senso che la maggior parte degli elementi della matrice sono nulli.
  - La matrice del sistema è determinata solamente dai parametri dei componenti omogenei associati (matrici  $H^v$  e  $H^i$ ) e dalla topologia (matrice incidenza  $A$ ).
- Prima di risolvere un qualsiasi sistema lineare, è opportuno esaminare il rango della sua matrice ovvero la sua singolarità :
- le prime  $m + n - 1$  equazioni del sistema dovute alle due leggi di KIRCHHOFF sono tra loro linearmente indipendenti, come risulta dal Par. 4.1.2-3.
  - le ultime  $m$  equazioni del sistema (relazioni costitutive) sono tra loro linearmente indipendenti, dal momento che le relazioni costitutive di componenti diversi non coinvolgono le stesse grandezze di ramo (struttura diagonale a blocchi di  $H^v$  e  $H^i$ ) e che le relazioni costitutive dello stesso multipolo sono per ipotesi indipendenti (vedere SSez. 8.1-2).

Come conclusione la eventuale singolarità della matrice del sistema può nascere esclusivamente dalla interazione della topologia, presente nelle prime  $m + n - 1$  righe, con i parametri dei componenti omogenei associati, presenti nelle ultime  $m$  righe, e non dipende dalle grandezze impresse, che appaiono solamente nel vettore dei termini noti (vedere appendice nella Sez. 11.8). In altre parole la singolarità della matrice è dovuta all'allargia di specifici componenti verso particolari connessioni. Per esempio, il parallelo di due  $\mathcal{V}$ , la serie di due  $\mathcal{I}$ , la connessione di due  $\mathcal{V}$  ovvero due  $\mathcal{I}$  alla porte dello stesso tr.id. .

### 11.1.4 Soluzione del sistema

Assumiamo, per il momento, che la matrice del sistema nel Par. 11.1.3 abbia rango massimo. In questo caso (vedere l'appendice nella Sez. 11.8) noi siamo in grado di trovare l'unica soluzione del sistema, che, invertendo la matrice, assume la forma :

$$\begin{bmatrix} v^{nod} \\ v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^T & I_{m, m} & 0_{m, m} \\ 0_{n-1, n-1} & 0_{n-1, m} & A \\ 0_{m, n-1} & H^v & H^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_{n-1} \\ \dot{u} \end{bmatrix}$$

Quindi il modello del circuito è adeguato, una volta che accettiamo l'ipotesi che il modello di ogni componente sia adeguato. L'unica soluzione viene calcolata.

**Commento** : Il lettore può pensare che nella pratica le matrici singolari non vengano mai incontrate, dal momento che la variazione, anche molto piccola, di un parametro del circuito (per esempio una resistenza) consente di rendere nonsingolare la matrice stessa. Ma il lettore deve tenere presente che una matrice "quasi-singolare" è comunque una *brutta bestia* : la sua inversione numerica (su calcolatore) può produrre risultati privi di significato perché affetti da errori di troncamento troppo elevati. Infatti nella soluzione di un sistema con matrice "quasi-singolare" noi ci imbattiamo nella differenza di numeri quasi uguali l'un l'altro : la casualità del loro errore di troncamento fa sì che il segno della differenza può essere positivo o negativo o nullo. Il lettore di buona volontà è invitato a fare un esempio.

**Vantaggi e svantaggi** : La costruzione del sistema lineare col metodo totale è semplice e generale nello stesso tempo, e perciò adatto a essere realizzato in un programma per calcolatore. Inoltre, la semplicità e la generalità lo rende particolarmente adatto per sviluppare teoremi e proprietà dei circuiti dinamici, tempo-invarianti e lineari.

I suddetti vantaggi vengono pagati dal fatto che l'ordine del sistema è piuttosto alto anche per circuiti semplici, rendendolo inadatto per il calcolo cartaceo di un circuito. Essendo la matrice di ordine alto ma sparsa l'esecuzione sul calcolatore può essere comunque rapida se vengono adottati gli algoritmi numerici propri delle matrici sparse.

## 11.2 CIRCUITI PATOLOGICI

Come accennato nella sezione precedente, nel sistema algebrico lineare che descrive un circuito dinamico, tempo-invariante e lineare possono essere presenti delle singolarità, che traggono origine dall'interazione della topologia con le relazioni costitutive. In questo caso si usa dire che il circuito è *patologico*. Questa sezione esamina da un punto di vista fisico i casi che vengono incontrati più frequentemente.

### 11.2.1 Singolarità del sistema

Assumiamo che la matrice del sistema costruito col metodo totale (vedere Sez. 11.1) risulti singolare. I termini noti, cioè le grandezze impresse delle sorgenti impulsive, giocano un ruolo basilare (vedere appendice in Sez. 11'8). Diversi casi si presentano :

- **Sistema incompatibile** : se il sistema di equazioni risulta incompatibile, dobbiamo concludere che il modello del circuito fisico non è corretto, dal momento che un circuito fisico ha senz'altro una soluzione. Questi casi di incompatibilità possono essere dovuti a un grossolano errore nella costruzione del modello del circuito, anche se i modelli dei singoli componenti sono corretti. Occorre riconsiderare il modello dall'inizio.

- **Sistema completamente indeterminato** : le incognite di interesse possono assumere valori arbitrari in  $(-\infty, \infty)$ . Il modello del circuito fisico non è stato definito adeguatamente in quanto la soluzione fisicamente non può che essere unica. Questo caso di indeterminazione completa è invece piuttosto raro. Comunque anche in questo caso occorre rivedere il modello.

- **Sistema parzialmente indeterminato** : una parte delle incognite assume un unico valore mentre le restanti incognite possono assumere valori arbitrari in  $(-\infty, +\infty)$ . In altre parole, la indeterminazione coinvolge solo una parte delle tensioni e/o correnti del circuito. Più precisamente sono indeterminate solamente le grandezze di una parte dei componenti, costituenti un componente composto. Se le grandezze di interesse rientrano tra quelle che assumono un unico valore, il modello può ancora essere considerato adeguato. L'indeterminazione parziale è invece piuttosto frequente.

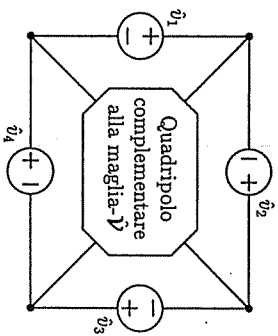
Nei paragrafi seguenti vengono discussi i casi più interessanti di circuiti patologici.

### 11.2.2 Patologie originate dalle maglie e dai tagli

Prima di riprendere la discussione sui circuiti patologici, conviene considerare maglie e tagli che risultano patologici in seguito alle relazioni costitutive dei loro rami :

**Maglie incompatibili** : sono le maglie costituite da rami le cui tensioni sono impresse o nulle e la cui somma non è nulla, violando la legge di KIRCHHOFF delle tensioni. Esse sono costituite esclusivamente da  $\mathcal{V}$  e c.c., includendo le porte pilotanti delle  $\mathcal{V}_X$  e  $\mathcal{I}_X$ .

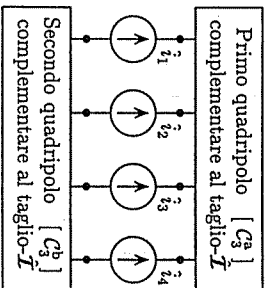
$$\hat{v}_1 + \hat{v}_2 + \hat{v}_3 + \hat{v}_4 \neq 0$$



**ESEMPIO DI MAGLIA- $\mathcal{V}$  INCOMPATIBILE**  
**Commento** : La presenza in un circuito di una o più maglie incompatibili e/o di uno o più tagli incompatibili rende incompatibile nel suo complesso anche il sistema lineare che descrive il circuito.

**Maglie indeterminate** : sono dette indeterminate le maglie costituite da rami la cui corrente è nonvincolata, purché esse non siano incompatibili : esse sono costituite esclusivamente da  $\mathcal{V}$ , c.c., porte d'uscita delle  $\mathcal{V}_X$  e  $\mathcal{V}_Y$ .

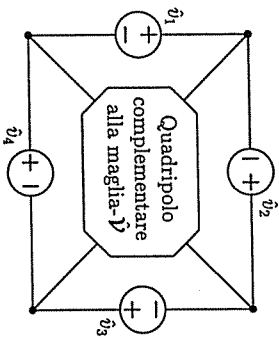
$$\hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \hat{i}_3 + \hat{i}_4 \neq 0$$



**ESEMPIO DI TAGLIO- $\mathcal{I}$  INCOMPATIBILE**  
**Tagli indeterminati** : sono detti indeterminati i tagli costituiti da rami la cui tensione è nonvincolata, purché essi non siano incompatibili : essi sono costituiti esclusivamente da  $\mathcal{I}$ , c.a., porte d'uscita delle  $\mathcal{I}_X$  e  $\mathcal{I}_Y$ .

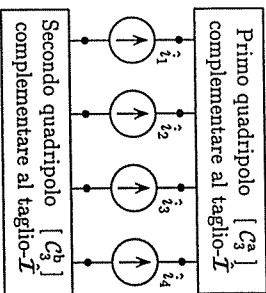
Le correnti di ramo di una tale maglia possono essere determinate solamente a meno di una costante additiva arbitraria, comune alle correnti di tutti i rami della maglia. In altre parole la corrente ciclica della maglia è arbitraria.

$$\hat{v}_1 + \hat{v}_2 + \hat{v}_3 + \hat{v}_4 = 0$$



Le tensioni di ramo di un tale taglio possono essere determinate solamente a meno di una tensione additiva arbitraria, comune alle tensioni di tutti i rami del taglio. In altre parole la tensione del taglio è arbitraria.

$$\hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \hat{i}_3 + \hat{i}_4 = 0$$

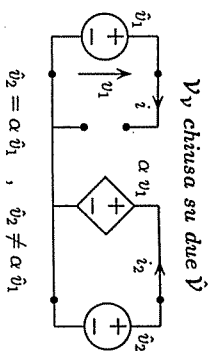
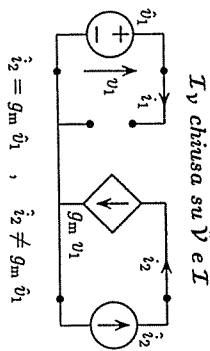
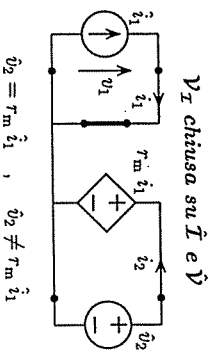


**ESEMPIO DI TAGLIO- $\hat{I}$  INDETERMINATO.**

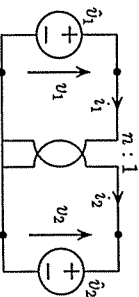
**Commento:** Un circuito con maglie e/o tagli indeterminati, in assenza di altre allergie, è parzialmente indeterminato, poiché solo le correnti fluenti nei rami delle maglie indeterminate e le tensioni ai capi dei rami dei tagli indeterminati non possono essere calcolate. Le rimanenti grandezze assumono un unico valore nella soluzione.

### 11.2.3 Patologie originiate dai doppi bipoli

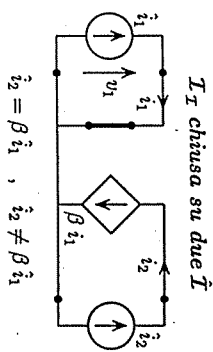
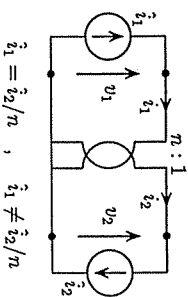
Anche le relazioni costitutive di componenti adinamici possono dare origine a patologie nel circuito. In particolare ogni qualvolta un doppio bipolo, in cui una o entrambe le relazioni costitutive coinvolgono due sole variabili e queste a loro volta coincidono con le grandezze impresse di sorgenti impresse connesse alle porte del doppio bipolo, nasce una relazione algebrica in cui sono presenti solamente le grandezze impresse. Ciascuno dei doppi bipoli notevoli discussi nel Cap. 10 può dare origine a queste patologie come risulta dal seguente quadro. Per ciascuno degli otto circuiti patologici sono riportate le relazioni che danno origine alla indeterminatizza (a sinistra) e all'incompatibilità (a destra):



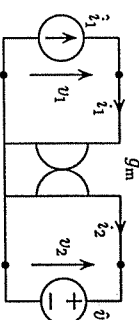
*tr.id. chiuso tra due  $\hat{V}$*



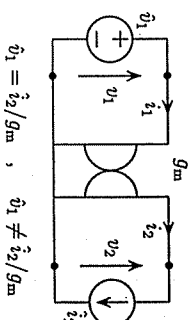
*tr.id. chiuso tra due  $\hat{I}$*



*giratore chiuso tra una  $\hat{I}$  e una  $\hat{V}$*



*giratore chiuso tra una  $\hat{V}$  e una  $\hat{I}$*



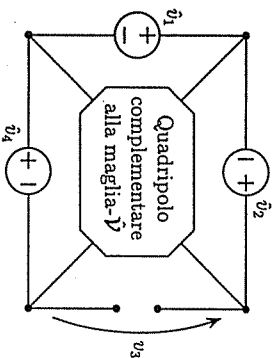
**Commento:** Comunque le patologie dovute alle maglie, tagli e doppi bipoli non esauriscono tutti i tipi di patologie che possono essere incontrate nei circuiti. Per esempio, se il determinante del sistema dipende dal guadagno di una sorgente pilotata, esiste un valore di questo guadagno che è in grado di annullare il determinante del sistema rendendo patologico il circuito. Anche le relazioni costitutive dei *k*-porte possono originare patologie. Qui non sono discusse poiché vengono incontrate meno frequentemente.

### 11.2.4 Rimozione della indeterminatizza

In presenza di maglie e/o tagli indeterminati in un circuito, la indeterminatizza può essere rimossa modificando il circuito stesso. Ovviamente questa modifica consente di determinare le grandezze originariamente indeterminate.

**maglia- $\mathcal{V}$ -c.c. indeterminata:**

Se in una maglia- $\mathcal{V}$ -c.c. indeterminata sostituiamo (cioè rimuoviamo) una  $\mathcal{V}$  ovvero un c.c. con un c.a., le correnti indeterminate dei rami della maglia diventano determinate in modo univoco, mentre tutte le tensioni dei rami della maglia e le tensioni e correnti dei rimanenti rami del circuito non vengono alterate. In altre parole, la corrente ciclica, originariamente indeterminata che fluisce nella maglia, viene fissata in modo che la corrente nel ramo rimosso sia nulla.

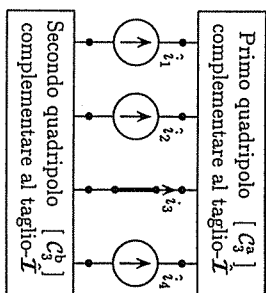


**REMOZIONE DELLA MAGLIA INDETERMINATA.**

La sostituzione  $\mathcal{V}(v_3) \rightarrow$  c.a. lascia invariate tutte le tensioni del circuito compresa la tensione  $v_3$ . Al contrario la corrente ciclica arbitraria rimane fissata in modo tale che  $i_3 = 0$ , mentre le restanti correnti rimangono invariate. ■  
 WWWWWW??? FARE ESEMPLI con doppi bipoli

**taglio- $\mathcal{I}$ -c.a. indeterminato:**

Se in un taglio- $\mathcal{I}$ -c.a. indeterminato sostituiamo (cioè cortocircuitiamo) una  $\mathcal{I}$  ovvero un c.a. con un c.c., le tensioni indeterminate dei rami del taglio diventano determinate in modo univoco, mentre tutte le correnti dei rami del taglio e le tensioni e correnti dei rimanenti rami del circuito non vengono alterate. In altre parole, la tensione del taglio, originariamente indeterminata e comune ai rami del taglio, viene fissata in modo che la tensione ai capi del ramo cortocircuitato sia nulla.



**REMOZIONE DEL TAGLIO INDETERMINATO.**

La sostituzione  $\mathcal{I}(i_3) \rightarrow$  c.c. lascia invariate tutte le correnti del circuito compresa la corrente  $i_3$ . Al contrario la tensione di taglio arbitraria rimane fissata in modo tale che  $v_3 = 0$ , mentre le restanti tensioni rimangono invariate. ■

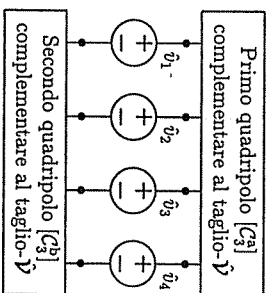
**11.3 RICOLLOCAZIONE DELLE SORGENTI IMPRESSIVE**

Questa sezione mostra come un circuito può essere sostituito da uno equivalente ricollocando opportunamente le sorgenti impresse del circuito stesso e lasciando invariato il circuito omogeneo associato. La matrice del sistema rimane invariata e le sorgenti impresse sono ricollocate senza alterare il vettore dei termini noti.

**11.3.1 Inserimento di tagli-sVi e maglie-sVi uniformi**

Qui esaminiamo una proprietà di natura topologica che ci consente di alterare la distribuzione delle sorgenti impresse all'interno del circuito:

In un circuito dinamico tempo-invariante e lineare ci sono molti tagli-c.c.. Tra i c.c. del taglio includiamo anche i c.c. latenti (vedere Par. 6.1.4). Quindi per ciascun taglio effettivo del circuito possiamo sempre definire un *taglio-c.c. latente*, dal momento che in serie a ciascun ramo c'è sempre un c.c. latente.

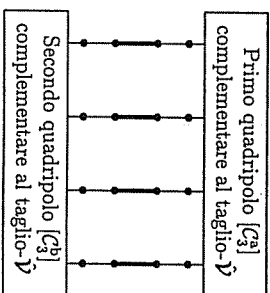


$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_0$

**CIRCUITO CON UN TAGLIO-V UNIFORME**

Il valore della tensione impressa  $v_0$  comune alle  $\mathcal{V}$  del taglio non ha alcun effetto sulla soluzione del circuito. Infatti in ciascuna maglia con rami in comune col taglio uniforme (in numero pari) le tensioni impresse del taglio si elidono a vicenda.

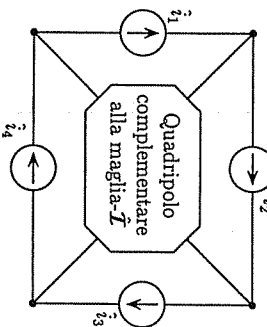
Quindi i circuiti con taglio- $\mathcal{V}$  uniforme ovvero maglia- $\mathcal{I}$  uniforme sono equivalenti, rispettivamente, ai seguenti circuiti:



**CIRCUITO CON TAGLIO-C.C.**

Sia un taglio- $\mathcal{V}$  uniforme sia una maglia- $\mathcal{I}$  uniforme costituiscono un componente composto omogeneo, nonostante la presenza di sorgenti impresse al loro interno. ■  
**Consiglio:** Dobbiamo abituarci mentalmente a vedere entro un qualsiasi circuito la pre-

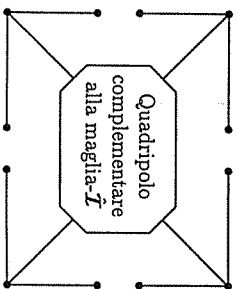
In un circuito dinamico tempo-invariante e lineare ci sono molte maglie-c.a.. Tra i c.a. della maglia includiamo anche i c.a. latenti (vedere Par. 6.1.4). Quindi per ciascun sottosistema di nodi del circuito possiamo sempre definire una *maglia-c.a. latente*, dal momento che tra ogni coppia di nodi vi è sempre un c.a. latente.



$i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = i_0$

**CIRCUITO CON UNA MAGLIA-I UNIFORME**

Il valore della corrente impressa  $i_0$  comune alle  $\mathcal{I}$  della maglia non ha alcun effetto sulla soluzione del circuito. Infatti in ciascuna nodo della maglia uniforme incidono due correnti impresse della maglia, la cui somma è nulla.



**CIRCUITO CON MAGLIA-C.A.**

senza di un molti tagli-c.c. e maglie-c.a. latenti che ci possono essere utili per ricollocare le sorgenti impresse.

**Definizione** : un taglio- $\mathcal{V}$  è detto *uniforme* se le tensioni impresse delle  $\mathcal{V}$ , orientate nello stesso verso del taglio, sono coincidenti. ■

**Proprietà** : Se un taglio-c.c. latente è rimpiazzato da un taglio- $\mathcal{V}$  uniforme tutte le tensioni e correnti di ramo del circuito restano inalterate, eccetto le tensioni dei rami del taglio- $\mathcal{V}$  in oggetto. ■

11.3.2 Metodo della ricollocazione delle sorgenti impresse

Le precedenti proprietà possono essere impiegate per ottenere un circuito diverso ma equivalente, scegliendo in modo opportuno :

la tensione impressa comune alle  $\mathcal{V}$  del taglio. Questa proprietà può servire per rimuovere una  $\mathcal{V}$  da un ramo inserendo altre  $\mathcal{V}$  in serie ad altri rami facenti parte del medesimo taglio.

L'applicazione di una o entrambe le suddette proprietà, eventualmente ripetute più volte, consente di trovare un circuito dinamico tempo-invariante e lineare diverso ma equivalente a quello originario. La parte omogenea del circuito non viene affatto alterata, mentre viene alterata la collocazione delle sorgenti impresse nei rami del circuito. A questo metodo diamo il nome di *metodo della ricollocazione delle sorgenti impresse*. ■

**Commento** : La ricollocazione delle  $\mathcal{I}$  consente di concentrarle in un coalbero prestabilito del circuito.

**Commento** La ricollocazione delle  $\mathcal{V}$  consente di concentrarle in un albero prestabilito del circuito.

11.4 TEOREMA DI SOVRAPPOSIZIONE

La semplicità del sistema lineare, costruito col metodo totale di analisi, consente di stabilire in modo diretto e facile alcune proprietà e teoremi, che vengono verificati dai circuiti dinamici tempo-invarianti e lineari.

11.4.1 Circuiti senza o con una sola sorgente impressiva

Supponiamo che il circuito sia privo di sorgenti impresse, cioè sia formato esclusivamente da componenti omogenei. Siccome  $\hat{u} = 0$ , il sistema lineare diventa omogeneo e il circuito ammette in ogni caso la soluzione :  $[(v_{mod})^T \ v^T \ \hat{z}^T]^T = 0_{m+n-1}$ . Se la matrice del sistema è nonsingolare, il circuito ammette solamente la suddetta soluzione. Altrimenti, il circuito ammette un numero infinito di soluzioni.

Supponiamo che nel circuito vi sia una sola sorgente impressiva, di tensione o di corrente,

caso molto frequente, oltre a componenti omogenei in numero qualsiasi. Conseguentemente, il vettore delle grandezze impresse  $\hat{z}$  ha la struttura :

$$\hat{z} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \hat{u}_k \ 0 \ \dots \ 0]^T = \hat{u}_k \ u_0$$

dove  $\hat{u}_k$  è la grandezza impressa dell'unica sorgente impressiva e  $u_0 = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ .

**Proprietà** : Ogni tensione e ogni corrente del circuito è proporzionale a  $\hat{u}_k$ . ■

**Prova** : Segue dalla struttura del vettore  $\hat{z}$  e dall'ispezione della espressione della soluzione :

$$\begin{bmatrix} v_{mod} \\ v \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \hat{u}_k \begin{bmatrix} -A^T & I_{m,m} & 0_{m,m} \\ 0_{n-1,n-1} & 0_{n-1,m} & A \\ 0_{m,n-1} & H^v & H^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_{n-1} \\ u_0 \end{bmatrix}$$

**Corollario** : Il rapporto tra due grandezze elettriche qualsiasi di un circuito lineare con una sola sorgente impressiva non dipende dalla grandezza impressa  $\hat{u}_k$ . ■

11.4.2 Enunciato e prova del teorema

Sia dato un circuito dinamico tempo-invariante e lineare nonpatologico e con  $K$  sorgenti impresse. Partendo da questo circuito possiamo costruire  $K$  circuiti ausiliari : il  $k$ -esimo circuito ausiliario è ottenuto da quello originario disattivando (azzerando) tutte le sorgenti impresse eccetto la  $k$ -esima.

**Teorema** : La soluzione del circuito originario è uguale alla somma delle  $K$  soluzioni dei  $K$  circuiti ausiliari. ■

**Prova** : Scomponiamo il vettore contenente le  $K$  grandezze impresse del circuito originario nella somma di  $K$  vettori, in ognuno dei quali sia presente una e una sola delle grandezze impresse. Ciascuno dei  $K$  vettori è il vettore dei termini noti di un circuito ausiliario :

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \vdots \\ \hat{z}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{z}_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \hat{z}_K \end{bmatrix}$$

$$\hat{z} = \hat{z}^{(1)} + \hat{z}^{(2)} + \dots + \hat{z}^{(K)}$$

Applichiamo questa scomposizione alla espressione della soluzione del circuito ottenuta per mezzo del metodo totale :

$$\begin{bmatrix} v_{mod} \\ v \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} -A^T & I_{m,m} & 0_{m,m} \\ 0_{n-1,n-1} & 0_{n-1,m} & A \\ 0_{m,n-1} & H^v & H^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_{n-1} \\ \hat{z}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Dall'osservazione di questa espressione modificata della soluzione si conclude che il vettore delle grandezze incognite è uguale alla somma di  $K$  vettori, i quali sono a loro volta la

soluzione dei  $K$  circuiti ausiliari.

**Avvertenza :** Il teorema di sovrapposizione non può essere applicato nel calcolo della potenza e/o energia in quanto esse dipendono dal prodotto di tensioni e correnti. Per esempio, nella espressione della potenza in un bipolo compaiono due termini misti :

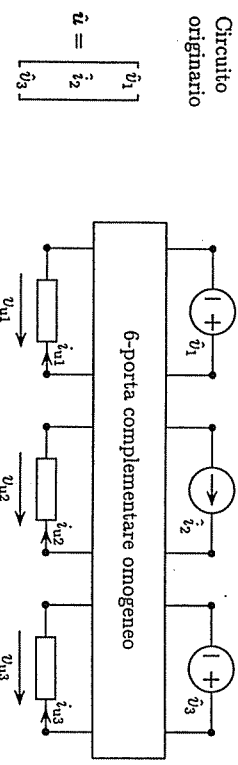
$$p = v_i = v^{(1)}i + v^{(2)}i = v^{(1)}i^{(1)} + \underbrace{v^{(2)}i^{(1)} + v^{(1)}i^{(2)}}_{\text{termini misti}} + v^{(2)}i^{(2)}$$

**Avvertenza :** Nel caso in cui il circuito originario sia parzialmente indeterminato, il teorema non può essere applicato direttamente, dal momento che la matrice del sistema lineare non può essere invertita. Se cerchiamo di costruire i  $K$  circuiti ausiliari, alcuni di essi sarebbero incompatibili. Il teorema può essere applicato solo dopo avere eliminato l'indeterminata parziale presente nel circuito.

**Esempio :** se il circuito è parzialmente indeterminato, possiamo rimuovere l'indeterminata (vedere Par. 11.2.4) e quindi usare il teorema di sovrapposizione.

**11.4.3 Applicazione del teorema**

Consideriamo il circuito, rappresentato nella figura sottostante : esso è alimentato da due  $\hat{v}$  e una  $\hat{I}$ . Assumiamo che le grandezze di interesse siano le tensioni e correnti di tre bipoli (ovvero porte) evidenziati nella figura.

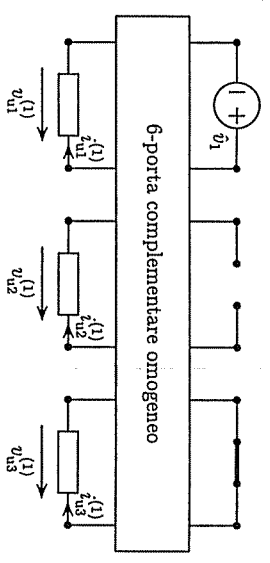


Applichiamo il teorema di sovrapposizione per analizzare il circuito, procedendo le modo seguente :

Creare i tre circuiti ausiliari partendo dal circuito originario :  
 nel  $k$ -esimo circuito ausiliario lasciare immutata la  $k$ -esima sorgente impressiva e sostituire le  $2 = 3 - 1$  rimanenti sorgenti col bipolo omogeneo associato, cioè :  
 $\hat{v} \rightarrow c.c. , \hat{I} \rightarrow c.a. .$

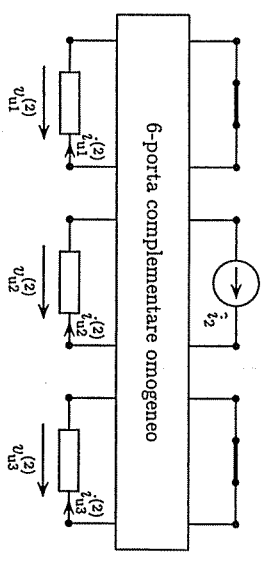
Primo circuito ausiliario

$$\hat{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



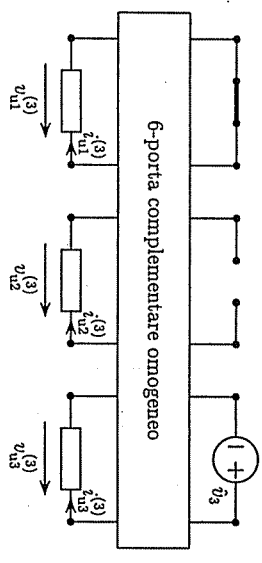
Secondo circuito ausiliario

$$\hat{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{I} \\ 0 \end{bmatrix}$$



Terzo circuito ausiliario

$$\hat{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{v}_3 \end{bmatrix}$$





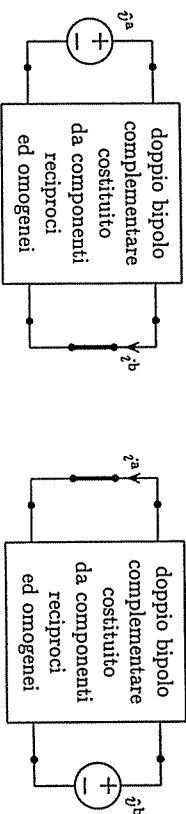
Per ciascuna delle sei grandezze di interesse, calcolare le soluzioni parziali  $y^{(1)}$ ,  $y^{(2)}$  e  $y^{(3)}$  dei tre circuiti ausiliari e sommare queste soluzioni parziali per ottenere la soluzione  $y$  del circuito originario :

$$\begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ y^{(3)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ y^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \\ i_{n3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{n1}^{(1)} \\ u_{n1}^{(2)} \\ u_{n1}^{(3)} \\ i_{n3}^{(1)} \\ i_{n3}^{(2)} \\ i_{n3}^{(3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{n1}^{(2)} \\ u_{n1}^{(3)} \\ u_{n2}^{(2)} \\ u_{n2}^{(3)} \\ u_{n3}^{(2)} \\ u_{n3}^{(3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{n1}^{(3)} \\ u_{n1}^{(1)} \\ u_{n1}^{(2)} \\ u_{n2}^{(1)} \\ u_{n2}^{(2)} \\ u_{n3}^{(1)} \\ u_{n3}^{(2)} \\ u_{n3}^{(3)} \end{bmatrix}$$

**Avvertenza :** Dal momento che i tre circuiti ausiliari sono tra loro parenti stretti (medesima topologia e medesimi componenti omogenei), una parte dei calcoli necessari per trovare le 3 soluzioni è comune a tutti i 3 circuiti. Questa ripetizione fa sì che il metodo della sovrapposizione non sia rapido sia nei calcoli cart&agrave;genna sia nei programmi per computer. Per i circuiti dinamici tempo-invarianti e lineari, questo metodo rimane molto importante dal punto di vista concettuale, ma meno dal punto di vista applicativo. Le sue applicazioni piú significative anche da un punto di vista applicativo, sono nell'ambito dei circuiti dinamici lineari.

#### 11.4.4 Circuito reciproco

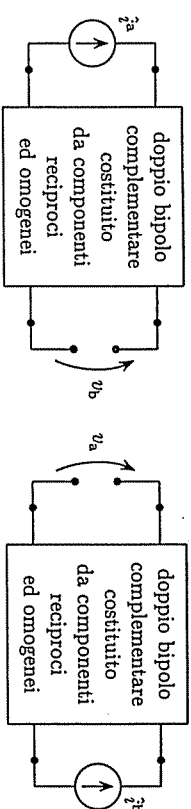
WWWWWW forse il TEOREMA DI RECIPROCIITÀ potrebbe essere spostato in questo punto dal CAP. 8 in quanto esso riguarda i componenti composti ???WWWWWW  
 Consideriamo un circuito costituito esclusivamente da componenti omogenei e reciproci, eccetto un ramo occupato dalla  $\mathcal{Y}(\hat{v}_a)$ . Assumiamo che un'altro ramo sia costituito da un c.c. (eventualmente latente), la cui corrente è indicata da  $i_b$  (figura sottostante a sinistra). Modifichiamo il suddetto circuito scambiando di posizione la  $\mathcal{Y}$  e il c.c. (figura sottostante a destra) :



Calcoliamo il rapporto  $i_b/\hat{v}_a$  nel circuito di sinistra e il rapporto  $i_a/\hat{v}_b$  nel circuito di destra. Essi risultano coincidenti :

Consideriamo un circuito costituito esclusivamente da componenti omogenei e reciproci, eccetto un ramo occupato dalla  $\hat{\mathcal{Y}}(\hat{v}_a)$ . Assumiamo che un'altro ramo sia costituito da un c.c. (eventualmente latente), la cui tensione è indicata da  $v_b$  (figura sottostante a sinistra).

Modifichiamo il suddetto circuito scambiando di posizione la  $\hat{\mathcal{Y}}$  e il c.c. (figura sottostante a destra) :



Calcoliamo il rapporto  $v_b/\hat{i}_a$  nel circuito di sinistra e il rapporto  $v_a/\hat{i}_b$  nel circuito di destra. Essi risultano coincidenti.

Queste due proprietà sono una conseguenza diretta della reciprocità dei componenti contenuti nel circuito. Infatti se rimuoviamo la  $\mathcal{Y}$  e il c.c. [ovvero la  $\mathcal{I}$  e il c.a.] dal circuito ci troviamo di fronte a un doppio bipolo omogeneo composto, le cui transconduttanze [ovvero transresistenze] fanno parte della matrice  $G$  [ovvero  $R$ ] del doppio bipolo. Quanto detto si applica a circuiti con un numero qualsiasi di sorgenti impulsive, purché se ne consideri una sola alla volta. In molti testi queste proprietà vanno sotto il nome di Teorema di Reciprocità, mentre in questi appunti esse risultano un'applicazione del Teorema di Reciprocità introdotto nel Par. 8.6.3 e che è piú generale del precedente.

#### 11.4.5 Applicazioni dei teoremi di non-amplificazione

##### WWWWWW COMINCIARE A SCRIVERE IL PARAGRAFO.

Elencare i circuiti in cui in base ai segni delle potenze effettive di ciascun bipolo effettivo o fittizio si possa dire qualche cosa sui limiti dei valori assoluti delle tensioni e correnti dei rami. Vedere anche casi con piú sorgenti impulsive.

#### 11.5 ANALISI DEI COMPONENTI COMPOSTI

##### 11.5.1 Generalità

L'analisi delle relazioni costitutive di un componente composto qualsiasi, note quelle dei componenti inclusi in esso, viene incontrata frequentemente. Per esempio, per semplificare circuiti piuttosto complessi può convenire sostituire un componente composto costituito da un gruppo di componenti con un unico componente equivalente, avendo preventivamente calcolato le relazioni costitutive di quest'ultimo. Questa sostituzione equivale ad eseguire un'analisi parziale del circuito limitatamente ai componenti sostituiti. Una volta eseguita la sostituzione l'analisi del circuito può essere proseguita in modo piú semplice. Qui affrontiamo il problema nel caso in cui tutti i componenti siano dinamici, tempo-invarianti e lineari e la loro struttura sia la piú generale possibile. Quando la struttura dell'aggregazione è di uno dei tipi visti nella Sez. 6.5, l'analisi può seguire regole specifiche, che saranno esaminate nel Cap. 13. Quindi il metodo esposto in questa sezione ha un valore concettuale piuttosto che pratico.

11.5.2 Dominio costitutivo del componente composito

Il dominio costitutivo (relazioni costitutive) di un componente composito è calcolato a partire dalle seguenti relazioni topologiche e costitutive (vedere Sez. 5.5) :

- Dalle relazioni costitutive (domini costitutivi) dei componenti interni al componente composito.
- Dalle due leggi di КИРГЕНОФ relative ai nodi e terminali interni al componente composito in oggetto cioè coinvolgenti esclusivamente tensioni e correnti interni a esso.
- Dalle due leggi di КИРГЕНОФ relative ai terminali d'accesso cioè coinvolgenti le tensioni e correnti definite alle porte del componente composito oltre a quelle interne.

Le suddette equazioni danno origine a un sistema sottodeterminato di equazioni.

Le precedenti considerazioni possono essere interpretate da un punto di vista più circuitale: Consideriamo un circuito formato dal  $k$ -porta composito  $C_k^e$  e da  $k$  noratori, uno per ciascuna porta. L'aggregazione dei  $k$  noratori costituisce il  $k$ -porta  $C_k^e$  complementare a  $C_k^e$ . Sia adottata la convenzione delle tensioni e correnti normale per  $C_k^e$  e nonnormale per  $C_k^e$ .

L'analisi delle relazioni ovvero del dominio costitutivo del componente composito viene ricondotta alla ricerca delle soluzioni del suddetto circuito  $\{C_k^e, C_k^e\}$ .

Queste soluzioni sono, in genere, infinite dal momento che il circuito è patologico per la presenza dei  $k$  noratori in esubero. Questo implica che il numero totale di equazioni del circuito è inferiore a quello delle grandezze incognite. L'insieme delle infinite soluzioni di questo circuito patologica costituisce il dominio costitutivo del  $k$ -porta  $C_k^e$ .

11.5.3 Costruzione del sistema sottodeterminato

Il metodo totale era stato formulato nella Sez. 5.4 per costruire le relazioni costitutive di un componente composito da componenti qualsiasi. Qui lo applichiamo al caso in cui tutti i componenti siano adinamici, tempo-invarianti e lineari. In base a quanto detto nel paragrafo precedente, partiamo dal circuito  $\{C_k^e, C_k^e\}$  per generare un sistema sottodeterminato di  $2m+n-k-1$  equazioni in  $2m+n-1$  incognite dal momento che mancano le  $k$  relazioni costitutive di  $C_k^e$ , mentre le tensioni e correnti alle sue porte sono presenti tra le incognite. Per scrivere il sistema sottodeterminato conviene suddividere l'insieme degli  $m$  rami nel sottosistema degli  $m-k$  rami interni al  $k$ -porta composito (distinti dall'apice "a") e nel sottosistema dei  $k$  rami rappresentanti i  $k$  noratori (distinti dall'apice "b"). Conseguentemente, i vettori delle tensioni e delle correnti di ramo e la matrice incidenza vengono partizionati :

$$v = \begin{bmatrix} v^a \\ v^b \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} i^a \\ i^b \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A^a & A^b \end{bmatrix}$$

$$v^a = [A^a]^T v^{nod}, \quad v^b = [A^b]^T v^{nod}, \quad A^a i^a + A^b i^b = 0_{n-1}$$

e le due leggi di КИРГЕНОФ vengono riscritte nella forma

Il sistema sottodeterminato, costruito col metodo totale, assume la forma :

$$\begin{bmatrix} -[A^a]^T & I_{m-k, m-k} & 0_{m-k, k} & 0_{m-k, k} \\ -[A^b]^T & 0_{k, m-k} & I_{k, k} & 0_{k, k} \\ 0_{n-1, n-1} & 0_{n-1, m-k} & 0_{n-1, k} & A^a \\ 0_{m-k, n-1} & H^v & 0_{m-k, k} & H^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^a \\ v^b \\ i^a \\ i^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{m-k} \\ 0_k \\ 0_{n-1} \\ \tilde{i} \end{bmatrix}$$

Le matrici  $H^v$  e  $H^i$  hanno dimensioni  $(m-k) \times (m-k)$  e, insieme al vettore  $\tilde{i}$  di dimensione  $m-k$  rappresentano le relazioni costitutive dei componenti interni a quello composito.

Le seguenti proprietà del sistema sottodeterminato che definisce il dominio costitutivo di  $C_k^e$  possono essere derivate immediatamente da quelle del sistema completo che definisce la soluzione di un circuito (vedere Sez. 11.6).

- Tutti gli elementi nonnulli del vettore dei termini noti coincidono con le grandezze impresse.
- La matrice del sistema è determinata solamente dai parametri dei componenti omogenei associati a quelli costituenti  $C_k^e$  e dalla topologia.
- La matrice rettangolare di questo sistema lineare sottodeterminato può avere rango non pieno. Questa eventualità dipende esclusivamente dalla interazione della topologia coi parametri omogenei dei componenti.

11.5.4 Riduzione del sistema sottodeterminato

La proiezione nel sottospazio delle  $2k$  variabili alle porte di  $C_k^e$  dell'insieme delle soluzioni del suddetto sistema sottodeterminato definisce le  $k$  relazioni costitutive ovvero il dominio costitutivo di  $C_k^e$ . Per trovare questo dominio costitutivo occorre trasformare il sistema sottodeterminato di  $2m-k+n-1$  equazioni in  $2m+n-1$  incognite in un sistema sottodeterminato equivalente di  $k$  equazioni con incognite le  $2k$  grandezze alle porte  $v^b$  e  $i^b$  di  $C_k^e$ . La trasformazione consiste nell'eliminare le tensioni  $v^a$  e le correnti  $i^a$  dei rami interni al componente composito  $C_k^e$  e tutte le tensioni di nodo  $v^{nod}$  con successive eliminazioni gaussiane fino a che il sistema si riduce a  $k$  equazioni nelle  $2k$  grandezze alle porte di  $C_k^e$ .

Le seguenti osservazioni di tipo algebrico sulla riduzione del sistema sottodeterminato di equazioni possono essere tratte :

- La matrice  $k \times 2k$  del sistema ridotto ha necessariamente rango pieno se il sistema originale (completo) aveva rango pieno. Essa può eventualmente avere rango pieno anche nel caso in cui il sistema originale non abbia rango pieno.
- Gli elementi della matrice del sistema ridotto dipendono esclusivamente dai parametri dei componenti omogenei associati e dalla topologia del componente composito e non dipendono dalle grandezze impresse, presenti nei componenti aggregati.

- I termini noti dipendono dalle grandezze impresse dai componenti non omogenei oltre che dai parametri dei componenti omogenei associati e dalla topologia del componente composto. Questi ultimi intervengono ripetutamente come coefficienti nelle successive eliminazioni gaussiane.

### 11.5.5 Incompatibilità e indeterminatazza del componente composto

Le precedenti considerazioni di tipo algebrico implicano che, se la matrice del sistema originario ha rango pieno (e conseguentemente anche quella del sistema ridotto) il modello del componente composto è adeguato. Al contrario, se il rango della matrice del sistema sottodeterminato originario non è pieno, tre casi si possono presentare :

- **Componente composto incompatibile** : Anche il rango della matrice del sistema sottodeterminato ridotto non è pieno e il sistema sottodeterminato ridotto, benché sottodeterminato, non ammette alcuna soluzione. Il modello del componente composto non è corretto, in quanto il suo dominio costitutivo è un insieme vuoto. **WWWWWW ESEMPIO DI COMPONENTE COMPOSITO INCOMPATIBILE**
- **Componente composto esternamente indeterminato** : Anche il rango della matrice del sistema sottodeterminato ridotto non è pieno causando una dipendenza lineare tra le sue equazioni : una o più equazioni sono ridondanti. Anche in questo caso il modello del componente composto  $C_c$  non è adeguato perché il numero di relazioni costitutive del componente composto risulterebbe insufficiente. **WWWWWW ESEMPIO DI COMPONENTE COMPOSITO ESTERN. INDETERMINATO**

- **Componente composto internamente indeterminato** : La matrice del sistema sottodeterminato ridotto ha rango pieno. le equazioni sono compatibili e non ridondanti. Questa eventualità significa che l'indeterminatazza è limitata alla grandezza interne del componente composto e non è avvertita alle sue porte. Quindi il modello del componente composto può essere accettato. **WWWWWW FARE ESEMPIO DI COMPONENTE COMPOSITO INTERN. INDETERMINATO**

## 11.6 PROPRIETÀ DEI COMPONENTI COMPOSITI

L'analisi delle relazioni costitutive di un componente composto col metodo totale consente di stabilire in modo diretto e facile alcune proprietà e teoremi per i componenti formati dall'aggregazione di componenti dinamici tempo-invarianti e lineari.

### 11.6.1 Una prima proprietà

Una prima importante proprietà riguarda i componenti composti esclusivamente da componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari. Pochi testi sui circuiti enunciano questa proprietà, forse perché ritenuta troppo banale.

**Proprietà** : sia dato un componente  $C_c$  composto da componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari  $C^1, C^2, C^3, \dots$  in genere non omogenei. Assumiamo che la matrice del sistema ridotto ottenuto dal metodo totale applicato al componente composto abbia rango

pieno, cioè che la connessione sia senza patologie. Il suddetto componente composto è a sua volta dinamico, tempo-invariante e lineare e (in genere ma non necessariamente) non omogeneo :

$$C^c \equiv \text{Aggreg}\{C^1, C^2, C^3, \dots\} \implies \underbrace{C^c}_{\text{compon. lineari}} \implies \underbrace{C^c}_{\text{lineare}}$$

**Corollario** : Analogamente, un componente composto da componenti lineari e omogenei è a sua volta lineare e omogeneo :

$$C^c \equiv \text{Aggreg}\{C^1, C^2, C^3, \dots\} \implies \underbrace{C^c}_{\text{compon. omogenei}} \implies \underbrace{C^c}_{\text{omogeneo}}$$

### 11.6.2 Secondo teorema di equivalenza

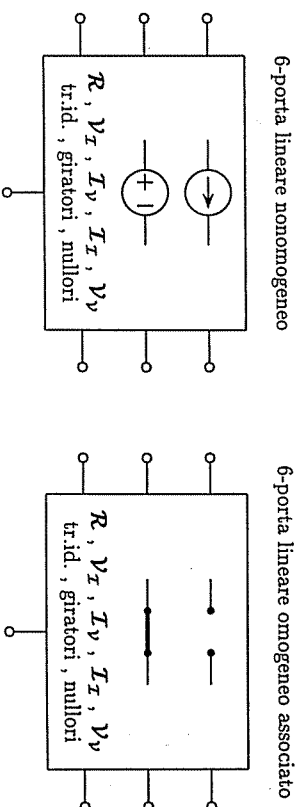
Per i componenti composti lineari non omogenei e quelli omogenei associati siamo ora in grado di enunciare un secondo teorema di equivalenza (il primo era stato enunciato nel Sez. 8.3) :

**Teorema** : sia dato un componente composto  $C_c \equiv \text{Aggreg}\{C^1, C^2, C^3, \dots\}$ , in cui i componenti aggregati siano lineari, in genere non omogenei, e consideriamo i corrispondenti componenti omogenei associati  $C_k^e, C_1^e, C_2^e, C_3^e, \dots$ . Il componente omogeneo  $C_k^e$  associato a  $C_c^e$  è equivalente all'aggregazione di  $C_1^e, C_2^e, C_3^e, \dots$ .

$$C_k^e \equiv \text{Aggreg}\{C^1, C^2, C^3, \dots\} \implies C_k^e \equiv \text{Aggreg}\{C_1^e, C_2^e, C_3^e, \dots\}$$

**Prova** : nelle successive eliminazioni gaussiane di un sistema di equazioni lineari i termini noti non influenzano in alcun modo gli elementi costituenti la matrice del sistema. ■

**Esempio** : Consideriamo un generico 6-porta (figura sottostante a sinistra), costituito da componenti omogenei di ogni tipo e da sorgenti impresse in numero imprecisato. Il 6-porta omogeneo associato si ottiene sostituendo ciascuna  $V$  con un c.c. e ciascuna  $I$  con un c.a. (figura di destra) :



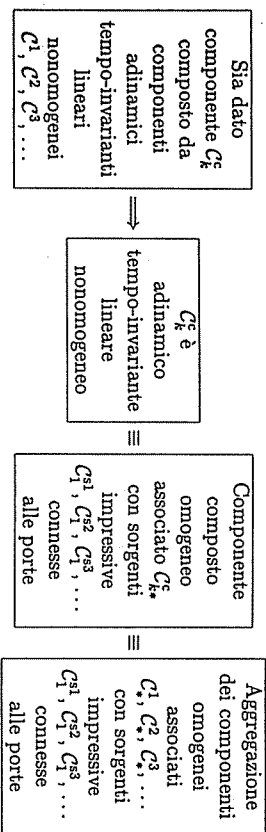
### 11.6.3 Terzo teorema di equivalenza

Combinando insieme il primo (vedere Sez. 8.3) e il secondo teorema di equivalenza, possiamo enunciare il seguente terzo teorema :

**Teorema** : sia dato un generico  $k$ -porta  $C_k^e$  composto da componenti lineari (in genere) nonomogenei  $C_k^e \equiv \text{Aggreg}\{C_1^1, C_2^2, C_3^3, \dots\}$ .  $C_k^e$  è equivalente alla aggregazione dei componenti omogenei associati  $\text{Aggreg}\{C_1^1, C_2^2, C_3^3, \dots\}$  e di alcune sorgenti impulsive  $C_1^1, C_1^2, C_1^3, \dots$  connesse opportunamente alle porte.

**Prova** : è una conseguenza delle seguenti considerazioni:

1. Per ogni componente dinamico tempo-invariante e lineare esiste almeno una rappresentazione esplicita (vedere Sez. 8.2).
2. Dal primo teorema di equivalenza (vedere Sez. 8.3) sappiamo che per ogni rappresentazione esplicita vale la  $C_k^e \equiv \overline{\text{Aggreg}}\{C_k^e, C_1^1, C_1^2, C_1^3, \dots\}$
3. Dal secondo teorema di equivalenza sappiamo che a sua volta  $C_k^e \equiv \text{Aggreg}\{C_1^1, C_2^2, C_3^3, \dots\}$
4. Quindi si viene ad avere :  $C_k^e \equiv \overline{\text{Aggreg}}\{\text{Aggreg}\{C_1^1, C_2^2, C_3^3, \dots\}, C_1^1, C_1^2, C_1^3, \dots\}$  ■



**Commento** : diverse aggregazioni equivalenti possono essere definite una per ogni rappresentazione esplicita esistente del  $k$ -porta  $C_k^e$ . Esse differiscono l'una dall'altra per il tipo di sorgenti impulsive (di tensione e/o corrente), per le porte a cui sono connesse e per il valore delle grandezze impresse. Viceversa la parte omogenea rimane la stessa in ogni aggregazione equivalente, mentre le sorgenti di tensione sono in serie alla porte e quelle di corrente in parallelo, come spiegato dal primo teorema di equivalenza nel Sez. 8.3. ■

**11.6.4 Dimostrazione alternativa**

Una dimostrazione alternativa del terzo teorema di equivalenza è basata sul Principio di Sovrapposizione (Sez. 11.4). Sia  $x^b = H x^a + \hat{x}^b$  la rappresentazione esplicita, di cui intendiamo calcolare la matrice  $H$  e il vettore impulsivo  $\hat{x}^b$ , di un generico  $k$ -porta composto. Trasformiamo il  $k$ -porta in un circuito completo nel modo seguente :

1. Connettiamo una  $\mathcal{V}(\hat{v}^b)$  ad ogni porta la cui tensione è tra le grandezze  $x^a$  e la cui corrente è tra le grandezze  $x^b$ .
2. Connettiamo una  $\mathcal{I}(\hat{i}^a)$  ad ogni porta la cui corrente è tra le grandezze  $x^a$  e la cui tensione è tra le grandezze  $x^b$ .

3. Connettiamo un nullatore con una  $\mathcal{V}(\hat{v}^a)$  in serie e una  $\mathcal{I}(\hat{i}^a)$  in parallelo (nullatore traslato) ad ogni porta la cui tensione e la cui corrente sono tra le grandezze  $x^a$ .
4. Connettere un noratore alle porte di cui sia la tensione sia la corrente sono tra le grandezze  $x^b$ .

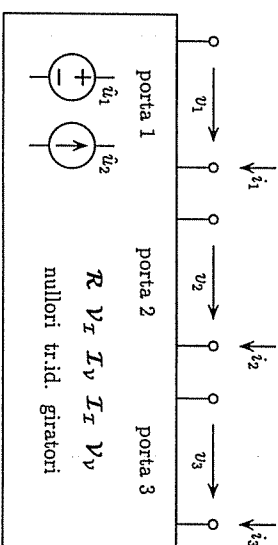
Con le suddette connessioni noi fissiamo le grandezze indipendenti della rappresentazione  $x^b \leftarrow x^a$  del  $k$ -porta :  $x^a = \hat{x}^a$ . Il suddetto circuito potrebbe risultare patologico : questo significa che la rappresentazione  $x^b \leftarrow x^a$  non esiste. Nell'ipotesi che il circuito non sia patologico, separiamo le grandezze impresse del circuito in due sottoinsiemi : quelle delle sorgenti impulsive interne al  $k$ -porta (raccolte nel vettore  $\hat{u}$ ) e quelle esterne al  $k$ -porta, cioè quelle delle sorgenti impulsive connesse al  $k$ -porta (raccolte nel vettore  $\hat{x}^a$ ). Esprimiamo le  $k$  grandezze dipendenti  $x^b$ , mediante il teorema di sovrapposizione (Sez. 11.4), tenendo distinti i contributi dei due sottoinsiemi di sorgenti impulsive :

$$x^b = H^a \hat{x}^a + H^u \hat{u} \implies x^b = x^{ba} + x^{bu} \text{ dove } x^{ba} = H^a \hat{x}^a \text{ e } x^{bu} = H^u \hat{u}$$

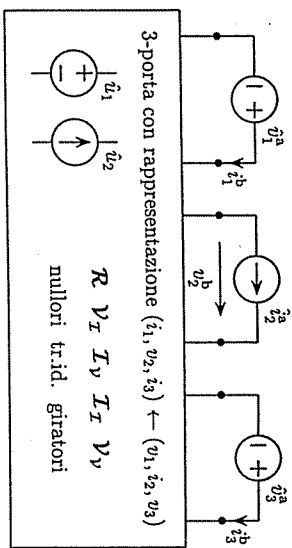
dove  $H^a$  e  $H^u$  sono la matrici che saltano fuori nell'esprimere il vettore  $x^b$  in funzione dei vettori  $\hat{x}^a$  e  $\hat{u}$ . Interpretiamo i due contributi  $x^{ba}$  e  $x^{bu}$  :

- Il termine  $x^{ba} = H^a \hat{x}^a$  coincide con  $x^b$  qualora siano disattivate le sorgenti impulsive interne (cioè  $\hat{u} = 0$ ). Conseguentemente, la matrice  $H^a$  coincide con la matrice  $H$  della rappresentazione esplicita del  $k$ -porta.
- Il termine  $x^{bu} = H^u \hat{u}$  coincide con  $x^b$ , qualora siano disattivate le sorgenti impulsive esterne :  $\hat{x}^a = 0$ . Esso coincide col vettore dei termini impulsivi  $\hat{x}^b$  presente nella rappresentazione esplicita.

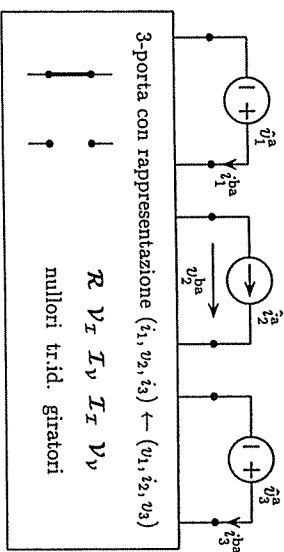
Per illustrare la dimostrazione, consideriamo il 3-porta, costituito da generici componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari, nella figura sottostante :



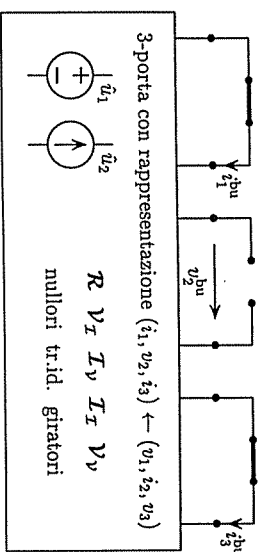
Assumiamo che ci interessi la rappresentazione ibrida  $(i_1, v_2, i_3) \leftarrow (v_1, i_2, v_3)$  : connettiamo al 3-porta due  $\mathcal{V}$  e una  $\mathcal{I}$  in accordo alle grandezze indipendenti :



Applicando il teorema di sovrapposizione, separiamo i contributi alle grandezze dipendenti  $x^b$  in due parti: quelli dovuti alle sorgenti impulsive interne al 3-porta  $x^{bu}$  e quelli dovuti alle sorgenti esterne  $x^{ba}$ .  
I contributi  $x^{ba}$  sono dovuti all'azione delle tre sorgenti impulsive esterne sul 3-porta omogeneo associato (figura sottostante).

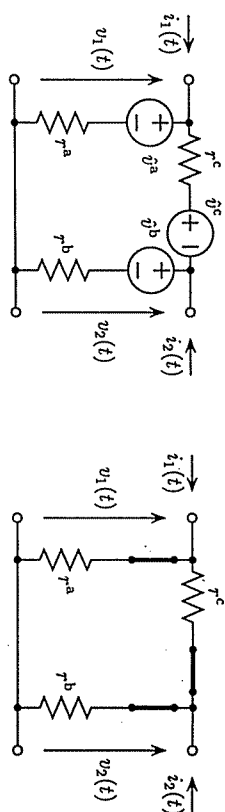


I contributi  $x^{bu}$  coincidono con i valori delle grandezze dipendenti, qualora quelle indipendenti siano nulle, cioè con i termini impressivi della rappresentazione esplicita:



11.6.5 Esempio

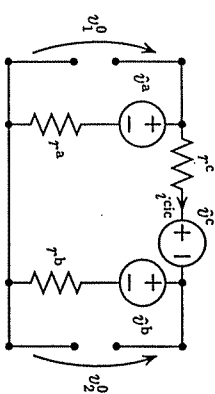
Consideriamo il tripolo  $C_{2T}^d$ , costituito da tre bipoli non omogenei connessi a  $\Pi$  (figura sottostante a sinistra) e costruiamo il tripolo omogeneo associato  $C_{2T}^d$ , sostituendo le tre  $\hat{Y}$  con tre c.c., (figura a destra):



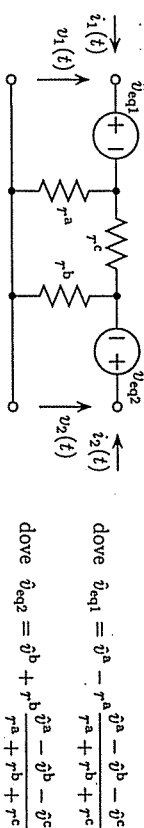
Le tensioni a vuoto  $v_1^0$  e  $v_2^0$  alle due porte di  $C_{2T}^d$  possono essere calcolate tramite la corrente  $i^{cic}$  fluente nell'unica maglia:

$$v_1^0 = g^a - r^a i^{cic}, \quad v_2^0 = g^b + r^b i^{cic}$$

$$\text{dove } i^{cic} = \frac{g^a - g^b - g^c}{r^a + r^b + r^c}$$



Il circuito equivalente è formato dal tripolo omogeneo associato  $C_{2T}^d$ , e dalle  $\mathcal{V}(\hat{v}_{eq1} = v_1^0)$  e  $\mathcal{V}(\hat{v}_{eq2} = v_2^0)$  in serie alle due porte:



11.6.6 Teoremi di Thévenin e di Norton

Quando il componente composto è un bipolo, il terzo teorema di equivalenza prende il nome di teorema di THÉVENIN ovvero di teorema di NORTON. Qui vengono discussi in dettaglio dal momento che essi sono uno strumento diffusissimo per l'analisi dei circuiti. Questi teoremi stabiliscono la regola pratica per calcolare i parametri del modello di THÉVENIN e del modello di NORTON di un generico bipolo composto controllabile, rispettivamente, in corrente e in tensione.

Sia dato un bipolo composto da alcuni componenti lineari e, in genere, non omogenei:

$$C_1^c \equiv \text{Aggreg}\{C^1, C^2, C^3, \dots\}$$

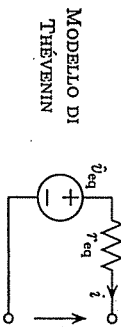
**Bipolo omogeneo associato:** costruiamo il bipolo omogeneo associato  $C_1^c$ , disattivando tutte le sorgenti impulsive presenti all'interno di  $C_1^c$ , cioè eseguendo le sostituzioni  $\hat{Y} \rightarrow$  c.c. e  $\hat{I} \rightarrow$  c.a.

**Avvertenza:** le sorgenti pilotate eventualmente presenti, siccome sono componenti omogenei, restano inalterate entro il componente composto omogeneo associato  $C_1^c$ .

**Resistenza interna:** la resistenza  $r_{eq}$  e/o conduttanza  $g_{eq}$  di  $C_1^c$ , del bipolo omogeneo associato viene calcolata:

**Tensione a vuoto :** Se  $g_{eq} = 0$ , il modello di THÉVENIN non esiste poiché  $G_1^c$  non ammette la rappresentazione  $v \leftarrow i$ . Se  $g_{eq} \neq 0$ , calcolare la tensione a vuoto  $v_0$  di  $G_1^c$ .

**Teorema di Thévenin :** La resistenza e la tensione impressa del modello di THÉVENIN, qualora esista, del bipolo composto  $G_1^c$  coincidono con la resistenza  $r_{eq}$  del bipolo omogeneo associato  $G_1^c$ , e con la tensione a vuoto  $\hat{v}_{eq} = v_0$  del bipolo  $G_1^c$ , rispettivamente.



**Commento :** Se  $v_0$  ovvero  $\hat{v}_0$  risultasse nulla, il bipolo composto  $G_1^c$  sarebbe omogeneo. Questo risultato è ovvio qualora il bipolo composto fosse privo di sorgenti impresse al suo interno, ma può capitare anche nel caso in cui siano presenti.

**Nota storica :** Il teorema di THÉVENIN è stato enunciato dall'autore, un ingegnere francese, nel 1883. Come curiosità si può osservare che in Italia il nome "THÉVENIN" viene raramente pronunciato correttamente con l'accento francese. Questo denoterebbe che la conoscenza del teorema sia giunta in via indiretta, per esempio tramite la letteratura scientifica anglosassone o tedesca. Recenti ricerche storiche proverebbero che in realtà il teorema attribuito a THÉVENIN sarebbe stato enunciato in una forma diversa da HELMHOLTZ nel 1853.

Il teorema di NORTON, pur essendo molto simile al precedente, è stato pubblicato dall'autore, un ingegnere americano, molto più tardi, nel 1926. Questo insolito ritardo è giustificato dal fatto che nei primi decenni di sviluppo delle discipline elettriche si conoscevano bipoli fisici il cui modello approssimato fosse una  $\hat{v}$  e nessun bipolo fisico il cui modello, seppur approssimato, fosse una  $\hat{I}$ ; per questo motivo le  $\hat{I}$  e conseguentemente il modello di NORTON sono stati introdotti molto più tardi.

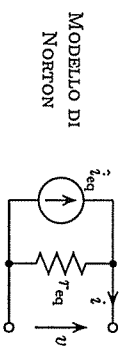
**11.6.7 Teoremi di compensazione**

Il teorema di sostituzione è stato introdotto nel Sez. 5.6 per un generico circuito (eventualmente, dinamico, tempo-variante e nonlineare). Qui esaminiamo una sua applicazione, molto interessante per i circuiti dinamici, tempo-invarianti e lineari, che va sotto il nome di teorema di compensazione.

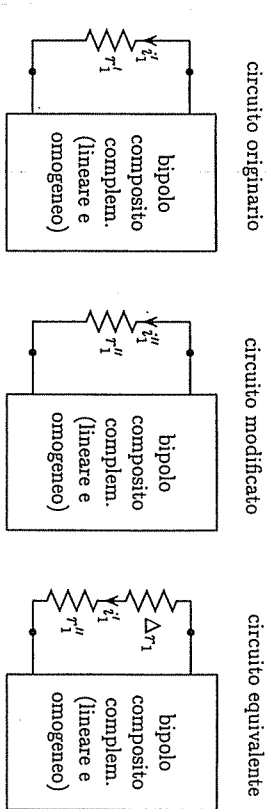
Consideriamo un circuito dinamico, tempo-invariante e lineare, che chiamiamo "circuito originario", in cui è presente un  $\mathcal{R}(\hat{r}_1')$  (figura sottostante a sinistra). Modifichiamo questo circuito variando la resistenza :  $r_1' \rightarrow r_1'' = r_1' - \Delta r_1$  e otteniamo il "circuito modificato" (figura sottostante al centro). Noi intendiamo studiare le variazioni delle tensioni e correnti

**Corrente di corto circuito :** Se  $r_{eq} = 0$ , il modello di NORTON non esiste poiché  $G_1^c$  non ammette la rappresentazione  $i \leftarrow v$ . Se  $r_{eq} \neq 0$ , calcolare la corrente in corto  $i_0$  di  $G_1^c$ .

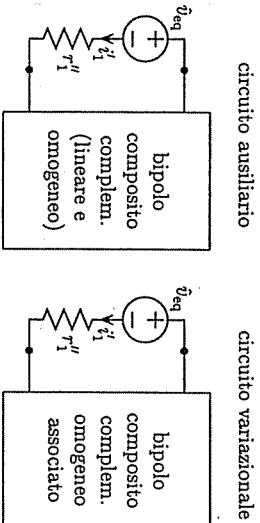
**Teorema di Norton :** La resistenza e la corrente impressa del modello di NORTON, qualora esista, del bipolo composto  $G_1^c$  coincidono con la resistenza  $r_{eq}$  del bipolo omogeneo associato  $G_1^c$ , e con la corrente di corto circuito  $\hat{i}_{eq} = i_0$  del bipolo  $G_1^c$ , rispettivamente.



di ramo nel circuito modificato rispetto al circuito originario in seguito alla variazione  $\Delta r_1$  della resistenza.



Il  $\mathcal{R}(\hat{r}_1')$  presente nel circuito originario viene scomposto nella serie di un  $\mathcal{R}(\hat{r}_1'')$  e di un  $\mathcal{R}(\Delta r_1)$  e otteniamo il circuito equivalente a quello originario (figura soprastante di destra). Notare che  $\Delta r_1$  può essere negativa. Appliciamo il teorema di sostituzione al circuito equivalente sostituendo il  $\mathcal{R}(\Delta r_1)$  con una  $\hat{v}(\hat{v}_{eq})$  dove  $\hat{v}_{eq} = \hat{v}_1 \Delta r_1$  dando origine al "circuito ausiliario" (figura sottostante di sinistra).



Il circuito ausiliario ha le seguenti prerogative : qualora  $\hat{v}_{eq} = \hat{v}_1 \Delta r_1$  tutte le tensioni e correnti interne al bipolo composto complementare coincidono con quelle del circuito originario, mentre se  $\hat{v}_{eq} = 0$  le tensioni e correnti coincidono con quelle del circuito modificato. Quindi, per il teorema di sovrapposizione, se sostituiamo il bipolo complementare col bipolo omogeneo associato, noi otteniamo un circuito, detto variazionale (figura soprastante al centro), le cui tensioni e correnti sono proprio le variazioni delle rispettive grandezze del circuito originario rispetto a quelle del circuito modificato.

**Commento :** Un teorema analogo può essere provato inserendo in parallelo una  $\hat{I}$  nel circuito equivalente.

**11.7 PROPRIETÀ ENERGETICHE**

Questa sezione prende in considerazione alcuna proprietà di natura energetica comuni sia ai componenti composti sia ai circuiti.

### 11.7.1 Applicazioni del Teorema della potenza effettiva

Applichiamo il teorema della potenza effettiva (vedere Sez. 5.7) a un circuito. Si possono facilmente verificare le proprietà:

**Proprietà** : sia dato un circuito costituito esclusivamente da  $K$  componenti dissipativi e inerti. Qualora il circuito ammetta una soluzione, si ha necessariamente che tutti i componenti non assorbono potenza. ■

**Prova** : la somma delle potenze effettive, ciascuna delle quali è nonnegativa per ipotesi, è necessariamente nulla per il teorema della potenza effettiva :

$$\left. \begin{array}{l} \text{componenti} \\ \text{dissipativi e inerti} \end{array} \right\} p_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Teorema della} \\ \text{potenza effettiva} \end{array} \right\} \sum_{k=1}^K p_k = 0$$

$$\implies p_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

**Corollario** : In un circuito costituito da componenti dinamici sia dissipativi e inerti sia attivi possono presentarsi due casi :

1. Le potenze effettive di tutti i componenti sono nulle. Questo caso è di interesse più accademico che pratico.
2. Almeno uno dei componenti attivi eroga potenza. Questo caso capita in tutti i circuiti dinamici.

### 11.7.2 Applicazioni del corollario di Tellegen alla potenza effettiva

Applichiamo il corollario della potenza effettiva (vedere Sez. 5.7) a un componente composto. Si possono facilmente verificare le proprietà :

1. un componente composto esclusivamente da  $K$  componenti dissipativi, includendo eventualmente anche quelli inerti, è a sua volta dissipativo o, in casi particolari, inerte. Se  $p$  indica la potenza effettiva del componente composto, si ha :

$$\left. \begin{array}{l} \text{componenti} \\ \text{dissipativi e inerti} \end{array} \right\} p_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Corollario della} \\ \text{potenza effettiva} \end{array} \right\} p = \sum_{k=1}^K p_k$$

$$\implies p \geq 0$$

2. un componente composto esclusivamente da componenti inerti è a sua volta inerte :

$$\left. \begin{array}{l} \text{componenti} \\ \text{inerti} \end{array} \right\} p_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Corollario della} \\ \text{potenza effettiva} \end{array} \right\} p = \sum_{k=1}^K p_k$$

$$\implies p = 0$$

3. un componente composto esclusivamente da componenti strettamente attivi ed, eventualmente, inerti è a sua volta strettamente attivo o, in casi particolari, inerte. La dimostrazione ripete quelle precedenti. ■

**Avvertenza** : Gli scambi energetici tra i componenti aggregati in un componente composto non possono essere interpretati dalla caratteristica equivalente del componente composto stesso (vedere Sez. 5.7). ■

### 11.7.3 Componenti fisici attivi

I precedenti teoremi implicano che in un circuito dinamico privo di componenti attivi tutte le tensioni e correnti siano nulle. Quindi un circuito utile deve contenere almeno un componente attivo. Questo ha un'implicazione fondamentale sulle più disparate apparecchiature elettroniche. Il fatto che un componente fisico sia attivo o, a maggior ragione, strettamente attivo implica che esso sia in grado, in opportune situazioni elettriche, di compiere verso l'esterno un lavoro illimitato (in un intervallo di tempo illimitato).

**Questio** : dove attinge un componente attivo l'energia necessaria per eseguire un lavoro elettrico illimitato ?

Questo quesito è suggerito dal fatto che il componente fisico ha dimensioni geometriche limitate e quindi non può contenere una quantità illimitata di energia. Neppure una bomba atomica è in grado di contenere una quantità illimitata di energia.

**Risposta** : si possono presentare due casi:

- Il lavoro erogabile è finito benché il modello (caratteristica) del componente non ne tenga conto. Per esempio, le batterie elettrochimiche del tipo *us&getta* per radiohobby non possono erogare potenza finita per un intervallo di tempo illimitato, cioè un lavoro infinito. Infatti esse sono completamente isolate dal resto del mondo fisico esterno, eccetto che per i terminali.

- Il lavoro erogato dal componente attivo è a sua volta fornito al componente stesso, senza che il modello elettrico del componente ne tenga esplicitamente conto. In questo caso il componente fisico non è isolato dal resto del mondo fisico.

Per esempio : un alimentatore di tensione entro un apparecchio radio di uso domestico ottiene, istante per istante, la potenza da erogare dalla rete di distribuzione domestica dell'energia elettrica.

Oppure le celle solari fotovoltaiche operanti su un satellite derivano il lavoro elettrico che erogano alla strumentazione installata sul satellite dall'energia contenuta nella radiazione solare.

- Si ha una situazione intermedia nel caso delle batterie ricaricabili (per esempio quelle usate sui telefoni cellulari). Queste batterie erogano potenza nel momento in cui il proprietario usa il telefonino su un treno (con lo scopo inconfessabile di disturbare gli altri passeggeri). Viceversa, quando a casa sottopone il telefonino alla ricarica le batterie assorbono potenza.

Quindi un qualsiasi apparecchio elettrico ovvero elettronico è progettato con uno dei seguenti criteri :

• **Apparecchi dotati di cordone di alimentazione** : Nella maggior parte degli apparecchi elettrici domestici o industriali, i componenti attivi che forniscono lavoro elettrico ai circuiti interni all'apparecchio dipendono strettamente dalla rete di distribuzione elettrica. Perciò in caso di guasto nella rete elettrica, l'apparecchio cessa di eseguire la funzione per cui è stato costruito. Quando "salta" l'impianto elettrico domestico, il lettore non può lavarsi le lenzuola, ammirare alla televisione l'abbronzatura del presidente del partito di fiducia, strarsi la camicia, ....

• **Apparecchi dotati di batteria** : Questi apparecchi possono essere usati agevolmente senza avere a disposizione una presa delle rete elettrica, dal momento che i componenti attivi interni all'apparecchio sono proprio le batterie, ricaricabili o non-ricaricabili. Essi sono immuni ai guasti della rete elettrica, ma sono soggetti al fatto che non sono in grado di operare per periodi di tempo illimitati. Esse devono essere periodicamente sostituite o ricaricate.

**Commento** : Al contrario, un componente dissipativo assorbe lavoro elettrico infinito in un intervallo di tempo infinito. Questo è possibile anche se le dimensioni del componente sono finite in quanto l'energia è a sua volta ceduta all'esterno, in generale, sotto forma di calore.

**Commento** : un componente fisico inerte non implica in genere uno scambio di energia, sotto altre forme non-elettriche, con l'esterno. Comunque i componenti fisici non sono in genere "perfettamente inerti".

**e-mail per l'autore** : Ti ringrazio commosso per avermi ricordato nel tuo testo di circuiti. Ma, toglimi una curiosità : come mai tu che sei "esageratamente teorico", hai parlato proprio di me, che non sono mai stato oggetto di alcuna teoria ?

Mi viene il dubbio che tu ti sia ricordato di me solamente l'altra sera quando una delle mie spine si era allentata, mentre tu stavi terminando le correzioni del Cap. 10. Dalle imprecazioni con cui mi hai investito, io credo che ti sia andato in fumo il lavoro alla tastiera di un'ora o più.

Comunque voglio confidarti il mio sogno proibito : che qualcuno scriva un teorema dal titolo "TEOREMA DEL CORDONE D'ALIMENTAZIONE" e che il teorema sia di quelli molto temuti dagli studenti. Così potrei uscire dalla mia cronica depressione dovuta alla scarsa considerazione di cui godo nell'ambiente accademico.

il cordone d'alimentazione del tuo pc

## 11.8 APPENDICE SUI SISTEMI ALGEBRICI

### 11.8.1 Richiami sui sistemi di equazioni algebriche

**matrice singolare** : il determinante della matrice del sistema è nullo. In questo caso i termini noti (grandezze impresse) giocano un ruolo fondamentale. Esse possono essere tali che il sistema non ha alcuna soluzione, nel caso più generale, (sistema incompatibile) ovvero tali che il sistema ha infinite soluzioni (sistema indeterminato). Questi casi saranno discussi nella prossima sezione.

Richiamiamo alcune nozioni sui sistemi di equazioni algebriche  $Ax = b$ , dove  $A$  è una matrice  $n \times n$ ,  $x$  è il vettore delle  $n$  incognite e  $b$  è il vettore degli  $n$  termini noti. Nel risolvere il suddetto sistema si troviamo di fronte a tre casi :

- $\text{Rango}[A] = n$  : il sistema ha una e una sola soluzione indipendentemente dal valore del vettore  $b$ . La soluzione è data da  $x = A^{-1} b$ .
- $\text{Rango}[A] = \text{Rango}[A \ b] < n$  : il sistema ha un numero infinito di soluzioni ; il sistema di equazioni è compatibile ma la soluzione è indeterminata. Questo caso corrisponde a dire che una o più delle  $n$  equazioni scalari è una combinazione lineare della rimanenti. Quindi è come se ci fosse un numero di equazioni inferiore al numero delle incognite.
- $\text{Rango}[A] < \text{Rango}[A \ b]$  : il sistema non ha alcuna soluzione, cioè risulta incompatibile.

WWWWW VEDERE TESTO DI Rinaldi-Picardi per quest'appendice  
 WWWWWW COMPLETARE L'APPENDICE CON ESEMPI NUMERICI  
 WWWWWW FARE APPLICAZIONI DEI TEOREMI DI NON-AMPILIFICAZIONE

Provare a sintetizzare la lezione extra fatta su richiesta agli studenti nel marzo 1999: in particolare fare esempi che si riferiscono allo spazio euclideo (rette e piani) Fare vedere come la soluzione di un sistema sottodeterminato è uno spazio lineare o affine in analogia alle equazioni differenziali



## 12 METODI di ANALISI SEMPLIFICATI dei CIRCUITI ADINAMICI TEMPO-INVARIANTI e LINEARI

FIGURA EMBLEMMA un circuito completo con segnate tutte le tensioni di nodo

Questo capitolo presenta i metodi di analisi semplificati dei circuiti costituiti esclusivamente da componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari: ciascun metodo di analisi distingue per la scelta delle grandezze incognite e conduce alla costruzione di un sistema di equazioni algebriche lineari e nonomogenee, e con coefficienti indipendenti dal tempo.

**Sez. 12.1 : Semplificazione dell'analisi :** Cominciando col metodo totale di analisi, già incontrato nella Sez. 9.1, vengono discussi i criteri seguiti per la formulazione di metodi generali di analisi dei circuiti, che hanno consentito la formulazione dei metodi di analisi semplificati.

**Sez. 12.2 : Metodo nodale puro :** Il metodo nodale puro può essere formulato solo se tutti i componenti sono controllabili in tensione e sceglie come incognite le tensioni di nodo. Inoltre, qualora siano presenti esclusivamente sili e resistori, la matrice e il vettore del sistema lineare assumono una forma molto semplice.

**Sez. 12.3 : Metodo nodale modificato :** Il metodo nodale puro è esteso ai componenti non-controllabili in tensione, scegliendo le correnti di questi componenti come incognite ausiliarie. Il metodo viene presentato sia da un punto di vista teorico sia da un punto di vista cartakpenna.

**Sez. 12.4 : Metodi puri delle maglie e degli anelli :** I metodi puri delle maglie e degli anelli possono essere formulati solo se tutti i componenti sono controllabili in corrente e scelgono come incognite le correnti cicliche. Inoltre, qualora il grafo sia planare e siano presenti esclusivamente sili e resistori, la matrice e il vettore del sistema lineare assumono una forma molto semplice.

**Sez. 12.5 : Metodo delle maglie modificato :** Il metodo delle maglie puro è esteso ai componenti noncontrollabili in corrente, scegliendo le tensioni di questi componenti come incognite ausiliarie. Il metodo viene presentato sia da un punto di vista teorico sia da un punto di vista cartakpenna.

**Sez. 12.6 : Consigli pratici per l'analisi :** I diversi metodi presentati nelle sezioni precedenti sono confrontati. Vengono richiamati alcuni accorgimenti utili nella soluzione con cartakpenna e, in alcuni casi, anche per la soluzione mediante un calcolatore, del sistema lineare di equazioni, qualsiasi sia il metodo di analisi che lo ha generato.

### 12.1 SEMPLIFICAZIONE DELL'ANALISI

Prima di passare in rassegna le analisi semplificate dei circuiti, presentiamo la filosofia generale seguendo la quale si è giunti ai più popolari di questi metodi. Questa sezione non è strettamente necessaria per comprendere le sezioni che seguono, ma può risultare di interesse per il lettore che desidera inquadrare i diversi metodi di analisi semplificati in un contesto più generale.

#### 12.1.1 Analisi di un circuito

L'analisi di un qualsiasi circuito costituito da componenti dinamici tempo-invarianti e lineari (omogenei o nonomogenei e impressivi o nonimpressivi) consiste nel:

- Scegliere le grandezze del circuito che costituiscono le incognite del problema.
- Costruire un sistema di equazioni (lineari) a partire dalle due leggi di KIRCHHOFF e dalle relazioni costitutive, facendo attenzione a che il numero di equazioni (indipendenti) del sistema coincida col numero di incognite.
- Risolvere il suddetto sistema con cartakpenna (per circuiti semplici) o mediante un calcolatore (per circuiti più complessi).

**Commento :** Lo stesso circuito può essere descritto da diversi sistemi lineari: ciascun metodo si differenzia per la scelta delle grandezze incognite, dalle formulazioni delle due Leggi di KIRCHHOFF e delle rappresentazioni dei componenti. ■

#### 12.1.2 Dal metodo totale ai metodi semplificati

Richiamiamo qui di seguito le peculiarità del metodo totale, introdotto nella Sez. 9.1 :

- il metodo è applicabile a qualsiasi circuito con qualsiasi componente.
- il vettore delle incognite è  $[(v^{nod})^T \ v^T \ i^T]^T$ .
- il sistema lineare è costituito da  $2m + n - 1$  equazioni in altrettante incognite.
- la matrice del sistema è sparsa.

**Altri metodi totali di analisi ? :** Altri metodi di analisi, alternativi a quello descritto nella Sez. 9.1, possono essere congetturati: anch'essi meriterebbero il nome di metodi totali, dal momento che introducono tutte le tensioni e correnti di ramo tra le incognite. Per esempio, la matrice incidenza potrebbe essere sostituita da una matrice di una diversa base di tagli: in questo caso invece delle tensioni di nodo  $v^{nod}$  verrebbero usate come incognite ausiliarie altre tensioni (vedere le tensioni di taglio nel Cap. 2). Oppure si potrebbe scegliere una matrice di una base di maglie  $B$  per formulare entrambe le leggi di KIRCHHOFF. In questo caso le incognite ausiliarie sarebbero le correnti cicliche (vedere Cap. 2). In pratica questi metodi totali alternativi non vengono usati dal momento che il calcolo delle rispettive matrici di base sono più complicati che quello della matrice di incidenza. ■

**Commento :** La sparsità del sistema lineare peculiare del metodo totale suggerisce che

alcune equazioni e incognite possono venire soppresse con operazioni algebriche molto semplici, nel medesimo momento in cui il sistema viene scritto. Infatti le suddette operazioni algebriche coinvolgono la combinazione lineare di equazioni con molti coefficienti nulli. Per esempio, la tensione ai capi di un resistore può essere eliminata dalle incognite e sostituita dalla corrente moltiplicata per la resistenza. Come conseguenza, l'ordine del sistema lineare può essere ridotto facilmente.

**Questo** : Si può scrivere direttamente un sistema lineare ridotto senza ricorrere al sistema lineare proprio del metodo totale ?

**Risposta** : la risposta, positiva, è nei metodi semplificati discussi in questo capitolo. ■

**Nota storica** : Fin dai primi tempi dello studio dei circuiti, le analisi semplificate sono state molto popolari, dal momento che i calcoli venivano eseguiti con carta&pena e quindi la riduzione dell'ordine del sistema lineare era una necessità. Il metodo totale è stato introdotto molto più tardi quando i moderni calcolatori erano già diffusi, benché in questi appunti è stato introdotto per primo per la sua semplicità concettuale. ■

### 12.1.3 Primo tentativo di riduzione del sistema lineare

Il metodo totale può essere semplificato se noi togliamo dalle incognite le tensioni di nodo  $v^{nod}$  lasciando le tensioni di ramo  $v$  e correnti di ramo  $i$ . Rispetto al metodo totale originale, questo corrisponde a sostituire alle  $m$  equazioni scalari contenute in  $v = A^T v^{nod}$  le  $m - n + 1$  equazioni scalari contenute in  $B v = 0_{m-n+1}$ , che annullano le somme delle tensioni di ramo  $v$  in una base di maglie (vedere Cap. 2).

La costruzione del sistema lineare segue i passi :

1. Considerare i vettori delle tensioni  $v$  e correnti  $i$  di ramo come incognite.
2. Scegliere una base di maglie e costruire la corrispondente matrice  $B$ .
3. Scegliere una base di tagli nodali e la corrispondente matrice incidenza  $A$ .
4. Annullare la somma delle tensioni lungo tutte le maglie della base :  $B v = 0_{m-n+1}$ .
5. Annullare la divergenza della corrente in tutti i nodi della base :  $A i = 0_{n-1}$ .
6. Aggiungere la rappresentazione unificata dei componenti (vedere Par. 9.1.1) :  $H^{vv} + H^{ii} = \hat{u}$ .

Si ottiene il seguente sistema lineare di  $2m$  equazioni in  $2m$  incognite :

$$\begin{bmatrix} B & 0_{m-n+1,m} \\ 0_{n-1,m} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{m-n+1} \\ 0_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H^{vv} \\ H^{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \hat{u}$$

**Commento** : In questo tentativo il numero di incognite rimane ancora elevato. Inoltre sia la matrice della maglie  $B$ , la cui costruzione non è in genere immediata, sia quella dei tagli  $A$  sono necessarie. Perciò questo metodo non viene usato. ■

### 12.1.4 Secondo tentativo di riduzione del sistema lineare

Un secondo metodo per ridurre le dimensioni del sistema lineare può essere congegnato :

1. Scegliere una qualsiasi rappresentazione esplicita per ogni componente e riunirle in un'unica rappresentazione unificata (esplicita) (vedere Par. 9.1.2) :

$$H^{vv} + H^{ii} = \hat{u} \implies \begin{bmatrix} v^b \\ i^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{vv} & H^{vi} \\ H^{iv} & H^{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^a \\ i^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v^b \\ i^b \end{bmatrix}$$

2. Costruire e suddividere le matrici di base  $A$  e  $B$  in accordo alle partizioni delle correnti e tensioni :

$$A = \begin{bmatrix} \bar{A}^a & \bar{A}^b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \bar{B}^a & \bar{B}^b \end{bmatrix}$$

3. Annullare la divergenza della corrente in  $n - 1$  nodi (indipendenti) e sostituire le correnti dipendenti  $i^b$  :

$$\bar{A}^a i^a + \bar{A}^b i^b = 0_{n-1} \implies \bar{A}^a i^a + \bar{A}^b [H^{iv} v^a + H^{ii} i^a + i^b] = 0_{n-1}$$

4. Annullare la somma delle tensioni in  $m - n + 1$  maglie (anelli) indipendenti e sostituire le tensioni dipendenti  $v^b$  :

$$\bar{B}^a v^a + \bar{B}^b v^b = 0_{m-n+1} \implies \bar{B}^a v^a + \bar{B}^b [H^{vv} v^a + H^{vi} i^a + i^b] = 0_{m-n+1}$$

5. Il sistema lineare di  $m$  equazioni in  $m$  incognite assume la forma :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^b & H^{iv} & \bar{A}^a + \bar{A}^b & H^{ii} \\ \bar{B}^a + \bar{B}^b & H^{vv} & \bar{B}^b & H^{vi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^a \\ i^a \\ v^b \\ i^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{A}^b & i^b \\ -\bar{B}^b & i^b \end{bmatrix}$$

**Commento** : In questo secondo tentativo il numero di incognite viene abbastanza ridotto. Comunque occorre sempre calcolare sia la matrice  $B$  delle maglie sia la matrice  $A$  dei tagli. In conclusione, anche questo metodo non viene usato. I metodi classici discussi nelle seguenti sezioni si ispirano in parte a questo secondo tentativo. ■

## 12.2 METODO NODALE PURO

Il *metodo nodale puro* introduce come incognite (esclusive) le tensioni di nodo, ma può essere applicato soltanto qualora tutti i componenti siano controllabili in tensione, cioè in presenza di sif, resistori, sif  $V$  e giratori. Nel caso che siano presenti solamente sif e resistori, la matrice del sistema lineare assume una forma piuttosto semplice che può essere scritta facendo ricorso ad alcune regole facili da ricordare.

12.2.1 Filosofia del metodo

Dal momento che tutti i componenti sono controllati in tensione, possiamo scegliere la rappresentazione unificata controllata in tensione  $i = G v + \hat{i}$  di tutti i componenti (vedere Par. 9.1.1), dove  $i$  e  $v$  sono le correnti e le tensioni di ramo, definite con la convenzione normale per ciascun ramo, avendo orientato le tensioni come i rami del grafo (vedere Cap. 2) e le correnti con direzione opposta. Le incognite sono costituite dalle  $k = n - 1$  tensioni di nodo ciascuna orientata uscente dal nodo di riferimento. Si ottengono  $k$  equazioni, una per ogni nodo indipendente. Con l'ausilio delle due leggi di KIRCHHOFF nelle forme  $A i = 0$  e  $v = A^T v^{nod}$  si viene ad avere :

$$\left. \begin{aligned} A i &= 0 \\ i &= G v + \hat{i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A G v + A \hat{i} = 0 \quad \left. \begin{aligned} G^{nod} \\ A G A^T \end{aligned} \right\} v^{nod} = \underbrace{-A^{-1} \hat{i}}_{\hat{i}^{nod}}$$

$$v = A^T v^{nod}$$

Nel paragrafo seguente vedremo come calcolare direttamente la matrice  $(n - 1) \times (n - 1)$   $G^{nod}$  e il vettore  $\hat{i}^{nod}$  del sistema lineare nel caso in cui siano presenti solo sili e resistori.

12.2.2 Costruzione diretta del sistema lineare

Consideriamo un circuito di  $n$  nodi, numerati da 0 (nodo di riferimento) a  $k = n - 1$  e  $m$  rami. Ogni ramo sia costituito da un resistore di conduttanza  $g_\xi$  e/o da una sili (in parallelo) di corrente impressa  $i_\xi$ . Una regola per la scrittura immediata del sistema  $G^{nod} v^{nod} = \hat{i}^{nod}$  introdotto nel Par. 10.2.1 può essere formulata :

$$G^{nod} v^{nod} = \hat{i}^{nod} \Rightarrow \begin{bmatrix} g_{11}^{nod} & g_{12}^{nod} & \dots & g_{1,k}^{nod} \\ g_{21}^{nod} & g_{22}^{nod} & \dots & g_{2,k}^{nod} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k,1}^{nod} & g_{k,2}^{nod} & \dots & g_{k,k}^{nod} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{nod} \\ v_2^{nod} \\ \vdots \\ v_k^{nod} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i}_1^{nod} \\ \hat{i}_2^{nod} \\ \vdots \\ \hat{i}_k^{nod} \end{bmatrix}$$

Matrice del sistema : La matrice  $G^{nod}$  del sistema risulta uguale a :

$$G^{nod} = A G A^T = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k]^T \text{Diag}[g_1, g_2, \dots, g_m] [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k]$$

da cui si deduce che :  $g_{\mu\nu}^{nod} = \sum_{\xi=1}^m a_{\mu\xi} g_\xi a_{\nu\xi}$   $\mu = 1, 2, \dots, k$  ;  $\nu = 1, 2, \dots, k$  con  $\nu \neq \mu$

Notare che la presenza esclusiva di bipoli fa sì che  $G$  sia diagonale.

Si può osservare che la conduttanza  $g_\xi$  è presente nella sommatoria che definisce l'elemento  $g_{\mu\nu}^{nod}$  (per  $\mu \neq \nu$ ) se e solo se il prodotto  $a_{\mu\xi} a_{\nu\xi}$  è uguale a  $\pm 1$  cioè se e solo se lo  $\xi$ -esimo ramo collega il  $\mu$ -esimo e  $\nu$ -esimo nodo.

Si può osservare che la conduttanza  $g_\xi$  è presente nella sommatoria che definisce l'elemento  $g_{\mu\mu}^{nod}$  (sulla diagonale) se e solo se  $a_{\mu\xi} \neq 0$  cioè se e solo se lo  $\xi$ -esimo ramo è incidente al  $\mu$ -esimo nodo .

Regola pratica per la matrice : Da quanto detto si ricavano le ben note regole :

- Ciascun elemento  $g_{\mu\mu}^{nod}$  (sulla diagonale) principale è uguale alla somma delle conduttanze dei resistori incidenti il  $\mu$ -esimo nodo .

L'elemento  $g_{\mu\nu}^{nod}$  con  $\nu \neq \mu$  è uguale alla conduttanza, cambiata di segno, del resistore connesso tra il  $\mu$ -esimo e il  $\nu$ -esimo nodo. ■

Vettore dei termini noti : Il vettore dei termini noti  $\hat{i}^{nod}$  risulta :

$$\hat{i}^{nod} = -A \hat{i} = -[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k]^T [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_m]^T$$

da cui si deduce che :  $\hat{i}_\mu^{nod} = -a_\mu^T \hat{i} = -\sum_{\xi=1}^m a_{\mu\xi} i_\xi$   $\mu = 1, 2, \dots, k$

Regola pratica per i termini noti : Da cui si ricava le ben note regole :

■ Il termine noto  $\hat{i}_\mu^{nod}$  è uguale alla somma algebrica delle correnti impresse delle sili incidenti il  $\mu$ -esimo nodo.

Ora siamo in grado di verificare alcune proprietà della matrice del sistema :

Proprietà : La matrice del sistema è simmetrica

$$g_{\mu\nu}^{nod} = g_{\nu\mu}^{nod} \quad \mu = 1, 2, \dots, k ; \nu = 1, 2, \dots, k ; \nu \neq \mu$$

Proprietà : Nel caso molto frequente che tutte le resistenze siano positive (cioè  $g_\xi > 0$ ,  $\xi = 1, 2, \dots, m$ ) ciascun termine della diagonale principale è maggiore o uguale alla somma dei valori assoluti dei termini sulla stessa riga/colonna

$$g_{\mu\mu}^{nod} \geq \sum_{\nu=1, \nu \neq \mu}^k |g_{\mu\nu}^{nod}| \quad \mu = 1, 2, \dots, k$$

e ogni termine fuori della diagonale principale è nonpositivo

$$g_{\mu\nu}^{nod} \leq 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, k ; \nu = 1, 2, \dots, k ; \nu \neq \mu$$

Le matrici che godono di questa proprietà sono dette diagonalmente dominanti. ■ L'espressione della matrice ci consente di arrivare al teorema :

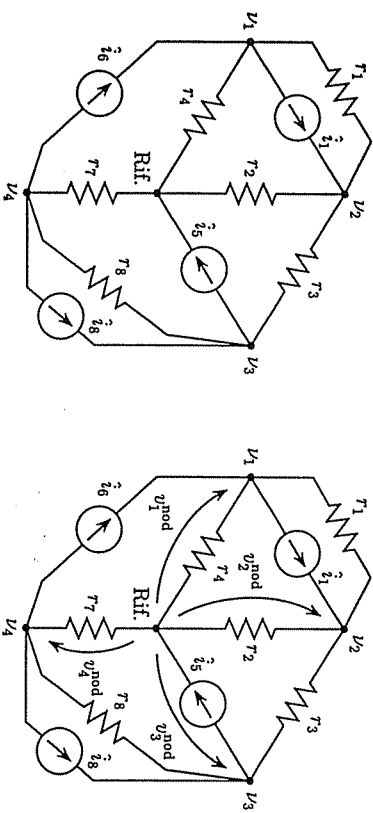
Teorema : Un circuito composto esclusivamente da resistori con resistenze positive, sili e senza tagli-sili ha sempre una e una sola soluzione, dal momento che esso non può essere patologico. ■

Prova : Il suddetto circuito ammette l'analisi nodale pura e la matrice  $G^{nod}$  soddisfa alle suddette proprietà di dominanza. La dominanza della matrice implica che la matrice sia nonsingolare. La nonsingolarità della matrice verrebbe meno in presenza di tagli-sili, che comporterebbero la nullità degli elementi delle corrispondenti righe della matrice (nel caso di tagli nodali) ovvero di opportune combinazioni di righe della matrice  $G^{nod}$  (nel caso di tagli nonnodali) . ■

12.2.3 Esempio

Il circuito nella figura sottostante di sinistra è costituito da sei  $\mathcal{R}$  e quattro  $\hat{\mathcal{I}}$ . Quindi possiamo applicare il metodo nodale puro. In tutto vi sono otto rami (considerando le due connessioni parallele di  $\hat{\mathcal{I}}$  e  $\mathcal{R}$  come due soli rami) e cinque nodi : scegliendo il nodo al centro della figura come nodo di riferimento, numeriamo gli altri quattro in verso orario

partendo da quello di sinistra come indicato nelle figura sottostante di destra, in cui sono riportate le tensioni di nodo.



In accordo al Par. 12.2.2, scriviamo direttamente il sistema di quattro equazioni nelle quattro tensioni di nodo :

$$\begin{bmatrix} 1/r_4 + 1/r_1 & -1/r_1 & 0 & 0 \\ -1/r_1 & 1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3 & -1/r_3 & 0 \\ 0 & -1/r_3 & 1/r_3 + 1/r_8 & -1/r_8 \\ 0 & 0 & -1/r_8 & 1/r_7 + 1/r_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{\text{nod}} \\ v_2^{\text{nod}} \\ v_3^{\text{nod}} \\ v_4^{\text{nod}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_6 - i_1 \\ i_1 \\ -i_5 + i_8 \\ -i_6 - i_8 \end{bmatrix}$$

### 12.2.4 Interpretazioni circuitali

Il presente paragrafo non è indispensabile.

**Prima interpretazione :** Consideriamo ciascuno dei resistori non connessi al nodo di riferimento come un doppio bipolo tripolare aggiungendo come terzo terminale il nodo di riferimento stesso. Il modello controllato in tensione di questo doppio bipolo è costituito da due resistori dello stesso valore alle due porte e da due sIPV in parallelo ai resistori (vedere i modelli cardinali dei doppi bipoli nel Cap. 7). Otteniamo  $k$  circuiti elementari, ciascuno con due soli nodi, formato dal parallelo di diversi resistori. I circuiti elementari sono tra loro accoppiati da sorgenti di corrente pilotate dalle tensioni di nodo dei rimanenti circuiti elementari. ■

FIG. CIRCUITI ELEMENTARI CON DUE SOLI NODI

**Seconda interpretazione :** Scomponiamo il circuito in due  $k$ -porte complementari, il primo omogeneo e nonimpressivo e il secondo nonomogeneo e impressivo :

1. Il  $k$ -porta nonomogeneo e impressivo comprende esclusivamente le sIP e, per ciascun nodo in cui non vi è alcuna sIP incidente, un c.a. latente. Le  $k$  correnti  $i$  di questo  $k$ -porta coincidono con il vettore dei termini noti del sistema. In conclusione il  $k$ -porta impressivo e nonomogeneo è rappresentato dalla  $i = i^{\text{nod}}$ .

2. Il  $k$ -porta nonimpressivo e omogeneo comprende tutti i restanti componenti omogenei. La matrice  $G^{\text{nod}}$  costituisce proprio la matrice conduttanza di questo  $k$ -porta  $i = G^{\text{nod}} v^{\text{nod}}$ .

3. Il vettore delle  $k$  tensioni di nodo  $v^{\text{nod}}$  coincide col vettore delle tensioni alle porte dei due  $k$ -porte complementari. Quindi la struttura delle loro  $k$  porte è a cespuglio.

Entrambi i  $k$ -porte ammettono la rappresentazione controllata in tensione : Ugagliando i loro vettori delle correnti, otteniamo lo stesso sistema lineare del metodo nodale puro. ■

## 12.3 METODO NODALE MODIFICATO

Il metodo nodale puro può essere modificato per poter includere anche i componenti noncontrollabili in tensione. Esso è basato sull'aggiunta delle correnti dei rami noncontrollabili in tensione come incognite ausiliarie. In genere questa modifica distrugge la forma molto semplice della matrice e del vettore del sistema. Il metodo viene presentato sia da un punto di vista teorico sia da un punto di vista cartaceo.

### 12.3.1 Filosofia del metodo

Il metodo nodale modificato non richiede che i componenti siano controllabili in tensione e quindi è valido per ogni circuito dinamico e lineare con qualsiasi struttura e qualsiasi componenti :

1. Costruire il grafo del circuito, dove  $n$  e  $m$  denotano il numero di nodi e rami, rispettivamente. Scegliere un nodo qualsiasi del grafo come nodo di riferimento e costruire la matrice di incidenza  $A$ .

2. Scrivere la rappresentazione esplicita unificata (vedere Par. 9.1.2) col minimo numero  $m^i$  di correnti di ramo tra le grandezze indipendenti :

$$\begin{bmatrix} v^b \\ i^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{vv} & H^{vi} \\ H^{iv} & H^{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^a \\ i^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}^b \\ \hat{i}^b \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} v^b \in \mathcal{R}^{m^i} & , & v^a \in \mathcal{R}^{n-m^i} \\ i^b \in \mathcal{R}^{m-m^i} & , & i^a \in \mathcal{R}^{m^i} \end{cases}$$

3. Costruire e suddividere la matrice  $A$  in accordo sia alla partizione delle correnti e sia a quella delle tensioni :

$$A = [\bar{A}^a \bar{A}^b] \quad \text{in accordo a } i^a \text{ e } i^b \quad \quad A = [\bar{A}^a \bar{A}^b] \quad \text{in accordo a } v^a \text{ e } v^b$$

4. Applicare la Legge di KIRCHHOFF delle correnti tramite la matrice incidenza  $A$ , annullando la divergenza della corrente nei  $n-1$  nodi indipendenti e sostituendo il sottovettore delle  $m-m^i$  correnti dipendenti  $i^b$

$$A i = \bar{A}^a i^a + \bar{A}^b i^b = 0_{n-1} \implies \bar{A}^a i^a + \bar{A}^b [H^{iv} v^a + H^{ii} i^a + \hat{i}^b] = 0_{n-1}$$

5. Aggiungere le  $m'$  relazioni costitutive che coinvolgono le  $m'$  tensioni dipendenti  $v^b$ 

$$v^b = H^{vv} v^a + H^{vi} i^a + \hat{v}^b$$
6. Applicare la legge di KIRCHHOFF delle tensioni, esprimendo le tensioni di ramo tramite quelle di nodo :
 
$$\begin{bmatrix} v^a \\ v^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\tilde{A}^a]^T v^{nod} \\ [\tilde{A}^b]^T v^{nod} \end{bmatrix}$$

7. Sostituendo  $v^a$  e  $v^b$  nelle equazioni dei punti 4 e 5, si ottiene un'unico sistema di  $n + m' - 1$  equazioni nelle  $n + m' - 1$  incognite  $v^{nod}$  e  $i^a$  :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^b H^{vv} [\tilde{A}^a]^T & \tilde{A}^a + \tilde{A}^b H^{vi} \\ [\tilde{A}^b]^T - H^{vv} [\tilde{A}^a]^T & -H^{vi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{nod} \\ i^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{A}^b \hat{v}^b \\ \hat{v}^b \end{bmatrix}$$

**12.3.2 Procedimento cart&agrave;ppenna**

Quando il metodo viene eseguito con cart&agrave;ppenna per risolvere circuiti di modeste dimensioni, esso assume un aspetto meno astratto riassunto nel seguente prospetto :

1. Scegliere un nodo qualsiasi del grafo come nodo di riferimento, numerare i restanti nodi in ordine progressivo e scegliere come incognite le corrispondenti  $n - 1$  tensioni di nodo (*incognite principali*).
2. Individuare gli  $m'$  rami la cui corrente non è controllabile in tensione e aggiungere le rispettive correnti  $m'$  tra le incognite (*incognite ausiliarie*).
3. Annullare la divergenza delle correnti negli  $n - 1$  nodi indipendenti esprimendo le correnti controllabili in funzione delle tensioni di nodo. Si ottengono  $n - 1$  equazioni che presentano come incognite le  $n - 1$  tensioni di nodo, le  $m'$  correnti noncontrollabili ed, eventualmente, le grandezze pilotanti le sorgenti pilotate.
4. Aggiungere  $m'$  relazioni costitutive, una per ognuno dei  $m'$  rami la cui corrente (noncontrollabile) è compresa tra le incognite ausiliarie. Ogniuna delle suddette equazioni comprende i parametri omogenei e/o impressivi del ramo in oggetto e coinvolgerà alcune tensioni di nodo.
5. Se nelle equazioni restano coinvolte alcune grandezze pilotanti non facenti parte delle incognite (tensioni di nodo e correnti noncontrollabili), occorre sostituirlle con un'espressione in cui compaiano solamente le incognite principali e/o ausiliarie.
6. Si ottiene un sistema lineare di  $n + m' - 1$  equazioni in altrettante incognite.

WWWWWW??? DIRE qualcosa sulla patologia del circuito e del sistema algebrico INSERIRE alcuni esempi presi dalle fotocopie delle esercitazioni. ???WWWWWW

**12.4 METODI PURI DELLE MAGLIE E DEGLI ANELLI**

I *metodi puri delle maglie e degli anelli*, che introducono come incognite esclusivamente le correnti cicliche, possono essere applicati soltanto qualora tutti i componenti siano controllabili in corrente, cioè in presenza di sVi, resistori, sVpI e generatori. Si parla di metodo puro degli anelli piuttosto che di metodo puro delle maglie nel caso in cui vengano scelti solo anelli nella base di maglie (quindi limitatamente a grafi planari). Inoltre, qualora siano presenti solamente sVi e resistori, la matrice e il vettore dei termini noti del sistema assumono una forma piuttosto semplice che può essere scritta facendo ricorso ad alcune regole facili da ricordare.

**12.4.1 Filosofia del metodo**

In questo caso può essere scelta la rappresentazione unificata controllata in corrente  $v = R i + \hat{v}$  di tutti i componenti (vedere Par. 9.1.1), dove  $v$  e  $i$  sono le tensioni e correnti di ramo, definite con la convenzione normale per ciascun ramo, avendo orientato le tensioni come i rami del grafo (vedere Cap. 2) e le correnti con direzione opposta. Per ciascuna delle  $k = m - n + 1$  maglie/anelli indipendenti è introdotta la corrispondente corrente ciclica, orientata come la maglia, che svolge il ruolo di incognita e un'equazione detta dalla legge di KIRCHHOFF delle tensioni. Con l'ausilio delle due leggi di KIRCHHOFF nelle forme  $B v = 0$  e  $i = B^T i^{cic}$  si viene ad avere :

$$\begin{aligned} B v = 0 & \iff B R i + B \hat{v} = 0 \\ v = R i + \hat{v} & \iff \underbrace{B R B^T}_{R^{cic}} i^{cic} = \underbrace{-B \hat{v}}_{\hat{v}^{cic}} \end{aligned}$$

Nei paragrafi seguenti esamineremo la formulazione della matrice  $R^{cic}$  e del vettore  $\hat{v}^{cic}$  del sistema nel caso in cui nel circuito compaiano solo sVi e resistori.

**12.4.2 Metodo puro delle maglie : costruzione diretta del sistema**

Consideriamo un circuito di  $n$  nodi e  $m$  rami. Ogni ramo sia costituito da un resistore di resistenza  $r_k$  e/o da una sVi (in serie) di tensione impressa  $\hat{v}_k$ . Il sistema lineare è costituito da  $k = m - n + 1$  equazioni con  $k$  correnti cicliche come incognite. Una regola per la scrittura immediata del sistema  $R^{cic} i^{cic} = \hat{v}^{cic}$  introdotto nel Par. 10.4.1 può essere formulata :

$$R^{cic} i^{cic} = \hat{v}^{cic} \iff \begin{bmatrix} r_{11}^{cic} & r_{12}^{cic} & \dots & r_{1,k}^{cic} \\ r_{21}^{cic} & r_{22}^{cic} & \dots & r_{2,k}^{cic} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k,1}^{cic} & r_{k,2}^{cic} & \dots & r_{k,k}^{cic} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{cic} \\ i_2^{cic} \\ \vdots \\ i_k^{cic} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1^{cic} \\ \hat{v}_2^{cic} \\ \vdots \\ \hat{v}_k^{cic} \end{bmatrix}$$

*Matrice del sistema* : La matrice  $R^{cic}$  del sistema risulta uguale a :

$$R^{cic} = B R B^T = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_k]^T \text{Diag}[r_1, r_2, \dots, r_m] [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_k]$$

da cui si deduce che :  $r_{\mu\nu}^{cic} = \sum_{k=1}^m b_{\mu k} r_k b_{\nu k}$   $\mu = 1, 2, \dots, k$  ;  $\nu = 1, 2, \dots, k$  con  $\nu \neq \mu$

La presenza esclusiva di bipoli fa sì che  $R$  sia diagonale. La resistenza  $r_\xi$  è presente nella sommatoria che definisce l'elemento  $r_{\mu\nu}^{dc}$  (per  $\mu \neq \nu$ ) se e solo se il prodotto  $b_{\mu\xi} b_{\nu\xi}$  è uguale a  $\pm 1$  cioè se e solo se lo  $\xi$ -esimo ramo è comune alla  $\mu$ -esima e  $\nu$ -esima maglia. La resistenza  $r_\xi$  è presente nella sommatoria che definisce l'elemento  $r_{\mu\mu}^{dc}$  (sulla diagonale principale) se e solo se  $b_{\mu\xi} \neq 0$  cioè se e solo se lo  $\xi$ -esimo ramo fa parte della  $\mu$ -esima maglia.

**Regola pratica per la matrice:** Da quanto detto si ricavano le bennotte regole:

Ciascun elemento  $r_{\mu\nu}^{dc}$  (sulla diagonale principale) è uguale alla somma delle resistenze dei resistori facenti parte della  $\mu$ -esima maglia.

L'elemento  $r_{\mu\nu}^{dc}$  con  $\nu \neq \mu$  è uguale alla somma delle resistenze, con segno opportuno, dei resistori comuni alla  $\mu$ -esima e  $\nu$ -esima maglia.

Ciascun segno dipende dalle orientazioni delle maglie di cui il resistore fa parte.

**Vettore dei termini noti:** Il vettore dei termini noti  $\hat{v}^{dc}$  risulta:

$$\hat{v}^{dc} = -B \hat{v} = -[b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_k]^T [\hat{v}_1 \quad \hat{v}_2 \quad \dots \quad \hat{v}_m]^T$$

$$\text{da cui si deduce che: } \hat{v}_\mu^{dc} = -b_\mu^T \hat{v} = -\sum_{\xi=1}^m b_{\mu\xi} \hat{v}_\xi \quad \mu = 1, 2, \dots, k$$

**Regola pratica per i termini noti:** Da cui si ricava le ben note regole:

Il termine noto  $\hat{v}_\mu^{dc}$  è uguale alla somma algebrica delle tensioni impresse delle sVI lungo la  $\mu$ -esima maglia.

Ora siamo in grado di verificare alcune proprietà della matrice del sistema:

**Proprietà:** La matrice del sistema è simmetrica

$$r_{\mu\nu}^{dc} = r_{\nu\mu}^{dc} \quad \mu = 1, 2, \dots, k; \nu = 1, 2, \dots, k; \nu \neq \mu$$

**Proprietà:** Nel caso molto frequente che tutte le resistenze siano positive (cioè  $r_\xi > 0$ ,  $\xi = 1, 2, \dots, m$ ), ciascun termine della diagonale principale è maggiore o uguale alla somma dei valori assoluti dei termini sulla stessa riga/colonna

$$r_{\mu\mu}^{dc} \geq \sum_{\nu=1, \nu \neq \mu}^k |r_{\mu\nu}^{dc}| \quad \mu = 1, 2, \dots, k$$

L'espressione della matrice ci consente di arrivare al teorema:

**Teorema:** Un circuito composto esclusivamente da resistori con resistenze positive, sVI e senza maglie-sVI ha sempre una e una sola soluzione, dal momento che esso non può essere patologico.

**Prova:** Il suddetto circuito ammette l'analisi alla maglie pura e la matrice  $R^{dc}$  soddisfa alle suddette proprietà di dominanza. La dominanza della matrice implica che la matrice sia nonsingolare. La nonsingolarità della matrice verrebbe meno in presenza di maglie-sVI, che comporterebbero la nullità degli elementi delle corrispondenti righe della matrice (nel caso di maglie indipendenti) ovvero di opportune combinazioni di righe della matrice  $R^{dc}$  (nel caso di maglie dipendenti).

**12.4.3 Metodo puro degli anelli: costruzione diretta del sistema**

Se il grato del circuito è planare, le maglie indipendenti possono essere scelte coincidenti con gli anelli interni del grato (in principio, potrebbe essere scelto l'anello esterno al posto di uno di quelli interni) e conseguentemente si ha che ogni corrente di ramo dipende dalla differenza di due correnti cicliche o coincide, a parte il segno, con una singola corrente ciclica (per i rami appartenenti all'anello escluso dalla base) (vedere Cap. 2). In questo caso il metodo puro delle maglie assume il nome di *metodo puro degli anelli* e gode di qualche ulteriore proprietà rispetto a quello delle maglie. In particolare si hanno le seguenti ulteriori regole rispetto a quelle incontrate nel paragrafo precedente che rimangono ancora valide:

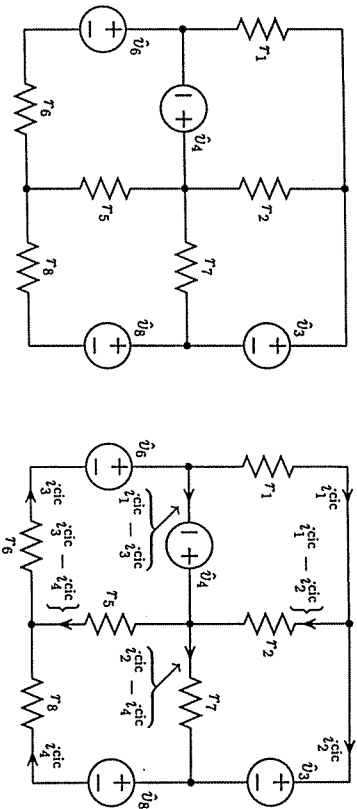
1. Assumiamo che tutti gli anelli presenti nella base siano orientati in verso orario eccetto quello esterno che (se presente nella base) deve essere orientato in verso antiorario. Orientiamo ciascuna corrente ciclica come l'anello corrispondente, le tensioni con la convenzione normale eccetto quelle impresse, orientate con la convenzione nonnormale.
2. Ciascuna coppia di anelli della base ha in comune un unico ramo o nessun ramo. In seguito all'orientamento orario degli anelli, le due correnti cicliche percorrono i rami comuni (in genere uno solo) ai due anelli con versi di percorrenza discordi.
3. Ciascun elemento  $r_{\mu\nu}^{dc}$  (dove  $\mu \neq \nu$ ) della matrice  $R^{dc}$  coincide con la somma delle resistenze cambiata di segno dei resistori comuni al  $\mu$ -esimo e  $\nu$ -esimo anello. Nel caso frequentissimo che le resistenze di tutti i resistori siano positive, il suddetto elemento risulta negativo o nullo:

$$r_{\mu\nu}^{dc} \leq 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, k; \nu = 1, 2, \dots, k; \nu \neq \mu$$

Il metodo puro degli anelli può essere visto come il duale del metodo nodale puro.

#### 12.4.4 Esempio

Il circuito nella figura sottostante di sinistra è costituito da sei  $\mathcal{R}$  e quattro  $\mathcal{V}$ . Quindi possiamo applicare il metodo degli anelli puro. In tutto vi sono otto rami e cinque anelli: scegliamo come base i quattro anelli interni, numerandoli nell'ordine indicato nella figura sottostante di destra, in cui sono riportate le correnti cicliche che percorrono ciascun degli otto rami.



In accordo al par. 12.4.3, scriviamo direttamente il sistema algebrico nelle quattro correnti cicliche :

$$\begin{bmatrix} r_1 + r_2 & -r_2 & 0 & 0 \\ -r_2 & r_2 + r_7 & 0 & -r_7 \\ 0 & 0 & r_5 + r_6 & -r_5 \\ 0 & -r_7 & r_5 + r_6 & -r_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{cic} \\ i_2^{cic} \\ i_3^{cic} \\ i_4^{cic} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_4 \\ -i_3 \\ -i_4 + i_6 \\ -i_6 \end{bmatrix}$$

12.4.5 Interpretazioni circuitali

Il presente paragrafo non è indispensabile.

**Prima interpretazione :** Consideriamo ciascuno dei resistori facenti parte di due anelli interni come un DBT sdoppiando entrambi i terminali (resistore a quattro terminali) : il modello cardinale controllato in corrente di questo DBT è costituito da due resistori dello stesso valore alle due porte e da due sVpI in serie (vedere i modelli cardinali dei doppi bipoli nel Cap. 7).

Otteniamo  $m - n + 1$  circuiti elementari, ciascuno con una sola maglia, formato dalla serie di diversi resistori. Essi sono tra loro accoppiati da sorgenti di tensione pilotate dalle correnti cicliche dei rimanenti circuiti elementari.

FIG. CIRCUITI ELEMENTARI CON UNA SOLA MAGLIA

**Seconda interpretazione :** Il metodo delle maglie (anelli) puro può essere interpretato come la scomposizione del circuito in due multiporle complementari : il primo contenente esclusivamente le sVi e il secondo contenente tutti i restanti componenti omogenei. A questo punto entrambi i multiporle vengono descritti dalla rappresentazione controllata in corrente e i due vettori delle tensioni (esplicitati a primo membro di entrambe le rappresentazioni) vengono uguaagliati.

12.5 METODO DELLE MAGLIE MODIFICATO

Il metodo delle maglie puro può essere modificato per poter includere anche i componenti noncontrollabili in corrente. Esso è basato sull'introduzione delle tensioni dei rami noncontrollabili in corrente come incognite ausiliarie. Questa modifica distrugge in genere la forma molto semplice della matrice e del vettore del sistema presente nel metodo puro degli anelli. Il metodo viene inizialmente presentato da un punto di vista teorico e successivamente da un punto di vista cartak&prema. Notare che non ha molto significato distinguere il metodo modificato degli anelli da quello delle maglie, dal momento che il primo perde comunque l'aspetto attraente proprio di quello puro visto nel Par. 10.4.3.

12.5.1 Filosofia del metodo

Il metodo delle maglie modificato non richiede che i componenti siano controllabili in corrente e quindi è valido per ogni circuito lineare con qualsiasi struttura e componenti :

1. Costruire il grafo del circuito, dove  $n$  e  $m$  denotano il numero di nodi e rami, rispettivamente. Scegliere una base di maglie e costruire la corrispondente matrice  $B$  di dimensioni  $(m - n + 1) \times m$ .
2. Scrivere la rappresentazione cardinale o noncardinale unificata (vedere Par. 9.1.2) col minimo  $m^v$  di tensioni di ramo tra le variabili indipendenti :

$$\begin{bmatrix} v^b \\ i^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{vw} & H^{vi} \\ H^{iv} & H^{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^a \\ i^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v^b \\ i^b \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} v^b \in \mathcal{R}^{m-m^v} & v^a \in \mathcal{R}^{m^v} \\ i^b \in \mathcal{R}^{m^v} & i^a \in \mathcal{R}^{m-m^v} \end{cases}$$

3. Costruire e suddividere la matrice  $B$  sia in accordo alla suddivisione delle tensioni sia in accordo a quella delle correnti :

$$B = [\tilde{B}^a \tilde{B}^b] \quad \text{in accordo a } v^a \text{ e } v^b \quad B = [\tilde{B}^a \tilde{B}^b] \quad \text{in accordo a } i^a \text{ e } i^b$$

4. Applicare la legge di Kirchoff delle tensioni tramite la matrice  $B$ , annullando la somma delle tensioni di ramo  $v$  lungo le  $m - n + 1$  maglie della base, e sostituire il vettore delle tensioni dipendenti  $v^b$  :

$$B v = \tilde{B}^a v^a + \tilde{B}^b v^b = 0_{m-n+1} \implies \tilde{B}^a v^a + \tilde{B}^b [H^{vw} v^a + H^{vi} i^a + i^b] = 0_{m-n+1}$$

5. Aggiungere le  $m^v$  relazioni costitutive che coinvolgono le correnti dipendenti costituenti il vettore  $i^b$  :

$$i^b = H^{iv} v^a + H^{ii} i^a + i^b$$

6. Applicare la Legge di Kirchoff delle correnti, esprimendo tutte le correnti di ramo in funzione di quelle cicliche :

$$\begin{bmatrix} i^a \\ i^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\tilde{B}^a]^T & i^{cic} \\ [\tilde{B}^b]^T & i^{cic} \end{bmatrix}$$

7. Sostituendo  $i^a$  e  $i^b$ , si ottiene un sistema di  $n + m^y - 1$  equazioni nelle  $n + m^y - 1$  incognite  $i^{sc}$  e  $v^a$ :

$$\begin{bmatrix} B^b & H^{vi} & [B^a]^T & B^a + B^b & H^{uv} \\ [B^b]^T & -H^{ii} & [B^a]^T & -H^{iv} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^{sc} \\ v^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^b & v^b \\ i^b \end{bmatrix}$$

12.5.2 Procedimento cart&penna

Quando il metodo viene eseguito con cart&penna per risolvere circuiti di modeste dimensioni, esso assume un aspetto meno astratto riassunto nel seguente prospetto:

1. Scegliere una base qualsiasi di maglie del grato: se il circuito è planare può convenire scegliere la base costituita dagli anelli interni. Orientare e numerare le maglie della base e scegliere come incognite le corrispondenti  $m - n + 1$  correnti cicliche (*incognite principali*).
2. Individuare gli  $m^y$  rami la cui tensione non è controllabile in corrente e aggiungere le rispettive  $m^y$  tensioni tra le incognite (*incognite ausiliarie*).
3. Annullare la somma delle tensioni nelle  $m - n + 1$  maglie della base, esprimendo le tensioni controllabili in funzione delle correnti cicliche. Si ottengono  $m - n + 1$  equazioni che presentano come incognite le  $m - n + 1$  correnti cicliche, le  $m^y$  tensioni noncontrollabili ed, eventualmente, le grandezze pilotanti le sorgenti pilotate.
4. Aggiungere  $m^y$  relazioni costitutive, una per ognuno dei  $m^y$  rami la cui tensione (noncontrollabile) è compresa nelle incognite. Ognuna delle suddette equazioni comprende i parametri omogenei e/o impressivi del ramo in oggetto e coinvolgerà alcune correnti cicliche.
5. Se nelle equazioni restano coinvolte alcune grandezze pilotanti non facenti parte delle incognite (correnti cicliche e tensioni noncontrollabili), occorre sostituirlle con un'espressione in cui compaiano solamente le incognite principali e/o ausiliarie.
6. Si ottiene un sistema lineare di  $m - n + m^y + 1$  equazioni in altrettante incognite.

WWWWWW?? Il sistema algebrico così costruito potrebbe essere singolare.

INSERIRE un esempio preso dalle fotocopie degli esercizi ???WWWWWW

12.6 CONSIGLI PRATICI PER L'ANALISI

Confrontiamo i diversi metodi presentati nelle sezioni precedenti e discutiamo alcuni accorgimenti utili nella soluzione con cart&penna e, in alcuni casi, anche per la soluzione mediante un calcolatore, del sistema lineare di equazioni che viene generato dai diversi metodi di analisi.

12.6.1 Confronto dei metodi d'analisi

Ognuno dei metodi di analisi ha pregi e difetti. La scelta del metodo più adatto dipende da diversi fattori. Il seguente quadro riassume i pregi e difetti di ciascun metodo.

Quadro dei metodi d'analisi dei circuiti dinamici tempo-invarianti e lineari		n = numero di nodi del grato		m = numero di rami del grato	
		m <sup>y</sup> = numero delle correnti di ramo noncontrollabili in tensione		m <sup>y</sup> = numero delle tensioni di ramo noncontrollabili in corrente	
	totale	nodale modificato	nodale puro	maglie (anelli) modificato	maglie (anelli) puro
numero di incognite					
tensioni nodo	n - 1	n - 1	n - 1	0	0
correnti cicl.	0	0	0	m - n + 1	m - n + 1
tensioni ramo	m	0	0	m <sup>y</sup>	0
correnti ramo	m	m <sup>y</sup>	0	0	0
numero di equazioni					
Kirchh. tens.	m	0	0	m - n + 1	m - n + 1
Kirchh. corr.	n - 1	n - 1	n - 1	0	0
relaz costit.	m	m <sup>y</sup>	0	m <sup>y</sup>	0
ordine	2m + n - 1	m <sup>y</sup> + n - 1	n - 1	m + m <sup>y</sup> - n + 1	m - n + 1
sparsità	si	no	no	no	no
struttura del grato	generale	generale	generale	generale (maglie piane (anelli))	generale (maglie piane (anelli))
classi di componenti	qualsiasi	qualsiasi	controll. in tensione	qualsiasi	controll. in corrente
adattabilità a programmi	molto	molto	molto	inadatto	adatto
adattabilità cart&penna	(1) molto	adatto	adatto	adatto	molto
	poco	adatto	molto	adatto	molto
	adatto	adatto	adatto	adatto	adatto

12.6.2 Riduzione del sistema lineare

Nel risolvere il sistema di equazioni col metodo cart&penna occorre tener presente:

- Se una incognita appare in una sola equazione, l'equazione stessa può essere soppressa. Si perde informazioni sulla incognita coinvolta, ma le equazioni rimanenti contengono un numero di incognite coincidente col numero di equazioni.
- Se una incognita appare in due sole equazioni, le due equazioni possono essere fuse in una sola, perdendo informazioni sulla incognita che da origine alla fusione. Sia le incognite sia le equazioni diminuiscono di un'unità.



- Se in una equazione vi è una sola incognita, la suddetta incognita può essere sostituita nelle rimanenti equazioni con banali operazioni. Anche questo caso sia le equazioni sia le incognite diminuiscono di un'unità.
- Se in un'equazione appaiono due sole incognite, una di esse può essere eliminata in tutte le rimanenti. Anche in questo caso sia le equazioni sia le incognite diminuiscono di un'unità.

**Esempio** : Riduciamo le equazioni e incognite del seguente sistema lineare di sei equazioni in sei incognite :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{16}x_6 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{26}x_6 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{36}x_6 = b_3 \\ a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = b_4 \\ a_{51}x_1 = b_5 \\ a_{61}x_1 + a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 = b_6 \end{cases}$$

Nel suddetto sistema possiamo sostituire l'incognita  $x_1$  derivandola dalla quinta equazione ( $x_1 = b_5/a_{51}$ ), mentre possiamo sopprimere la sesta equazione dal momento che è l'unica che contenga l'incognita  $x_5$ , qualora il valore di  $x_5$  non sia di nostro interesse.

Otteniamo un sistema lineare equivalente di quattro equazioni in quattro incognite :

$$\begin{cases} a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{16}x_6 = b_1 - a_{11}b_5/a_{51} = b'_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{26}x_6 = b_2 - a_{21}b_5/a_{51} = b'_2 \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{36}x_6 = b_3 - a_{31}b_5/a_{51} = b'_3 \\ a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = b_4 - a_{41}b_5/a_{51} = b'_4 \end{cases}$$

dove  $b'_1, b'_2, b'_3, b'_4$  sono introdotti come nuovi termini noti per semplificare le equazioni.

Nel suddetto sistema possiamo fondere la seconda e la terza equazione eliminando l'incognita  $x_4$  e possiamo esplicitare l'incognita  $x_2$  nella quarta equazione.

Otteniamo un sistema lineare equivalente di tre equazioni in tre incognite :

$$\begin{cases} a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{16}x_6 = b'_1 \\ (a_{34} a_{22} - a_{24} a_{32}) x_2 + (a_{34} a_{23} - a_{24} a_{33}) x_3 + (a_{34} a_{26} - a_{24} a_{36}) x_6 = a_{34} b'_2 - a_{24} b'_3 \\ x_2 = -(a_{43}/a_{42}) x_3 + b'_4/a_{42} \end{cases}$$

Sostituendo l'incognita  $x_2$  per mezzo della terza equazione, otteniamo un sistema di due equazioni nelle incognite  $x_3$  e  $x_6$ .

$$\begin{cases} a_{12} [-(a_{43}/a_{42}) x_3 + b'_4/a_{42}] + a_{13} x_3 + a_{16} x_6 = b'_1 \\ (a_{34} a_{22} - a_{24} a_{32}) [-(a_{43}/a_{42}) x_3 + b'_4/a_{42}] + \\ + (a_{34} a_{23} - a_{24} a_{33}) x_3 + (a_{34} a_{26} - a_{24} a_{36}) x_6 = a_{34} b'_2 - a_{24} b'_3 \end{cases}$$

Riordinando le incognite e i coefficienti, otteniamo

$$\begin{aligned} [a_{13} - a_{12} a_{43}/a_{42}] x_3 + a_{16} x_6 &= b'_1 - a_{12} b'_4/a_{42} \\ [-a_{43}/a_{42} (a_{34} a_{22} - a_{24} a_{32}) + a_{34} a_{23} - a_{24} a_{33}] x_3 + [a_{34} a_{26} - a_{24} a_{36}] x_6 &= \\ &= a_{34} b'_2 - a_{24} b'_3 - a_{34} a_{22} b'_4/a_{42} + a_{24} a_{32} b'_4/a_{42} \end{aligned}$$

**Commenti** : Le precedenti operazioni, riducendo l'ordine del sistema lineare possono essere interpretate circuitualmente :

- Metodo delle maglie e/o anelli modificato : quando si elimina la tensione ai capi di un bipolo noncontrollabile in corrente e comune alle equazioni di due maglie indipendenti (anelli), si ottiene un'unica equazione relativa alla maglia dipendente dalle due maglie di partenza.
- Metodo nodale modificato : quando si elimina la corrente lungo un bipolo noncontrollabile in tensione e collegante due nodi, si ottiene un'unica equazione relativa al taglio definito dai due nodi.

### 12.6.3 La normalizzazione dei circuiti dinamici

Nel sistema di equazioni risolutive, qualsiasi sia il metodo di analisi usato, gli elementi della matrice e del vettore dei termini noti possono assumere valori numerici troppo alti, per esempio  $10^3, 10^6, \dots$ , o troppo bassi, per esempio  $10^{-3}, 10^{-6}, \dots$ .

Quindi l'esecuzione di un programma su un calcolatore può incontrare situazioni di "overflow" o di "underflow" nonostante l'uso dell'aritmetica "floating point". Per esempio nell'inversione di una matrice o nel calcolo di un determinante. Anche nell'analisi cart&spenna sia i numeri reali troppo piccoli (con molti zeri dopo la virgola) sia quelli troppo grandi (con molte cifre significative prima della virgola) sono fastidiosi in particolare per gli studenti vizati dall'uso del *computer*. Questi inconvenienti possono essere evitati o per lo meno ridimensionati normalizzando le grandezze e i parametri che descrivono il circuito, cioè alterandoli di un opportuno fattore scala e riscrivendo il sistema così modificato.

Inanzitutto occorre scegliere un opportuno valore di tensione  $v_0$  detto tensione di normalizzazione e un opportuno valore di corrente  $i_0$  detto corrente di normalizzazione. Il loro rapporto definisce la resistenza di normalizzazione  $r_0 = v_0/i_0$ . È opportuno che la scelta di  $v_0$  e  $i_0$  sia tale che sia gli elementi del vettore dei termini noti sia quelli della matrice si avvicinino a ordini di grandezza vicini dell'unità. Le regole pratiche per costruire il sistema di equazioni del circuito con grandezze e parametri normalizzati è il seguente :

<i>Quadro delle regole per la normalizzazione</i>		
scegliere $v_0$ e $i_0$ e porre $r_0 = v_0/i_0$		
grandezze e/o parametri	circuito originario	circuito normalizzato
tensioni	$v = v^{nor} v_0$	$v^{nor} = v/v_0$
correnti	$i = i^{nor} i_0$	$i^{nor} = i/i_0$
tensioni impresse	$\tilde{v} = \tilde{v}^{nor} v_0$	$\tilde{v}^{nor} = \tilde{v}/v_0$
correnti impresse	$\tilde{i} = \tilde{i}^{nor} i_0$	$\tilde{i}^{nor} = \tilde{i}/i_0$
(trans)resistenze	$r = r^{nor} r_0$	$r^{nor} = r/r_0$
(trans)conduttanze	$g = g^{nor}/r_0$	$g^{nor} = gr_0$
rapporti di tensione	$\alpha = \alpha^{nor}$	$\alpha^{nor} = \alpha$
rapporti di corrente	$\beta = \beta^{nor}$	$\beta^{nor} = \beta$

**12.6.4 Esempio**

WWWWWW Fare un esempio completo con i conti su un circuito.

*fine del capitolo 12*

# 13 COMPONENTI COMPOSITI ADINAMICI TEMPO-INVARIANTI e LINEARI

In principio, i metodi di analisi di generici circuiti dinamici, tempo-invarianti e lineari (Cap. 12) consentono di risolvere qualsiasi problema per questa classe di circuiti. Ma questi metodi di soluzione (sia con cart&xpenna sia con calcolatore) non aiutano a "capire" i circuiti stessi: per esempio, non capiremo che la cascata di due tri-d è equivalente ad uno solo, che la cascata di due sorgenti pilotate può essere equivalente a un nullore, che un resistore in serie alla seconda porta di un tri-d. può essere spostato in serie alla prima porta, e così via. Questo capitolo intende rispondere a questa esigenza esaminando in dettaglio i componenti composti dinamici, tempo-invarianti e lineari più significativi e le loro equivalenze.

**Sez. 13.1 : Cascata di doppi bipoli**: La connessione in cascata di doppi bipoli viene incontrata molto frequentemente. Il doppio bipolo composto è molto spesso equivalente a qualcuno dei doppi bipoli notevoli presentati nel Cap. 10. Vengono discussi i casi più interessanti di connessioni in cascata coinvolgenti sorgenti pilotate ideali, trasformatori ideali, giratori e nullori.

**Sez. 13.2 : DB chiuso su bipolo**: Vengono introdotte le formule per calcolare la relazione costitutiva del bipolo composto costituito da un generico doppio bipolo, rappresentato da un qualsiasi rappresentazione, con la seconda porta chiusa su un generico bipolo omogeneo.

**Sez. 13.3 : Parallelo di k-porte e doppi bipoli**: Limitatamente alla rappresentazione controllata in tensione, vengono calcolate le relazioni costitutive di un k-porte ovvero un doppio bipolo costituito dal parallelo di due k-porte ovvero doppi bipoli. In particolare, viene discussa la connessione parallelo di un nullore tripolare con un generico DBT.

**Sez. 13.4 : Serie di doppi bipoli**: Limitatamente alla rappresentazione controllata in corrente, vengono calcolate le relazioni costitutive di un doppio bipolo costituito dalla serie di due doppi bipoli.

**Sez. 13.5 : Connessione trasversale di un bipolo e un DBT**: Questa aggregazione può essere considerata come la connessione di due doppi bipoli in parallelo di cui uno piuttosto particolare. Se il DBT è controllabile in tensione, il DBT composto viene facilmente analizzato. Nel caso in cui il DBT non sia controllabile in tensione, il primo Teorema di MILLER consente di calcolare rapidamente le relazioni costitutive dal DBT composto. Nel caso in cui il DBT sia un nullore il DBT composto è equivalente a una  $Y_T$ .

**Sez. 13.6 : Bipolo in serie al terminale comune di un DBT**: Questa aggregazione può essere considerata come la connessione di due doppi bipoli in serie di cui uno piuttosto particolare. Se il DBT è controllabile in corrente, il DBT composto viene facilmente analizzato. Nel caso in cui il DBT non sia controllabile in corrente, il secondo Teorema di MILLER consente di calcolare rapidamente le relazioni costitutive dal DBT composto. Nel caso in cui il DBT sia un nullore il DBT composto è equivalente a una  $I_Y$ .

**Sez. 13.7 : Metodologia aggrega&trimpiazza**: Col termine "aggrega&trimpiazza" si intende una metodologia d'analisi del circuito che deve essere adattata alla struttura dello specifico circuito considerato. Essa consiste nell'aggregare i componenti del circuito in un numero inferiore di componenti composti e quindi di considerare come incognite solo le grandezze definite alle porte dei componenti composti, che condensano quelli aggregati. In pratica questa metodologia consiste in successive trasformazioni circuitali: per impadronirsi il lettore deve rassegnarsi a fare molti esercizi e... in bocca al lupo....

## 13.1 CASCATA DI DOPPI BIPOLI

Nel Cap. 11, partendo dal metodo totale di analisi, sono stati presentati alcuni metodi molto generali per analizzare i componenti composti. In questo capitolo vengono introdotti le regole più usate per calcolare le relazioni costitutive di un componente composto da doppi bipoli e/o bipoli a partire da quelle di questi ultimi. Vengono esaminate le aggregazioni più interessanti: la cascata, il parallelo e la serie di doppi bipoli, il doppio bipolo chiuso su un bipolo, la connessione trasversale di un bipolo a un tripolo e la connessione di un bipolo in serie al terminale comune di un tripolo. Per queste aggregazioni vi è una rappresentazione esplicita più appropriata delle altre per calcolare le relazioni costitutive del componente composto.

La connessione in cascata di DB viene incontrata molto frequentemente, in particolare nei circuiti per l'informazione. Il DB composto è molto spesso equivalente a qualcuno dei DB notevoli presentati nel Cap. 10. Questa sezione intende presentare i casi più interessanti di connessioni in cascata. La loro conoscenza consente spesso delle semplificazioni nell'analisi dei circuiti sorprendenti per il principiante.

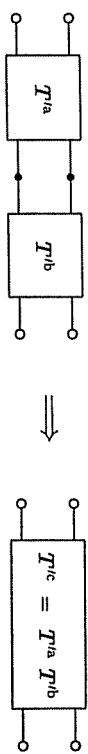
### 13.1.1 Generalità

In presenza della cascata di due doppi bipoli si hanno le seguenti equazioni tra le tensioni e correnti di  $C_2^a$  e  $C_2^b$  e quelle di  $C_2^c \equiv \text{Casc}\{C_2^a, C_2^b\}$

- La seconda porta di  $C_2^a$  è connessa alla prima porta di  $C_2^b$ :  $v_2^a = v_1^b$  e  $i_2^a = i_1^b$
- La prima porta di  $C_2^a$  costituisce la prima porta di  $C_2^c$ :  $v_1^c = v_1^a$  e  $i_1^c = i_1^a$
- La seconda porta di  $C_2^b$  costituisce la seconda porta di  $C_2^c$ :  $v_2^c = v_2^b$  e  $i_2^c = i_2^b$

Cerchiamo le relazioni costitutive del componente  $C_2^c \equiv \text{Casc}\{C_2^a, C_2^b\}$  composto dalla cascata di due doppi bipoli omogenei  $C_2^a$  e  $C_2^b$ .

**Proprietà**: Se le matrici di trasmissione diretta  $T^{1a}$  e  $T^{1b}$  dei due doppi bipoli sono definite, la corrispondente matrice  $T^{1c}$  di  $C_2^c$  viene ottenuta mediante il loro prodotto:



DOPPI BIPOLI IN CASCATA

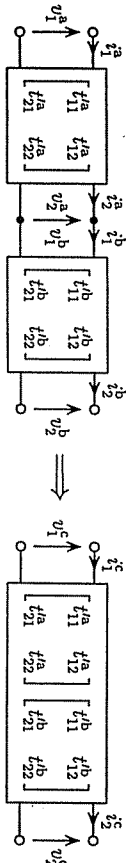
**Prova**: La prova viene eseguita usando le rappresentazioni di trasmissione diretta per i due bipoli in cascata e per quello risultante. Con riferimento alla figura sottostante possiamo scrivere le rappresentazioni di trasmissione diretta dei  $C_2^a$  e  $C_2^b$ :

$$\begin{bmatrix} v_1^a \\ i_1^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^a & t_{12}^a \\ t_{21}^a & t_{22}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^a \\ i_2^a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1^b \\ i_1^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^b & t_{12}^b \\ t_{21}^b & t_{22}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^b \\ i_2^b \end{bmatrix}$$

Si come la seconda porta del  $C_2^a$  è chiusa sulla prima porta del  $C_2^b$ , i vettori  $[v_2^a \ i_2^a]^T$  e  $[v_1^b \ i_1^b]^T$  coincidono. Questa coincidenza ci consente di scrivere

$$\begin{bmatrix} v_1^a \\ i_1^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^a & t_{12}^a \\ t_{21}^a & t_{22}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^b \\ i_1^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^a & t_{12}^a & t_{11}^b & t_{12}^b \\ t_{21}^a & t_{22}^a & t_{21}^b & t_{22}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^b \\ i_1^b \\ v_2^b \\ i_2^b \end{bmatrix}$$

La prima porta del  $C_2^a$  coincide con la prima porta del  $C_2^c$ :  $[v_1^c \ i_1^c]^T = [v_1^a \ i_1^a]^T$  e la seconda porta del  $C_2^b$  coincide con la seconda porta del  $C_2^c$ :  $[v_2^c \ i_2^c]^T = [v_2^b \ i_2^b]^T$ . Inserendo nella formula precedente le quattro grandezze descrittive del  $C_2^c$ , noi abbiamo la rappresentazione di trasmissione diretta del  $C_2^c$ :



che prova la proprietà.

**Commento** : Questo risultato è indipendente dal fatto che i doppi bipoli siano propri, tripolari o impropri, come spiegato nel Cap. 6.

**Commento** : la coincidenza della matrice di trasmissione diretta di una cascata di doppi bipoli omogenei col prodotto delle matrici di trasmissione dirette dei singoli doppi bipoli è una conseguenza del fatto di avere definito le matrici di trasmissione con la convenzione noncardinale (vedere Cap. 9).

**Commento** : Siccome l'inversione dell'ordine del prodotto di due matrici cambia in genere la matrice originata dal prodotto, lo scambio dell'ordine dei due DB nella cascata produce in genere un doppio bipolo composto diverso.

**Proprietà** : Se uno dei doppi bipoli connessi è unidirezionale, anche il doppio bipolo composto è unidirezionale.

**Prova** : Siccome una o più delle matrici  $T^a$  [ovvero  $T^b$ ] è singolare, anche il loro prodotto è singolare.

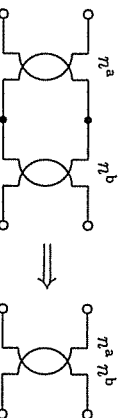
Nei paragrafi seguenti esamineremo un'ampia casistica di casi incontrati frequentemente, che prova la proprietà.

**Commento** : Se le matrici di trasmissione inversa  $T^{ra}$  e  $T^{rb}$  sono definite per entrambi i doppi bipoli, la corrispondente matrice di  $C_2^c$  viene ottenuta mediante il prodotto :  $T^{rc} = T^{rb} T^{ra}$

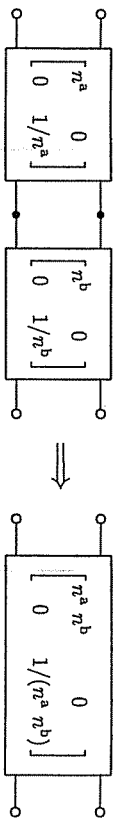
13.1.2 Cascata di doppi bipoli con uno o due tr.id.

Consideriamo la cascata di doppi bipoli di cui almeno uno sia un  $T$ . WWWWWWW? Riportiamo alcune delle applicazioni più significative della proprietà generali discusse nel paragrafo precedente. Le matrici di trasmissione  $T^a$  dei doppi bipoli notevoli sono riportate nel Cap. 10.

**Proprietà 1** : la cascata di due  $T$  è equivalente a un  $T$ , il cui rapporto di trasformazione coincide col prodotto dei due rapporti.



**Prova** : Eseguire il prodotto delle matrici di trasmissione diretta nell'ordine indicato in figura e constatare che la matrice risultante è ancora la matrice di trasmissione diretta di un  $T$  con rapporto di trasformazione  $r^a r^b$  :



**Trasformazione 2** : Un  $T$  in cascata alla prima porta di un DB qualsiasi modifica la sua matrice di trasmissione come segue :

$$T \begin{bmatrix} r^a & 0 \\ 0 & 1/r^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11}^b & t_{12}^b \\ t_{21}^b & t_{22}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^a t_{11}^b & r^a t_{12}^b \\ t_{21}^b / r^a & t_{22}^b / r^a \end{bmatrix}$$

DB qualsiasi modificata

**Trasformazione 3** : un  $R$  in serie alla seconda porta di un  $T$  è equivalente a uno in serie alla prima :

$$T \begin{bmatrix} r^a & 0 \\ 0 & 1/r^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r^b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (r^a)^2 r^b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^a & 0 \\ 0 & 1/r^a \end{bmatrix}$$

$R$   $R$   $R$

**Trasformazione 4** : un  $R$  in parallelo alla seconda porta di un  $T$  è equivalente a un  $R$  in parallelo alla prima

$$T \begin{bmatrix} r^a & 0 \\ 0 & 1/r^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g^b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g^b / (r^a)^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^a & 0 \\ 0 & 1/r^a \end{bmatrix}$$

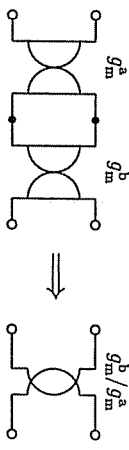
$R$   $R$   $R$

**Trasformazione 5** : Consideriamo un DB qualsiasi, di cui sia nota la matrice resistenza  $R^a$  e/o quella conduttanza  $G^a$ . Esso è chiuso tra un  $T$  ( $r^b : 1$ ) e un  $T$  ( $1 : r^c$ ). Le matrici  $R^d$  e  $G^d$  del doppio bipolo composto dalla cascata dei tre doppi bipoli sono :

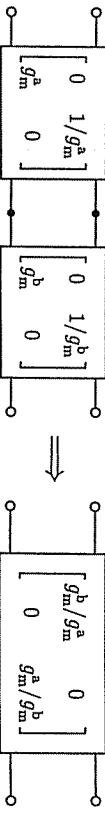
$$\begin{bmatrix} r_{11}^d & r_{12}^d \\ r_{21}^d & r_{22}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r^b)^2 r_{11}^a & r^b r_{12}^a \\ r_{21}^a & (r^c)^2 r_{22}^a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} g_{11}^d & g_{12}^d \\ g_{21}^d & g_{22}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^a / (r^b)^2 & g_{12}^a / (r^b r^c) \\ g_{21}^a / (r^c)^2 & g_{22}^a / (r^c)^2 \end{bmatrix}$$

13.1.3 Doppi bipoli composti contenenti uno o due giratori

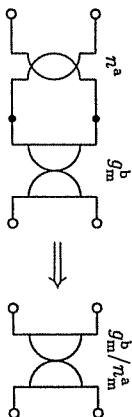
**Proprietà 6** : la cascata di due giratori è equivalente a un  $T$ , il cui rapporto di trasformazione coincide col rapporto delle due transconduttanze di girazione.



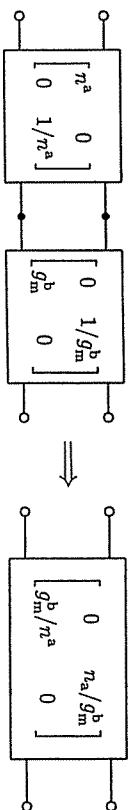
**Prova** : Eseguire il prodotto delle matrici di trasmissione diretta, nell'ordine indicato in figura e constatare che la matrice risultante è la matrice di trasmissione diretta di un  $T$  con rapporto di trasformazione  $g_m^b / g_m^a$  :



**Proprietà 7 :** la cascata di un  $\mathcal{T}$  e un  $\mathcal{G}$  è equivalente a un  $\mathcal{G}$ , il cui rapporto di girazione coincide col rapporto di girazione del  $\mathcal{G}$  rispetto alla costante di trasformazione del  $\mathcal{T}$ .



**Prova :** Eseguire il prodotto delle matrici di trasmissione diretta nell'ordine indicato in figura e constatare che la matrice risultante è la matrice di trasmissione diretta di un  $\mathcal{G}$  con transconduttanza di girazione  $g_m^b/n^a$  :



**Trasformazione 8 :** Un  $\mathcal{R}$  in parallelo alla seconda porta di un  $\mathcal{G}$  è equivalente a un  $\mathcal{R}$  in serie alla prima.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/g_m^a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/r^b & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1/[(g_m^a)^2 r^b] \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/g_m^a \\ g_m^a & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}}$$

**Trasformazione 9 :** Un  $\mathcal{R}$  in serie alla seconda porta di un  $\mathcal{G}$  è equivalente a uno in parallelo alla prima :

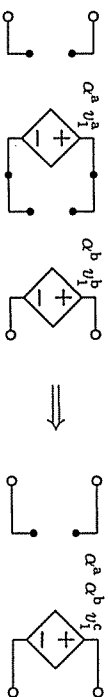
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/g_m^a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & r^b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (g_m^a)^2 r^b & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/g_m^a \\ g_m^a & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}}$$

**Trasformazione 10 :** Consideriamo un DB qualsiasi, di cui sia nota la matrice resistenza  $R^a$  e/o la matrice conduttanza  $G^a$ . Esso è chiuso tra due giratori con transconduttanze di girazione  $g_m^b$  e  $g_m^c$ . Le matrici  $R^d$  e  $G^d$  del doppio bipolo composto dalla cascata dei tre doppi bipoli sono :

$$\begin{bmatrix} r_{11}^d & r_{12}^d \\ r_{21}^d & r_{22}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^a/(g^b)^2 & -g_{12}^a/(g^b g^c) \\ -g_{21}^a/(g^b g^c) & g_{22}^a/(g^c)^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} g_{11}^d & g_{12}^d \\ g_{21}^d & g_{22}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (g^b)^2 r_{11}^a & -g^b g^c r_{12}^a \\ -g^b g^c r_{21}^a & (g^c)^2 r_{22}^a \end{bmatrix}$$

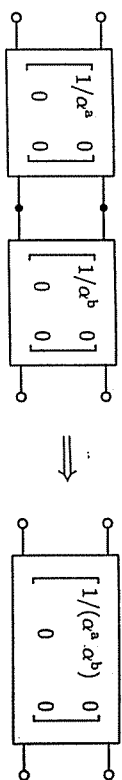
**13.1.4** Doppi bipoli composti contenenti due sorgenti pilotate ideali

**Proprietà 11 :** la cascata di due  $\mathcal{V}$  è equivalente a una  $\mathcal{V}$ , il cui guadagno di tensione coincide col prodotto dei due guadagni.



**Prova :** Eseguire il prodotto delle matrici di trasmissione diretta nell'ordine indicato in figura e constatare che la matrice risultante è ancora la matrice di trasmissione diretta di

una  $\mathcal{V}$  con guadagno di tensione  $1/(\alpha^a \alpha^b)$  :



**Proprietà 12 :** la cascata di due  $\mathcal{T}_x$  è equivalente a una  $\mathcal{T}_x$  :

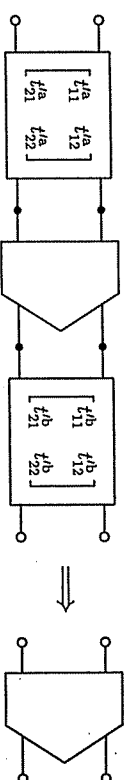
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/\beta^a \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}_x} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/\beta^b \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}_x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/(\beta^a \beta^b) \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}_x}$$

**Proprietà 13 :** la cascata di una  $\mathcal{T}_x$  e una  $\mathcal{V}$  è equivalente a un nullore :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/\beta^a \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}_x} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\alpha^b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{V}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{nullore}}$$

**13.1.5** Doppi bipoli composti contenenti un nullore.

**Proprietà 14 :** Se in una cascata di doppi bipoli è presente un nullore, il doppio bipolo composto è un nullore :



**Prova :** Siccome la matrice di trasmissione diretta della cascata di tre doppi bipoli coincide col prodotto delle rispettive matrici di trasmissione, tra cui una è nulla, anche la matrice di trasmissione del doppio bipolo composto è nulla :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} t_{11}^a & t_{12}^a \\ t_{21}^a & t_{22}^a \end{bmatrix}}_{\text{DB quals.}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{nullore}} \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11}^b & t_{12}^b \\ t_{21}^b & t_{22}^b \end{bmatrix}}_{\text{DB quals.}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{nullore}}$$

**13.1.6** Connessioni in cascata notevoli

La seguente tabella riassume i doppi bipoli risultanti dalla cascata di doppi bipoli notevoli. I casi in cui il nullore è uno dei doppi bipoli connessi in cascata sono stati esclusi dal momento che il risultato è comunque sempre un nullore.

Quadro della cascata di doppi bipoli nonideali

$C_2^b$		$C_2^a$					
		$\mathcal{V}_X$ $\alpha^b$	$\mathcal{V}_X$ $r_m^b$	$\mathcal{I}_V$ $g_m^b$	$\mathcal{I}_X$ $\beta^b$	$\mathcal{T}$ $n^b$	$\mathcal{G}$ $g_m^b$
$\mathcal{V}_Y$ $\alpha^a = \alpha^a \alpha^b$	$\mathcal{V}_Y$	nullore	$g_m^a = \alpha^a g_m^b$	nullore	$\alpha^c = \alpha^a / n^b$	$g_m^a = \alpha^a g_m^b$	
$\mathcal{V}_X$ $r_m^a = r_m^a \alpha^b$	$\mathcal{V}_X$	nullore	$\beta^c = r_m^a g_m^b$	nullore	$r_m^c = r_m^a / n^b$	$\beta^c = r_m^a g_m^b$	
$\mathcal{I}_V$ $g_m^a$	nullore	$\mathcal{V}_Y$	nullore	$g_m^c = g_m^a \beta^b$	$\mathcal{I}_V$	$\mathcal{V}_Y$ $\alpha^c = g_m^a / g_m^b$	
$\mathcal{I}_X$ $\beta^a$	nullore	$\mathcal{V}_Y$	$\mathcal{I}_X$	$\beta^c = \beta^a \beta^b$	$\mathcal{I}_X$	$\mathcal{V}_Y$ $\alpha^c = \beta^a / \beta^b$	
$\mathcal{T}$ $\alpha^c = \alpha^b / n^a$	$\mathcal{V}_Y$ $r_m^c = n^a r_m^b$	$\mathcal{V}_X$ $r_m^c = n^a r_m^b$	$\mathcal{I}_V$ $g_m^c = g_m^b / n^a$	$\mathcal{I}_X$ $\beta^c = n^a \beta^b$	$\mathcal{T}$ $n^c = n^a n^b$	$\mathcal{G}$ $g_m^c = g_m^b / n^a$	
$g$ $r_m^c = \alpha^b / g_m^a$	$\mathcal{V}_X$	$\mathcal{V}_Y$	$\mathcal{I}_X$	$\mathcal{I}_V$	$\mathcal{G}$ $n^c = g_m^a / g_m^b$	$\mathcal{T}$ $n^c = g_m^a / g_m^b$	

**Scavalramento dei doppi bipoli:** Dalla suddetta tabella si può osservare che in genere due doppi bipoli in cascata danno origine a un diverso tipo di doppio bipolo composto, se l'ordine in cui sono connessi viene invertito. Comunque in casi particolari, lo scambio delle posizioni dei due doppi bipoli  $C_2^a$  e  $C_2^b$  all'interno della cascata da origine allo stesso doppio bipolo composto. Quindi i due doppi bipoli possono scavalcarsi l'un l'altro senza alterare il circuito in cui sono inseriti. Per esempio, possono scavalcarsi l'un l'altro: due  $\mathcal{V}_Y$ , due  $\mathcal{I}_X$ , due  $\mathcal{T}$ , nullore con qualsiasi DB,  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{V}_Y$ ,  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{I}_X$ . Da un punto di vista matematico lo scavalramento di due doppi bipoli non altera il doppio bipolo composto se l'ordine del prodotto delle rispettive matrici non altera il risultato. Nei casi citati precedentemente le matrici sono tutte diagonali ( $t_{12}^i = t_{21}^i = 0$ ) e quindi il risultato del loro prodotto non dipende dall'ordine in cui i due doppi bipoli appaiono nella cascata.

### 13.1.7 Cascata di sorgenti pilotate nonideali

**Proprietà:** La cascata di sorgenti pilotate nonideali (vedere Cap. 10) è equivalente ancora a una sorgente pilotata nonideale in cui la resistenza (conduttanza) d'ingresso coincide con quella della prima sorgente e quella d'uscita con quella dell'ultima sorgente. Il guadagno dipende dal prodotto dei guadagni e dai rapporti dei partitori tra resistenze d'uscita e d'ingresso delle sorgenti pilotate contigue.

**Prova:** Fare il prodotto delle matrici di trasmissione dirette  $\mathcal{T}$  delle singole sorgenti pilotate nonideali. Notare che ciascuna di queste matrici è singolare.

WWWWWW?? FARE figura e SVILUPPARE i conti ???WWWWWW

Consideriamo la cascata di  $K$  sorgenti pilotate nonideali, di cui usiamo il modello contenente la  $\mathcal{V}_Y$ . Noi otteniamo ancora una sorgente pilotata nonideale: i parametri  $r_{ing}^c$  e  $r_{usc}^c$  e  $\alpha_c$  del modello con la  $\mathcal{V}_Y$  sono:

$$r_{ing}^c = r_{ing}^1, \quad r_{usc}^c = r_{usc}^K, \quad \alpha^c = \prod_{k=1}^K \alpha^k \prod_{k=1}^{K-1} \frac{r_{ing}^{k+1}}{r_{ing}^k + r_{usc}^k}$$

WWWWWW?? SE USASSIMO altri modelli delle sorgenti pilotate nonideali l'espressione del parametro di pilotaggio del DB composto sarebbe diversa ???WWWWWW

### 13.1.8 Doppio bipolo a scala

**Proprietà:** Un doppio bipolo a scala può essere visto come una cascata alternata di bipoli a quattro terminali e di coppie trasversali bipolo / c.c.. La sua matrice di trasmissione può essere ottenuta dal prodotto delle singole matrici.

**Proprietà:** Un doppio bipolo a scala è zero-direzionale se e solo se uno dei bipoli a quattro terminali è un c.c. ovvero se uno dei bipoli associato trasversalmente a un c.c è un c.a. **Prove:** Sono lasciate al lettore.

FIG. 7. DOPPIO BIPOLO A SCALA DUPLICARE FIG. DAL CAP. 7

**Commenti:** il metodo della falsa posizione, già visto nel Cap. 7 limitatamente alla scala di  $\mathcal{R}$ , può essere esteso anche a circuiti a scala costituiti da bipoli nonomogenei. Inoltre può essere esteso facilmente anche ai circuiti costituiti dalla cascata di doppi bipoli omogenei e nonomogenei di cui sia nota la rappresentazione di trasmissione diretta. In questo caso il metodo della falsa posizione risulta un caso particolare dell'analisi dei parametri della rappresentazione di trasmissione diretta di un doppio bipolo.

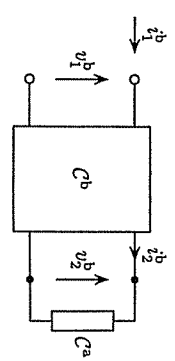
### 13.2 DB CHIUSO SU BIPOLO

Come detto nel Cap. 6, consideriamo un generico (proprio tripolare o improprio) doppio bipolo  $C_2^b$  la cui seconda porta è chiusa sul generico bipolo  $C_1^a$ . Questa aggregazione da origine al bipolo composto  $C_1^c \equiv \text{Chius}(C_1^a, C_2^b)$  definito dalla prima porta di  $C_2^b$ .

La corrente e la tensione alla seconda porta del doppio bipolo  $C_2^b$  (definite con la convenzione nonnormale) coincidono con quelle del bipolo  $C_1^a$  (definite con la convenzione normale):  $v_2^b = v^a$  e  $i_2^b = i^a$ . La tensione e la corrente di  $C_1^c$  coincidono con quelle della prima porta di  $C_2^b$ :  $v^c = v_1^b$  e  $i^c = i_1^b$ .

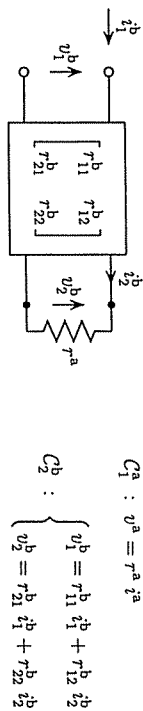
Cerchiamo le relazioni costitutive del bipolo  $C_1^c$  composto dal DB omogeneo  $C_2^b$  con la seconda porta chiusa sul  $\mathcal{R}(r^a)$ .

**Proprietà:** La resistenza  $r^c$  di  $C_1^c$  viene ottenuta con formule simili per ciascuna delle rappresentazioni cardinali di  $C_2^b$ :



mediante $R^b$	mediante $G^b$	mediante $H^{rb}$	mediante $H^{rb}$
$r^c = r_{11}^b - \frac{r_{12}^b r_{21}^b}{r_{22}^b + r^a}$	$\frac{1}{r^c} = g_{11}^b - \frac{g_{12}^b g_{21}^b}{g_{22}^b + 1/r^a}$	$r^c = h_{11}^b - \frac{h_{12}^b h_{21}^b}{h_{22}^b + 1/r^a}$	$\frac{1}{r^c} = h_{11}^{rb} - \frac{h_{12}^{rb} h_{21}^{rb}}{h_{22}^{rb} + r^a}$

*Prova* : La dimostrazione è sostanzialmente la stessa per tutte e quattro le formule : la riportiamo nel caso della matrice  $R$ . Le rappresentazioni controllate in corrente del doppio bipolo  $C_2^b$  e del bipolo  $C_1^a$  (vedere sotto) :



La connessione di  $C_1^a$  alla porta 2 di  $C_2^b$  comporta :  $v_2^b = v^a$  e  $i_2^b = -i^a \implies v_2^b = -r^a i_2^b$ , che sostituita nella seconda relazione costitutiva di  $C_2^b$  da origine alla :

$$-r^a i_2^b = r_{21}^b i_1^b + r_{22}^b i_2^b \implies i_2^b = -i_1^b \frac{r_{21}^b}{r^a + r_{22}^b}$$

Sostituendo l'incognita  $i_2^b$  nella prima relazione costitutiva di  $C_2^b$  otteniamo un'equazione nelle incognite  $i_1^b$  e  $i_1^b$  :

$$\frac{v_1^b - r_{11}^b i_1^b}{r_{12}^b} + \frac{r_{21}^b i_1^b}{r^a + r_{22}^b} = 0 \implies r^c = \frac{v_1^b}{i_1^b} = r_{11}^b - \frac{r_{12}^b r_{21}^b}{r_{22}^b + r^a}$$

che prova la formula. ■

*Proprietà* : Nel caso che venga usata una matrice noncardinale,  $T^{rb}$  (caso molto frequente) ovvero  $T^{rb}$  (caso poco frequente), la formula assume un aspetto diverso :

$$\text{mediante } T^{rb} : r^c = \frac{t_{11}^{rb} r^a + t_{12}^{rb}}{t_{21}^{rb} r^a + t_{22}^{rb}} \quad \text{mediante } T^{rb} : r^c = \frac{t_{12}^{rb} r^a - t_{11}^{rb}}{-t_{21}^{rb} r^a + t_{11}^{rb}}$$

*Prova* : Ci limitiamo a fare la dimostrazione per la matrice  $T'$  :

La rappresentazione di trasmissione di-  
 retta del doppio bipolo  $C_2^b$  e quella con-  
 trollata in corrente del bipolo  $C_1^a$  sono :  

$$C_2^b : \begin{cases} v_1^b = t_{11}^{rb} v_2^b + t_{12}^{rb} i_2^b \\ i_1^b = t_{21}^{rb} v_2^b + t_{22}^{rb} i_2^b \end{cases}, \quad C_1^a : v^a = r^a i^a$$

La connessione di  $C_1^a$  alla porta 2 di  $C_2^b$  comporta  $v_2^b = v^a$  e  $i_2^b = -i^a$ . Sostituiamo  $v_2^b \rightarrow r^a i_2^b$  nelle due relazioni costitutive di  $C_2^b$  :

$$\begin{cases} v_1^b = t_{11}^{rb} r^a i_2^b + t_{12}^{rb} i_2^b \\ i_1^b = t_{21}^{rb} r^a i_2^b + t_{22}^{rb} i_2^b \end{cases} \implies r^c = \frac{v_1^b}{i_1^b} = \frac{t_{11}^{rb} r^a + t_{12}^{rb}}{t_{21}^{rb} r^a + t_{22}^{rb}}$$

che prova la formula. ■

### 13.3 PARALLELO DI k-PORTE E DOPPI BIPOLI

Limitatamente alla rappresentazione controllata in tensione, vengono calcolate le relazioni costitutive di un  $k$ -porte ovvero un doppio bipolo costituito dal parallelo di due  $k$ -porte ovvero doppi bipoli. Inoltre, viene discussa la connessione di un nullores tripolare con un generico doppio bipolo tripolare.

#### 13.3.1 Parallelo di due $k$ -porte

La figura qui accanto mostra due  $k$ -porte qualsiasi  $C_1^a$  e  $C_2^b$  con lo stesso numero di terminali connessi. Assumiamo che le  $k$  porte di  $C_1^a$  e  $C_2^b$  corrispondano alle stesse coppie di terminali. Nel caso che i terminali corrispondenti dei due  $k$ -porte siano connessi insieme anche le corrispondenti porte sono a due a due connesse in parallelo : si dice che i due  $k$ -porte sono connessi in parallelo e costituiscono un  $k$ -porta composto  $C_1^c$ .

#### DUE GENERICI k-PORTE CONNESSI IN PARALLELO DUPL. DAL CAP. 6.

*Proprietà* : le relazioni tra le tensioni e correnti dei due  $k$ -porte originari e del  $k$ -porta composto sono una immediata generalizzazione di quelle del parallelo di due bipoli ( $k = 1$ ) :

$$v_1^c = v_1^a = v_1^b, \quad v_2^c = v_2^a = v_2^b, \quad \dots, \quad v_k^c = v_k^a = v_k^b \\ i_1^c = i_1^a + i_1^b, \quad i_2^c = i_2^a + i_2^b, \quad \dots, \quad i_k^c = i_k^a + i_k^b$$

#### 13.3.2 Parallelo di doppi bipoli

Qualora la connessione di  $C_1^a$  e  $C_2^b$  possa essere considerata come un parallelo di doppi bipoli (vedere Cap. 6), valgono le seguenti equazioni tra le grandezze coinvolte :

- Le tensioni di  $C_1^a$  e  $C_2^b$  soddisfanno necessariamente alle :  $v_1^a = v_1^b$  e  $v_2^a = v_2^b$ .
- Le tensioni di  $C_1^a$  coincidono con quelle comuni a  $C_2^a$  e  $C_2^b$  :  $v_1^c = v_1^a$  e  $v_2^c = v_2^a$ .
- Le correnti di  $C_2^c$  sono date dalla somma delle corrispondenti correnti di  $C_2^a$  e  $C_2^b$  :  $i_1^c = i_1^a + i_1^b$  e  $i_2^c = i_2^a + i_2^b$ .

Cerchiamo le relazioni costitutive del componente  $C_1^c \equiv \text{Parallelo}\{C_1^a, C_1^b\}$  composto dai paralleli di due doppi bipoli omogenei  $C_2^a$  e  $C_2^b$ .

*Proprietà* : Se entrambe le matrici conduttanza  $G^a$  e  $G^b$  esistono, anche la matrice conduttanza  $G^c$  di  $C_1^c$  esiste e viene ottenuta mediante la somma :

$$\begin{bmatrix} g_{11}^c & g_{12}^c \\ g_{21}^c & g_{22}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^a + g_{11}^b & g_{12}^a + g_{12}^b \\ g_{21}^a + g_{21}^b & g_{22}^a + g_{22}^b \end{bmatrix}$$

DOPPI BIPOLI IN PARALLELO DUPL. DAL CAP. 6

*Prova* : È lasciata al lettore.

*Commenti* : Il fatto che uno o entrambi i doppi bipoli non ammettano la rappresentazione  $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$  non significa necessariamente che la loro connessione sia incompatibile. Occorre procedere ricorrendo alle relazioni topologiche proprie della connessione parallelo. Un esempio significativo sarà incontrato nel Par. 13.5.2 (primo teorema di MILLER) e nel Par. 13.5.3.

*Proprietà* : il doppio bipolo composto dal parallelo di due doppi bipoli, entrambi controllabili in tensione e unidirezionali  $1 \rightarrow 2$  [ $2 \rightarrow 1$ ], è a sua volta controllabile in tensione e unidirezionale  $1 \rightarrow 2$  [ $2 \rightarrow 1$ ].

*Prova* : è lasciata al lettore.

*Caso particolare* : Cerchiamo le relazioni costitutive del DB  $C_5^c$  composto dal DB  $C_2^b$  con in parallelo alla prima porta il resistore  $C_1^a$ . Se la matrice conduttanza  $G^b$  esiste, la corrispondente matrice di  $C_5^c$  viene ottenuta sommando la conduttanza  $g^a$  di  $C_1^a$  al corrispondente elemento :

$$\begin{bmatrix} g_{11}^c & g_{12}^c \\ g_{21}^c & g_{22}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^a + g_{11}^b & g_{12}^b \\ g_{21}^b & g_{22}^b \end{bmatrix}$$

RESISTORE IN PARALLELO ALLA PORTA DI UN DB  
WWW???? DUPL. dal cap. 6

### 13.3.3 Parallelo di un generico DBT e di un nullole tripolare

Molto frequentemente viene incontrato un DBT composto dal parallelo di un nullole tripolare e un generico DBT omogeneo. Siccome il nullole non è controllabile in tensione, non possiamo sommare le matrici conduttanza dei due doppi bipoli, come discusso nel precedente paragrafo. Noi esaminiamo questa connessione assumendo che il generico DBT ammetta la matrice  $G$  :

*Proprietà* : Il parallelo di un nullole tripolare  $C_{2T}^b$  e un generico DBT  $C_{2T}^a$  con matrice  $G^a$  è equivalente a una  $V_T$  tripolare  $C_{2T}^c$  con transresistenza  $r_m^c = 1/g_{12}^a$ .

*Prova* : Per le tensioni e correnti dei DBT coinvolti usiamo la convenzione cardinale. Usando le regole per la connessione parallelo di due DBT (vedere Par. 13.3.2), si ha che :

- Relazioni tra le tensioni del nullole tripolare, del generico DBT  $C_{2T}^a$  e del DBT composto  $C_{2T}^c$  :  
 $v_1^c = v_1^a = v_1^b$ ,  $v_2^c = v_2^a = v_2^b$ .
- Relazioni tra le correnti del nullole, del DBT  $C_{2T}^a$  e del DBT composto  $C_{2T}^c$  :  
 $i_1^c = i_1^a + i_1^b$ ,  $i_2^c = i_2^a = i_2^b$ .

- Relazioni costitutive del nullole  $C_{2T}^b$  :  $v_1^b = 0$ ,  $i_1^b = 0$ ,  $v_2^b$  nonvinc.,  $i_2^b$  nonvinc.
- Relazioni costitutive del generico DBT  $C_{2T}^a$  :  
 $i_1^a = g_{11}^a v_1^a + g_{12}^a v_2^a$ ,  $i_2^a = g_{21}^a v_1^a + g_{22}^a v_2^a$ .
- Relazioni costitutive del DBT composto  $C_{2T}^c$  :  
 $v_1^c = v_1^b = 0$ ,  $v_2^c = v_1^b - v_2^a = i_1^a/g_{12}^a$ ,  $i_2^c = i_2^b - i_2^a$  nonvincolata.

GENERICO DBT IN PARALLELO A UN NULLOLE TRIPOLARE E MODELLO EQUIVALENTE

Il lettore potrebbe considerare il caso in cui venga aggiunto in cascata alla porta d'ingresso un altro doppio bipolo generico. Si ottiene una sorgente pilotata con la porta d'ingresso nonideale e la porta d'uscita ideale.

### 13.4 SERIE DI DOPPI BIPOLI

Qualora la connessione di  $C_2^a$  e  $C_2^b$  possa essere considerata come una serie di due doppi bipoli (vedere Cap. 6), valgono le seguenti equazioni tra le grandezze coinvolte :

- le correnti di  $C_3^a$  e  $C_3^b$  soddisfano necessariamente alla :  $i_1^a = i_1^b$  e  $i_2^a = i_2^b$ .
- le correnti di  $C_5^c$  coincidono con quelle comuni a  $C_3^a$  e  $C_3^b$  :  $i_1^c = i_1^a$  e  $i_2^c = i_2^a$ .
- le tensioni di  $C_5^c$  sono date dalla somma delle corrispondenti tensioni di  $C_3^a$  e  $C_3^b$  :  
 $v_1^c = v_1^a + v_1^b$  e  $v_2^c = v_2^a + v_2^b$

DOPPI BIPOLI IN SERIE.

Cerchiamo le relazioni costitutive del componente  $C_5^c \equiv \text{Serie}\{C_2^a, C_2^b\}$  composto dalla serie di due doppi bipoli omogenei  $C_2^a$  e  $C_2^b$ .

*Proprietà* : Se le matrici resistenza  $R^a$  e  $R^b$  di  $C_2^a$  e  $C_2^b$  esistono, anche la matrice resistenza  $R^c$  di  $C_5^c$  esiste e viene ottenuta mediante la somma :

$$\begin{bmatrix} r_{11}^c & r_{12}^c \\ r_{21}^c & r_{22}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}^a + r_{11}^b & r_{12}^a + r_{12}^b \\ r_{21}^a + r_{21}^b & r_{22}^a + r_{22}^b \end{bmatrix}$$

DOPPI BIPOLI IN SERIE



*Prova* : è lasciata al lettore. ■

*Commento* : il fatto che uno o entrambi i doppi bipoli non ammettano la rappresentazione  $(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$  non significa necessariamente che la connessione sia incompatibile. Occorre procedere ricorrendo alle relazioni topologiche proprie della connessione serie. Un esempio significativo sarà visto nel Par. 13.6.2 (secondo Teorema di MILLER) e nel Par. 13.6.3. ■

*Caso particolare* : Cerchiamo le relazioni costitutive del DB  $C_2^c$  composto dal DB  $C_2^b$  con in serie alla prima porta il  $\mathcal{R} C_1^a$ . Se la matrice resistenza  $R^b$  esiste, la corrispondente matrice di  $C_2^c$  viene ottenuta sommando la resistenza  $r^a$  di  $C_1^a$  al corrispondente elemento :

$$\begin{bmatrix} r_{11}^c & r_{12}^c \\ r_{21}^c & r_{22}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^a + r_{11}^b & r_{12}^b \\ r_{21}^b & r_{22}^b \end{bmatrix}$$

RESISTORE IN SERIE ALLA PORTA DI UN DB

### 13.5 CONNESSIONE TRASVERSALE DI UN BIPOLO E UN DBT

Questa aggregazione può essere considerata come la connessione di due doppi bipoli in parallelo di cui uno piuttosto è costituito da una coppia trasversale bipolo-c.c. . Se il DBT è controllabile in tensione, il DBT composto viene facilmente analizzato. Nel caso in cui il DBT non sia controllabile in tensione, il primo Teorema di MILLER consente di calcolare rapidamente le relazioni costitutive dal DBT composto. Nel caso in cui il DBT sia un nullo il DBT composto è equivalente a una  $Y_I$ .

#### 13.5.1 Generalità

Consideriamo l'aggregazione del bipolo  $C_1^a$  a due terminali di porte diverse del generico DBT  $C_{2T}^b$  dando origine al DBT composto  $C_{2T}^c \equiv \text{Trasv}\{C_1^a, C_{2T}^b\}$  e si hanno le seguenti relazioni :

- L'aggregazione può essere studiata come parallelo di due DBT, avendo aggiunto al bipolo  $C_1^a$  un terminale isolato (Cap. 6).
- le tensioni di  $C_1^a$  e  $C_{2T}^b$  soddisfano necessariamente alla :  $v_1^b - v_2^b = v^a$ .
- le tensioni di  $C_{2T}^c$  coincidono con quelle di  $C_{2T}^b$  :  $v_1^c = v_1^b$  e  $v_2^c = v_2^b$
- le correnti di  $C_{2T}^c$  sono date dalle corrispondenti correnti di  $C_{2T}^b$  sommate/sottratte della corrente di  $C_1^a$  :  $i_1^c = i_1^b + i^a$  e  $i_2^c = i_2^b - i^a$

CONNESS. TRASVERSALE DI UN BIPOLO A UN DBT.

Cerchiamo le relazioni costitutive del DBT  $C_{2T}^c \equiv \text{Trasv}\{C_1^a, C_{2T}^b\}$  composto dal DBT  $C_{2T}^b$  connesso trasversalmente al  $\mathcal{R} C_1^a$ .

*Proprietà* : Se la matrice conduttanza  $G^b$  esiste, la corrispondente matrice di  $C_{2T}^c$  viene ottenuta sommando / sottraendo a ogni suo elemento la conduttanza  $g^a$  del  $\mathcal{R} C_{2T}^a$ . Infatti il DBT  $C_{2T}^c$  può essere visto come il parallelo del DBT  $C_{2T}^b$  e di un altro DBT costituito dal  $\mathcal{R} C_2^a$  e da un c.c., collocati trasversalmente :

$$\begin{bmatrix} g_{11}^c & g_{12}^c \\ g_{21}^c & g_{22}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^b + g^a & g_{12}^b - g^a \\ g_{21}^b - g^a & g_{22}^b + g^a \end{bmatrix}$$

CONNESSIONE TRASVERSALE DI UN RESISTORE E UN DBT

*Prova* : è lasciata al lettore. ■

#### 13.5.2 Primo teorema di Miller

Sotto il nome di *Primo teorema di MILLER* si nascondono le regole per la trasformazione equivalente di un tripolo non controllabile in tensione (per esempio,  $Y_Y$  e  $\mathcal{T}$ ) connesso trasversalmente a un  $\mathcal{R}$ . Questa trasformazione è di notevole interesse pratico nell'analisi dei circuiti elettronici.

*Teorema* : sia dato il DBT  $C_{2T}^c$  composto dalla connessione trasversale del  $\mathcal{R}(r^a) C_1^a$  al DBT  $C_{2T}^b$ , caratterizzato dal fatto che una delle due relazioni costitutive coinvolge solamente le due tensioni :  $v_2 = \alpha^b v_1$ . Questa equazione implica che  $C_{2T}^b$  non ammetta la rappresentazione  $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$ . Sotto le suddette ipotesi  $C_{2T}^c$  è equivalente a un DBT composto dal DBT  $C_{2T}^b$  e una coppia di  $\mathcal{R}$  in parallelo alle due porte :

- $\mathcal{R}(r_1^c = r^a/(1 - \alpha^b))$  in parallelo alla porta 1 di  $C_{2T}^b$ .
- $\mathcal{R}(r_2^c = r^a/(1 - 1/\alpha^b))$  in parallelo alla porta 2 di  $C_{2T}^b$ .

in cui  $\alpha^b$  è definita, avendo adottato la convenzione cardinale per  $C_{2T}^b$ .

DBT COMPOSITO ORIGINARIO E MODELLO EQUIVALENTE DOVUTO AL PRIMO TEOREMA DI MILLER.

*Prova* : operare algebricamente sulle due caratteristiche e trovare la caratteristica del DBT composto. ■

*Corollario* : sia  $C_{2T}^b$  una  $Y_Y$  : il rapporto delle tensioni della  $Y_Y$  coincide con  $\alpha^b$ . Il  $\mathcal{R}(r_1^c)$  in parallelo alla porta d'uscita può essere sostituito da un c.a., dal momento che  $i_2^b$  è nonvincolata. In questo caso  $C_{2T}^c$  rimane unidirezionale, come  $C_{2T}^b$ .

- $\mathcal{R}(r^c = r^a/(1 - a^b))$  in parallelo alla porta 1 di  $C_{2T}^b$ .

DBT ORIGINARIO CON UNA  $\mathcal{V}_Y$  E MODELLO EQUIVALENTE DOVUTO AL PRIMO TEOREMA DI MILLER.

**Corollario** : se  $C_{2T}^b$  è un  $\mathcal{T}$ , il suo rapporto di trasformazione  $n^b = 1/\alpha^b$  i due  $\mathcal{R}$  in parallelo alle due porte possono essere riuniti alla stessa porta, mediante un'opportuna trasformazione. Si può avere un unico  $\mathcal{R}$  in parallelo a una delle porte :

Unico  $\mathcal{R}(r^{cc} = r^a [n^b/(n^b - 1)]^2)$  oppure Unico  $\mathcal{R}(r^{cc} = r^a/(n^b - 1)^2)$   
 in parallelo alla porta 1 di  $C_{2T}^b$  . in parallelo alla porta 2 di  $C_{2T}^b$  .

DBT ORIGINARIO CON  $\mathcal{T}$  E DUE MODELLI EQUIVALENTI DOVUTI A PRIMO TEOREMA DI MILLER.

**Sorgenti pilotate nonideali** : In genere il primo Teorema di MILLER non può essere applicato alle sorgenti pilotate nonideali, dal momento che la resistenza presente alla porta pilotata crea un vincolo algebrico tra  $v_2$  e  $i_2$  non presente nelle sorgenti pilotate ideali. Se la sorgente pilotata è solo parzialmente nonideale nel senso che la resistenza  $r_{mg}$  all'ingresso è presente, mentre la porta pilotata è ideale, il teorema può essere applicato.

Il primo teorema di MILLER può essere ancora applicato, se, scegliendo come grandezza pilotante la tensione  $v_1$ , si perviene a un modello equivalente formato da una  $\mathcal{V}_Y$  con la resistenza  $r_{mg}$  in parallelo alla porta 1 .

WWWWWWW??? FARE ESEMPI IN PARTICOLARE FARE VEDERE COME con il primo teorema di Miller possano venire fuori resistori negativi anche se tutti i resistori originali sono positivi ????WWWWWW

### 13.5.3 Aggregazione trasversale di un resistore e un nullole tripolare

Molto frequentemente viene incontrato un DBT composto da un nullole tripolare e un  $\mathcal{R}$  connesso trasversalmente. Siccome il nullole equivale a una  $\mathcal{V}_Y$  con  $\alpha \rightarrow \infty$ , non possiamo ricorrere al Primo teorema di MILLER. Qui di seguito il DBT composto viene analizzato ricorrendo alle relazioni costitutive del nullole :

**Proprietà** : la connessione trasversale di un  $\mathcal{R}(r^a) C_{1T}^a$  al nullole tripolare  $C_{2T}^b$  è equivalente a una  $\mathcal{V}_T$  tripolare  $C_{2T}^c$  con transresistenza  $r_m^c = -r^a$ . ■

**Prova** : Definiamo le tensioni e correnti dei DBT coinvolti con la convenzione cardinale. Usando le regole per la connessione trasversale di un bipolo a un DBT (vedere Cap. 6), si ha che :

- Relazioni topologiche tra le tensioni del nullole, resistore e DBT composto :  
 $v_1^c = v_1^b$ ,  $v_2^c = v_2^b$ ,  $v_3^c = v_2^b + v^a$ .
- Relazioni topologiche tra le correnti del nullole, resistore e DBT composto :  
 $i_1^c = i_1^b + i^a$ ,  $i_2^c = i_2^b = i^a$ .
- Relazioni costitutive del nullole  $C_{2T}^b$  :  
 $v_1^b = 0$ ,  $i_1^b = 0$ ,  $v_2^b$  nonvinc.,  $i_2^b$  nonvinc.
- Relazione costitutiva del resistore  $C_{1T}^a$  :  $v^a = r^a i^a$
- Relazioni costitutive del DBT composto  $C_{2T}^c$  :  
 $v_1^c = v_1^b = 0$ ,  $v_2^c = v_2^b - v^a = -r^a i_1^c$ ,  $i_2^c = i_2^b + i^a$  nonvinc.

RESISTORE CONNESSO TRASVERSALMENTE A UN NULLORE TRIPOLARE E MODELLO EQUIVALENTE

**Commento** : La suddetta aggregazione potrebbe essere analizzata sostituendo il nullole con una  $\mathcal{V}_Y$  (o altra sorgente pilotata), cioè ripetendo l'analisi nel precedente paragrafo e facendo successivamente tendere a  $\infty$  il parametro di pilotaggio  $\alpha$  della  $\mathcal{V}_Y$ . ■

### 13.6 BIPOLIO IN SERIE AL TERMINALE COMUNE DI UN DBT

Questa aggregazione può essere considerata come la connessione di due doppi bipoli in serie di cui uno è un bipolo con quattro terminali. Se il DBT è controllabile in corrente, il DBT composto viene facilmente analizzato, per mezzo della rappresentazione controllata in corrente. Nel caso in cui il DBT non sia controllabile in corrente, il secondo Teorema di MILLER consente di calcolare rapidamente le relazioni costitutive dal DBT composto. Nel caso in cui il DBT sia un nullole il DBT composto è equivalente a una  $\mathcal{I}_Y$ .

#### 13.6.1 Generalità

Il bipolo  $C_1^a$  è connesso in serie al terminale comune del DBT  $C_{2T}^b$  dando origine al DBT composto  $C_{2T}^c \equiv \text{Commun}\{C_1^a, C_{2T}^b\}$

- la corrente di  $C_1^a$  eguaglia la somma delle correnti alle due porte di  $C_{2T}^b$  :  $i^a = i_1^b + i_2^b$
- le tensioni alle due porte di  $C_{2T}^c$  eguagliano la somma delle corrispondenti tensioni di  $C_{2T}^b$  e della tensione di  $C_1^a$  :  $v_1^c = v_1^b + v^a$  e  $v_2^c = v_2^b + v^a$
- le correnti alle porte di  $C_{2T}^c$  coincidono con le rispettive correnti di  $C_{2T}^b$  :  
 $i_1^c = i_1^b$  e  $i_2^c = i_2^b$

BIPOLIO IN SERIE AL TERMINALE COMUNE DI UN TRIPOLIO.

Cerchiamo le relazioni costitutive del DBT  $C_{2r}^c \equiv \text{Commun}\{C_1^a, C_{2r}^b\}$  composto dal DBT  $C_{2r}^b$  con in serie al terminale comune il resistore  $C_1^a$ .

**Proprietà** : Se la matrice resistenza  $R^b$  esiste, la corrispondente matrice di  $C_{2r}^c$  viene ottenuta sommando a ogni suo elemento la resistenza  $r^a$  di  $C_1^a$  :

$$\begin{bmatrix} r_{11}^c & r_{12}^c \\ r_{21}^c & r_{22}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}^b + r^a & r_{12}^b + r^a \\ r_{21}^b + r^a & r_{22}^b + r^a \end{bmatrix}$$

CONNESSIONE DI UN RESISTORE IN SERIE AL TERMINALE COMUNE DI UN DBT

**Prova** : è lasciata al lettore. ■

13.6.2 Secondo teorema di Miller

Sotto il nome di *secondo teorema di MILLER* si nascondono le regole per la trasformazione equivalente di un tripolo non controllabile in corrente (per esempio,  $\mathcal{I}_x$  e  $\mathcal{T}$ ) con in serie al terminale comune un resistore. Questa trasformazione è di notevole interesse pratico nell'analisi dei circuiti elettronici.

**Teorema** : sia dato il DBT  $C_{2r}^c$  composto dal  $\mathcal{R}(r^a)$   $C_1^a$  in serie al terminale comune del DBT  $C_{2r}^b$  caratterizzato dal fatto che una delle sue relazioni costitutive coinvolge solamente le due correnti :  $i_2 = \beta^b i_1$ . Questa equazione implica che  $C_{2r}^b$  non ammetta la rappresentazione  $(y_1, y_2) \leftarrow (i_1, i_2)$ . Sotto le ipotesi suddette  $C_{2r}^c$  è equivalente a un DBT composto dal DBT  $C_{2r}^b$  e una coppia di  $\mathcal{R}$  in serie alle due porte :

- $\mathcal{R}(r_1^c = r^a (1 + \beta^b))$  in serie alla porta 1 di  $C_{2r}^b$ .
- $\mathcal{R}(r_2^c = r^a (1 + 1/\beta^b))$  in serie alla porta 2 di  $C_{2r}^b$ .

in cui  $\beta^b$  è definita avendo adottato la convenzione cardinale per  $C_{2r}^b$ .

DBT ORIGINARIO E MODELLO EQUIVALENTE DEL DBT DOVUTO AL SECONDO TEOREMA DI MILLER.

**Prova** : Operare algebricamente sulle due caratteristiche e trovare la caratteristica del doppio bipolo composto. ■

**Corollario** : sia  $C_{2r}^b$  una  $\mathcal{I}_x$  : il rapporto delle correnti coincide proprio con  $\beta^b$ , il  $\mathcal{R}(r_2^c)$  in serie alla porta d'uscita può essere sostituito da un c.c., dal momento che  $v_2^b$  è nonvincolata. A sua volta  $C_{2r}^b$  rimane unidirezionale come  $C_{2r}^b$ .

- Unico  $\mathcal{R}(r_1^c = r^a (1 + \beta^b))$  in serie alla porta 1 di  $C_{2r}^b$ .

DBT ORIGINARIO CON  $\mathcal{I}_x$  E MODELLO EQUIVALENTE DOVUTO AL SECONDO TEOREMA DI MILLER.

**Corollario** : se  $C_{2r}^b$  un  $\mathcal{T}$ , con  $n^b = -\beta^b$  i due  $\mathcal{R}$  in serie alle due porte possono essere riuniti alla stessa porta :

Si può avere un unico  $\mathcal{R}$  in serie a una delle porte :

$$\begin{array}{l} \text{Unico } \mathcal{R}(r_1^c = (n^b - 1)^2 r^a) \\ \text{in serie alla porta 1 di } C_{2r}^b \end{array} \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{l} \text{Unico } \mathcal{R}(r_2^c = r^a [(n^b - 1)/n^b]^2) \\ \text{in serie alla porta 2 di } C_{2r}^b \end{array}$$

DBT ORIGINARIO CON UN  $\mathcal{T}$  E MODELLI EQUIVALENTI DOVUTI AL SECONDO TEOREMA DI MILLER.

**Sorgenti pilotate nonideali** : In genere il secondo Teorema di MILLER non può essere applicato alle sorgenti pilotate nonideali, dal momento che la resistenza presente alla porta pilotata crea un vincolo algebrico tra  $v_2$  e  $i_2$  non presente nelle sorgenti pilotate ideali. Se la sorgente pilotata è solo parzialmente nonideale nel senso che la resistenza  $r_{ng}$  all'ingresso è presente, mentre la porta pilotata è ideale, il teorema può essere applicato.

Il secondo teorema di MILLER può essere ancora applicato, se, scegliendo come grandezza pilotante la tensione  $i_1$ , si perviene a un modello equivalente formato da una  $\mathcal{I}_x$  con la resistenza  $r_{ng}$  in serie alla porta 1. WWWWW FARE ESEMPI

13.6.3 Aggregazione di un resistore in serie al terminale comune di un nullole tripolare

Molto frequentemente viene incontrato un DBT composto da un nullole tripolare e un  $\mathcal{R}$  in serie al terminale comune. Siccome il nullole equivale a una  $\mathcal{I}_x$  con  $\beta \rightarrow \infty$ , non possiamo ricorrere al secondo teorema di MILLER. Qui di seguito il DBT composto viene analizzato ricorrendo alle relazioni costitutive del nullole :

**Proprietà** : la connessione di un  $\mathcal{R}(r^a)$   $C_1^a$  in serie al terminale comune di un nullole tripolare  $C_{2r}^b$  è equivalente a una  $\mathcal{I}_y$  tripolare  $C_{2r}^c$  con transconduttanza  $g_m^c = 1/r^a$ .

*Prova* : usando le regole per la connessione di un bipolo al terminale comune di un DBT (vedere Cap. 6) si ha che :

- Relazioni topologiche tra le tensioni del nulloire,  $\mathcal{R}$  e DBT composito :  
 $v_1^c = v_1^b + v^a$  ,  $v_2^c = v_2^b + v^a$  .
- Relazioni topologiche tra le correnti del nulloire,  $\mathcal{R}$  e DBT composito :  
 $i_1^c = i_1^b$  ,  $i_2^c = i_2^b$  ,  $i_1^a = i_1^b + i_2^b$  .
- Relazioni costitutive del nulloire  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}^b$  :  
 $v_1^b = 0$  ,  $i_1^b = 0$  ,  $v_2^b$  nonvinc. ,  $i_2^b$  nonvinc.
- Relazione costitutiva del  $\mathcal{R}$   $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}^a$  :  $v^a = r^a i^a$
- Relazioni costitutive del DBT composito  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}^c$  :  
 $i_1^c = i_1^b = 0$  ,  $i_2^c = i^a = g^a v_1^c$  ,  $v_2^c = v_2^b + v^a$  nonvinc.

RESISTORE CONNESSO AL TERMINALE COMUNE DI UN NULLOIRE TRIPOLARE E MODELLO EQUIVALENTE

*Commento* : La suddetta aggregazione potrebbe essere analizzata sostituendo il nulloire con una  $\mathcal{I}_T$  (o altra sorgente pilotata), cioè ripetendo l'analisi nel precedente paragrafo e facendo successivamente tendere a  $\infty$  il parametro di pilotaggio  $\beta$  della  $\mathcal{I}_T$ . ■

### 13.6.4 Modello del giratore tramite due nullori

WWWWWW?? DA RISISTEMARE ???WWWWWW

Per mezzo di due nullori e quattro resistori si può realizzare un doppio bipolo composito equivalente a un  $\mathcal{G}$ .

WWWWWW SVIUIPPARE modello di Antoniou dalla tesi relazionata da Giancarlo.

Lo schema del circuito non è facile da esaminare occorre ridisegnarlo

Forse i due nullori hanno un  $\mathcal{R}$  trasversale quindi si può dire che il  $\mathcal{G}$  è costituito da due  $\mathcal{V}_T$  a due due  $\mathcal{R}$ . Forse in questo modo l'interpretazione risulta più agevole.

WWWWWW SVIUIPPARE QUI SOPRA

## 13.7 METODOLOGIA AGGREGA & RIMPIAZZA

Col termine "aggrega&rimpiazza" non si intende un metodo ben definito, ma piuttosto una metodologia d'analisi del circuito che deve essere adattata sia alla struttura sia ai componenti del circuito. Essa consiste nell'aggregare i componenti del circuito in un numero inferiore di componenti composti e quindi di considerare come incognite solo quelle definite alle porte dei componenti composti, che condensano quelli aggregati. La sostituzione di alcuni componenti aggregati con un unico componente composito equivale, dal punto di vista matematico, alla eliminazione di alcune variabili incognite (grandezze di

ramo dei componenti facenti parte dell'aggregazione) e alla sostituzione con alcune altre (grandezze di ramo del componente composito).

Dal momento che questa metodologia non può essere esposta in un modo sistematico ed efficace, il lettore, per approfondirla, deve rassegnarsi a fare molti esercizi e... *in bocca al lupo...*

Alcuni esempi possono essere trovati tra gli esercizi distribuiti in forma di fotocopie e associati a questi appunti.

### 13.7.1 Approccio

In seguito alla sua natura, la metodologia *aggrega&rimpiazza* può essere descritta solamente in termini piuttosto generici :

1. Aggregare i componenti semplici a gruppi formando un numero ridotto di componenti composti. Affinché la metodologia sia vantaggiosa, è opportuno che le aggregazioni siano scelte in modo che i parametri delle relazioni costitutive dei componenti composti siano facilmente calcolabili. Inoltre la scomposizione deve essere tale che le tensioni e correnti oggetto dell'analisi rimangano definite alle porte dei componenti rimasti dopo le aggregazioni.

2. se le grandezze di interesse rimanesse interne ai componenti composti, l'analisi può essere condotta mediante alcuni accorgimenti. Occorre trovare semplici relazioni (algebriche) che esprimano le grandezze di interesse, destinate a scomparire in quanto sono interne a un componente composito, in funzione di quelle esterne, cioè alle porte del medesimo componente composito. Questo accorgimento è particolarmente importante in presenza delle grandezze che pilotano le sorgenti pilotate, che potrebbero rimanere all'interno di un componente composito.

3. Calcolare le relazioni costitutive dei componenti composti a partire da quelle dei componenti interni a essi.

4. Risolvere il circuito semplificato costituito dai componenti composti. Oppure aggregare nuovamente i componenti del circuito semplificato per ottenere una ulteriore semplificazione, tornando al punto 1.

### 13.7.2 Commenti

Il successo di questo metodo dipende dal fatto che le aggregazioni di componenti semplici in componenti composti e di questi nel circuito completo siano ben note e facili da calcolare (vedere le precedenti sezioni di questo capitolo).

- Quindi intuizione ed esperienza sono basilari per applicarlo.
- Esso è molto adatto per uso cart&pena.
- Esso non si presta a una formalizzazione dettagliata di validità generale.
- Esso non è adatto a essere usato in un programma di analisi di uso generale.
- Tuttavia, esso è molto adatto per realizzare programmi veloci

per classi di circuiti caratterizzati dalla medesima struttura topologica.

Nei seguenti paragrafi sono ricordate le trasformazioni circuitali più usate per semplificare il calcolo delle relazioni costitutive dei componenti composti che possono essere individuati entro il circuito.

**13.7.3 Parallelo/serie di bipoli e/o porte**

Aggregare resistori in serie/parallelo (Sez. 7.3).

un bipolo in parallelo a una sorgente impressiva di tensione può essere sostituito da un circuito aperto (Sez. 7.3).

un bipolo in parallelo a un corto circuito può essere sostituito da un circuito aperto (Sez. 7.3).

un bipolo in serie a una sorgente impressiva di corrente può essere sostituito da un corto circuito (Sez. 7.3).

un bipolo in serie a un circuito aperto può essere sostituito da un corto circuito (Sez. 7.3). Trasformazione del parallelo di una sorgente impressiva di corrente con un resistore nella serie di una sorgente impressiva di tensione e un resistore e viceversa (Par. 7.2.3).

Osservare serie/parallelo di bipoli non omogenei e semplificare con trasformazioni THÉVENIN  $\leftarrow$  NORTON (Sez. 7.3).

Un bipolo in parallelo alla porta d'uscita di una  $V_x$ ,  $V_y$  o un nulloire può essere sostituito da un circuito aperto. (Sez. 10.3).

Un bipolo in serie alla porta d'uscita di una  $I_x$ ,  $I_y$  o un nulloire può essere sostituito da un corto circuito. (Sez. 10.3)

**13.7.4 Connessione di bipoli e doppi bipoli**

Sostituire bipoli collegati trasversalmente a un doppio bipolo proprio usato come improprio con un circuito aperto (Sez. 6.xx).

Vedere bipoli collegati trasversalmente a un DBT come parallelo di due DBT (Par. 6.5.2). Anche le seguenti trasformazioni sono state introdotte nel Cap. 13 :

semplificare una  $V_y$  ovvero un  $T$  tripolare con connessione trasversale di un  $\mathcal{R}$ , applicando il primo teorema di MILLER (Par. 13.5.2).

semplificare  $I_x$  ovvero un  $T$  tripolare con connessione di un  $\mathcal{R}$  in serie al terminale comune, applicando il secondo teorema di MILLER (Par. 13.6.2).

un DBT omogeneo a "T" può essere sostituito da un altro DBT a "T" e viceversa (Sez. 9.5). I nullori possono dare luogo a trasformazioni (vedere PPar. 13.5.3 e 13.6.3).

**13.7.5 Cascata di doppi bipoli**

Le seguenti trasformazioni sono spiegate nei CCap. 6.

La cascata di doppi bipoli di cui uno è proprio è a sua volta un doppio bipolo proprio. La cascata di doppi bipoli tripolari è a sua volta un doppio bipolo tripolare. (Par. 6.5.5)

negli altri casi la cascata da origine a un quadrupolo, che può o non può essere improprio a seconda del componente a cui è connessa. (Par. 6.5.5).

la cascata di doppi bipoli, tra cui almeno uno unidirezionale, è ancora un doppio bipolo unidirezionale (Par. 13.1.1).

la cascata di doppi bipoli, tra cui almeno uno zerdirezionale, è ancora un doppio bipolo zerdirezionale (Par. 13.1.1).

la cascata di un nulloire a altri doppi bipoli omogenei bidirezionali o unidirezionali con lo stessa direzione da origine a un nulloire. (Sez. 13.1.2).

la cascata di sorgenti pilotate è equivalente a un'altra sorgente pilotata o a un nulloire (Sez. 13.1.2).

la cascata di trasformatori ideali e giratori da origine a un trasformatore ideale se i giratori sono in numero pari, a un  $\mathcal{G}$ , se i  $\mathcal{G}$  sono in numero dispari (Sez. 13.1.2).

**13.7.6 NOTA PER IL FUTURO**

La presente sezione METODOLOGIA AGGREGA & RIMPIAZZA potrebbe diventare un apposito capitolo di cui la presente sezione sarebbe la premessa e poi vi sarebbero molti esercizi molto commentati come esempi. Comunque alcuni esempi si trovano nella raccolta di esercizi risolti a cura dell'autore.

# 14 COMPONENTI e CIRCUITI

## ADINAMICI TEMPO-VARIANTI e LINEARI

### 14.1 COMPONENTI ADINAMICI TEMPO-VARIANTI E LINEARI

Molti componenti dinamici, tempo-varianti e lineari possono essere definiti. Essi sono essere classificati seguendo la falsariga già introdotta per i componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari nel CCap. 7-9, con l'avvertenza che i parametri sia omogenei sia impressivi sono, almeno in parte, dipendenti dal tempo. Quindi una o più funzioni del tempo sono coinvolte nella caratterizzazione di questi componenti. Noi ci soffermeremo su pochi componenti di questa classe, cioè su quelli più usati nella pratica, tutti con due soli terminali. In principio, potrebbero essere definite sorgenti pilotate, trasformatori ideali tempo-varianti e così via. Questo non sarà fatto perché di limitato interesse.

#### 14.1.1 Classificazioni

In analogia ai bipoli dinamici tempo-invarianti e lineari (vedere Cap. 7), la rappresentazione implicita del più generale bipolo dinamico tempo-variante e lineare ha la forma:

$$h^v(t)v(t) + h^i(t)i(t) = \hat{h}(t)$$

Se i coefficienti  $h^v(t)$  e  $h^i(t)$  sono positivi (ovvero negativi)  $\forall t$ , possiamo dividere l'equazione per  $h^v(t)$  o  $h^i(t)$ , senza alterare la relazione costitutiva del bipolo: entrambe le rappresentazioni esplicite sono definite:

$$\text{Qualora } h^v(t) > 0 \forall t,$$

esiste la rappresentazione  $v \leftarrow i$

$$v(t) = -\frac{h^i(t)}{h^v(t)}i(t) + \frac{\hat{h}(t)}{h^v(t)}$$

che viene usualmente scritta nella forma:

$$v(t) = r(t)i(t) + \hat{v}(t)$$

$$\text{Qualora } h^i(t) > 0 \forall t,$$

esiste la rappresentazione  $i \leftarrow v$

$$i(t) = -\frac{h^v(t)}{h^i(t)}v(t) + \frac{\hat{h}(t)}{h^i(t)}$$

che viene usualmente scritta nella forma:

$$i(t) = g(t)v(t) + \hat{i}(t)$$

Le seguenti tre classi di bipoli dinamici, tempo-varianti e lineari possono essere definite:

**bipoli impressivi e omogenei**: essi non sono di interesse in quanto coincidono, necessariamente, con i corrispondenti bipoli tempo-invarianti (c.c. e c.a.) essendo definiti, rispettivamente, dalle  $h^v(t)v(t) = 0$  e  $h^i(t)i(t) = 0$ . ■

**bipoli impressivi e nonomogenei**: essi sono definiti da:

$$h^v(t) = 0 \text{ e } h^i(t) = 1$$

*bipoli controllabili in tensione*

$$h^i(t) = 0 \text{ e } h^v(t) = 1$$

*bipoli controllabili in corrente*

Tra i primi vi sono le sorgenti di corrente impressiva tempo-varianti e tra i secondi le sorgenti di tensione impressiva tempo-varianti. ■

FARE FIGURA EMBLEMA del capitolo: Una funzione caratteristica del tempo.

Questo capitolo introduce i componenti e i circuiti dinamici tempo-varianti e lineari, indispensabili in tutti i circuiti per l'informazione e comuni anche ai circuiti per l'energia. Molti componenti fisici descritti da modelli dinamici, tempo-varianti e lineari esistono. In principio dovremmo classificarli seguendo la falsariga introdotta per i corrispondenti componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari, tenendo presente che i parametri sia omogenei sia impressivi dipendono, almeno in parte, dal tempo.

**Sez. 14.1: Componenti dinamici tempo-varianti e lineari**: Noi ci soffermiamo su alcuni componenti dinamici, tempo-varianti e lineari cioè su quelli più usati nella pratica, e in particolare solo sui bipoli: le sorgenti (impressive e nonideali) tempo-varianti, gli interruttori (ideali e nonideali) e i resistori tempo-varianti.

**Sez. 14.2: Segnali e informazione**: Il fatto che alcune grandezze (tensioni e correnti impressivi) e parametri (resistenze) dipendano dal tempo suggerisce l'introduzione del concetto di segnale. A ciascun segnale viene associata una *quantità d'informazione*. Alcune considerazioni molto generali sono discusse.

**Sez. 14.3: Circuiti dinamici tempo-varianti e lineari**: In principio, la soluzione dei circuiti dinamici tempo-varianti e lineari può essere ottenuta ripetendo ad ogni istante di tempo le stesse operazioni algebriche richieste dai circuiti dinamici, tempo-invarianti e lineari: comunque, nel caso molto frequente in cui il tempo interviene solo nelle grandezze impressivi, l'analisi si semplifica notevolmente.

**Sez. 14.4: Impulsi nonideali e ideali**: Gli impulsi sono funzioni (forme d'onda, segnali) diffusissimi nei circuiti elettronici più disparati. Essi, in un certo senso, costituiscono l'anello di congiunzione che caratterizza l'evoluzione dai circuiti analogici (continui nel dominio del tempo) a quelli digitali (discreti nel dominio del tempo).

WWWWWWWW?? Trasferire gli impulsi all'inizio del Cap. 15 ???WWWWWWWW  
WWWWWWWW?? Anticipare in questo capitolo sinusoidi, esponenziali e trigonometria elementare (appendice) ???WWWWWWWW.

**bipoli nonimpressivi e omogenei** : essi sono definiti da :

$$h^v(t) = 1 \text{ e } h^i(t) = 0$$

*bipoli controllabili in tensione*                      *bipoli controllabili in corrente*

Tra i primi vi sono i resistori tempo-varianti controllabili in tensione e tra i secondi i resistori tempo-varianti controllabili in corrente. Un caso a parte, ma molto importante, sono gli interruptori ideali, che sono controllabili né in tensione né in corrente.

**bipoli nonimpressivi e nonomogenei** : essi possono essere sintetizzati con i bipoli delle precedenti classi in accordo ai modelli di THÉVENIN e NORRÓN (vedere Cap. 7). Senza entrare nei dettagli, questi modelli restano validi anche quando l'ipotesi di tempo-invarianza viene rimossa. Tra questi bipoli hanno un ruolo preminente le sorgenti nonideali tempo-varianti sia di tensione sia di corrente.

**14.1.2 Sorgenti impulsive tempo-varianti**

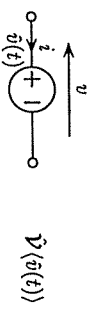
**Definizione** : la *sorgente impressiva di tensione* (sVi) *tempo-variante* è definita dalle condizioni :

$$h^v(t) = 1, h^i(t) = 0, \hat{h}(t) \neq 0$$

da cui si ha la rappresentazione esplicita :

$$v(t) = \hat{v}(t) = \hat{h}(t) \text{ con } i(t) \text{ non vincolata}$$

dove  $\hat{v}(t)$  è la *tensione impressa*.



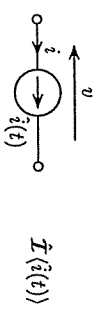
**Definizione** : la *sorgente impressiva di corrente* (sIi) *tempo-variante* è definita dalle condizioni :

$$h^v(t) = 0, h^i(t) = 1, \hat{h}(t) \neq 0$$

da cui si ha la rappresentazione esplicita :

$$i(t) = \hat{i}(t) = \hat{h}(t) \text{ con } v(t) \text{ non vincolata}$$

dove  $\hat{i}(t)$  è la *corrente impressa*.



**Commento** : Le sorgenti impulsive tempo-varianti sono a loro volta classificabili in base all'andamento della grandezza impressa,  $\hat{v}(t)$  ovvero  $\hat{i}(t)$ , rispetto al tempo  $t$  : esse trasferiscono all'interno del circuito la quantità di informazione associata alle grandezze impresse tempo-varianti. Questa distinzione tra le sorgenti impulsive tempo-varianti viene evidenziata, qualora necessario, indicando accanto al simbolo grafico la specifica funzione del tempo,  $\hat{v}(t)$  ovvero  $\hat{i}(t)$ , che la grandezza impressa assume.

**Potenza** : Le sorgenti impulsive tempo-varianti sono attive dal momento che la tensione ovvero la corrente sono nonvincolate.

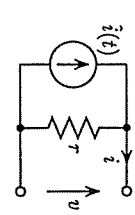
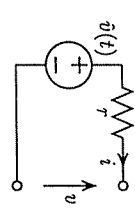
**14.1.3 Sorgenti nonideali tempo-varianti**

Analogamente ai corrispondenti bipoli tempo-invarianti (vedere Cap. 7), introduciamo le sorgenti tempo-varianti nonideali. Esse possono essere sintetizzate da una sVi tempo-variante in serie ad un resistore (modello di THÉVENIN) ovvero da una sIi tempo-variante in parallelo a un resistore (modello di NORRÓN). Benché in principio anche la resistenza interna della sorgente nonideale possa essere supposta tempo-variante, nei casi di maggior

interesse essa è tempo-invariante :  
*sorgente nonideale di tensione tempo-variante sorgente nonideale di corrente tempo-variante*

$$v(t) = \hat{v}(t) + r i(t)$$

$$i(t) = \hat{i}(t) + g v(t)$$



**14.1.4 Resistori tempo-varianti**

Questa classe di componenti è definita dalla relazione costitutiva :

$$h^v(t) v(t) + h^i(t) i(t) = \hat{h}(t) \text{ qualora } \hat{h}(t) = 0$$

In questo caso possono esistere una o entrambe le rappresentazioni esplicite :

controllata in corrente se  $h^v(t) > 0 \forall t$

controllata in tensione se  $h^i(t) > 0 \forall t$

$$v(t) = r(t) i(t) \text{ dove } r(t) = \frac{h^i(t)}{h^v(t)}$$

$$i(t) = g(t) v(t) \text{ dove } g(t) = \frac{h^v(t)}{h^i(t)}$$

**Commento** : Nel caso in cui  $h^v(t) = 0 \exists t \in \mathbb{R}_t$  ovvero  $h^i(t) = 0 \exists t \in \mathbb{R}_t$ , abbiamo  $r(t) \rightarrow \infty \exists t \in \mathbb{R}_t$  ovvero  $g(t) \rightarrow \infty \exists t \in \mathbb{R}_t$ .

**Potenza** : I resistori tempo-varianti con  $r(t) > 0 \forall t$  ovvero con  $g(t) > 0 \forall t$  sono dissipativi dal momento che  $p(t) = r(t) i(t)^2 \geq 0 \forall t$  ovvero  $p(t) = g(t) v(t)^2 \geq 0 \forall t$ .  
Resistori tempo-varianti a scalinata. Sono bipoli lineari e omogenei, la cui resistenza varia a istanti predefiniti mantenendo un valore fisso tra un istante e il successivo.

**Proprietà** : un resistore tempo-variante a scalinata è equivalente ad un bipolo composto da resistori tempo-invarianti e alcuni int.id. opportunamente connessi.

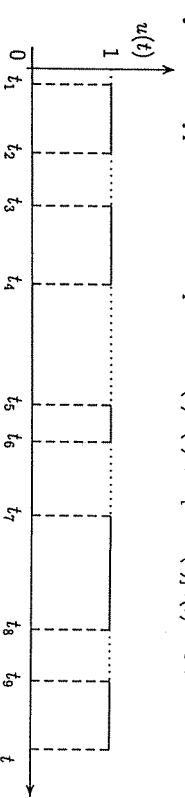
**Commento** : qualsiasi funzione  $r(t)$  può venire approssimata con una funzione a scalinata purché la scalinata sia sufficientemente fitta.  
WWWWWW?? FARE FIGURA della scalinata

**14.1.5 Interruttore ideale**

**Definizione** : l'*interruttore ideale*, abbreviato in int.id., è un bipolo omogeneo che a seconda degli istanti di tempo considerati coincide con un corto circuito ovvero un circuito aperto. In altre parole i tre parametri tempo-varianti presenti nella rappresentazione implicita hanno le seguenti espressioni :

$$h^v(t) = u(t), h^i(t) = r(1 - u(t)), \hat{h}(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_t \text{ dove } u(t) = \begin{cases} 1 & \text{(int.id. } \equiv \text{ c.c.)} \\ 0 & \text{(int.id. } \equiv \text{ c.a.)} \end{cases}$$

Quindi la rappresentazione implicita è  $u(t) v(t) + r [1 - u(t)] i(t) = 0$ .



**Commento :** Il parametro tempo-invariante  $r$  rappresenta una resistenza ed è stato inserito in seguito a un'osservazione di uno studente "saggiamente pigrolo" in modo che le dimensioni fisiche dei due addendi che compaiono a primo membro siano le stesse. Comunque il valore di  $r_1$  purché non sia nullo, non cambia la relazione costitutiva dell'int.id. Siccome i coefficienti  $h^v(t)$  e  $h^i(t)$  non possono essere supposti unitari, non esiste alcuna rappresentazione esplicita. Questo fatto non trova riscontro nei corrispondenti bipoli tempo-invarianti. Per questo motivo esso non può essere considerato impressivo benché esso sia inerte e omogeneo sia negli intervalli di tempo in cui  $h^v(t) = 0$  sia in quelli in cui  $h^i(t) = 0$ .

**Potenza :** Gli interruttori ideali sono inerti, dal momento che ad ogni istante la corrente o la tensione sono nulle. In altre parole si ha che  $p(t) = v(t) i(t) = 0 \forall t$ .

**Commento :** La funzione  $u(t)$  può essere considerata come un segnale d'ingresso con un proprio contenuto di informazione. In questo caso, l'informazione è costituita dall'insieme discreto degli istanti di tempo  $t_1, t_2, t_3, \dots$ , in cui  $u(t)$  commuta da un valore all'altro. Al contrario, gli interruttori usati nei circuiti di potenza non hanno in genere lo scopo di trasmettere dell'informazione, ma piuttosto di staccare degli apparecchi elettrici dalla rete di alimentazione per eliminare una inutile dissipazione di potenza.

**Divagazione :** un bambino, entrando nella sua cameretta per andare a dormire, accende la luce, trasformando un circuito aperto in un corto circuito. Dal momento che egli è inconsapevole di questo fatto, egli dormirà felice e beato senza incubi di bipoli nonlineari e/o tempo-varianti, che qualche volta preoccupano il lettore adulto.

**Terminologia :** È ben noto che una rete elettrica ha un'analogia con una rete idraulica, per esempio la rete di distribuzione dell'acqua potabile. In particolare gli interruttori elettrici di una rete elettrica hanno lo stesso ruolo dei rubinetti in una rete idraulica. Comunque la terminologia è contraddittoria :

- porta aperta  $\implies$  una persona può passare
- rubinetto aperto  $\implies$  l'acqua può passare
- interruttore aperto (c.a.)  $\implies$  la corrente elettrica non può passare
- porta chiusa  $\implies$  una persona non può passare
- rubinetto chiuso  $\implies$  l'acqua non può passare
- interruttore chiuso (c.c.)  $\implies$  la corrente elettrica può passare

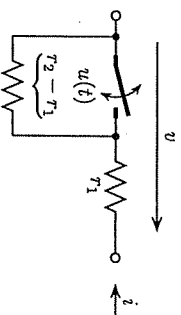
I tecnici (compresi gli ingegneri) che lavorano presso gli enti erogatori dell'acqua e dell'energia elettrica usano gli aggettivi "chiuso" e "aperto" in completa contraddizione. ■

14.1.6 Interruttori fisici

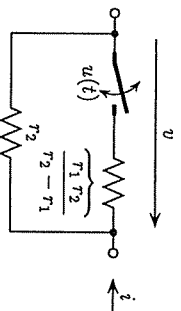
L'int.id. può risultare inadeguato a descrivere il comportamento degli interruttori fisici. In questo caso si ricorre a bipoli tempo-varianti più complessi : un resistore tempo-variante, la cui resistenza  $r(t)$  varia col tempo assumendo, per qualsiasi  $t$ , uno dei valori alternativi  $r_1$  o  $r_2$ , dove  $r_1 \ll r_2$ . Di esso esistono due modelli tra loro equivalenti :

**Modello serie/parallelo :** il modello è costituito da un int.id. in parallelo ad un  $\mathcal{R}(r_2 - r_1)$ , il tutto in serie e un altro  $\mathcal{R}(r_1)$  in serie e un altro  $\mathcal{R}(r_2)$  in parallelo :

$$r(t) = r_2 + (r_1 - r_2) u(t)$$



$$r(t) = \frac{1}{1/r_2 + (1/r_1 - 1/r_2) u(t)}$$



In entrambi i modelli si ha  $r(t) = r_2$  per  $u(t) = 0$  e  $r(t) = r_1$  per  $u(t) = 1$ .

**Commento :** I modelli dinamici nonideali costituiti da un int.id. e due resistori sono dissipativi.

**Commutazione ideale e fisica :** Gli interruttori, sia ideali sia nonideali, forzano la tensione/corrente a fare salti (discontinuità). Questo è in contrasto col fatto che salti bruschi sono incompatibili con un modello puramente dinamico di un interruttore fisico (vedere Cap. 5). In genere la manovra di un interruttore fisico, specialmente nei circuiti con potenze in gioco elevate, provoca disturbi elettromagnetici a carattere impulsivo nello spazio fisico attorno al circuito, originati proprio dalle variazioni brusche delle grandezze (tensioni e/o correnti) coinvolte nella commutazione. Per esempio, pensate ai disturbi prodotti dall'accensione tradizionale del motore a scoppio sulla radio a bordo di una automobile. Quindi un modello di un interruttore fisico più aderente alla realtà deve essere dinamico e può essere ottenuto connettendo in serie e/o parallelo all'int.id. un induttore e/o un condensatore. Un opportuno modello dinamico fa sì che il tempo di commutazione non sia più idealmente nullo ma sia di fatto finito.

**Interruttori pilotati :** Come visto precedentemente, la posizione dell'interruttore è descritta dalla funzione temporale  $u(t)$ . Vengono impiegati molto spesso componenti in cui  $u(t)$  dipende da una variabile di ramo  $v(t)$  ovvero  $i(t)$  del circuito in cui è inserito l'interruttore, invece che dal tempo. Un componente di questo tipo viene chiamato *interruttore pilotato* e costituisce un doppio bipolo unidirezionale, la cui porta d'ingresso è un c.a., quando è pilotato da una tensione, ovvero un c.c., quando è pilotato da una corrente, mentre la seconda porta è un c.c. ovvero un c.a. a seconda della positività o negatività della grandezza pilotante. Siccome l'interruttore pilotato è un doppio bipolo dinamico tempo-invariante e nonlineare verrà esaminato nell'apposito capitolo sui componenti nonlineari per ora non disponibili. ■



#### 14.1.7 Nota storica

I componenti tempo-varianti hanno avuto un ruolo essenziale nello sviluppo della trasmissione dell'informazione fin dal secolo scorso. L'interruttore, manovrato dal telegrafista, è stato fondamentale per lo sviluppo della telegrafia e per lo sviluppo dei muscoli del dito del telegrafista stesso: il suo compito consisteva nel realizzare la funzione  $v(t)$ , che immette l'informazione codificata mediante l'alfabeto MORSE nel circuito telegrafico. In un certo senso un telegrafista (figura ormai in via di estinzione) comunica attraverso il suo dito indice, mentre una persona parlante comunica usando la bocca. In entrambi i casi si assume che il dito e la bocca siano pilotati dal cervello.

Il sistema telegrafico con l'alfabeto MORSE è ormai in via di abbandono, superato da più moderni e sofisticati metodi di codifica delle informazioni. Comunque, l'alfabeto MORSE, grazie alla sua semplicità, può ancora essere usato da un alpinista bloccato in montagna attivando e disattivando la luce emessa da una torcia elettrica per mezzo dell'interruttore. Ma ormai anche in questo caso il "telefono" sta prendendo il sopravvento.

Il resistore tempo-variante, modulato dalla pressione del segnale fonico all'interno del microfono, è stato fondamentale per immettere il segnale vocale in una rete telefonica e trasmetterlo in luoghi lontani.

**Commento**: Nel secolo diciannovesimo, il telegrafo ha dato un contributo, congiuntamente alle ferrovie, essenziale per la conquista, da parte degli Stati Uniti, della *west coast* con una rapidità mai riscontrata nei secoli precedenti. ■

### 14.2 SEGNALI E INFORMAZIONE

Il fatto che delle funzioni del tempo (per esempio tensioni e correnti impresse e resistenze) siano coinvolte nelle relazioni costitutive dei componenti tempo-varianti suggerisce l'introduzione del concetto di *quantità d'informazione*, o più precisamente della cosiddetta Ingegneria dell'Informazione. Qui di seguito facciamo alcune considerazioni di carattere molto generale.

#### 14.2.1 Quantità di informazione

**Segnali d'ingressso nella realtà**: Le sorgenti impulsive tempo-varianti sono di estremo interesse pratico. Le loro grandezze impresse, in quanto variabili col tempo, hanno diritto ad essere considerati segnali di ingresso del circuito per l'intrinseco contenuto d'informazione che immettono nel circuito stesso.

I segnali forniti dalle sorgenti impulsive tempo-varianti possono rappresentare un segnale fonico analogico (presente nel telefono, radio, televisione, giradischi tradizionale, ...) un segnale televisivo analogico (televisione), caratteri alfa-numeric codificati (calcolatori), segnali fonici digitalizzati (sistema Compact Disk), segnali televisivi digitalizzati (televisione ad alta definizione), immagini digitalizzate (radiologia digitale). Lo studio di questi segnali non sarà approfondito in questa sede dal momento che esso è affrontato in altri corsi: Comunicazioni Elettriche, Teoria dell'Informazione, Teoria dei Segnali, ... ■

Una funzione del tempo di tipo generico contiene una cosiddetta *quantità d'informazione*, che può essere misurata. Qui non ci addentriamo su questo pur molto importante concetto per i motivi già detti.

Possiamo solo dire che la *quantità d'informazione per unità di tempo* contenuta in un seg-

nale rapido è in genere più elevata che quella contenuta in un segnale lento. Come caso estremo se il segnale è costante la quantità d'informazione contenuta è nulla. Qui ci limitiamo ad elencare alcune funzioni del tempo, in cui ci si imbatte frequentemente nell'analisi dei circuiti. Esse, per la loro "regolarità", hanno un contenuto di informazione molto basso e vengono spesso chiamate *forme d'onda*:

Esponenziale crescente, esponenziale decrescente,  
sinusoide pura, sinusoide smorzata,  
gradino, impulso rettangolare o triangolare,  
onda quadra, onda triangolare,  
onda quadra periodica, onda triangolare periodica.

Le forme d'onda periodiche possono essere espresse come somma di un numero infinito di sinusoidi di frequenza multiple della frequenza fondamentale (serie di Fourier), come sarà visto nella Sez. 18.7. Questo fa sì che le sinusoidi abbiano un ruolo di assoluto rilievo tra le forme d'onda periodiche.

**Commento**: La quantità di informazione contenuta in una sinusoide pura  $a \cos(\omega t + \phi)$  è molto bassa e si riduce alla tripla di parametri fissi, ampiezza  $a$ , fase iniziale  $\phi$  e frequenza  $\omega/(2\pi)$ , che caratterizzano la sinusoide. La limitata quantità d'informazione associata ad una sinusoide può essere incrementata se consentiamo all'ampiezza  $e/o$  alla frequenza  $e/o$  alla fase di variare col tempo. Su questo principio sono basate le sinusoidi la cui ampiezza ovvero la frequenza ovvero la fase sono modulate, rispettivamente,  $a(t) \cos(\omega t + \phi)$ ,  $a \cos(\omega(t) t + \phi)$  e  $a \cos(\omega t + \phi(t))$ . Esse hanno un ruolo fondamentale nella trasmissione di segnali analogici  $e/o$  digitali (vedere Corsi di comunicazioni elettriche, teoria dei segnali, ...).

Anche una forma d'onda quadrata periodica contiene una limitata quantità d'informazione, dal momento che gli intervalli di tempo si ripetono uguali. Se accettiamo che la durata  $e/o$  l'altezza di ciascun impulso quadrato sia variabile anch'essa può servire per trasmettere informazione. ■

**Ruzzolando per le scale**: Come fate quando siete costretti a scendere al buio una rampa di scale, mai percorsa in precedenza?

Il buio vi impedisce di acquisire per via visiva le informazioni necessarie concernenti la geometria della rampa. Quindi scendete i primi gradini con molta cautela, in modo da acquisire per mezzo dei vostri piedi le informazioni sulla geometria della rampa (il nostro cervello può acquisire informazioni anche attraverso i piedi senza voler con questo offendere il proprietario del cervello). Dopo aver disceso i primi gradini, avendo constatato che la rampa ha una sua periodicità (gradini sempre uguali), accelerate il passo perché ormai avete acquisito le poche informazioni necessarie sulla rampa.

Se nella stessa situazione dovete scendere lungo una scala disassata? I gradini diseguali vi costringono ad acquisire informazioni gradino per gradino dal momento che ciascuno di essi ha una forma diversa da quello precedente. Quindi scenderete tutta la rampa con estrema cautela eccetto che accettate di rischiare un ruzzolone. ■

#### 14.2.2 Relazione tra quantità e qualità d'informazione

Il fatto che una forma d'onda regolare abbia un minor contenuto di informazione può essere illustrato da un esempio preso dalla vita di tutti i giorni. Confrontiamo un pappagallo

che ripete a ritmo sostenuto il nome della padrona di casa e un intrattenitore televisivo. Il discorso del pappagallo è molto più regolare (quasi periodico) ma quasi privo di *quantità d'informazione* al confronto con la *quantità d'informazione* contenuta nelle chiacchiere dell'intrattenitore.

Quindi le reti televisive disponibili in Italia, sia private sia pubbliche, forniscono indubbiamente ogni giorno una elevata quantità d'informazione all'utente. Ma cosa la *quantità dell'informazione* è sinonimo di *qualità dell'informazione*? Purtroppo proprio niente dal momento che ad una elevata quantità d'informazione può corrispondere una qualità pappagallesca, anche se i padroni delle reti sembrano non accorgersene.

**Commento** : La differenza, per esempio, tra un ingegnere delle comunicazioni e un giornalista sta nel fatto che il primo si preoccupa solamente della quantità dell'informazione, mentre il secondo "dovrebbe" occuparsi della qualità dell'informazione. ■

#### 14.2.3 Informazione e politica

Nel precedente paragrafo avevamo affermato che una bassa quantità d'informazione implica necessariamente una bassa qualità d'informazione, mentre una elevata quantità d'informazione non implica necessariamente un'altrettanto elevata qualità d'informazione. Nella storia recente del nostro paese, numerosi personaggi che contano o contavano hanno dimostrato di conoscere e applicare molto bene questi concetti. Per esempio, quando fanno operazioni fuori dalla Legge, la prima azione è quella di impedire la diffusione di qualsiasi informazione

*quantità di informazione nulla e qualità di informazione nulla*

Se, in seguito a qualche evento imprevisto, qualche informazione comincia a circolare nell'opinione pubblica, si intraprende un'azione di recupero diffondendo moltissime informazioni, sia vere sia false, in modo da sfiorare l'opinione pubblica e impedirle di capire :

*quantità d'informazione elevata e qualità d'informazione bassa*

L'abbattimento del DC9 nel cielo di Ustica (1981) costituisce un caso esemplare.

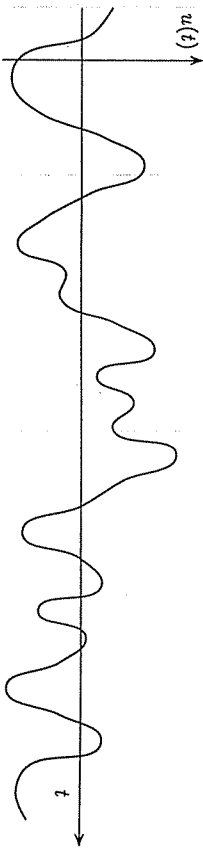
Gli scandali di Tangentopoli sono saltati fuori a grappoli proprio per questo motivo. Essi sono stati così numerosi che l'opinione pubblica è ormai preparata (rassegnata) ad un probabile prossimo colpo di spugna.

#### 14.2.4 Segnali nonideali

Per motivi di origine fisica le grandezze impresse tempo-varianti (segnali, forme d'onda) presenti nei componenti fisici soddisfano necessariamente alle condizioni :

$$\begin{aligned} -M_1 < \dot{v}(t) < +M_1 \quad \forall t & , & -M_2 < \ddot{v}(t) < +M_2 \quad \forall t \\ -M_3 < \frac{\dot{v}(t_2) - \dot{v}(t_1)}{t_2 - t_1} < M_3 \quad \forall t_1, t_2 & , & -M_4 < \frac{\ddot{v}(t_2) - \ddot{v}(t_1)}{t_2 - t_1} < M_4 \quad \forall t_1, t_2 \end{aligned}$$

dove  $M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$  sono numeri reali positivi molto grandi ma comunque finiti.



In altre parole le grandezze impresse e i loro rapporti incrementali sono funzioni limitate sia superiormente sia inferiormente. Infatti eventuali discontinuità di una tensione o una corrente impressa produrrebbero variazioni finite dell'energia immagazzinata in tempi infinitesimali. Comunque, a volte vengono considerati segnali ideali, non soddisfacenti alle precedenti condizioni, come casi limite di quelli nonideali.

### 14.3 CIRCUITI ADINAMICI TEMPO-VARIANTI E LINEARI

Accenniamo brevemente alla soluzione dei circuiti adinamici tempo-varianti e lineari. In principio, la soluzione di questi circuiti può essere cercata con gli stessi metodi impiegati per i circuiti adinamici, tempo-invarianti e lineari (vedere CCap. 11 e 12).

#### 14.3.1 Soluzione del circuito nel caso generale

La soluzione di un generico circuito adinamico tempo-variante (t-var.) e lineare consiste nello studiare un sistema di equazioni lineari in cui sia gli elementi della matrice sia quelli del vettore dei termini noti variano, almeno in parte, col tempo. Conseguentemente, le grandezze incognite (tensioni di nodo  $v^{nod}(t)$ , tensioni di ramo  $v(t)$  e correnti di ramo  $i(t)$ ) saranno, a loro volta, funzioni del tempo. La soluzione si ottiene risolvendo, istante per istante, i sistemi lineari che si ottengono "congelando" gli elementi variabili col tempo all'istante considerato :

$$\begin{bmatrix} v^{nod}(t) \\ v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^T & I_{n,m} & 0_{n,m} \\ 0_{n-1,n-1} & 0_{n-1,m} & A \\ 0_{m,m} & H^v(t) & H^i(t) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_n \\ 0_{n-1} \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

tempo-variante t-var.

La procedura sarebbe piuttosto pesante, perché occorre studiare un numero molto elevato di sistemi lineari, uno per ciascun istante di tempo di interesse. Inoltre, complicazioni di tipo teorico insorgerebbero qualora per qualche istante di tempo la matrice del sistema fosse singolare. Dal momento che questi circuiti sono di limitato interesse non li consideriamo ulteriormente. Solo il caso in cui la tempo-varianza risulta confinata alle sorgenti impulsive viene ripreso nel seguente paragrafo.

14.3.2 Circuiti adinamici lineari con solo sorgenti impulsive tempo-varianti

Consideriamo la classe, invero molto importante, di circuiti adinamici tempo-varianti e lineari, in cui gli unici componenti tempo-varianti siano le sorgenti impulsive. Siccome la dipendenza dal tempo coinvolge solamente le grandezze impresse presenti nelle relazioni costitutive dei componenti non omogenei, il sistema lineare, ottenuto con uno qualsiasi dei metodi di analisi, ha la matrice tempo-invariante e il vettore dei termini noti tempo-variante. Per esempio, se descriviamo il circuito mediante il metodo totale la soluzione  $[v^{mod}(t)^T \ i(t)^T]^T$  viene ottenuta invertendo la matrice una volta per tutte e postmoltiplicandola per il vettore dei termini noti tempo-varianti :

$$\begin{bmatrix} v^{mod}(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^T & I_{n,m} & 0_{n,m} \\ 0_{n-1,n-1} & 0_{n-1,m} & A \\ 0_{n,m} & H^v & H^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_n \\ 0_{n-1} \\ \hat{u}(t) \end{bmatrix}$$

tempo-invariante t-var.

Facendo riferimento al precedente sistema lineare si può constatare che tutti i teoremi e proprietà introdotti per i componenti e circuiti adinamici tempo-invarianti e lineari nei CCap. 7-13 rimangono validi, istante per istante, anche in presenza di sorgenti impulsive tempo-varianti. Questa estensione è una immediata conseguenza del fatto che, la tempo-varianza delle grandezze impresse non contamina in alcun caso la tempo-invarianza degli elementi della matrice del sistema. Le seguenti proprietà rimangono valide con l'avvertenza che le grandezze impresse sono in genere tempo-varianti :

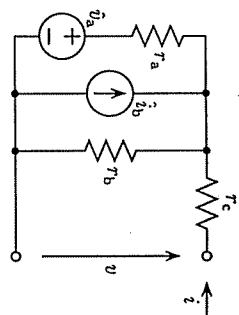
1. I modelli di THÉVENIN e NORTON dei bipoli nonimpressivi e nonomogenei (Cap. 7).
2. Regole per la serie e parallelo di bipoli nonomogenei (Cap. 7).
3. Regole dei partitori di tensione e corrente (Cap. 7).
4. Primo e secondo teorema di MILLMANN e metodo della falsa posizione (Cap. 7).
5. Rappresentazioni esplicite e modelli cardinali e noncardinali dei doppi bipoli e multiporte (CCap. 8-9).
6. I tre teoremi di equivalenza (CCap. 8 e 11).
7. Teoremi di THÉVENIN e NORTON (Cap. 11).
8. Principio di sovrapposizione degli effetti (Cap. 11).
9. Metodi di analisi semplificati (Cap. 12).
10. Formule per l'aggregazione di componenti (Cap. 13)

14.3.3 Esempi

**Esempio 1 :** Teorema di Thévenin : Calcoliamo la tensione impressa  $\hat{v}_{eq}(t)$  e la resistenza  $r_{eq}$  del modello di THÉVENIN del bipolo composto in figura :

$$\hat{v}_{eq}(t) = \frac{\hat{v}_a(t)/r_a + \hat{i}_b(t)}{1/r_a + 1/r_b}, \quad r_{eq} = r_c + \frac{r_a r_b}{r_a + r_b}$$

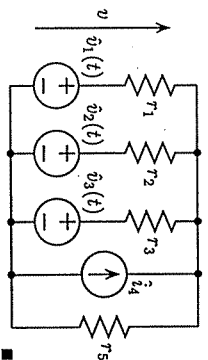
dove  $\hat{v}_{eq}(t)$  è ottenuta per mezzo del primo Teorema di MILLMANN e  $r_{eq}$  è ottenuta da quella del bipolo omogeneo associato.



**Commento :** Dal momento che le grandezze impresse interne al bipolo composto sono tempo-varianti, anche la tensione impressa equivalente risulta tempo-variante. Al contrario, la resistenza  $r_{eq}$  risulta tempo-invariante dal momento che tutte le resistenze interne al bipolo composto sono anch'essi tempo-invarianti.

**Esempio 2 :** Primo teorema di Millmann : Il circuito in figura è costituito da cinque bipoli in parallelo. Calcoliamo la tensione  $v(t)$  comune ai quattro bipoli, applicando il primo teorema di MILLMANN :

$$v(t) = \frac{\hat{v}_1(t)/r_1 + \hat{v}_2(t)/r_2 + \hat{v}_3(t)/r_3 + \hat{i}_4(t)}{1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3 + 1/r_5}$$



WWWWWW?? TERZO ESEMPIO sul modello ibrido di un DBT con sVi e sVj tempo-varianti DUPL. da cap. 9. ???WWWWWW  
 WWWWWWW?? QUARTO ESEMPIO sull'analisi nodale modificata di un circuito con sVi e sVj tempo-varianti DUPL. da cap. 12. ???WWWWWW

**Grandezze impresse equivalenti tempo-varianti :** In questi esempi abbiamo visto che le grandezze impresse equivalenti sono una combinazione lineare di quelle interne al circuito. Questa regola, molto generale, è una conseguenza del principio di sovrapposizione. Dal momento che in generale le grandezze impresse interne sono forme d'onda diverse una dall'altra, può convenire lasciare le grandezze impresse equivalenti sotto forma di combinazione lineare, dal momento che può essere vantaggioso nell'esecuzione dei calcoli. Questo vantaggio sarà evidente nel caso dei circuiti dinamici nei CCap. 17,19-21. ■

**Commenti :** I circuiti costituiti da componenti adinamici tempo-invarianti lineari e sorgenti impulsive tempo-varianti ricevono informazione dai segnali che caratterizzano queste sorgenti (ingressi). Comunque la loro capacità di elaborazione le informazioni ricevute è piuttosto limitata, in quanto tutte le tensioni e correnti (uscite) del circuito stesso risultano, istante per istante, combinazioni lineari (con coefficienti costanti), delle grandezze impresse (ingressi) in seguito al principio di sovrapposizione. ■

14.4 IMPULSI NONIDEALI E IDEALI

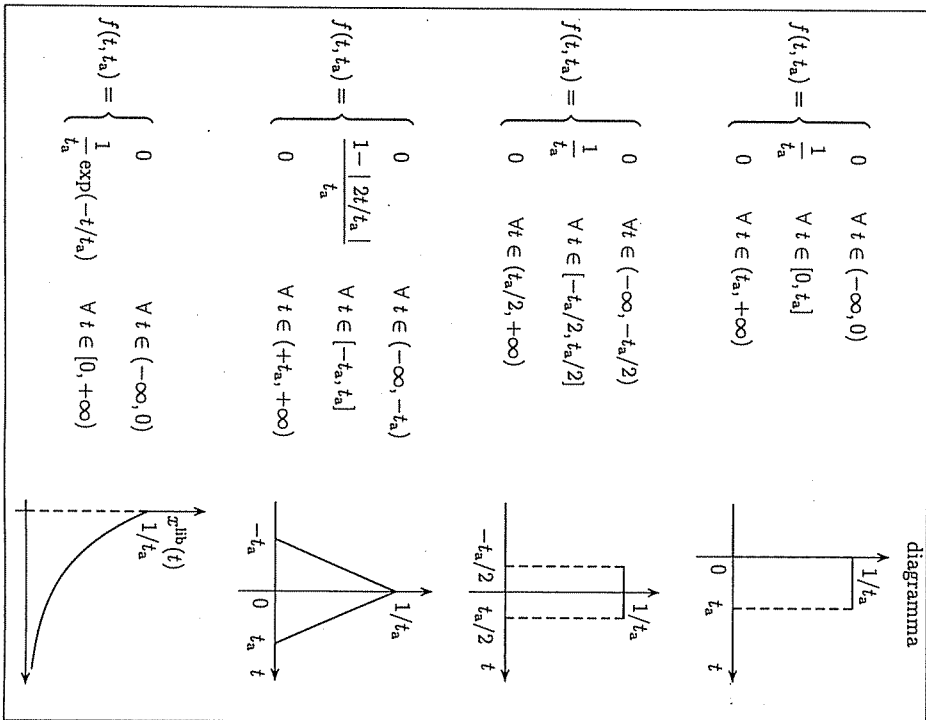
WWWWWW SPOSTARE FORSE nel Cap. 14 prima dei condensatori ed induttori.  
 WWWWWW CONTROLLARE APPENDICE TESTO CARLIN-CIVALLERI

Gli impulsi sono funzioni (forme d'onda, segnali) diffusissimi nei circuiti elettronici più disparati. Essi, in un certo senso, costituiscono l'anello di congiunzione che caratterizza l'evoluzione darwiniana dai circuiti analogici (continui nel dominio del tempo) a quelli digitali (discreti nel dominio del tempo) che sarà approfondita nei corsi successivi.

14.4.1 Impulsi nonideali

Un impulso (unitario) nonideale è una funzione  $f(t)$  che è diversa da zero solo in un intervallo di tempo piuttosto breve, comunemente detto supporto dell'impulso, tale che l'area sottesa sia unitaria. Per esempio, sono impulsi (unitari) nonideali :

Quadro di esempi di impulsi nonideali



**Commento :** Al decrescere di  $t_a$  il profilo dell'impulso si restringe orizzontalmente e innalza verticalmente nello stesso tempo in modo che l'area compresa tra il profilo stesso e l'asse delle ascisse rimane invariata.

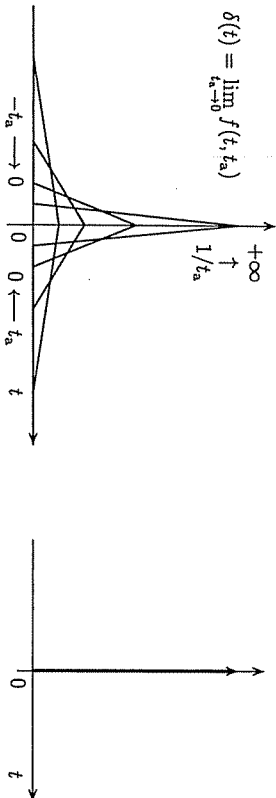
**Commento :** Nell'ultimo caso  $f(t, t_a)$  è maggiore di zero in tutto l'intervallo  $[0, +\infty)$  e quindi il supporto non è limitato superiormente. Siccome la funzione ha un asintoto orizzontale e il suo integrale definito è finito, essa può ancora essere considerata un impulso nonideale.

**Commento :** Sotto opportune condizioni, l'impulso unitario ideale (delta di Dirac) può essere visto come il limite di una cisole, nulla per  $t < 0$ , e con  $\sigma \rightarrow -\infty$ .

**Commento :** In tutti e quattro gli esempi, l'origine dei tempi è interna ai supporti dei suddetti impulsi nonideali. Comunque possono essere definiti anche impulsi nonideali traslati nel tempo di  $\Delta t$  sostituendo  $t$  con  $t + \Delta t$ .

14.4.2 Impulso ideale (delta di Dirac)

**Definizione :** Un impulso (unitario) ideale  $\delta(t)$ , detto anche funzione delta di Dirac, è il limite di un impulso unitario nonideale  $f(t, t_a)$  per  $t_a \rightarrow 0$ .



**Commento :** Notare che il risultato del suddetto limite è completamente indipendente dal profilo dell'impulso nonideale  $f(t, t_a)$  : si perviene allo stesso ente matematico. Da un punto di vista più pratico questo risultato significa che due impulsi nonideali con profilo diverso e la stessa area tenderebbero ad assomigliarsi nel momento in cui diventassero sempre più stretti e alti.

**Diagnosi :** Tutti abbiamo avuto l'occasione di ammirare, per lo meno in fotografia, il profilo slanciato e sempre diverso delle numerosissime guglie dolomitiche. Immaginiamo di far diventare queste guglie ancor più slanciate con un passaggio al limite : diventerebbero una foresta di "indistinguibili pali di cemento".

**Commento :** L'impulso ideale  $\delta(t)$  è un ente matematico che non risponde ai requisiti necessari per poter appartenere alla classe delle usuali funzioni reali di variabile reale, dal momento che :

$$\delta(t) \text{ non è definita in } t = 0 \text{ nonostante che siano } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^-} \delta(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \delta(t) = 0 \end{cases} \text{ definiti e coincidenti i due limiti sinistro e destro}$$

dal momento che il limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-1}^{+t} \delta(\tau) d\tau = 1$  mentre sarebbe nullo se  $\delta(t)$  fosse del seguente integrale vale una qualsiasi funzione regolare ■

**Commento** : L'impulso unitario ideale può essere definito più rigorosamente nell'ambito delle funzioni generalizzate, note anche come *distribuzioni*, che sono argomento di corsi avanzati di Analisi.

INTRODURRE DERIVATA della delta di Dirac INTRODURRE fare disegno dello scalino ideale associato alla delta WWWW fare disegno di più delta di Dirac tra loro traslate e della scalinata che è il loro integrale. Mettere anche delta negative che corrispondono a gradini in discesa.

14.4.3 Proprietà dell'impulso ideale

Per ciascuna delle seguenti proprietà fare figura illustrativa con freccione verso l'alto o il basso

Le seguenti proprietà mettono in evidenza l'importanza dell'impulso ideale : **Proprietà 1** : L'integrale indefinito dell'impulso ideale è la funzione scalino, mentre la derivata dello scalino è l'impulso ideale :

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \text{sca}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \in (-\infty, 0) \\ 1 & \forall t \in (0, +\infty) \end{cases} \iff \delta(t) = \frac{d \text{sca}(t)}{dt}$$

in  $t = 0$  la funzione sca(t) può essere definita uguale a 0 oppure uguale a 1. ■

**Proprietà 2** : Sia  $f(t)$  una funzione continua in  $t = t_2$ . Vale la seguente proprietà :

$$\int_{t_1}^{t_3} \delta(t-t_2) f(t) dt = \int_{t_2-}^{t_2+} \delta(t-t_2) f(t) dt = f(t_2) \quad \forall t_2 \in (t_1, t_3)$$

**Proprietà 3** : Siano  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  due funzioni continue  $\forall t$ . Costruiamo la funzione  $f_3(t) = f_1(t) + \text{sca}(t-t_2) f_2(t)$ . Nel caso  $f_2(t_2) \neq 0$ , essa ha una discontinuità in  $t = t_2$  :

$$\lim_{t \rightarrow t_2-} f_3(t) = f_1(t_2) \quad , \quad \lim_{t \rightarrow t_2+} f_3(t) = f_1(t_2) + f_2(t_2)$$

Calcoliamo la derivata di  $f_3(t)$  :

$$\frac{d f_3(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{d f_1(t)}{dt} & \forall t < t_2 \\ \left[ \frac{d f_1(t)}{dt} \right]_{t=t_2} + f_2(t_2) \delta(t-t_2) & \text{per } t = t_2 \\ \frac{d f_1(t)}{dt} + \frac{d f_2(t)}{dt} & \forall t > t_2 \end{cases}$$

L'area dell'impulso è una misura del "salto" dovuto alla discontinuità di  $f_3(t)$ . ■

**Avvertenza** : assumiamo che  $v(t)$  sia una tensione impulsiva e di rappresentarla per mezzo dell'impulso ideale  $\delta(t)$ . Se l'impulso non è unitario e capita in  $t = t_0$ , scriviamo  $v(t) = \phi_0 \delta(t-t_0)$  dove  $\phi_0$ , come ci ricorda lo stesso simbolo, ha le dimensioni fisiche di un flusso e non di una tensione (vedere Cap. 2). Infatti il fattore  $\phi_0$  che moltiplica  $\delta(t-t_0)$  indica il valore dell'integrale di  $v(t)$  tra  $t_0-$  e  $t_0+$  associato all'impulso. ■

**Avvertenza** : assumiamo che  $i(t)$  sia una corrente impulsiva e di rappresentarla per mezzo dell'impulso ideale  $\delta(t)$ . Se l'impulso non è unitario e capita in  $t = t_0$ , scriveremo  $i(t) = q_0 \delta(t-t_0)$  dove  $q_0$ , come ci ricorda lo stesso simbolo, ha le dimensioni fisiche di una carica e non di una corrente (vedere Cap. 2). Infatti il fattore  $q_0$  che moltiplica  $\delta(t-t_0)$  indica il valore dell'integrale di  $i(t)$  tra  $t_0-$  e  $t_0+$  associato all'impulso. ■

14.4.4 Impulsi ideali ed equazioni differenziali

Consideriamo un'equazione scalare differenziale lineare non omogenea :

$$a_n x(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_2 \ddot{x}(t) + \dots + a_n x^{(n)}(t) = b_0 \hat{u}(t) + b_1 \dot{\hat{u}}(t) + b_2 \ddot{\hat{u}}(t) + \dots + b_m \hat{u}^{(m)}(t)$$

in cui  $x(t)$  è la funzione incognita e  $\hat{u}(t)$  è la funzione forzante (ingresso). Notare che nell'equazione sono coinvolte anche le derivate di  $\hat{u}(t)$  oltre a quelle di  $x(t)$ . Assumiamo che  $\hat{u}(t)$  possa essere impulsiva, discontinua, continua ma con derivata prima discontinua, e così via. Esaminiamo il tipo di discontinuità che avrà la funzione incognita  $x(t)$ . I seguenti casi si presentano :

- Siccome l'operatore derivata aumenta di un'unità l'ordine di una discontinuità, la suddetta equazione stabilisce che l'ordine della specie della discontinuità di  $a_n x^{(n)}(t)$  e  $b_m \hat{u}^{(m)}(t)$  sono uguali.
- Se  $\hat{u}(t)$  è continua con tutte le sue derivate fino alla derivata  $m$ -esima, il secondo membro dell'equazione è continuo e quindi anche il primo membro. Conseguentemente,  $x(t)$  è continua con tutte le sue derivate fino alla derivata  $n$ -esima.
- Se  $\hat{u}(t)$  è continua con tutte le sue derivate fino alla derivata  $m_1$ -esima (dove  $m_1 < m$ ) anche  $x(t)$  sarà continua con tutte le sue derivate fino alla derivata  $(n-m+m_1)$ -esima dal momento che il primo e secondo membro dell'equazione conterranno discontinuità di ordine  $m - m_1$ .

WWW FARE ESEMPIO dell'equazione diff.  $\dot{x}(t) = a x(t) + b u(t)$  in cui  $u(t)$  è un impulso unitario non ideale con supporto variabile e fare tendere a zero il supporto. Usare due profili diversi uno triangolare e l'altro rettangolare. WWW

14.4.5 Impulsi ideali ed equazioni integrali

Consideriamo il seguente integrale banale nel dominio del tempo :

$$g(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

Prima di tutto occorre osservare che :

- $g(t)$  non dipende dai valori assunti da  $f(t)$  per  $t < t_0$ .
  - Inoltre, se la funzione integranda  $f(t)$  è regolare (non generalizzata) nell'intorno  $(t_0-, t_0+)$  di  $t_0$ ,  $g(t)$  non varia se il limite inferiore dall'integrale  $t_0$  viene sostituito da  $t_0- = \lim_{t \rightarrow t_0-} t$  per  $t < t_0$  ovvero  $t_0+ = \lim_{t \rightarrow t_0+} t$  per  $t > t_0$ .
  - si intende regolare anche una funzione con una discontinuità tipo scalino in  $t = t_0$ .
- Supponiamo che  $f(t)$  sia una funzione generalizzata nel senso che essa sia del tipo

$$f(t) = f_1(t) + F \delta(t - t_0)$$

dove  $f_1(t)$  è una funzione regolare e  $F$  è una costante.

In questo caso il limite inferiore di integrazione  $t_0$  diventa estremamente critico, dal momento che è centrato esattamente sull'impulso ideale, il cui integrale nell'intervallo iniziale  $(t_0-, t_0+)$  è finito. In questo caso i valori di  $f(t)$  per  $t < t_0$  non hanno effetto sulla funzione  $g(t)$ , ma non si può dire la stessa cosa per tutti i valori  $t \leq t_0$ , come capitava nel caso che  $f(t)$  fosse stata regolare. Occorre dirimere la questione per togliere la suddetta ambiguità dell'integrale.

Tutto torna al suo posto se il limite inferiore  $t_0$  dell'integrale viene sostituito da  $t_0-$ . In questo caso l'eventuale impulso ideale in  $t = t_0$  fa parte a tutti gli effetti dell'intervallo di integrazione e da un contributo fisso alla funzione  $g(t)$  uguale a  $F$ . Se invece  $t_0$  fosse sostituito da  $t_0+$  il risultato cambierebbe, in quanto l'impulso ideale rimarrebbe escluso dall'intervallo d'integrazione.

WWWWWW FARE ESEMPIO di equazione integrale con IMPULSO (non)ideale.

#### 14.4.6 Gli impulsi nella realtà

In un circuito fisico possono essere presenti solamente impulsi nonideali, sia di tensione sia di corrente, di durata finita benché molto breve: per esempio pochi nanosecondi.

**Questio**: sotto quali condizioni un impulso nonideale può essere approssimato (sostituito) da uno ideale?

**Risposta**: quando la dinamica del circuito è lenta rispetto alla durata dell'impulso medesimo, come sarà chiarito nell'affrontare i modelli dinamici di un circuito (vedere Cap. 15). In questo caso l'impulso nonideale può essere sostituito da un impulso ideale, a cui sia associata la stessa area e sia collocato nell'istante di tempo coincidente col baricentro dell'impulso nonideale.

**Giocando a bigliardo**: Il lettore esperto sa molto bene che lo studio prolungato può risultargli indigesto. Prendiamoci una pausa per giocare una partita a bigliardo. Dal punto di vista fisico, questo gioco è caratterizzato dagli urti tra due palle e dai rimbalzi di una palla contro le sponde del campo di gioco. Questi urti sono accompagnati da un rumore secco caratteristico del gioco. Le forze in gioco negli urti e rimbalzi possono essere modellati da impulsi ideali. Infatti la forza con cui una palla colpisce una sponda o un'altra palla ha una durata molto breve rispetto ai tempi intercorrenti tra due impatti successivi; l'integrale della forza impulsiva è uguale alla variazione della cosiddetta quantità di moto subita dalla palla in seguito all'urto.

**Giocando a bocce**: Se ritenete troppo astratti i precedenti ragionamenti sugli impulsi

ideali, potete fare un esperimento assai convincente. Andate in qualche vecchia osteria munita di un campo di bocce, appoggiate un dito della mano su uno degli assi di legno che delimitano il campo di gioco e pazientate un poco. Prima o poi una boccia imprimerà indelebilmente sul vostro dito e nella vostra memoria il concetto di impulso ideale.

**Impulsi e circuiti nonlineari**: Questa approssimazione di un impulso nonideale con uno ideale è in genere impossibile se il modello del circuito è dinamico nonlineare, in quanto il profilo dell'impulso può essere importante anche nel caso che esso sia di durata molto breve (rapido). D'altra parte si era detto nel Cap. 5 che un circuito fisico deve spesso essere descritto da un modello nonlineare, qualora le tensioni e/o correnti assumano valori sufficientemente elevati in valore assoluto. Quindi un modello lineare di un circuito fisico può essere sufficientemente buono, qualora le tensioni e correnti non subiscano variazioni troppo ampie: la eventuale presenza di impulsi può allontanarci da queste ipotesi.

WWWWWW Il prodotto di due Delta di DIRAC simultanee non ha significato e anche l'elevazione a potenza della Delta di DIRAC. WWWW

# 15 BIPOLI e CIRCUITI DINAMICI e LINEARI ELEMENTARI

## 15.1 CONDENSATORI E INDUTTORI

Per esigenze di semplicità, introduciamo i componenti dinamici tempo-invarianti e lineari, cominciando dai bipoli più semplici: *condensatori* e *induttori*. Vengono esaminate le loro *rappresentazioni pseudostatiche, integrali e differenziali* e vengono introdotti i due modelli di ciascuno, che tengono conto delle loro condizioni iniziali. Infine sono discussi i domini costitutivi che dipendono dalle condizioni iniziali stesse.

### 15.1.1 Generalità

Fra tutti i bipoli dinamici tempo-invarianti e lineari, il *condensatore* e l'*induttore* sono, nello stesso tempo, i più semplici e importanti, dal momento che :

Dal punto di vista matematico, le loro relazioni costitutive sono le più semplici possibili tra quelle dei bipoli dinamici, tempo-invarianti e lineari (vedere Cap. 5).

Essi sono usati come mattoni nella costruzione di modelli composti più aderenti alla realtà di componenti fisici di natura dinamica più complessa, (vedere Cap. 16).

Essi costituiscono un modello, in genere ma non sempre sufficientemente adeguato, di bipoli fisici molto diffusi, già incontrati nel corso di Fisica II :

**Condensatori fisici** : I condensatori fisici sono costituiti da due lamine molto sottili e di superficie ampia, di materiale conduttore (per esempio alluminio) separate da un sottile strato di materiale isolante (dielettrico). Ciascuna lamina è connessa a un certo filo di materiale conduttore: questi fili costituiscono i terminali fisici del condensatore. ■

**Commento** : Nel Cap. 23 saranno introdotti modelli composti ma più adeguati dei condensatori e induttori fisici : essi comprendono al loro interno i modelli ideali discussi in questa sezione e tengono conto della dissipazione (in genere limitata) di potenza. ■

### 15.1.2 Rappresentazione pseudostatica

Le Leggi della elettrostatica e della magnetostatica, note dalla Fisica II, ci consentono di introdurre le *rappresentazioni pseudostatiche* del condensatore e dell'induttore. Esse sono dinamiche nonostante che siano prive di derivate e integrali : l'operatore integrale è "nascondito" nella definizione della carica elettrica  $q(t)$  e del flusso  $\phi(t)$  definiti, rispettivamente, come integrali della corrente  $i(t)$  e della tensione  $v(t)$  (vedere Cap. 2). In questa sezione noi assumiamo che  $i(t)$  (e quindi anche  $q(t)$  del condensatore) e  $v(t)$  (e quindi anche  $\phi(t)$  dell'induttore) siano orientate in accordo alla convenzione normale.

**condensatore** : rappresentazione  $q \leftarrow v$       **induttore** : rappresentazione  $\phi \leftarrow ?$

$$q(t) = C v(t) \quad (C > 0 \equiv \text{capacità}) \quad \phi(t) = L i(t) \quad (L > 0 \equiv \text{induttanza})$$

l'unità di misura di  $C$  è il farad [F]      l'unità di misura di  $L$  è l'henry [H]

WWW????? Figura EMBLEMA :

Questo capitolo esamina i bipoli dinamici, tempo-invarianti e lineari più semplici : i condensatori e gli induttori. Diversamente dai componenti adinamici, il loro comportamento dipende anche dalla storia passata del bipolo stesso, più precisamente dall'energia immagazzinata in precedenza. Nell'ultima parte sono esaminati i circuiti dinamici elementari, cioè contenenti un solo condensatore o induttore e componenti adinamici lineari di qualsiasi tipo.

**Sez. 15.1 : Condensatori e induttori** : Si esaminano le *rappresentazioni pseudostatiche, integrali e differenziali* dei condensatori e induttori e vengono introdotti i due modelli di ciascuno, che tengono conto delle loro condizioni iniziali. Infine sono discussi i domini costitutivi che dipendono dalle condizioni iniziali stesse.

**Sez. 15.2 : Energia e stato** : I condensatori e gli induttori sono *conservativi* nel senso che sono in grado di immagazzinare come energia interna il lavoro elettrico assorbito e di restituirlo completamente in tempi successivi. Infine viene evidenziato il ruolo di *candidata di stato* della tensione ai capi dei condensatori e della corrente fluente negli induttori.

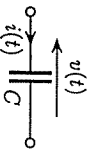
**Sez. 15.3 : Aggregazioni di bipoli dinamici elementari** : Il giratore consente di trasformare un condensatore in un induttore e viceversa. Inoltre sono esaminati i bipoli composti costituiti da due condensatori o due induttori sia in serie sia in parallelo.

**Sez. 15.4 : Equazioni dei circuiti dinamici elementari** : L'equazione risolutiva dei circuiti costituiti da un solo condensatore o induttore e da componenti adinamici consiste in un'equazione scalare differenziale del primo ordine e, in qualche caso, a un'equazione algebrica.

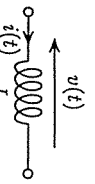
**Sez. 15.5 : Soluzione generale dei circuiti dinamici elementari** : La *soluzione generale* dell'equazione differenziale del primo ordine costituisce uno spazio affine di dimensioni 1 se il circuito è non omogeneo, e uno spazio lineare se il circuito è omogeneo. Viene introdotta la *pul-sazione naturale* e il *modo naturale* del circuito caratterizzato dalla costante *costante di tempo*.

**Sez. 15.6 : Soluzioni similari dei circuiti dinamici elementari** : Vengono esaminate le soluzioni similari dell'equazione differenziale del primo ordine associate alle grandezze impresse costanti e sinusoidali. Sono discussi i metodi per calcolarle assieme al principio di sovrapposizione.

SIMBOLO CIRCUITALE DEL CONDENSATORE.



SIMBOLO CIRCUITALE DELL'INDUTTORE



La definizione delle grandezze con la convenzione normale fa sì che la capacità  $C$  e l'induttanza  $L$  risultino positive.

15.1.3 Rappresentazione integrale

Dalla rappresentazione pseudostatica, si ottiene la *rappresentazione integrale*, introducendo la definizione della carica  $q(t)$  e del flusso  $\phi(t)$  :

*condensatore* : rappresentazione  $v \leftarrow i$

$$v(t) = \underbrace{\frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_0 \text{ sca}(t - t_0)}_{\text{in serie}} \underbrace{\quad}_{\mathcal{V} \text{ a scallino}}$$

in  $t = t_0 -$

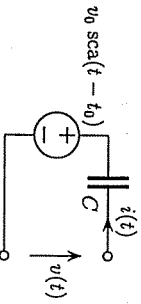
*induttore* : rappresentazione  $i \leftarrow v$

$$i(t) = \underbrace{\frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i_0 \text{ sca}(t - t_0)}_{\text{in parallelo}} \underbrace{\quad}_{\mathcal{I} \text{ a scallino}}$$

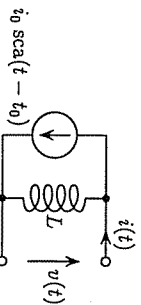
in  $t = t_0 -$

La rappresentazione integrale può essere interpretata come un modello del bipolo :

**Modello di Thévenin di un condensatore carico** : questo modello, derivato dalla rappresentazione  $v \leftarrow i$ , è costituito dalla serie della  $\mathcal{V}(i(t) = v_0 \text{ sca}(t - t_0))$  e del  $C(C)$  scarico in  $t = t_0$  :



**Modello di Norton di un induttore carico** : questo modello, derivato dalla rappresentazione  $i \leftarrow v$ , è costituito dal parallelo della  $\mathcal{I}(i(t) = i_0 \text{ sca}(t - t_0))$  e dell'  $\mathcal{L}(L)$  scarico in  $t = t_0$  :



15.1.4 Rappresentazione differenziale

Derivando la rappresentazione integrale e cambiando la grandezza esplicitata a primo membro, si ottiene la corrispondente *rappresentazione differenziale* :

*condensatore* : rappresentazione  $i \leftarrow v$

$$i(t) = \underbrace{\quad}_{\text{in parallelo}} \underbrace{C \dot{v}(t)}_{\text{C scarico}} - \underbrace{q_0 \delta(t - t_0)}_{\mathcal{I}}$$

in  $t = t_0 -$

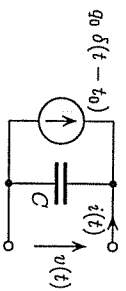
*induttore* : rappresentazione  $v \leftarrow i$

$$v(t) = \underbrace{\quad}_{\text{in serie}} \underbrace{L \dot{i}(t)}_{\mathcal{L} \text{ scarico}} - \underbrace{\phi_0 \delta(t - t_0)}_{\mathcal{V}}$$

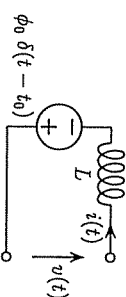
in  $t = t_0 -$

Ciascuna rappresentazione differenziale può essere interpretata come un modello alternativo a quello ottenuto dalla rappresentazione integrale :

**Modello di Norton di un condensatore carico** : questo modello è costituito dal parallelo del  $C(C)$  scarico in  $t = t_0 -$  e della  $\mathcal{I}(i(t) = q_0 \delta(t - t_0))$  dove la carica  $q_0$  coincide con l'area sottesa dall'impulso. Queste sorgente svolge il compito di iniettare all'istante  $t = t_0$  la carica  $q_0$  (finita) nel condensatore. Per  $t \neq t_0$ , la sorgente di corrente è equivalente a un c.a.

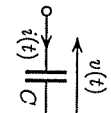


**Modello di Thévenin di un induttore carico** : questo modello è costituito dalla serie dell'  $\mathcal{L}(L)$  scarico in  $t = t_0 -$  e della  $\mathcal{V}(v(t) = \phi_0 \delta(t - t_0))$  dove il flusso  $\phi_0$  coincide con l'area sottesa dall'impulso. Questa sorgente svolge il compito di iniettare all'istante  $t = t_0$  il flusso  $\phi_0$  (finito) nell'induttore. Per  $t \neq t_0$ , la sorgente di tensione è equivalente a un c.c.

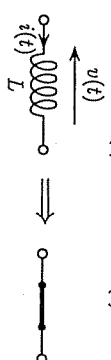


L'esame della rappresentazione differenziale consente di accertare immediatamente che : **Proprietà** : in regime costante (continua), il condensatore e l'induttore sono equivalenti, rispettivamente, a un c.a. e a un c.c.

Qualora :  $v(t) = \text{cost} \rightarrow i(t) = 0$



Qualora :  $i(t) = \text{cost} \rightarrow v(t) = 0$



15.1.5 Condizioni iniziali e domini costitutivi (in)condizionati

**Valore iniziale** : Sia nelle rappresentazioni integrali sia in quelle differenziali compaiono i valori iniziali  $v_0$  della tensione (ovvero della carica  $q_0 = C v_0$ ) del condensatore e  $i_0$  della corrente (ovvero del flusso  $\phi_0 = L i_0$ ) dell'induttore. Infatti la conoscenza di  $v_0$  consente di risalire alla tensione del condensatore una volta nota la corrente  $i(t)$ , mentre la conoscenza di  $i_0$  consente di risalire alla corrente dell'induttore una volta nota la tensione. Questi parametri, in origine arbitrari, risultano noti dalla conoscenza della "storia passata".

La sorgente impressiva a scallino che tiene conto delle condizioni iniziali nonnulli di un condensatore ovvero di un induttore può essere sostituita da una sorgente costante, se l'analisi del circuito per  $t < t_0$  non è di interesse.

$v_{\text{eq}}(t) = v_0 \text{ sca}(t - t_0) \rightarrow v_{\text{eq}}(t) = v_0$

$i_{\text{eq}}(t) = i_0 \text{ sca}(t - t_0) \rightarrow i_{\text{eq}}(t) = i_0$

**Domini costitutivi** : L'importanza del valore iniziale si riflette sulla definizione dei domini costitutivi, che è più articolata che per i componenti adinamici. Il condensatore e l'induttore sono componenti lineari omogenei, qualora il valore iniziale  $v_0$  ovvero  $i_0$  sia considerato arbitrario. In questo caso tutte le coppie  $(v(t), i(t))$  che soddisfano alla relazione costitutiva costituiscono il **dominio costitutivo incondizionato** del bipolo, che risulta uno spazio lineare.



*Condensatore*

$$\mathcal{R}_c \equiv \{[v(t) \ i(t)]^T \mid i(t) = C \dot{v}(t)\}$$

*Induttore*

$$\mathcal{R}_l \equiv \{[v(t) \ i(t)]^T \mid v(t) = L \dot{i}(t)\}$$

Altrimenti, se si considerano solamente le coppie  $(v(t), i(t))$  con specifici valori di  $v_0$  ovvero  $i_0$  diversi da zero, siamo in presenza di *domini costitutivi condizionati*, uno per ciascun valore di  $v_0$  ovvero  $i_0$  :

$$\mathcal{R}_{c0} \equiv \{[v(t) \ i(t)]^T \mid i(t) = C \dot{v}(t), v(t_0) = v_0\} \quad \mathcal{R}_{l0} \equiv \{[v(t) \ i(t)]^T \mid v(t) = L \dot{i}(t), i(t_0) = i_0\}$$

**Proprietà :** Ciascun dominio costitutivo condizionato è un sottoinsieme di quello incondizionato :  $\mathcal{R}_{c0} \subset \mathcal{R}_c$  e  $\mathcal{R}_{l0} \subset \mathcal{R}_l$  . In particolare  $\mathcal{R}_{c0}$  e  $\mathcal{R}_{l0}$  sono sottospazi affini del dominio costitutivo incondizionato, eccetto il caso  $v_0 = 0$  ovvero  $i_0 = 0$  in cui il sottosistema costituisce un sottospazio lineare. ■

### 15.2 ENERGIA E STATO

Esaminiamo la potenza effettiva e il lavoro effettivo del condensatore e dell'induttore. Si dimostra che entrambi sono *conservativi*, nel senso che sono in grado di accumulare il lavoro elettrico assorbito sotto forma di energia, che può essere integralmente restituita in tempi successivi.

#### 15.2.1 Potenza effettiva, lavoro effettivo ed energia

L'espressione della *potenza elettrica effettiva*  $p(t)$  assorbita viene ottenuta dalla espressione della potenza virtuale  $p(t) = v(t) i(t)$  qualora la coppia  $(v(t), i(t))$  appartenga al rispettivo dominio costitutivo :

$$\text{condensatore : } p(t) = C v(t) \dot{v}(t) \qquad \text{induttore : } p(t) = L \dot{i}(t) i(t)$$

Il comportamento della potenza  $p(t)$  in un condensatore e un induttore è compreso più a fondo introducendo il suo integrale :

$$\text{Il lavoro elettrico effettivo } w(t) \text{ assorbito dal condensatore e dall'induttore viene calcolato integrando la potenza effettiva} \qquad w(t) = \int_{t_0}^t v(\tau) i(\tau) d\tau$$

assorbita nell'intervallo di tempo di interesse  $[t_0, t]$  :

$$\text{Il risultato dell'integrale definito assume la forma :} \qquad \text{condensatore : } w(t) = \frac{C v(t)^2}{2} - \frac{C v(t_0)^2}{2} \qquad \text{induttore : } w(t) = \frac{L i(t)^2}{2} - \frac{L i(t_0)^2}{2}$$

Conseguentemente, il lavoro elettrico  $w(t)$  assorbito in un dato intervallo  $[t_0, t]$  è uguale alla differenza dei due valori di una funzione valutati agli estremi  $t_0$  e  $t$  . Questa funzione, che ha le stesse dimensioni fisiche di un lavoro, è definita a meno di una costante additiva arbitraria. La indichiamo col simbolo  $w^{me}(t)$  e la chiamiamo *energia*. Qui essa è introdotta partendo da considerazioni puramente analitiche. Nel corso di Fisica II essa è stata introdotta da un punto di vista più fisico nell'ambito della elettrostatica (per il condensatore) e della magnetostatica (per l'induttore). Infatti l'energia immagazzinata è associata al campo elettrico esistente tra le armature del condensatore ovvero al campo magnetico associato alla corrente che percorre l'avvolgimento dell'induttore. Scegliendo, per convenzione, la costante arbitraria in modo che  $w^{me}(t) = 0$  per  $v = 0$

(condensatore) ovvero  $i = 0$  (induttore), la energia risulta :

*condensatore :*

$$w^{me}(t) = \frac{C v(t)^2}{2} = \frac{q(t) v(t)}{2} = \frac{q(t)^2}{2C}$$

*induttore :*

$$w^{me}(t) = \frac{L i(t)^2}{2} = \frac{\phi(t) i(t)}{2} = \frac{\phi(t)^2}{2L}$$

La seconda e terza espressione sono ottenute con l'aiuto delle rispettive rappresentazioni pseudostatiche  $q(t) = C v(t)$  e  $\phi(t) = L i(t)$  .

**Recupero del lavoro elettrico :** la funzione  $w^{me}(t)$  costituisce l'*energia immagazzinata* nel condensatore ovvero nell'induttore. Per ogni istante di tempo essa dipende solamente dal valore della tensione (condensatore) ovvero della corrente (induttore) al medesimo istante. Le variazioni dell'energia immagazzinata tra due istanti di tempo  $t_1$  e  $t_2$  è uguale al lavoro assorbito / erogato dal componente nel suddetto intervallo  $[t_1, t_2]$ .

Tutto il lavoro elettrico assorbito nell'intervallo  $[t_1, t_2]$  e immagazzinato sotto forma di energia può venire recuperato nel successivo intervallo  $[t_2, t_3]$  qualora si verifichi la seguente condizione :

$$\text{condensatore : } q(t_3) = q(t_2) < q(t_1) \Leftrightarrow v(t_3) = v(t_2) < v(t_1) \qquad \text{induttore : } \phi(t_3) = \phi(t_2) < \phi(t_1) \Leftrightarrow i(t_3) < i(t_2)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) i(t) dt = \underbrace{[w^{me}(t_2) - w^{me}(t_1)]}_{\text{lavoro assorbito}} = - \int_{t_2}^{t_3} v(t) i(t) dt = \underbrace{[w^{me}(t_3) - w^{me}(t_2)]}_{\text{lavoro erogato}}$$

**Definizione :** Per questo motivo il condensatore e l'induttore sono detti *conservativi*. ■

#### 15.2.2 Continuità analitica della tensione e della corrente

Supponiamo che la tensione  $v_c(t)$  ai capi di un condensatore ovvero la corrente  $i_l(t)$  fluente in un induttore siano soggette a una discontinuità in  $t = t_1$  :  
Una eventuale discontinuità analitica della tensione  $v_c(t)$  ai capi di un condensatore in  $t = t_1$ , cioè :

$$v_c(t_1^-) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} v_c(t) \neq v_c(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1^+} v_c(t)$$

comporterebbe che la corrente  $i_c(t)$  presenti in  $t = t_1$  un impulso ideale, il cui integrale (area) è uguale alla variazione della carica  $q_c(t_1^+) - q_c(t_1^-)$  :

$$i_c(t) = C [v_c(t_1^+) - v_c(t_1^-)] \delta(t - t_1)$$

**Questo :** può il bipolo complementare del condensatore ovvero dell'induttore accettare un impulso ideale, rispettivamente, di corrente ovvero di tensione ?

**Risposta :** Per esempio scegliamo un condensatore chiuso su un resistore. La connessione con un resistore impone la relazione algebrica  $v_c(t) = -r i_c(t)$  tra la tensione e la corrente

del condensatore. Quindi l'ipotesi che  $v_c(t)$  sia discontinua e  $i_c(t)$  impulsiva non può risultare valida.

*Eccezio casi degeneri, si può assumere che la tensione  $v_c(t)$  ai capi di un condensatore ovvero la corrente  $i_c(t)$  fluente in un induttore siano analiticamente continue :*

*condensatore :*

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} v_c(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^+} v_c(t) \quad \forall t_1 \in \mathbb{R}_t$$

Se l'assunzione sulla continuità di  $v_c(t)$  è valida, si ha la seguente proprietà :

*Proprietà :* il condensatore è equivalente, limitatamente all'intervallo infinitesimale  $(t_1^-, t_1^+)$ , a una  $\mathcal{Y}(\hat{v} = v_c(t))$ .

*Prova :* infatti il valore  $i_c(t_1)$  della corrente  $i_c(t)$  non è vincolato al valore  $v_c(t_1)$  della tensione  $v_c(t)$ , come risulta dalla rappresentazione differenziale.

*Commento :* Le condizioni per cui la validità della assunzione della continuità analitica della tensione dei condensatori e della corrente negli induttori saranno esaminate più rigorosamente nel Cap. 19, quando saranno risolte le equazioni differenziali dei circuiti dinamici di ordine qualsiasi.

### 15.2.3 Grandezze candidate e anticandidate

Consideriamo le seguenti tre proprietà della tensione  $v_c(t)$  ai capi di un condensatore e della corrente  $i_c(t)$  fluente in un induttore (vedere PPar. 15.1.5, 15.2.1-2) :

*Tensione del condensatore :* la tensione  $v_c(t)$  può venire calcolata dalla corrente  $i_c(t)$  solo se è conosciuto il valore iniziale  $v_0$ .

A parte casi degeneri, viene verificata la continuità analitica, per ogni istante  $t$  della  $v_c(t)$ . Questa proprietà non è richiesta per la  $i_c(t)$ .

L'energia immagazzinata  $w^{ene}(t)$  è porzionale a  $|v_c(t)|^2$ .

Queste proprietà ci consentono di concludere che la tensione  $v_c(t)$  e la corrente  $i_c(t)$  denotano, rispettivamente, lo "stato" del condensatore e dell'induttore all'istante  $t$ .

*Definizione :* le grandezze  $v_c(t)$  e  $i_c(t)$  sono candidate a essere *variabili di stato* o, più brevemente, esse sono *candidate di stato* del circuito in cui il rispettivo componente è inserito. Il termine "candidate" significa che possono esserci alcuni circuiti, chiamati circuiti degeneri, in cui la grandezza non diventa una variabile di stato. Questi circuiti saranno

*induttore :*

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} i_c(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^+} i_c(t) \quad \forall t_1 \in \mathbb{R}_t$$

Se l'assunzione sulla continuità di  $i_c(t)$  è valida, si ha la seguente proprietà :

*Proprietà :* l'induttore è equivalente, limitatamente all'intervallo infinitesimale  $(t_1^-, t_1^+)$ , a una  $\mathcal{X}(\hat{i} = i_c(t_1))$ .

*Prova :* infatti il valore  $v_c(t_1)$  della tensione  $v_c(t)$  non è vincolato al valore  $i_c(t_1)$  della corrente  $i_c(t)$ , come risulta dalla rappresentazione differenziale.

*Commento :* Le condizioni per cui la validità della assunzione della continuità analitica della tensione dei condensatori e della corrente negli induttori saranno esaminate più rigorosamente nel Cap. 19, quando saranno risolte le equazioni differenziali dei circuiti dinamici di ordine qualsiasi.

*Corrente dell'induttore :* la corrente  $i_c(t)$  può venire calcolata dalla tensione  $v_c(t)$  solo se è conosciuto il valore iniziale  $i_0$ .

A parte casi degeneri, viene verificata la continuità analitica, per ogni istante  $t$  della  $i_c(t)$ . Questa proprietà non è richiesta per la  $v_c(t)$ .

L'energia immagazzinata  $w^{ene}(t)$  è porzionale a  $|i_c(t)|^2$ .

Queste proprietà ci consentono di concludere che la tensione  $v_c(t)$  e la corrente  $i_c(t)$  denotano, rispettivamente, lo "stato" del condensatore e dell'induttore all'istante  $t$ .

*Definizione :* le grandezze  $v_c(t)$  e  $i_c(t)$  sono candidate a essere *variabili di stato* o, più brevemente, esse sono *candidate di stato* del circuito in cui il rispettivo componente è inserito. Il termine "candidate" significa che possono esserci alcuni circuiti, chiamati circuiti degeneri, in cui la grandezza non diventa una variabile di stato. Questi circuiti saranno

esaminati nel Cap. 19. Di conseguenza le grandezze  $i_c(t)$  e  $v_c(t)$  che risultano complementari alle candidate, prendono il nome di *anticandidate*.

*Commento :* Il concetto di stato verrà ripreso e spiegato rigorosamente nel Cap. 19 nel momento in cui si esaminerà la soluzione delle equazioni di un circuito dinamico. Infatti la definizione rigorosa dello stato richiede di considerare il circuito completo di tutti i suoi componenti e non solo i suoi componenti dinamici presi singolarmente.

## 15.3 AGGREGAZIONI DI BIPOLI DINAMICI ELEMENTARI

Questa sezione considera alcuni componenti composti di interesse in cui sono coinvolti bipoli dinamici elementari.

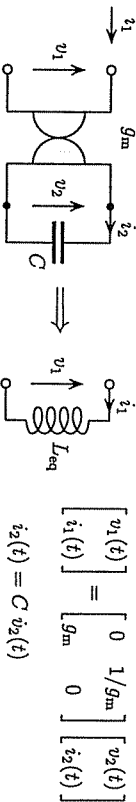
### 15.3.1 Soppressione degli induttori

Dai paragrafi precedenti uno trae l'impressione che sia i condensatori sia gli induttori siano necessari nella costruzione di generici circuiti dinamici, dal momento che le loro relazioni costitutive sono tra loro duali.

La seguente proprietà mostra che non è necessario, da un punto di vista concettuale, disporre di entrambi i bipoli dinamici elementari.

*Proprietà :* Il bipolo composto formato dalla prima porta di un giratore, qualora la seconda sia chiusa su un condensatore, è equivalente a un induttore.

*Prova :* Consideriamo le relazioni costitutive di un giratore e un condensatore (vedere Sez. 10.6 e Sez. 15.1) ed, esplicitando la tensione  $v_1(t)$  e la corrente  $i_1(t)$  della prima porta del giratore, si ottiene :



$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/g_m \\ g_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2(t) \\ i_1(t) \end{bmatrix}$$

$$i_2(t) = C v_2(t)$$

Sostituendo nelle due relazioni costitutive del giratore quella del condensatore, otteniamo :

$v_1(t) = i_2(t)/g_m = (C/g_m) \dot{v}_2(t)$  e  $i_1(t) = g_m v_2(t) \implies \dot{i}_1(t) = g_m \dot{v}_2(t)$  ed, eliminando la  $v_2(t)$ , otteniamo una relazione che coinvolge solamente  $v_1(t)$  ed  $i_1(t)$ , che coincide con la relazione costitutiva di un  $\mathcal{L}(L_{eq})$ :  $v_1(t) = L_{eq} \dot{i}_1(t)$  con  $L_{eq} = C/(g_m)^2$

*Commento :* Se la seconda porta di un giratore fosse chiusa su un induttore, la prima porta sarebbe equivalente a un  $\mathcal{C}(C_{eq} = L_{eq} g_m^2)$ .

*Inconvenienti degli induttori fisici :* Nei circuiti per il trattamento dell'informazione gli induttori fisici sono poco graditi dai progettisti e dai costruttori dal momento che essi sono :

1. più costosi, ingombranti e imprecisi dei condensatori fisici.
2. in genere non lineari e parzialmente dissipativi (vedere Cap. 22).
3. difficilmente realizzabili all'interno di un circuito integrato.

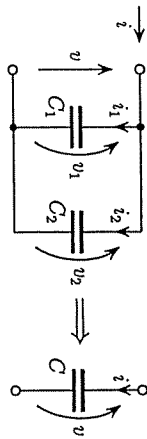
In alcuni circuiti di interesse pratico gli induttori vengono sostituiti da un giratore, realizzato con componenti a semiconduttori, chiuso su un condensatore. Quindi noi possiamo avere a disposizione bipoli fisici con un comportamento induttivo non associato a un campo magnetico al suo interno.

### 15.3.2 Serie e parallelo di condensatori e induttori

Inanzitutto esaminiamo la serie e il parallelo di due condensatori o induttori :

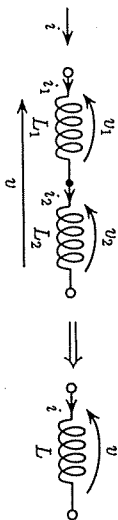
**Parallelo di due condensatori :**

$$i(t) = (C_1 + C_2) v(t)$$



**Serie di due induttori :**

$$v(t) = (L_1 + L_2) i(t)$$



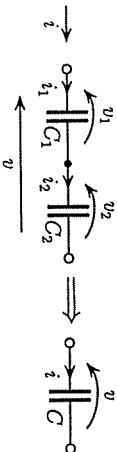
In entrambi i casi, le due candidate coincidono  $v_c(t) = v_{c1}(t) = v_{c2}(t)$  e  $i_c(t) = i_{c1}(t) = i_{c2}(t)$  e quindi si riducono di fatto ad una sola :

Il parallelo di due induttori è equivalente ad un unico condensatore e la serie di due induttori è equivalente ad un unico induttore.

**Serie di due condensatori :**

$$v(t) = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0)$$

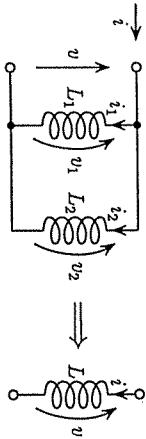
dove :  $v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0)$



**Parallelo di due induttori :**

$$i(t) = \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i(t_0)$$

dove :  $i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0)$



All'esterno noi possiamo osservare solamente la somma delle due candidate : comunque esse non sono vincolate algebricamente tra loro e possiamo distinguerle solamente esaminando una grandezza interna alla aggregazione.

**Commento :** Il legame tra le due candidate è di tipo differenziale :

$$C_1 \dot{v}_1(t) = C_2 \dot{v}_2(t)$$

$$L_1 \dot{i}_1(t) = L_2 \dot{i}_2(t)$$

Vedremo nei CCap. 17-19 che i legami algebrici tra le derivate delle candidate da origine a un autovalore nullo della matrice di stato.

## 15.4 EQUAZIONI DEI CIRCUITI DINAMICI ELEMENTARI

Questa sezione esamina i circuiti dinamici lineari elementari : con questo termine si intendono i circuiti che contengono oltre a un numero illimitato di componenti dinamici lineari, comprese le sorgenti impulsive tempo-varianti, e un condensatore oppure un induttore come unico componente dinamico.

### 15.4.1 Bipolo dinamico composto complementare

Per esaminare questi circuiti elementari conviene suddividere il circuito in due bipoli complementari. Il primo bipolo è costituito da tutti i componenti dinamici e coincide perciò col circuito stesso una volta che sia stato rimosso l'unico bipolo dinamico. A questo punto posso tenere conto del bipolo dinamico tempo-variante (in genere) composto costruendo il modello di Thévenin e/o di Norton del bipolo medesimo :

Modello di Thévenin  $v(t) = \hat{v}_{eq}(t) + r_{eq} i(t)$       Modello di Norton  $i(t) = \hat{i}_{eq}(t) + g_{eq} v(t)$

modelli con distinzione dei contributi delle sorgenti impulsive

$$v(t) = \sum_{k=1}^K \hat{v}_{eqk}(t) + r_{eq} i(t) \qquad i(t) = \sum_{k=1}^K \hat{i}_{eqk}(t) + g_{eq} v(t)$$

Questi modelli possono essere ottenuti mediante i rispettivi teoremi (vedere Cap. 14).

Le grandezze impresse equivalenti complessive  $\hat{v}_{eq}(t)$  e  $\hat{i}_{eq}(t)$  sono espresse come sommatoria per distinguere i contributi di ciascuna sorgente impulsiva interna al bipolo dinamico composto. Questa distinzione risulterà conveniente nella soluzione dell'equazione differenziale col principio di sovrapposizione, qualora le forme d'onda della grandezza impresse siano diverse tra loro (vedere Par. 12.3.3).

Questi modelli del bipolo dinamico composto ci consentono di esaminare tutti i possibili circuiti dinamici elementari dal momento che ciascuno di essi è caratterizzato da :

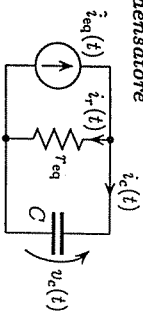
1. La grandezza impressa  $\hat{v}_{eq}(t) = \sum_{k=1}^K \hat{v}_{eqk}(t)$  oppure  $\hat{i}_{eq}(t) = \sum_{k=1}^K \hat{i}_{eqk}(t)$ .
2. La resistenza/conduitanza interna  $r_{eq} = 1/g_{eq}$ .
3. La capacità  $C$  del condensatore oppure l'induttanza  $L$  dell'induttore.

### 15.4.2 L'equazione per un generico bipolo dinamico complementare.

Ora affrontiamo il problema di costruire un'equazione (in genere differenziale) la cui soluzione ci consenta di capire la dinamica del circuito. Siccome la candidata di stato del circuito tiene conto dello stato in cui si trova il bipolo dinamico essa è la grandezza più adatta a descrivere il circuito stesso e quindi noi la scegliamo come funzione incognita dell'equazione differenziale. Nei casi generici noi possiamo rappresentare il bipolo dinamico complementare sia con il modello di Thévenin (cioè, controllato in corrente) sia con quello di Norton (cioè controllato in tensione).

**Modello controllato dalla candidata :** Scriviamo l'equazione differenziale del circuito, partendo dall'idea che la candidata sia la funzione incognita dell'equazione stessa.

**Condensatore**



Il circuito consiste in un unico taglio costituito da una  $\hat{\mathcal{I}}(\hat{i}_{eq}(t))$ , un  $\mathcal{R}(r_{eq})$  e un  $\mathcal{C}(C)$ . Le tre correnti attraverso l'unico taglio soddisfano alla :  $\hat{i}_{eq}(t) = i_c(t) + i_r(t)$ .

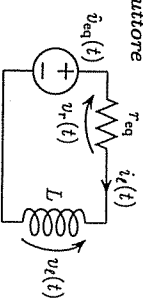
Introducendo le relazioni costitutive del bipolo dinamico e del resistore, otteniamo :

$$\hat{i}_{eq}(t) = C \dot{v}_c(t) + g_{eq} v_c(t)$$

Isolando a primo membro la derivata della candidata, otteniamo l'equazione differenziale in forma canonica :

$$\dot{v}_c(t) = -\frac{v_c(t)}{C/g_{eq}} + \frac{\hat{i}_{eq}(t)}{C}$$

**Induttore**



Il circuito consiste in un'unica maglia costituita da una  $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_{eq}(t))$ , un  $\mathcal{R}(r_{eq})$  e un  $\mathcal{L}(L)$ . Le tre correnti lungo l'unica maglia soddisfano alla :  $\hat{v}_{eq}(t) = v_L(t) + v_r(t)$ .

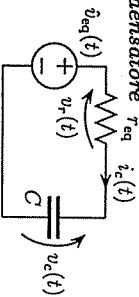
Introducendo le relazioni costitutive del bipolo dinamico e del resistore, otteniamo :

$$\hat{v}_{eq}(t) = L \dot{i}_L(t) + r_{eq} i_L(t)$$

$$\dot{i}_L(t) = -\frac{i_L(t)}{L/r_{eq}} + \frac{\hat{v}_{eq}(t)}{L}$$

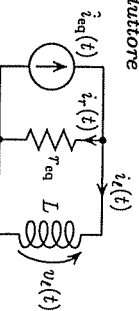
**Modello controllato dalla anticandidata** : Riscriviamo l'equazione differenziale usando, alternativamente, l'altro modello del bipolo dinamico.

**Condensatore**



Il circuito consiste in un'unica maglia costituita da una  $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_{eq}(t))$ , un  $\mathcal{R}(r_{eq})$  e un  $\mathcal{C}(C)$ . Le tre tensioni lungo l'unica maglia soddisfano alla :  $\hat{v}_{eq}(t) = v_c(t) + v_r(t)$

**Induttore**



Il circuito consiste in un'unica maglia costituita da una  $\hat{\mathcal{I}}(\hat{i}_{eq}(t))$ , un  $\mathcal{R}(r_{eq})$  e un  $\mathcal{L}(L)$ . Le tre correnti attraverso l'unico taglio soddisfano alla :  $\hat{i}_{eq}(t) = i_L(t) + i_r(t)$

Introducendo le relazioni costitutive del bipolo dinamico e del resistore, otteniamo :

$$\hat{v}_{eq}(t) = v_c(t) + r_{eq} C \dot{v}_c(t)$$

Isolando a primo membro la derivata della candidata, otteniamo l'equazione differenziale in forma canonica :

$$\dot{v}_c(t) = -\frac{v_c(t)}{r_{eq} C} + \frac{\hat{v}_{eq}(t)}{r_{eq} C}$$

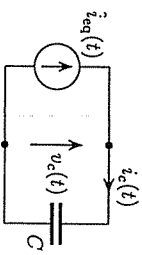
Queste equazioni differenziali coincidono con quelle costruite tramite l'altro modello del bipolo dinamico composto.

**15.4.3 L'equazione per particolari bipoli dinamici complementari**

Nel paragrafo precedente abbiamo scritto l'equazione differenziale nel caso che il bipolo dinamico sia generico cioè non omogeneo e non impressivo. In questo paragrafo esaminiamo i casi particolari, ma molto importanti, in cui il bipolo dinamico sia omogeneo e/o impressivo :

**Bipolo dinamico impressivo e non omogeneo (Caso A)** : il bipolo è una sorgente impressiva della stessa grandezza che svolge il ruolo di anticandidata del bipolo dinamico.

**Condensatore** : il circuito è costituito da una  $\hat{\mathcal{I}}(\hat{i}_{eq}(t))$  chiusa su un  $\mathcal{C}(C)$ .



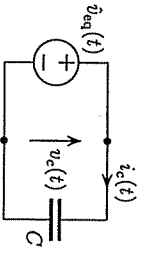
Eguagliando le due correnti :

$$\hat{i}_{eq}(t) = i_c(t) \implies \dot{v}_c(t) = \frac{\hat{i}_{eq}(t)}{C}$$

In mancanza del resistore la candidata appare solamente sotto l'operatore derivata : la soluzione dell'equazione differenziale risulterà più semplice.

**Bipolo dinamico impressivo e non omogeneo (Caso B)** : il bipolo è una sorgente impressiva della stessa grandezza che svolge il ruolo di candidata del bipolo dinamico.

**Condensatore** : il circuito è costituito da una  $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_{eq}(t))$  chiusa su un  $\mathcal{C}(C)$ .



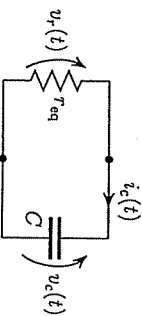
Eguagliando le due tensioni si ottiene :

$$\hat{v}_{eq}(t) = v_c(t)$$

Si come la derivata della candidata svanisce, l'equazione non è più differenziale ma algebrica : infatti la candidata di stato coincide con la grandezza impressa.

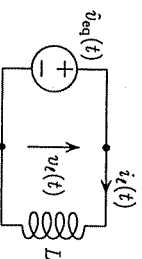
**Bipolo dinamico non impressivo e omogeneo** : in questo caso il bipolo si riduce a un resistore :

**Condensatore** : il circuito è costituito da un  $\mathcal{R}(r_{eq})$  chiuso su un  $\mathcal{C}(C)$ .



Eguagliando le due correnti si ottiene :

**Induttore** : il circuito è costituito da una  $\hat{\mathcal{I}}(\hat{i}_{eq}(t))$  chiusa su un  $\mathcal{L}(L)$ .

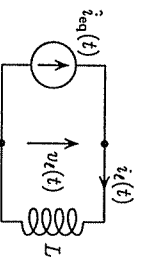


Eguagliando le due tensioni :

$$\hat{v}_{eq}(t) = v_L(t) \implies \dot{i}_L(t) = \frac{\hat{v}_{eq}(t)}{L}$$

In mancanza del resistore la candidata appare solamente sotto l'operatore derivata : la soluzione dell'equazione differenziale risulterà più semplice.

**Induttore** : il circuito è costituito da una  $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_{eq}(t))$  chiusa su un  $\mathcal{L}(L)$ .

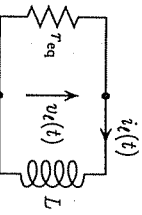


Eguagliando le due correnti si ottiene :

$$\hat{i}_{eq}(t) = i_L(t)$$

Si come la derivata della candidata svanisce, l'equazione non è più differenziale ma algebrica : infatti la candidata di stato coincide con la grandezza impressa.

**Condensatore** : il circuito è costituito da un  $\mathcal{R}(r_{eq})$  chiuso su un  $\mathcal{L}(L)$ .



Eguagliando le due tensioni si ottiene :

$$i_c(t) = -i_c(t) \implies C \dot{v}_c(t) = -g_{eq} v_c(t)$$

$$v_c(t) = -v_c(t) \implies L \dot{i}_c(t) = -r_{eq} i_c(t)$$

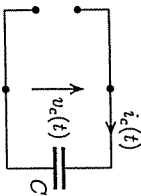
$$\implies \dot{v}_c(t) = -\frac{v_c(t)}{C/g_{eq}}$$

$$\implies \dot{i}_c(t) = -\frac{i_c(t)}{L/r_{eq}}$$

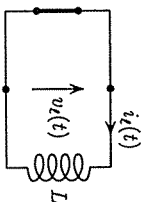
In mancanza di sorgenti impulsive l'equazione differenziale risulta omogenea. ■

**Bipolo adinamico impressivo e omogeneo (Caso A)** : il bipolo adinamico annulla la anticandidata del bipolo dinamico.

**Condensatore** : il circuito è costituito da un  $C(C)$  coi terminali a vuoto.



**Induttore** : il circuito è costituito da un  $L(L)$  coi terminali in corto.



La corrente del condensatore risulta nulla :

La tensione dell'induttore risulta nulla :

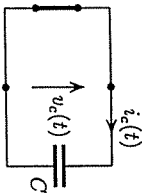
$$i_c(t) = 0 \implies C \dot{v}_c(t) = 0 \implies \dot{v}_c(t) = 0$$

$$v_L(t) = 0 \implies L \dot{i}_L(t) = 0 \implies \dot{i}_L(t) = 0$$

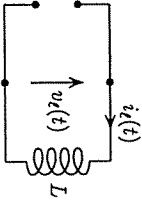
L'equazione differenziale impone che la candidata sia costante : quindi anche l'energia immagazzinata nel bipolo conservativo resta immutata nel tempo. ■

**Bipolo adinamico impressivo e omogeneo (Caso B)** : il bipolo adinamico annulla la candidata del bipolo dinamico.

**Condensatore** : il circuito è costituito da un  $C(C)$  coi terminali in corto :



**Induttore** : il circuito è costituito da un  $L(L)$  coi terminali a vuoto :



Risulta immediatamente :  $i_L(t) = 0$

Risulta immediatamente :  $v_c(t) = 0$   
L'equazione non è più differenziale ma algebrica e impone la nullità della candidata : quindi il bipolo conservativo non è in grado di immagazzinare energia. ■

**Ordine del circuito** : Se nell'equazione compare la derivata della candidata l'equazione risulta differenziale e il circuito è dinamico di prim'ordine. E la candidata agisce da *variabile di stato* del circuito stesso, che viene detto *nondegenera*.

Se la derivata svanisce, l'equazione risulta puramente algebrica, e il circuito risulta adinamico ovvero dinamico di ordine zero. In questo caso la candidata non è in grado di diventare variabile di stato del circuito stesso, che viene detto *degenera*. ■

## 15.5 SOLUZIONE GENERALE DEI CIRCUITI DINAMICI ELEMENTARI

L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale del prim'ordine, chiamato in genere *soluzione generale*, viene investigato : ciascuna soluzione è costituita dalla somma della *soluzione libera* più la *soluzione forzata* e il loro insieme costituisce uno spazio affine o lineare di dimensioni 1. La soluzione libera è caratterizzata da una specifica *pulsazione naturale* e dal corrispondente *modo naturale*.

### 15.5.1 Soluzioni dell'equazione differenziale

Intendiamo studiare l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale lineare di un circuito dinamico di prim'ordine. Noi assumiamo che le grandezze (tensioni oppure correnti) impresse presenti nel bipolo adinamico composto complementare siano generiche funzioni del tempo tra loro in genere diverse. Esse vengono tenute distinte nei modelli di Thévenin o Norton del bipolo adinamico composto complementare (vedere Par. 15.4.1) :  $\hat{u}_{eq1}(t)$ ,  $\hat{u}_{eq2}(t)$ ,  $\dots$ ,  $\hat{u}_{eqK}(t)$

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b \sum_{k=1}^K \hat{u}_{eqk}(t)$$

dove  $x(t)$  è la variabile di stato.

Per trovare le soluzioni dell'equazione differenziale conviene sostituire la funzione incognita  $x(t)$  con la nuova incognita  $\tilde{x}(t)$  :

$$x(t) = \exp[a(t-t_0)] \tilde{x}(t) \implies \dot{x}(t) = \exp[a(t-t_0)] [a \tilde{x}(t) + \dot{\tilde{x}}(t)]$$

La sostituzione conduce alla nuova equazione differenziale in  $\tilde{x}(t)$  :

$$\exp[a(t-t_0)] [a \tilde{x}(t) + \dot{\tilde{x}}(t)] = a \exp[a(t-t_0)] \tilde{x}(t) + b \sum_{k=1}^K \hat{u}_{eqk}(t)$$

da cui, dopo aver eliminato i due termini comuni ai due membri e integrato i due membri stessi, otteniamo la soluzione in  $\tilde{x}(t)$  :

$$\tilde{x}(t) = b \exp[a(t_0-t)] \sum_{k=1}^K \hat{u}_{eqk}(t) \implies \dot{x}(t) = x_0 + b \sum_{k=1}^K \int_{t_0}^t \exp[a(t_0-\tau)] \hat{u}_{eqk}(\tau) d\tau$$

dove  $x_0$  è la costante arbitraria di integrazione coincidente col valore iniziale sia di  $x(t)$  sia di  $\tilde{x}(t)$  :  $\tilde{x}(t_0) = x(t_0) = x_0$ . Ripristinando la funzione incognita  $x(t)$  otteniamo la soluzione :

$$x(t) = \exp[a(t-t_0)] \tilde{x}(t) = \underbrace{\exp[a(t-t_0)] x_0}_{\text{soluzione libera } x^{lib}(t)} + b \underbrace{\sum_{k=1}^K \int_{t_0}^t \exp[a(t-\tau)] \hat{u}_{eqk}(\tau) d\tau}_{\text{soluzione forzata } x^{for}(t)}$$

**Definizioni** : L'insieme di tutte le soluzioni, chiamato tradizionalmente *soluzione generale* del circuito dinamico, è costituito da coi soluzioni distinte, che tradizionalmente

prendono il nome di *soluzioni particolari* indicate da  $x^{(p)1}(t), x^{(p)2}(t), x^{(p)3}(t), \dots$ . Ciascuna soluzione particolare è in corrispondenza biunivoca col valore  $x_0$  della soluzione in  $t = t_0$ : cioè per qualsiasi valore  $x_0 \in \mathbb{R}^1$ , esiste una e una sola soluzione  $x(t)$  tale che  $x(t_0) = x_0$ .

**Proprietà:** L'espressione della soluzione  $x(t)$  ci consente di affermare che  $x(t)$  è analiticamente continua eccetto il caso in cui una o più delle grandezze impresse  $\hat{u}_{eqk}(t)$  contengano degli impulsi ideali. Nel caso che le grandezze impresse siano infinitamente derivabili, anche  $x(t)$  risulta infinitamente derivabile.  
 WWWWWW??? DIRE DUE PAROLE PER "PROVA" ???WWWWW

15.5.2 Soluzione libera e soluzione forzata

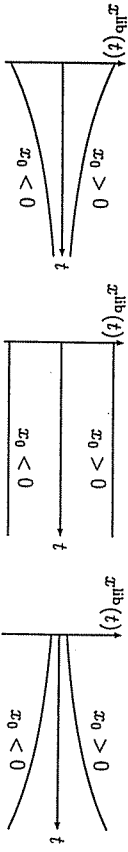
Dal Par. 13.5.1 risulta che la soluzione generale è scomposta nella somma della *soluzione libera*  $x^{lib}(t)$  e della *soluzione forzata*  $x^{for}(t)$ , il cui significato fisico viene discusso qui di seguito.

**Soluzione libera:** La soluzione libera  $x^{lib}(t) = \exp[a(t-t_0)]x_0$  dipende esclusivamente dal valore iniziale  $x_0$  della candidata di stato  $x(t)$  e non dipende dalle grandezze impresse  $\hat{u}_{eqk}(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ). Essa coincide con la soluzione particolare del circuito omogeneo associato, determinata dal medesimo valore di  $x_0$ . Essa coincide con la soluzione generale del circuito omogeneo associato, qualora  $x_0$  sia considerato indeterminato.

**Commento:** La condizione  $x_0 = 0$  significa che l'energia immagazzinata nel bipolo conservativo è nulla in  $t = t_0$ .

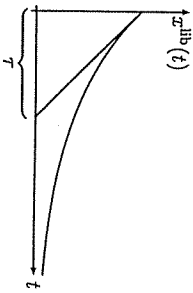
**Modo naturale:** L'esponenziale  $\exp[a(t-t_0)]x_0$ , che costituisce la soluzione libera, viene chiamato *modo naturale* del circuito di primo ordine e  $a$  viene detta *pulsazione naturale* del circuito dinamico. Indipendentemente dal valore di  $x_0$ , la soluzione libera

$\forall a < 0, \exp[a(t-t_0)]x_0$  Per  $a = 0, \exp[a(t-t_0)]x_0$   $\forall a > 0, \exp[a(t-t_0)]x_0$   
 svanisce al crescere di  $t$ : degenera in una costante: diverge al crescere di  $t$ :



L'aggettivo "naturale" ci ricorda che questa funzione del tempo non dipende dalle grandezze impresse  $\hat{u}_{eqk}(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) (cioè dall'esterno) ma nasce spontaneamente nel circuito dinamico.

**Costante di tempo:** Nel caso molto frequente che  $a < 0$ , la sua inversa, cambiata di segno,  $\tau = -1/a$  risulta positiva e ha le dimensioni fisiche di un tempo e viene chiamata *costante di tempo* del circuito. Essa può essere interpretata graficamente, come illustrato nella figura accanto. Essa coincide con la lunghezza del segmento dell'asse dei tempi tra l'origine e l'intersezione con la retta tangente all'esponenziale in  $t = 0$ .



**Commento:** La costante di tempo coincide col tempo che impiegherebbe il circuito a raggiungere il regime se il tasso di variazione si mantenesse uguale a quello iniziale. Il diagramma ci dice che dopo un intervallo di tempo  $4\tau - 5\tau$  la soluzione libera svanisce.

**Soluzione forzata:** La soluzione forzata  $x^{for}(t)$  dipende dalle grandezze impresse  $\hat{u}_{eqk}(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) e non dipende da  $x_0$ . Essa coincide con la soluzione effettiva del circuito originario, qualora il valore iniziale (per  $t = t_0$ ) della candidata  $x(t)$  sia nullo.

**Teorema di sovrapposizione per le soluzioni forzate:** la soluzione forzata può essere scomposta nella somma dei contributi dovuti a ciascuna sorgente impressiva interna al bipolo dinamico.

$$x^{for}(t) = \sum_{k=1}^K x^{for k}(t) = \sum_{k=1}^K b \int_{t_0}^t \exp[a(t-\tau)] \hat{u}_{eqk}(\tau) d\tau$$

Questa espressione ci dice che vale il principio di sovrapposizione per le soluzioni forzate rispetto alla singole grandezze impresse contenute nel bipolo dinamico complementare:

La soluzione forzata composta risulta uguale alla somma delle soluzioni forzate associate a ciascuna sorgente impressiva.

15.5.3 Spazio affine della soluzione generale

**Proprietà:** La soluzione generale costituisce uno spazio affine di dimensioni 1, dal momento che la combinazione lineare di due soluzioni particolari qualsiasi  $\alpha_1 x^{p1}(t) + \alpha_2 x^{p2}(t)$  è a sua volta una soluzione.

Consideriamo di nuovo la soluzione generale dell'equazione differenziale lineare non omogenea di primo ordine:

**Teorema:** siano date due soluzioni qualsiasi  $x^{(p)1}(t)$  e  $x^{(p)2}(t)$  dell'equazione differenziale di un circuito dinamico lineare non omogeneo. La loro differenza  $x^{(p)1}(t) - x^{(p)2}(t)$  è a sua volta una soluzione del circuito dinamico omogeneo associato.

**Prova:** Scriviamo le due soluzioni  $x^{(p)1}(t)$  e  $x^{(p)2}(t)$ , ognuna definita da due valori iniziali  $x_{01}$  e  $x_{02}$  diversi, ed eseguiamo la sottrazione  $x^{(p)2}(t) - x^{(p)1}(t)$ :

$$\left. \begin{aligned} x^{(p)1}(t) &= \exp[a(t-t_0)]x_{01} + x^{for}(t) \\ x^{(p)2}(t) &= \exp[a(t-t_0)]x_{02} + x^{for}(t) \end{aligned} \right\} \iff x^{(p)2}(t) - x^{(p)1}(t) = \exp[a(t-t_0)] [x_{02} - x_{01}]$$

che dimostra la proprietà.

La precedente proprietà ci consente di scrivere un'espressione alternativa della soluzione generale di un circuito dinamico non omogeneo. Sia  $\exp[a(t-t_0)]q$ , ove  $q$  è uno scalare arbitrario  $\in \mathbb{R}^1$ , la soluzione generale del circuito omogeneo associato e  $x^{(p)}(t)$  una qualsiasi soluzione particolare del circuito non omogeneo originario. La soluzione generale del circuito non omogeneo originario sarà la somma delle due:

$$x(t) = \exp[a(t-t_0)]q + x^{(p)}(t)$$

**Circuito dinamico omogeneo:** Per un circuito dinamico omogeneo, la soluzione generale costituisce uno spazio lineare di dimensioni 1, dal momento che la somma di due

soluzioni particolari qualsiasi  $x^{p1}(t) + x^{p2}(t)$  e il prodotto di una soluzione particolare per uno scalare qualsiasi sono a loro volta soluzioni: infatti manca nella soluzione generale il contributo della soluzione forzata. ■

**Commento:** L'espressione della soluzione generale comprendente la soluzione forzata nel ruolo di soluzione particolare (vedere Par. 13.5.1) è un caso particolare di quella appena discussa. E proprio la soluzione particolare  $x^{(p)}(t)$  che trasla lo spazio lineare della soluzione generale del circuito omogeneo associato nello spazio affine della soluzione generale del circuito originario. ■

**Soluzione effettiva:** Per calcolare la soluzione effettiva (unica) di un circuito dinamico non omogeneo occorre specificare il valore del vettore arbitrario  $q$  nella espressione della soluzione generale. La *soluzione effettiva*  $x^{eff}(t)$  viene determinata come la soluzione particolare che coincide con il valore iniziale assegnato  $x^{eff}(t_0) = x_0$ :

$$x_0 = x^{eff}(t_0) = q + x^{(p)}(t_0) \implies x^{eff}(t) = \exp[a(t-t_0)] [x_0 - x^{(p)}(t_0)] + x^{(p)}(t) \quad \blacksquare$$

#### 15.5.4 Principio di sovrapposizione per le soluzioni particolari

Le soluzioni particolari dei circuiti dinamici lineari non omogenei obbediscono al principio di sovrapposizione analogamente ai circuiti dinamici (Cap. 11):

**Proprietà:** sia dato un circuito dinamico lineare con  $K$  grandezze impresse  $\hat{u}_{eq1}(t), \hat{u}_{eq2}(t), \dots, \hat{u}_{eqK}(t)$ . Ciascuna è dovuta a una sorgente impressiva interna al bipolo dinamico complementare. Sostituiamo  $K-1$  di queste sorgenti impresse col corrispondente bipolo omogeneo associato, lasciando invariata la restante sorgente. In questo modo otteniamo  $K$  diversi circuiti ausiliari, ciascuno con una sola sorgente impressiva, diversa per ciascuno. Se  $x^{(p1)}(t), x^{(p2)}(t), \dots, x^{(pK)}(t)$  denotano  $K$  soluzioni particolari qualsiasi, una per ciascuno dei rispettivi  $K$  circuiti ausiliari, la loro somma  $x^{(p)}(t) = \sum_{k=1}^K x^{(pk)}(t)$  è una soluzione particolare del circuito originario (completo di tutte le sVI e sII). ■

**Prova:** Scriviamo le soluzioni particolari  $x^{(pk)}(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) di ciascuno dei  $K$  circuiti ausiliari ottenuti dal circuito originario, azzerando le  $K-1$  grandezze impresse escluse dal  $k$ -esimo circuito ausiliario

$$x^{(pk)}(t) = \underbrace{\exp[a(t-t_0)] x_{0k}}_{\text{soluzione libera}} + b \int_{t_0}^t \underbrace{\exp[a(t-\tau)] \hat{u}_{eqk}(\tau) d\tau}_{\text{soluzione forzata}} \quad \forall k = 1, 2, \dots, K$$

La somma di queste  $K$  soluzioni particolari, è a sua volta una soluzione particolare dell'equazione differenziale originale:

$$x^{(p)}(t) = \sum_{k=1}^K x^{(pk)}(t) = \underbrace{\exp[a(t-t_0)] \sum_{k=1}^K x_{0k}}_{\text{soluzione libera}} + b \sum_{k=1}^K \int_{t_0}^t \underbrace{\exp[a(t-\tau)] \hat{u}_{eqk}(\tau) d\tau}_{\text{soluzione forzata}}$$

**Commento:** la suddetta proprietà è molto usata per analizzare circuiti con sorgenti impresse tempo-varianti con forme d'onda diverse. ■

## 15.6 SOLUZIONI SIMILARI DEI CIRCUITI DINAMICI ELEMENTARI

Questa sezione esamina le *soluzioni similari* dei circuiti dinamici lineari elementari congiuntamente alle loro proprietà e ai metodi più efficaci per il loro calcolo.

### 15.6.1 Generalità

In principio, qualsiasi soluzione particolare del circuito dinamico originale (non omogeneo) può essere scelta per scrivere la soluzione generale del circuito stesso, come visto nel Par. 15.5.4. Quando le grandezze impresse sono dello stesso tipo, costanti ovvero sinusoidali con la stessa pulsazione  $\omega$ , caso molto frequente nei circuiti elettrici, esiste in genere una soluzione particolare simile alla grandezza impressa, chiamata appunto *soluzione similare* e indicata da  $x^{sim}(t)$ . In pratica, conviene esprimere la soluzione generale per mezzo della soluzione similare, qualora essa esista.

#### 15.6.2 Circuiti (autonomi) con ingressi costanti

Consideriamo circuiti dinamici elementari, in cui assumiamo che tutte le grandezze impresse (ingressi) siano costanti: l'equazione differenziale risulta del tipo:

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b \hat{u}_{eq}$$

dove  $\hat{u}_{eq}$  è costante e riassume l'azione di tutte le sorgenti impresse costanti presenti nel circuito.

Assumiamo che la soluzione similare (costante) esista e indichiamo con  $x^{sim}$  e cerchiamola.

**Proprietà:** La soluzione similare  $x^{sim}$  non dipende da  $t$  e viene determinata, imponendo  $\dot{x}(t) = 0$  nell'equazione differenziale:

$$0 = a x^{sim} + \hat{u}_{eq} \implies x^{sim} = -\hat{u}_{eq}/a \quad \text{purché } a \neq 0 \quad \blacksquare$$

**Circuito dinamico associato:** In presenza di grandezze impresse costanti, la soluzione similare (costante) può essere calcolata senza utilizzare l'equazione differenziale, ma ricorrendo al circuito stesso. Siccome le tensioni e correnti di ramo sono costanti, le loro derivate sono nulle. Quindi il condensatore ovvero l'induttore risulta equivalente, rispettivamente, a un c.a. ovvero c.c. (vedere Sez. 15.1). Questa osservazione suggerisce questa procedura:

- Costruire il circuito dinamico associato eseguendo nel circuito dinamico originario la sostituzione: condensatore  $\rightarrow$  c.a. ovvero induttore  $\rightarrow$  c.c.
- Analizzare il suddetto circuito dinamico tempo-invariante e lineare mediante i metodi già visti nei CCap. 7, 11 e 12. Esso può risultare incompatibile ovvero indeterminato secondo le definizioni date nella Sez. 11.2.
- L'incompatibilità ovvero indeterminata del circuito dinamico associato corrisponde al caso in cui il coefficiente  $a$  dell'equazione differenziale sia nullo. In altre parole in questo caso la soluzione similare non è definita.

**Soluzione pseudosimilare** : Nel caso in cui  $a = 0$  la soluzione similare (costante) non esiste : comunque si può determinare una diversa soluzione particolare che chiamiamo *soluzione pseudosimilare* dell'equazione :

$$a = 0 \implies \dot{x}(t) = b \hat{u}_{eq} \implies x^{sim}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t b \hat{u}_{eq} d\tau = x_0 + b \hat{u}_{eq} (t - t_0)$$

che risulta una retta con pendenza  $b \hat{u}$  e non più una retta orizzontale come capita per le soluzioni similari associate a grandezze impresse costanti. ■

**15.6.3 Soluzioni similari con sorgenti impulsive sinusoidali**

La soluzione similare può essere definita anche nel caso che le grandezze impresse siano sinusoidali con la stessa pulsazione  $\omega$ . In pratica, qualora le grandezze impresse siano sinusoidi, conviene scegliere una specifica soluzione particolare, chiamata *soluzione similare* e indicata da  $x^{sim}(t)$ . Essa è caratterizzata dal fatto di "essere simile all'ingresso", nel senso che essa è a sua volta una sinusoida  $x^{sim} \cos(\omega_1 t + \phi^{sim})$  con la stessa pulsazione delle grandezze impresse e ampiezza e fase da determinare.

Consideriamo l'equazione differenziale di un circuito dinamico di primo ordine nonomogeneo, in cui siano presenti sorgenti impulsive sinusoidali isofrequenziali di pulsazione  $\omega_1$  :

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b \hat{u}(t) \quad \text{con } \hat{u}(t) = u_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

dove  $\hat{u}(t)$  è il risultato dell'azione di tutte le sorgenti impulsive sinusoidali interne al bipolo dinamico complementare.

In questo caso è ragionevole fare la seguente congettura :

**Congettura** : Assumiamo che esista una soluzione particolare, che chiameremo *soluzione similare*, costituita da una sinusoida con la stessa pulsazione  $\omega_1$  :

$$x^{sim}(t) = x^{sim} \cos(\omega_1 t + \phi^{sim})$$

dove  $x^{sim}$  è l'ampiezza e  $\phi^{sim}$  la fase della sinusoida da determinare per verificare la congettura.

**Verifica** : Per provare la consistenza della congettura sostituiamo  $x(t) \rightarrow x^{sim}(t)$  nell'equazione differenziale :

$$-\omega_1 x^{sim} \sin(\omega_1 t + \phi^{sim}) = a x^{sim} \cos(\omega_1 t + \phi^{sim}) + b u_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

Ritornando a primo membro le sinusoidi caratterizzate da  $\cos(\omega_1 t)$  e a secondo membro le sinusoidi caratterizzate da  $\sin(\omega_1 t)$ , otteniamo l'equazione :

$$\begin{aligned} \cos(\omega_1 t) [a x^{sim} \cos(\phi^{sim}) + b u_1 \cos(\phi_1) + \omega_1 x^{sim} \sin(\phi^{sim})] = \\ = \sin(\omega_1 t) [a x^{sim} \sin(\phi^{sim}) + b u_1 \sin(\phi_1) - \omega_1 x^{sim} \cos(\phi^{sim})] \end{aligned}$$

Questa equazione è soddisfatta qualora il fattore moltiplicativo tra [ ] di  $\cos(\omega_1 t)$  a primo membro e l'analogo fattore di  $\sin(\omega_1 t)$  a secondo membro siano entrambi nulli. Otteniamo le due equazioni scalari che possono essere riordinate sotto forma di un sistema di due equazioni nelle due incognite  $x^{sim} \cos(\phi^{sim})$  e  $x^{sim} \sin(\phi^{sim})$  :

$$\begin{bmatrix} a & \omega_1 \\ -\omega_1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{sim} \cos(\phi^{sim}) \\ x^{sim} \sin(\phi^{sim}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b u_1 \cos(\phi_1) \\ b u_1 \sin(\phi_1) \end{bmatrix}$$

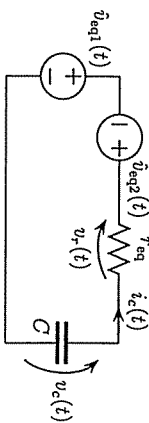
WWWWWW?? RIVEDERE e COMPLETARE gli sviluppi qui sopra. ???WWWWWW La congettura sull'esistenza della soluzione similare risulta valida, dal momento che il determinante della matrice del sistema, uguale a  $a^2 + \omega_1^2$ , è diverso da zero, qualsiasi siano i valori di  $a$  e  $\omega_1$ .

**Commento** : In pratica per il calcolo delle soluzioni similari associate a sorgenti impulsive sinusoidali

**15.6.4 Soluzione similare composta**

Assumiamo che nel circuito dinamico vi siano più sorgenti impulsive sinusoidali, ciascuna caratterizzata da una specifica pulsazione  $\omega_k$  includendo anche il caso di sorgenti impresse costanti. Sulla base del principio di sovrapposizione delle soluzioni particolari (vedere Par. 13.6.1) possiamo stabilire che esiste una soluzione particolare costituita dalla sovrapposizione delle soluzioni similari associate a ciascuna sorgente impulsiva nel caso che essa operi da sola nel circuito. Questa soluzione particolare costituita dalla somma di più soluzioni similari prende il nome di *soluzione similare (composta)* del circuito.

**Esempio** : Il circuito in figura può essere considerato come il modello di un circuito contenente un condensatore e due sorgenti impulsive (una costante ( $\hat{v}_{eq1}(t)$ ) e una sinusoidale ( $\hat{v}_{eq2}(t)$ )) e un numero impreato di componenti dinamici omogenei.



La serie delle due sorgenti e del resistore costituiscono il modello di Thévenin del bipolo composto complementare al condensatore.

La soluzione similare (composta) ha la forma  $v_c^{sim}(t) = v_c^{sim1}(t) + v_c^{sim2}(t)$  in cui il termine  $v_c^{sim1}(t)$  è associato alla  $\mathcal{V}(\hat{v}_{eq1}(t))$  ed il termine  $v_c^{sim2}(t)$  è associato alla  $\mathcal{V}(\hat{v}_{eq2}(t))$

Il termine  $v_c^{sim1}(t)$  viene calcolato sostituendo  $\mathcal{V}(\hat{v}_{eq2}(t)) \rightarrow$  c.c. e il termine  $v_c^{sim2}(t)$  sostituendo  $\mathcal{V}(\hat{v}_{eq1}(t)) \rightarrow$  c.a. WWWWWWW?? CONTINUARE

**15.6.5 Soluzioni analitiche dei circuiti con un solo bipolo dinamico elementare**

WWWWWW?? DUPLICARE LE FIGURE dei PPar. 15.4.2-3 e scrivere a fianco le soluzioni analitiche ???WWWWWW

adattivo	<b>condensatore</b>	adattivo	<b>induttore</b>
c.c. :	$v_c(t) = 0$	c.a. :	$i_L(t) = 0$
c.a. :	$v_c(t) = v_{c0}$	c.c. :	$i_L(t) = i_{L0}$
sVI :	$v_c(t) = \hat{v}_{eq}(t)$	sII :	$i_L(t) = \hat{i}_{eq}(t)$
sI :	$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t \hat{v}_{eq}(\tau) d\tau + v_{c0}$	sVI :	$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t \hat{i}_{eq}(\tau) d\tau + i_{L0}$
resistore :	$v_c(t) = v_{c0} \exp\left[-\frac{t}{\tau_{eq} C}\right]$	resistore :	$i_L(t) = i_{L0} \exp\left[-\frac{t}{g_{eq} L}\right]$

Generico :  $v_c(t) = [v_{c0} - v_c^{sim}(t_0)] \exp\left[-\frac{t}{\tau_{eq} C}\right] + v_c^{sim}(t)$

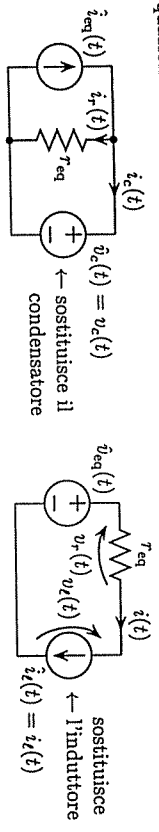


generico :  $i_c(t) = [i_{c0} - i_c^{sim}(t_0)] \exp\left[-\frac{t}{g_{eq} L}\right] + i_c^{sim}(t)$   
 dove "generico" significa "nonimpressivo e nonomogeneo".

15.6.6 Calcolo delle altre grandezze del circuito

Molto spesso anche le altre grandezze del circuito, cioè tensioni e/o correnti "nascoste" all'interno del bipolo dinamico complementare, sono di interesse. Da un punto di vista matematico, la ricerca delle tensioni e correnti nascoste nel bipolo dinamico corrisponde a costruire un sistema di equazioni algebriche che coinvolge queste tensioni e correnti congiuntamente alla variabile di stato, che si assume nota dalla soluzione dell'equazione differenziale, e alla grandezze impresse. Ovviamente, in questo sistema, per la sua natura algebrica, non può comparire la derivata della variabile di stato. Questa analisi equivale alla soluzione di un *circuito dinamico ausiliario* costruito sostituendo l'unico bipolo conservativo con la corrispondente sorgente impressiva in accordo al Teorema di Sostituzione (vedere Cap. 5).

In particolare il condensatore viene sostituito da una sVI, la cui tensione impressa, in genere tempo-variante, coincide con la variabile di stato ottenuta dalla soluzione dell'equazione differenziale, mentre l'induttore viene sostituito da una sI, la cui corrente impressa, in genere tempo-variante, coincide con la variabile di stato ottenuta dalla soluzione dell'equazione differenziale.



CIRCUITI DINAMICI AUSILIARI ASSOCIATI AI CIRCUITI DINAMICI ORIGINALI

**Proprietà** : Il circuito dinamico ausiliario è nondegenere (vedere Sez. 11.2).

**Prova** : Infatti non esistono equazioni algebriche che coinvolgono solamente le grandezze impresse dovute ai due tipi di sorgenti impresse.

■ Siccome il circuito dinamico ausiliario non è patologico (degenere), esso può essere risolto mediante il principio di sovrapposizione rispetto alla grandezze impresse (vedere Cap. 11).  
 Quindi il vettore  $y(t)$  delle *grandezze d'uscita* assume l'espressione :

$$y(t) = c x(t) + d_1 \hat{u}_1(t) + d_2 \hat{u}_2(t) + \dots + d_K \hat{u}_K(t)$$

dove il vettore  $c$  rappresenta il contributo della variabile di stato alle grandezze di uscita e i vettori  $d_1, d_2, \dots, d_K$  rappresentano i contributi di ogni grandezza impressa. La suddetta equazione è puramente algebrica e viene in genere riscritta con una notazione più compatta :

$$y(t) = c x(t) + D \hat{u}(t) \text{ dove } D \equiv [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_K]$$

che viene chiamata usualmente *equazione (vettoriale) di uscita*.

**Commento** : L'equazione di stato insieme all'equazione di uscita costituiscono un sistema

diff. alg. . L'equazione di stato può essere vista come il sottosistema differenziale puro del sistema mentre l'equazione di uscita può essere vista come il sottosistema algebrico puro (vedere Par. 15.1.5).

15.6.7 WWWW?? Energia nei circuiti dinamici elementari

**Circuito omogeneo** : Siamo in presenza di un condensatore chiuso su un resistore ovvero di un induttore chiuso su un resistore. Ad un generico istante  $t$  il bipolo conservativo immagazzina l'energia  $w^{ene}(t)$  ed il resistore dissipa la potenza  $p^{dis}(t)$ . Il teorema della potenza effettiva (vedere Cap. 5) dice che

$$\frac{dw^{ene}(t)}{dt} + p^{dis}(t) = 0$$

dove

$$w^{ene}(t) = C [v_c(t)]^2 / 2$$

$$p^{dis}(t) = [v_c(t)]^2 / r$$

$$w^{ene}(t) = L [i_L(t)]^2 / 2$$

$$p^{dis}(t) = [i_L(t)]^2 r$$

Dalle precedenti relazioni energetiche, possiamo scrivere un'equazione differenziale la cui funzione incognita è proprio l'energia immagazzinata nel bipolo conservativo :

$$\frac{dw^{ene}(t)}{dt} = -\frac{2}{r} w^{ene}(t)$$

$$\frac{dw^{ene}(t)}{dt} = -\frac{2r}{L} w^{ene}(t)$$

Siccome l'energia immagazzinata  $w^{ene}(t)$  è positiva, quest'equazione ci dice che la sua derivata è negativa e che essa diventa nulla solo nel caso in cui  $w^{ene}(t)$  diventi nulla. Quindi l'energia immagazzinata  $w^{ene}(t_0) > 0$  per  $t = t_0$  nel bipolo conservativo diminuisce a causa delle dissipazione all'interno del resistore. L'equilibrio si ha qualora la derivata dell'energia sia nulla, cioè se e solo se la dissipazione si annulla : cioè quando l'energia immagazzinata è nulla.

**Circuito nonomogeneo** : Siamo in presenza di un condensatore chiuso sulla serie di una sVI e un resistore ovvero di un induttore chiuso sul parallelo di una sI e un resistore. Limitiamoci a considerare il caso in cui la sorgente impressiva sia costante. Ad un generico istante  $t$  il bipolo conservativo immagazzina l'energia  $w^{ene}(t)$ , e il resistore dissipa la potenza  $p^{dis}(t)$  e la sorgente impressiva eroga la potenza  $p^{imp}(t)$

$$p^{imp}(t) = \hat{v} [\hat{v} - v_c(t)] / r$$

$$p^{imp}(t) = \hat{i} [\hat{i} - i_L(t)] r$$

Dal momento che in ciascun istante di tempo la somma delle potenze elettriche è nulla (vedere teorema della potenza effettiva nel Cap. 5), possiamo scrivere la relazione :

$$\frac{dw^{ene}(t)}{dt} + p^{dis}(t) - p^{imp}(t) = 0$$

WWWWW???? CALCOLARE CONTINUARE  
 WWWWWW FARE CASO IN CUI RESISTENZA TRENDE A ZERO E LA CORRENTE TRENDE A DELTA DI DIRAC

### 15.6.8 WWWWWW???

#### Circuiti dinamici elementari con interruttori

Consideriamo i circuiti dinamici elementari contenenti un interruttore ideale (int.id.) (vedere Cap. 14). Separiamo l'unico bipolo conservativo dal resto del circuito. Otteniamo un bipolo dinamico lineare tempo-variante perché contiene l'int.id. . Possiamo costruire il modello di THÉVENIN ovvero di NORTON del bipolo che tenga conto della presenza dell'int.id. . In questo modello sia la resistenza interna sia la grandezza impressa equivalente variano a seconda della posizione dell'int.id. .

Il modello di THÉVENIN comprende l'interruttore può essere realizzato da due modelli di THÉVENIN in serie in cui inseriamo un interruttore in parallelo ad uno dei due modelli. Il modello di NORTON comprendente l'interruttore può essere realizzato da due modelli di NORTON in parallelo in cui inseriamo un interruttore in serie a uno dei due modelli. WWWWWW FARE FIGURA

Distinguere il caso in cui esistono i due modelli di THÉVENIN e/o di NORTON per entrambe le posizioni dell'interruttore interno al bipolo dinamico complementare. WWWWWW ESTENDERE A DUE O PIÙ INTERRUITTORI

# 16 COMPONENTI DINAMICI e LINEARI NONELEMENTARI

## 16.1 COMPONENTI DINAMICI GENERICI

In questa sezione vengono discussi i componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari di tipo più generale, cioè con un numero di porte qualsiasi e con relazioni costitutive (differenziali) più complesse, rispetto ai condensatori e induttori. Questa discussione non pretende di essere rigorosa ed esaustiva ma intende dare al lettore un'idea intuitiva di come possono essere costruiti i modelli di componenti dinamici più complessi.

### 16.1.1 Rappresentazioni e modelli equivalenti

Prendiamo in considerazione la forma implicita più generale delle relazioni costitutive di un  $k$ -porta dinamico tempo-invariante, lineare e omogeneo :

$$H^0 v(t) + H^1 \dot{v}(t) + H^2 \ddot{v}(t) + \dots + H^{10} \dot{i}(t) + H^{11} \dot{i}(t) + H^{12} \ddot{i}(t) + \dots = 0_k$$

Supponiamo per il momento che non vi siano termini noti. Lo studio di queste relazioni può apparire piuttosto pesante da un punto di vista matematico. Per esempio occorrerebbe discutere :

- quale vettore isolare a primo membro per definire le rappresentazioni esplicite : per esempio  $v(t)$ ,  $\dot{v}(t)$ ,  $\ddot{v}(t)$ ,  $\dots$ ,  $\dot{i}(t)$ ,  $\dot{i}(t)$ ,  $\ddot{i}(t)$ ,  $\dots$ , ovvero un qualsiasi altro vettore ibrido, misto di tensioni e correnti.
- le condizioni per cui possono essere definite delle specifiche rappresentazioni esplicite.

Fortunatamente i componenti definiti da rappresentazioni del tipo suddetto sono in genere equivalenti all'aggregazione di componenti più semplici :

- bipoli e doppi bipoli dinamici omogenei notevoli (vedere CCap. 7 e 9) : resistori, nullori, sorgenti pilotate, tr.id. e giratori.
- bipoli dinamici elementari cioè condensatori e induttori.

Un esame dettagliato di tutti questi possibili modelli equivalenti è al di fuori degli scopi di questi appunti. Qui ci limitiamo a presentare alcuni esempi piuttosto semplici, ma sufficientemente significativi.

### 16.1.2 Primo esempio di modelli di bipoli dinamici semplici

Qui riportiamo un primo esempio del modello equivalente di due bipoli dinamico composti con relazione costitutiva :

$$\dot{i}(t) = a_0 v(t) + a_1 \dot{v}(t) \qquad v(t) = a_0 \dot{i}(t) + a_1 \dot{i}(t)$$

che introducendo le correnti  $\dot{i}_1(t)$  e  $\dot{i}_2(t)$  che introducendo le tensioni  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  può essere riscritta nella forma

$$\dot{i}_1(t) = a_0 v(t) \quad \text{e} \quad \dot{i}_2(t) = a_1 \dot{v}(t) \qquad v_1(t) = a_0 \dot{i}(t) \quad \text{e} \quad v_2(t) = a_1 \dot{i}(t)$$

$$\text{dove} \quad \dot{i}(t) = \dot{i}_1(t) + \dot{i}_2(t) \qquad \text{dove} \quad v(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

Questo capitolo prende in considerazione i componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari nonelementari. Viene discusso il comportamento energetico di questi componenti, in particolare la passività. Infine la reciprocità, già introdotta per i componenti dinamici nel Cap. 8, viene estesa ai componenti dinamici. Le ultime sezioni si soffermano sugli induttori accoppiati.

**Sez. 16.1 :** *Componenti dinamici generici* : Vengono discussi i componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari di tipo più generale, cioè con un numero di porte qualsiasi e/o con relazioni costitutive (differenziali) più complesse, rispetto a quelle dei condensatori e induttori. Con alcuni esempi si dimostra che un componente dinamico, tempo-invariante e lineare può essere costituito da condensatori, induttori e componenti dinamici.

**Sez. 16.2 :** *Potenza effettiva, lavoro effettivo ed energia* : La potenza e il lavoro effettivi, definiti nel Cap. 5 sono discussi per i componenti dinamici tempo-invarianti e lineari con attenzione ai componenti dinamici conservativi e al concetto di energia immagazzinata. Inoltre vengono definiti i componenti passivi e attivi e le proprietà energetiche derivate dal Teorema e Corollario della potenza e lavoro effettivi riguardanti i componenti composti.

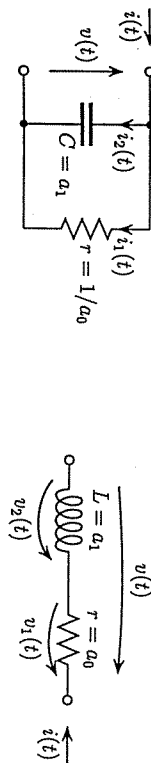
**Sez. 16.3 :** *Reciprocità* : La definizione di reciprocità, già introdotta nel Cap. 8 limitatamente ai componenti dinamici, viene estesa ai componenti dinamici, introducendo i *lavori virtuali incrociati*. Il Teorema di reciprocità rimane valido anche per i componenti dinamici.

**Sez. 16.4 :** *Induttori accoppiati* : Agli albori delle discipline elettriche gli induttori accoppiati costituivano il più diffuso doppio bipolo fisico, sia tripolare sia proprio. Il loro modello è dinamico e, in prima approssimazione, conservativo e ancora oggi sono molto usati particolarmente nei circuiti di potenza (per esempio il trasformatore).

**Sez. 16.5 :** *Modelli degli induttori accoppiati* : Viene introdotto il *coefficiente di accoppiamento* per misurare l'accoppiamento tra i due induttori fisici e due modelli composti degli induttori accoppiati che eliminano la necessità dell'accoppiamento.

**Sez. 16.6 :** *Appendice* : Questa appendice riporta un'uguaglianza tra due integrali che risulta utile per provare la reciprocità dei componenti dinamici.

Da cui viene derivato immediatamente il rispettivo modello equivalente :



16.1.3 Secondo esempio di modelli di bipoli dinamici semplici

Qui riportiamo un secondo esempio del modello equivalente di due bipoli dinamici compositi. Sia data la relazione costitutiva dinamica :

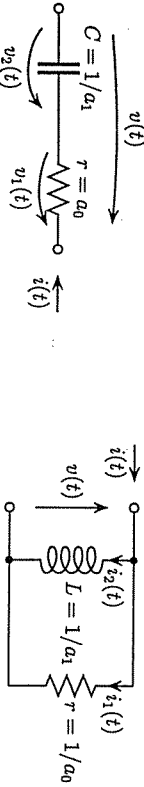
$$v(t) = \hat{a} + a_0 i(t) + a_1 \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

che introducendo le tensioni  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  può essere riscritta nella forma

$$v_1(t) = a_1 \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + \hat{a} \quad \text{e} \quad v_2(t) = a_0 i(t)$$

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad \text{dove} \quad i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

Da cui immediatamente segue il rispettivo modello equivalente :



16.1.4 Terzo esempio di modelli dinamici più complessi

Vediamo ora un esempio di relazioni costitutive più complesse rispetto a quelle dei due paragrafi precedenti. Sia data la relazione costitutiva dinamica

$$h_a (v(t) + a_0 v(t)) = h_b (i(t) + b_0 i(t)) \quad \text{dove} \quad a_0 > b_0$$

Aggiungendo e sottraendo il termine  $h_a (a_0 - b_0) v(t)$  a primo membro e scomponendo la corrente  $i(t)$  all'interno del secondo membro in due addendi  $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ , la relazione costitutiva viene riscritta nella forma :

$$\underbrace{h_a (v(t) + b_0 v(t))}_{\text{}} + \underbrace{h_a (a_0 - b_0) v(t)}_{\text{}} = \underbrace{h_b (i_1(t) + b_0 i_1(t))}_{\text{}} + \underbrace{h_b (i_2(t) + b_0 i_2(t))}_{\text{}}$$

Associando i primi termini dei due membri e i due secondi termini, la relazione costitutiva può essere interpretata come il parallelo di due bipoli con relazioni costitutive :

Primo bipolo caratterizzato dalla

$$h_a (v(t) + b_0 v(t)) = h_b (i_1(t) + b_0 i_1(t))$$

Secondo bipolo caratterizzato dalla

$$h_a (a_0 - b_0) v(t) = h_b (i_2(t) + b_0 i_2(t))$$

16.1.5 Quarto esempio di modelli dinamici più complessi

Vediamo ora un altro esempio di relazioni costitutive : sia data la relazione costitutiva dinamica :

$$h_a [v(t) + a_0 v(t)] = h_b [i(t) + b_0 i(t)] \quad \text{dove} \quad a_0 < b_0$$

Aggiungendo e sottraendo il termine  $h_b (b_0 - a_0) i(t)$  a secondo membro e scomponendo la tensione  $v(t)$  all'interno del primo membro in due addendi  $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ , la relazione costitutiva viene riscritta nella forma :

$$\underbrace{h_a (v_1(t) + a_0 v_1(t))}_{\text{}} + \underbrace{h_a (v_2(t) + a_0 v_2(t))}_{\text{}} = \underbrace{h_b (i(t) + a_0 i(t))}_{\text{}} + \underbrace{h_b (b_0 - a_0) i(t)}_{\text{}}$$

Associando i primi termini dei due membri e i due secondi termini, la relazione costitutiva può essere interpretata come la serie di due bipoli con relazioni costitutive :

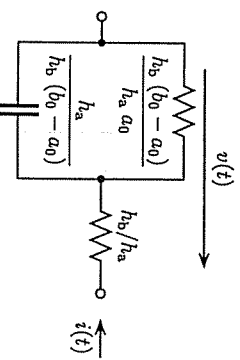
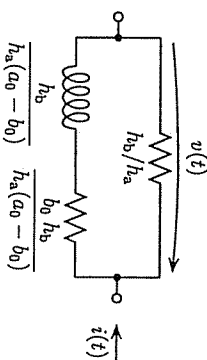
Primo bipolo caratterizzato dalla

$$h_a (v_1(t) + a_0 v_1(t)) = h_b (i(t) + a_0 i(t))$$

Secondo bipolo caratterizzato dalla

$$h_a (v_2(t) + a_0 v_2(t)) = h_b (b_0 - a_0) i(t)$$

corrispondente a un  $\mathcal{C}(h_a/[h_b (b_0 - a_0)])$  in parallelo a un  $\mathcal{R}([h_b (b_0 - a_0)]/[h_a a_0])$ .



16.1.6 Conclusioni

Nella Sez. 15.6 vedremo che anche gli induttori accoppiati possono essere realizzati usando due induttori disaccoppiati (bipoli) e un tr.id. La discussione di questi modelli descritti da equazioni differenziali è disagiata. Esempi più significativi saranno presentati nel Cap. 19. Essi saranno sviluppati in un ambiente algebrico e nondifferenziale (regime pseudocisoidale), di cui conosceremo i fondamenti nei prossimi capitoli. ■

16.2 POTENZA EFFETTIVA, LAVORO EFFETTIVO ED ENERGIA

La potenza e il lavoro effettivi, definiti nel Cap. 5 e già introdotti per i componenti dinamici nel CCap. 7 e 9 vengono qui rivisti per i componenti dinamici tempo-invarianti e

lineari. In particolare vengono discussi i componenti dinamici conservativi e il concetto di energia immagazzinata, come generalizzazione di quello già visto per condensatori e induttori. Inoltre vengono definiti i componenti passivi e attivi e le proprietà energetiche derivate dal Teorema e dal Corollario della potenza effettiva riguardanti tutti i componenti del circuito e i componenti composti.

### 16.2.1 Componenti dinamici conservativi

Nella Sez. 15.2 avevamo osservato che il condensatore e l'induttore sono conservativi. Questa proprietà ha una validità molto più generale. Qui diamo la definizione:

**Definizione:** un componente dinamico tempo-invariante e lineare con dominio costitutivo  $\mathcal{X}$  è detto *conservativo* se può essere definita una funzione, detta *funzione energia* o più semplicemente *energia*:

$$w^{\text{ene}}(t) = h^{\mathcal{N}} v(t), \dot{i}(t), \ddot{i}(t), \ddot{\ddot{i}}(t), \dots] \geq 0 \quad \forall t \quad \forall [v(t)]^T [\dot{i}(t)]^T \in \mathcal{X} \quad \forall t$$

tale che il lavoro verifichi la:

$$w(t) = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t [v(\tau)]^T \dot{i}(\tau) d\tau = w^{\text{ene}}(t) - w^{\text{ene}}(t_0) \quad \forall [v(t)]^T [\dot{i}(t)]^T \in \mathcal{X}$$

Dal punto di vista matematico, la suddetta condizione equivale a dire che:

$$p(\tau) d\tau = [v(\tau)]^T \dot{i}(\tau) d\tau \quad \text{sia un differenziale esatto,} \quad \forall [v(t)]^T [\dot{i}(t)]^T \in \mathcal{X}$$

**Avvertenza:** i concetti qui espressi per i componenti dinamici lineari e conservativi valgono anche per i componenti dinamici tempo-invarianti e nonlineari. Comunque questo aspetto non sarà discusso in questa sede.

**Recupero del lavoro elettrico:** qui dimostriamo che tutto il lavoro elettrico assorbito dal componente conservativo in un dato intervallo di tempo può essere recuperato in tempi successivi. All'istante iniziale  $t_1$  le tensioni e correnti del componente siano:  $v(t_1)$ ,  $\dot{i}(t_1)$ ,  $\ddot{i}(t_1)$ ,  $\ddot{\ddot{i}}(t_1)$ ,  $\dots$  e all'istante  $t_2 > t_1$   $v(t_2)$ ,  $\dot{i}(t_2)$ ,  $\ddot{i}(t_2)$ ,  $\ddot{\ddot{i}}(t_2)$ ,  $\dots$ . Assumiamo che l'energia agli istanti  $t_1$  e  $t_2$  siano tali che  $w^{\text{ene}}(t_1) < w^{\text{ene}}(t_2)$ ; questo significa che il componente ha assorbito un lavoro positivo dal resto del circuito nell'intervallo  $[t_1, t_2]$ . Supponiamo che all'istante  $t_3 > t_2$  le tensioni e correnti siano come all'istante  $t_1$ , cioè:  $v(t_3) = v(t_1)$ ,  $\dot{i}(t_3) = \dot{i}(t_1)$ ,  $\ddot{i}(t_3) = \ddot{i}(t_1)$ ,  $\ddot{\ddot{i}}(t_3) = \ddot{\ddot{i}}(t_1)$ , e che il lavoro relativo all'intervallo  $[t_2, t_3]$  è negativo e quindi erogato dal componente verso gli altri componenti del circuito.

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} p(\tau) d\tau}_{\text{lavoro assorbito}} = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} p(\tau) d\tau}_{\text{lavoro assorbito}} + \underbrace{\int_{t_2}^{t_3} p(\tau) d\tau}_{\text{lavoro erogato}} = \underbrace{[w^{\text{ene}}(t_2) - w^{\text{ene}}(t_1)]}_{\text{incremento energia}} + \underbrace{[w^{\text{ene}}(t_3) - w^{\text{ene}}(t_2)]}_{\text{diminuzione energia}} = 0$$

**Commento:** L'ammontare del lavoro elettrico che un componente conservativo può erogare in un intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  è limitato superiormente dalla quantità di energia immagazzinata all'inizio dell'intervallo  $w^{\text{ene}}(t_0) > 0$  la quale non può scendere sotto lo zero in tutto l'intervallo.

### 16.2.2 Lavoro ed energia

A questo punto occorre fare una distinzione tra il concetto di lavoro e quello di energia. Il lavoro (positivo) eseguito da un componente sul resto del circuito è l'integrale della potenza erogata relativo a un dato intervallo di tempo. L'energia è qualcosa che si accumula all'interno di un componente per effetto del lavoro assorbito dall'esterno o che diminuisce per effetto del lavoro erogato verso l'esterno dall'istante iniziale fino all'istante considerato. Quando in un dato intervallo il lavoro assorbito e/o erogato è nullo, l'energia immagazzinata rimane invariata.

**Componenti anticonservativi?** Da un punto di vista teorico, possiamo definire anche i componenti *anticonservativi*. Essi sono definiti come quelli conservativi rimpiazzando la condizione  $w^{\text{ene}}(t) \geq 0$  con la condizione  $w^{\text{ene}}(t) \leq 0$ . Nei componenti anticonservativi è limitata l'energia che può essere immagazzinata e illimitata quella che può essere recuperata. Per esempio, sarebbero anticonservativi i condensatori di capacità  $C < 0$  e gli induttori di induttanza  $L < 0$ .

**Inizio alla maratona:** Consideriamo una studentessa o uno studente che con spirito gagliardo intenda partecipare ad una maratona non competitiva (si fa per dire) il giorno prima di sostenere l'esame di Elettrotecnica. È un'ottima occasione per approfondire dal vivo i concetti di potenza, lavoro ed energia e per allentare, nello sforzo della corsa, la tensione psichica per l'imminente esame.

Prima della partenza i partecipanti accumulano una scorta di *energia* ingerendo cibi adatti alla bisogna. Ad ogni istante della corsa essi sviluppano (erogano) *potenza meccanica* a spese dell'energia accumulata in precedenza. Siccome erogano potenza per tutto il tempo che impiegano per correre la maratona essi compiono un *lavoro meccanico* a spese dell'energia accumulata. Quando raggiungono il traguardo, rasparando con la lingua l'asfalto, l'energia accumulata è in via di esaurimento a causa del lavoro compiuto per terminare la corsa.

Anche se non fossero più in grado di spiacciare una parola essi possono presentarsi ugualmente all'esame di Elettrotecnica dal momento che nella prova scritta l'uso della parola non è richiesto, anzi è *proibito*.

### 16.2.3 Componenti passivi

Il concetto di passività è essenziale nei circuiti e nei componenti:

**Definizione:** un componente, sia adinamico sia dinamico, è detto *passivo* se il lavoro elettrico  $w(t)$  verifica la condizione:

$$w(t) = \int_{t_0}^t [v(\tau)]^T \dot{i}(\tau) d\tau = w^{\text{ene}}(t) - w^{\text{ene}}(t_0) + w^{\text{dis}}(t) \quad \forall t, \quad \forall [v(t)]^T [\dot{i}(t)]^T \in \mathcal{X}$$

$$\text{dove } w^{\text{ene}}(t) \geq 0, \quad \frac{dw^{\text{dis}}(t)}{dt} \geq 0 \quad (\text{cioè } w^{\text{dis}}(t) \text{ monotono crescente}), \quad \forall t.$$

o equivalentemente se la potenza  $p(t)$  verifica la condizione

$$p(t) = \frac{d w_{\text{acc}}(t)}{dt} + p_{\text{dis}}(t) \quad \text{dove } w_{\text{acc}}(t) \geq 0, \quad p_{\text{dis}}(t) \geq 0 \quad \forall t$$

**Commento:** Il termine  $p_{\text{dis}}(t)$  fa sì che il differenziale  $p(\tau) d\tau$  di un componente passivo non sia necessariamente esatto. Se questo differenziale fosse esatto il componente passivo sarebbe conservativo (caso particolare).

Quindi in un componente passivo una parte del lavoro assorbito viene, in genere, trasformata in energia recuperabile, almeno in parte, in tempi successivi, mentre la parte restante viene irreversibilmente dissipata. Conseguentemente, la potenza assorbita  $p(t)$  può essere "limitatamente" negativa: infatti se  $p(t)$  fosse negativa con valori assoluti sufficientemente elevati e/o per intervalli di tempo sufficientemente lunghi, la condizione  $w_{\text{acc}}(t) \geq 0$  sarebbe violata. Notare che per i componenti dissipativi (cioè passivi e adinamici) la potenza istantanea assorbita  $p(t)$  non può mai essere negativa neppure per un istante.

Si può facilmente verificare che i componenti dissipativi, inerti e conservativi sono casi particolari ed estremi della più ampia classe dei i componenti passivi. Con riferimento alla definizione data in questo paragrafo, un componente passivo è dissipativo, inerte o conservativo, qualora una o entrambe le condizioni diventino più ristrette:

*Sottoclassi particolari dei componenti passivi*

componenti dissipativi	componenti conservativi	componenti inerti
$w_{\text{dis}}(t) \geq 0, \quad w_{\text{acc}}(t) = 0$	$w_{\text{dis}}(t) = 0, \quad w_{\text{acc}}(t) \geq 0$	$w_{\text{dis}}(t) = 0, \quad w_{\text{acc}}(t) = 0$
$p(t) = p_{\text{dis}}(t)$	$p(t) = \frac{d w_{\text{acc}}(t)}{dt}$	$p(t) = 0$

#### WWWWWW?? DISEGNARE linee chiuse che indicano le diverse classi

#### LA SUDDIVISIONE DEI COMPONENTI PASSIVI IN DISSIPATIVI, CONSERVATIVI E INERTI

**Commento:** I componenti dissipativi e i componenti inerti sono esclusivamente adinamici, mentre quelli conservativi sono necessariamente dinamici. Un componente passivo dinamico è necessariamente dissipativo o al più inerte.

**Esempio:** Consideriamo un bipolo dinamico con la seguente relazione costitutiva:

$$v(t) = a_0 i(t) + a_1 \dot{i}(t) \quad \text{in cui } a_0 > 0 \quad \text{e} \quad a_1 > 0$$

La sua potenza istantanea assume la forma:

$$p(t) = v(t) i(t) = a_0 [i(t)]^2 + a_1 i(t) \dot{i}(t) \quad \text{dove } p_1(t) = \frac{d(a_0/2) (i(t))^2}{dt}$$

Quindi la potenza è scomposta nella somma di due termini:  $p_1(t)$  è sempre nonnegativo e corrisponde a una potenza assorbita, mentre il secondo  $p_2(t)$  è la derivata di un'energia sempre nonnegativa e corrisponde a una potenza assorbita che incrementa l'energia accumulata. Quindi il suddetto bipolo è passivo. Non è difficile riconoscere che questo bipolo dinamico è equivalente a un resistore (responsabile della potenza dissipata) in serie a un induttore (responsabile dell'energia immagazzinata) (vedere Par. 15.1.2).

#### 16.2.4 Componenti attivi

**Definizione:** un componente, adinamico o dinamico, non passivo viene detto *attivo*.

**Commento:** Quindi in un componente attivo vengono meno una o entrambe le condizioni che definiscono i componenti passivi. Più precisamente:

- Viene violata la condizione  $p_{\text{dis}}(t) \geq 0$ . I componenti attivi adinamici violano proprio questa condizione, dal momento che  $w_{\text{acc}}(t) = 0$ .
- Viene violata la condizione  $p(t) = d w_{\text{acc}}(t)/dt$  con  $w_{\text{acc}}(t) \geq 0$ . I condensatori con capacità negativa e gli induttori con induttanza negativa violano questa condizione.

In conclusione un componente attivo può erogare potenza  $p(t)$  per intervalli di tempo lunghi a piacere e quindi erogare un lavoro elettrico non limitato superiormente.

**Commento:** Quando la definizione di componente attivo data in questo paragrafo per qualsiasi componente viene applicata ai componenti adinamici, essa coincide con quella già introdotta nel CCap. 7 e 8.

**Commento:** Un componente dinamico strettamente attivo (vedere Cap. 8) può essere visto come un particolare componente attivo.

#### 16.2.5 Energia delle sorgenti impulsive costanti

Esistono anche componenti la cui energia accumulata  $w_{\text{acc}}(t)$  non è affatto limitata nel senso che essa può raggiungere qualsiasi valore in  $(-\infty, +\infty)$ . Consideriamo una sorgente impulsiva, per esempio una  $\mathcal{V}$  costante e consideriamo il lavoro  $w(t_2, t_1)$  erogato dalla sorgente in un dato intervallo di tempo  $[t_1, t_2]$  assumendo la convenzione normale per le tensioni e la corrente:

$$w(t_2, t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{v} i(t) dt = \dot{v} [q(t_2) - q(t_1)] = w_{\text{acc}}(t_2) - w_{\text{acc}}(t_1)$$

La suddetta formula ci dice che può essere definita la funzione energia  $w_{\text{acc}}(t) = \dot{v} q(t)$  e il lavoro elettrico viene erogato dalla sVi a spese di questa energia.

**Commento:** Se confrontiamo una  $\mathcal{V}$  costante e un  $\mathcal{C}$  possiamo osservare che per entrambi è definita una funzione energia dipendente dalla carica:

$$\mathcal{C} : w_{\text{acc}}(t) = q(t)^2 / (2C) \quad , \quad \mathcal{V} \text{ costante} : w_{\text{acc}}(t) = \dot{v} q(t)$$

**Questio:** Le sorgenti impulsive costanti sono conservative?

**Risposta:** Le sorgenti impulsive costanti non sono affatto componenti conservativi dal momento che la funzione energia che abbiamo definito non è soggetta ad alcun limite inferiore e superiore come succede per i componenti conservativi. Per esempio per un condensatore noi abbiamo che l'energia immagazzinata  $w_{\text{acc}}(t) = q(t)^2 / (2C)$  è per qualsiasi istante non-negativa (vedere Sez. 15.2). Quindi le sorgenti impulsive costanti sono a tutti gli effetti componenti attivi, come già visto nel Cap. 7.

### 16.2.6 Applicazioni del teorema della potenza effettiva

Qui esaminiamo alcune proprietà ottenute applicando il Teorema della potenza effettiva (vedere Cap. 5) a un circuito dinamico.

**Proprietà 1 :** sia dato un circuito costituito da componenti inerti e conservativi. La somma delle energie immagazzinate nei componenti conservativi  $w_{\text{tot}}^{\text{ene}}(t)$  è costante nel tempo cioè :  $\dot{w}_{\text{tot}}^{\text{ene}}(t) = 0$ .

**Proprietà 2 :** sia dato un circuito costituito da componenti dissipativi, inerti e conservativi (cioè passivi). La somma delle energie immagazzinate nei componenti conservativi  $w_{\text{tot}}^{\text{ene}}(t)$  non può crescere col passare del tempo, cioè :  $\dot{w}_{\text{tot}}^{\text{ene}}(t) \leq 0$ .

**Prove :** Le prove sono unificate per entrambe le proprietà. Il teorema della potenza effettiva  $\frac{dw_{\text{tot}}^{\text{ene}}(t)}{dt} + p_{\text{tot}}^{\text{dis}}(t) + p_{\text{tot}}^{\text{ne}}(t) = 0$  (vedere Cap. 5) ci dice che la somma delle potenze effettive estesa a tutti i componenti del circuito è

nulla : Se aggiungiamo la condizione  $p_{\text{tot}}^{\text{dis}}(t) = 0$  (Proprietà 1) ovvero  $p_{\text{tot}}^{\text{dis}}(t) \geq 0$  (Proprietà 2) e la condizione  $p_{\text{tot}}^{\text{ne}}(t) = 0$ , entrambe le proprietà sono provate. ■

### 16.2.7 Applicazioni del corollario della potenza effettiva

Applicando il Corollario della potenza effettiva (vedere Cap. 5), le tre seguenti proprietà possono essere facilmente verificate :

**Proprietà 1 :** un componente composto esclusivamente da  $K$  componenti conservativi ed, eventualmente, inerti è a sua volta conservativo o, in casi molto particolari, inerte. ■

**Proprietà 2 :** un componente composto esclusivamente da  $K$  componenti dissipativi, inerti e conservativi è a sua volta passivo. ■

**Proprietà 3 :** un componente composto esclusivamente da  $K$  componenti passivi è a sua volta passivo. ■

**Prove :** sono unificate per tutte e tre le proprietà. Occorre tener conto che la potenza  $p(t)$  del componente composto può essere scomposta nella somma di due addendi, che a loro volta sono uguali alla sommatoria di  $K$  termini, uno per ciascun componente aggregato :

$$p(t) = \sum_{k=1}^K p_k(t) = \sum_{k=1}^K \left[ \frac{dw_k^{\text{ene}}(t)}{dt} + p_k^{\text{dis}}(t) \right] = \frac{d \sum_{k=1}^K w_k^{\text{ene}}(t)}{dt} + \sum_{k=1}^K p_k^{\text{dis}}(t)$$

Le proprietà (nonnegatività, nullità, ...) di ciascun termine della sommatoria provano la corrispondente proprietà della potenza del componente composto. ■

### 16.2.8 Il circuito come sistema aperto

Il comportamento energetico di un circuito richiede alcune precisazioni.

Il fatto che la potenza effettiva totale sia nulla e, conseguentemente, il lavoro elettrico totale sia costante può trarre in inganno, nel senso che può far pensare che il circuito fisico non scambi energia con l'ambiente fisico esterno a esso. Quella che è nulla in ogni istante

di tempo è la somma algebrica delle potenze erogate / assorbite dalle porte elettriche di ciascun componente. Quella che è costante in ogni intervallo di tempo è la somma algebrica dei lavori erogati / assorbiti dalle porte elettriche di ciascun componente.

Ma se consideriamo un componente fisico nella sua globalità, e non solo le sue porte elettriche :

- Un componente attivo, che stia erogando potenza, è un componente che assorbe potenza ovvero lavoro sotto una qualche forma dall'ambiente esterno al circuito e la trasforma in potenza ovvero lavoro elettrico che cede al resto del circuito.

- Un componente dissipativo, in qualsiasi situazione, assorbe potenza ovvero lavoro elettrico dal resto del circuito e la trasforma in potenza ovvero lavoro sotto una qualche forma (per esempio calore) che cede all'ambiente esterno al circuito.

- Un componente conservativo, quando assorbe potenza elettrica, incrementa l'energia interna, che può restituire in tempi successivi, finché l'energia immagazzinata non si esaurisce. Quindi un componente conservativo non scambia lavoro con l'ambiente esterno.

- Un componente passivo in genere assorbe lavoro elettrico che in parte viene ceduto all'ambiente esterno e in parte viene accumulato come energia interna. Comunque un componente passivo può erogare potenza elettrica in modo limitato.

**Commento :** Un circuito, eccetto casi particolari di scarso interesse, è un *sistema aperto* in quanto esso scambia lavoro coll'ambiente esterno a esso. Esempi di circuiti che sono sistemi chiusi sono quelli costituiti esclusivamente da componenti conservativi : per esempio un induttore chiuso su un condensatore, che come vedremo nel Cap. 22 costituisce un oscillatore ideale.

Vedremo più avanti che un circuito non solamente scambia lavoro coll'ambiente esterno, ma anche informazione. In molti casi, il ruolo più significativo svolto da un circuito è proprio nello scambio e elaborazione di informazioni. Come già detto in altre occasioni, i circuiti in cui prevale l'interesse per lo scambio di informazione sono i cosiddetti circuiti per l'informazione mentre quelli in cui prevale l'interesse per lo scambio di energia sono i cosiddetti circuiti di potenza. Comunque, una distinzione rigorosa tra le due classi di circuiti fisici non può essere data.

**Diagnosi :** È inutile che un inventore della domenica si sforzi di inventare una nuova apparecchiatura elettrica, che prometta di funzionare senza uso di batterie, o cavi per l'alimentazione dalla rete di distribuzione, o celle fotovoltaiche, ... Infatti tutti i componenti fisici interni all'apparechiatura sarebbero passivi e quindi essi non potrebbero operare in qualche maniera utile. ■

### 16.3 RECIPROCIITÀ

Il concetto di reciprocità già introdotto nel Cap. 8 per i componenti adinamici viene esteso ai componenti dinamici. In questo caso occorre generalizzare le potenze incrociate introducendo i *lavori incrociati*.

16.3.1 Lavori virtuali incrociati

Sia dato un componente dinamico con relazioni costitutive  $f^{\mathcal{N}^D}[v(t), i(t)] = 0$  e dominio costitutivo incondizionato  $\mathcal{X}$  e condizionatore  $\mathcal{X}_0$  soggetto a due qualsiasi diverse situazioni elettriche appartenenti a  $\mathcal{X}_0$  cioè tali che  $v'(t) = 0, i'(t) = 0, v''(t) = 0, i''(t) = 0$  per  $t < t_0$ . Introduciamo ora i corrispondenti lavori (virtuali) incrociati  $w'(t)$  e  $w''(t)$ :

$$w'(t) = \int_{t_0-}^{t+} [v''(\tau)]^T i'(t + t_0 - \tau) d\tau$$

$$w''(t) = \int_{t_0-}^{t+} [v'(\tau)]^T i''(t + t_0 - \tau) d\tau$$

dove  $\begin{cases} \forall [v'(t), i'(t)]^T \in \mathcal{X}_0 \\ \forall [v''(t), i''(t)]^T \in \mathcal{X}_0 \end{cases}$  e  $t_0 \leq t$

Da un punto di vista matematico, i lavori incrociati possono essere visti come la convoluzione tra due vettori variabili rispetto al tempo  $t$ . Integrando sotto il segno di integrale può essere considerato come una potenza virtuale variabile con  $\tau$ . Quindi i due integrali si meritano il nome di lavori (virtuali) incrociati e quindi soddisfano al Teorema e Corollario dei lavori virtuali (CCap. 2 e 4), come ricordato qui sotto:

**Proprietà** : Se consideriamo i lavori incrociati  $w'_k(t), w''_k(t), k = 1, 2, \dots, K$  di tutti i  $K$  componenti, sia adinamici sia dinamici, presenti in un circuito, le loro rispettive somme sono sempre nulle:

$$\sum_{k=1}^K w'_k(t) = 0, \quad \sum_{k=1}^K w''_k(t) = 0$$

$$w'_c(t) = \sum_{k=1}^K w'_k(t), \quad w''_c(t) = \sum_{k=1}^K w''_k(t)$$

16.3.2 Estensione delle reciprocità e antireciprocità ai componenti dinamici

L'introduzione dei lavori incrociati ci consente di estendere la definizione di componenti reciproci ai componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari.

**Definizione** : un componente dinamico tempo-invariante e lineare è chiamato *reciproco* quando si verifica la uguaglianza dei lavori incrociati:

$$w'_c(t) = w''_c(t) \quad \forall t \geq t_0, \quad \begin{cases} \forall [v'(t), i'(t)] \in \mathcal{X}_0 & \text{con } v'(t) = 0, i'(t) = 0 \text{ per } t < t_0 \\ \forall [v''(t), i''(t)] \in \mathcal{X}_0 & \text{con } v''(t) = 0, i''(t) = 0 \text{ per } t < t_0 \end{cases}$$

dove  $\mathcal{X}_0$  è il dominio costitutivo condizionato da condizioni iniziali nulle.

**Commento** : Questa definizione vale anche per i componenti adinamici: essa è equivalente ma più complicata di quella basata sulle potenze incrociate. Infatti, se le potenze (virtuali) incrociate di un componente adinamico coincidono per qualsiasi coppia di situazioni elettriche (Cap. 8), anche i corrispondenti lavori (virtuali) incrociati coincidono, perché i due integrandi (potenze incrociate) che intervengono nella definizione dei lavori incrociati coincidono per qualsiasi valore di  $\tau$ .

16.3.3 Reciprocità dei condensatori e induttori

Consideriamo i condensatori e induttori:

**Proprietà** : i condensatori e gli induttori sono reciproci.

**Prova** : siano date due qualsiasi situazioni elettriche  $[v'(t), i'(t)]^T$  e  $[v''(t), i''(t)]^T \in \mathcal{X}_0$  per un condensatore di capacità  $C$  si ha:

$$i'(t) = C v'(t) \quad \text{e} \quad i''(t) = C v''(t)$$

dove  $v'(t) = v''(t) = 0$  per  $t \rightarrow t_0^-$

Calcoliamo i due lavori incrociati:

$$w'(t) = C \int_{t_0-}^{t+} v''(\tau) v'(t + t_0 - \tau) d\tau$$

$$w''(t) = L \int_{t_0-}^{t+} i''(\tau) i'(t + t_0 - \tau) d\tau$$

$$w'(t) = C \int_{t_0-}^{t+} v'(\tau) v''(t + t_0 - \tau) d\tau$$

$$w''(t) = L \int_{t_0-}^{t+} i'(\tau) i''(t + t_0 - \tau) d\tau$$

I lavori  $w'(t)$  e  $w''(t)$  coincidono per la proprietà riportata nell'appendice.

16.3.4 Estensione del teorema di reciprocità ai componenti dinamici

Il teorema di reciprocità già introdotto per i componenti adinamici nel Cap. 8 può essere esteso anche ai componenti dinamici tempo-invarianti e lineari.

**Teorema** : Sia dato il componente composto  $C^e \equiv \{C^1, C^2, C^3, \dots\}$  dove  $C^1, C^2, C^3, \dots$  sono componenti reciproci, sia adinamici sia dinamici. Il componente  $C^e$  è reciproco.

**Prova** : la dimostrazione è basata sul corollario della potenza/lavoro virtuale, richiamati nel Par. xxxxx. Consideriamo due situazioni elettriche diverse, in cui il componente composto  $e$ , conseguentemente, quelli aggregati al suo interno vengano a trovarsi e definiamo i due lavori virtuali incrociati sia per il componente composto ( $w'_c(t), w''_c(t)$ ) sia per i componenti aggregati, dinamici e adinamici ( $w'_1(t), w'_2(t), w'_3(t), \dots$  e  $w''_1(t), w''_2(t), w''_3(t), \dots$ ). Se esprimiamo  $w'_c$  e  $w''_c$  come somma dei rispettivi lavori virtuali incrociati dei componenti aggregati:

$$w'_c(t) = w'_1(t) + w'_2(t) + w'_3(t) + \dots, \quad w''_c(t) = w''_1(t) + w''_2(t) + w''_3(t) + \dots$$

si ha che  $w'_c = w''_c$  perché per ipotesi  $w'_1 = w''_1, w'_2 = w''_2, w'_3 = w''_3, \dots$

Esaminiamo con maggior dettaglio le conseguenze di questo Teorema:

Ogni componente dinamico, sia conservativo sia nonconservativo, con qualsiasi numero di porte, è reciproco se ammette un modello costituito esclusivamente da componenti reciproci: resistori, trasformatori ideali, condensatori, induttori.

Quando uno o più dei componenti del modello fossero nonreciproci, il componente è in genere nonreciproco. Comunque possono esserci casi particolari in cui il componente composto risulta reciproco.

Si può dimostrare che un bipolo composto dinamico, sia conservativo sia nonconservativo, ammette sempre un modello costituito da componenti reciproci. Quindi ogni bipolo dinamico, è sempre reciproco, anche se contiene al suo interno componenti nonreciproci. Questo risultato è analogo a quello per i bipoli adinamici (vedere Cap. 7).



## 16.4 INDUTTORI ACCOPPIATI

Tra i doppi bipoli dinamici e conservativi, sono molto importanti gli induttori accoppiati: essi sono il modello idealizzato di componenti fisici molto diffusi. Per esempio, il trasformatore, componente fisico insostituibile nella trasmissione e distribuzione dell'energia elettrica, può essere modellato in prima approssimazione dagli induttori accoppiati.

### 16.4.1 Rappresentazione pseudostatica

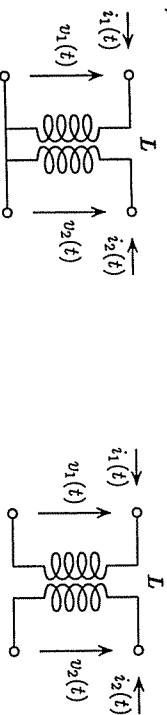
Gli induttori accoppiati sono un doppio bipolo definito dalla rappresentazione pseudostatica, che viene dalla magnetostatica (Fisica II):

$$\phi(t) = L i(t) \quad \text{dove } L \equiv \text{matrice induttanza}$$

Mettendo in evidenza gli elementi dei vettori  $\phi(t)$  e  $i(t)$  e della matrice  $L$  si ha:

$$\begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

Il simbolo grafico degli induttori accoppiati è riportato qui sotto nella versione DBT (a sinistra) e nella versione DBP (a destra).



**Proprietà:** Dalla rappresentazione che li definisce, gli induttori accoppiati sono lineari, omogenei e reciproci.

**Commento:** Gli induttori accoppiati possono costituire un doppio bipolo sia tripolare sia proprio in accordo all'assenza o presenza di un c.c. trasversale tra due terminali di porte diverse.

**Induttori accoppiati fisici:** In genere gli induttori accoppiati fisici consistono in due avvolgimenti di filo conduttore i cui quattro estremi formano i terminali fisici. In genere vi è un nucleo di materiale ferromagnetico che favorisce il concatenamento reciproco tra i flussi generati dai due avvolgimenti. Intrinsecamente, gli induttori accoppiati costituiscono un doppio bipolo proprio, ma se saldiamo due terminali di avvolgimenti diversi otteniamo un doppio bipolo tripolare.

Diamo un significato circuitale agli elementi della matrice induttanza  $L$ :

$$\begin{array}{ll} \text{induttanza} & \text{transinduttanza} \\ \text{primaria} & \text{(mutua induttanza)} \\ L_1 = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ i_1 \end{bmatrix}_{i_2=0} & M = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ i_2 \end{bmatrix}_{i_1=0} = \begin{bmatrix} \phi_2 \\ i_1 \end{bmatrix}_{i_2=0} \\ & L_2 = \begin{bmatrix} \phi_2 \\ i_2 \end{bmatrix}_{i_1=0} \end{array}$$

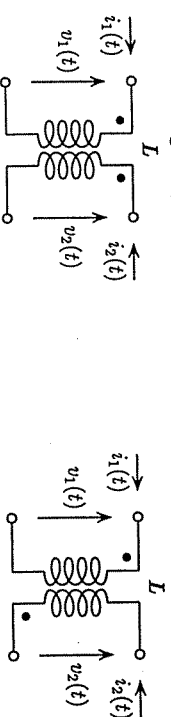
**Commento:** Queste definizioni sono analoghe a quelle incontrate nel Cap. 9 per gli elementi della matrice  $R$ . In questo caso le tensioni delle due porte sono rimpiazzate dai rispettivi flussi (integrali delle tensioni).

**Commento:** Dal momento che  $L_1$  e  $L_2$  hanno lo stesso ruolo dell'induttanza di un bipolo induttore, esse sono sempre positive. Inoltre, la matrice induttanza  $L$  è (semi)definita positiva cioè  $L_1, L_2 - M^2 \geq 0$ . La (semi)definita positività e la simmetria di  $L$  sono una conseguenza del fatto che gli induttori accoppiati sono conservativi. Questo problema sarà ripreso più avanti (vedere Sez. 15 xxx).

**Convenzioni di segno:** La suddetta rappresentazione è stata definita sotto l'ipotesi che la convenzione di segno delle tensioni (ovvero flussi) e correnti sia normale a entrambe le porte. Comunque, per ogni porta posso scegliere due diverse convenzioni normali. Qualsiasi siano le convenzioni normali adottate per le due porte i parametri  $L_1$  e  $L_2$ , essendo definiti da rapporti di grandezze elettriche della medesima porta, non cambiano segno, mentre i parametri  $M$  fuori dalla diagonale possono cambiare segno dal momento che sono rapporti di grandezze di porte diverse. Gli autori più tradizionalisti scelgono le convenzioni normali delle porte in modo tale che la mutua induttanza  $M$  risulti positiva. Questo richiede che per ciascuna porta il terminale dove è stato posto il segno "+, " della tensione, o equivalentemente vi è la corrente entrante, sia contrassegnato da un "•".

In questi appunti, si è preferita una scelta diversa (vedere Cap. 6). Segnamo la convenzione scelta per le due tensioni e/o le due correnti. Si sottintende che le altre due grandezze siano scelte seguendo l'unica convenzione normale disponibile per ciascuna porta. La mutua induttanza  $M$  può risultare sia positiva sia negativa e questo risulta dai valori degli elementi  $M$  della matrice induttanza.

Le due figure sottostanti illustrano con due esempi la relazione tra la convenzione dei "•" e la convenzione proposta in questi appunti. Nella figura di sinistra la mutua induttanza della matrice induttanza è positiva, dal momento che i due "•" sono concordi, mentre in quella di destra è negativa, dal momento che i due "•" sono discordi.



**Nota storica:** Alla fine del secolo diciannovesimo in cui gli induttori accoppiati sono diventati di uso comune, il concetto di doppio bipolo non era ancora consolidato. Quindi essi erano considerati come due bipoli con una interdipendenza tra le rispettive relazioni costitutive. L'interdipendenza veniva descritta proprio dal coefficiente di accoppiamento di cui parleremo più avanti. Per questo motivo il loro nome è plurale benché essi costituiscono un unico doppio bipolo. Si ripete la stessa storia dei "pantaloni", il cui nome è plurale dal momento che sono costituiti da due parti sebbene indivisibili. Per le stesse ragioni, gli elementi  $L_1$  e  $L_2$  della matrice induttanza  $L$  sono indicati con un carattere maiuscolo e con un unico indice in contraddizione con le notazioni usate per gli elementi di una matrice. Inoltre il simbolo alfabetico " $M$ " adattato per entrambi gli elementi fuori della diagonale è diverso.

16.4.2 Rappresentazione integrale

In analogia al bipolo induttore (Par. 15.1.3), la rappresentazione integrale esplicita  $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$ , viene ottenuta esplicitando le correnti e sostituendo ai flussi la loro definizione. Essa è definita solo nel caso  $L_1 L_2 > M^2$  in cui l'invertibilità di  $L$  è assicurata :

$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \left[ \int_{t_0}^t v_1(\tau) d\tau \right] + \begin{bmatrix} i_{1,0} \text{ sca}(t - t_0) \\ i_{2,0} \text{ sca}(t - t_0) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \int_{t_0}^t v_2(\tau) d\tau}_{\text{induttori scarichi in } t = t_0 -} \quad \text{due } \hat{I} \text{ in parallelo}$$

Notare l'importanza dei valori iniziali  $i_{1,0}$  e  $i_{2,0}$  delle due correnti.

**Modello** : dalla rappresentazione integrale viene derivato un modello equivalente di due induttori accoppiati inizialmente carichi costituito da induttori accoppiati inizialmente scarichi in parallelo a due sli di correnti impresse  $i_{1,0} \text{ sca}(t - t_0)$  e  $i_{2,0} \text{ sca}(t - t_0)$ , rispettivamente. Questo modello è poco usato. ■

WWWWWW??? DUPLICARE FIGURA per il modello

16.4.3 Rappresentazione differenziale

Sempre in analogia col bipolo induttore nella Sez. 14.1, la rappresentazione differenziale, esplicita del tipo  $(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$  viene ottenuta differenziando quella pseudostatica :

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{01} \delta(t) \\ \phi_{02} \delta(t) \end{bmatrix}$$

**Proprietà** : è immediato verificare che se le correnti  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  sono costanti gli induttori accoppiati sono equivalenti a due c.c. alle due porte. ■  
 WWWWWW??? FARE FIGURA

16.4.4 Energia immagazzinata

Il lavoro elettrico  $w(t)$  compiuto dall'esterno per mezzo delle due porte nell'intervallo  $[t_0, t]$  sugli induttori accoppiati viene calcolato integrando la potenza :

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{t_0}^t [v_1(\tau) i_1(\tau) + v_2(\tau) i_2(\tau)] d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t [L_1 i_1(\tau) \dot{i}_1(\tau) + L_2 i_2(\tau) \dot{i}_2(\tau) + M (\dot{i}_1(\tau) \dot{i}_2(\tau) + \dot{i}_2(\tau) \dot{i}_1(\tau))] d\tau = \\ &= \underbrace{[L_1 i_1(t)^2 + L_2 i_2(t)^2 + 2 M i_1(t) i_2(t)]/2}_{\text{energia all'istante } t} - \underbrace{[L_1 i_1(t_0)^2 + L_2 i_2(t_0)^2 + 2 M i_1(t_0) i_2(t_0)]/2}_{\text{energia all'istante } t_0} \end{aligned}$$

Tutto il lavoro elettrico assorbito nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  può venire restituito nel successivo intervallo  $[t_1, t_2]$  qualora si verifichi le condizioni  $i_1(t_2) = i_1(t_0)$  e  $i_2(t_2) = i_2(t_0)$ . Quindi gli induttori accoppiati sono conservativi e

$$w^{\text{rec}}(t) = \frac{1}{2} [L_1 i_1(t)^2 + L_2 i_2(t)^2 + 2 M i_1(t) i_2(t)]$$

definisce l'energia immagazzinata in essi, avendo scelto la costante arbitraria nulla per  $i_1 = i_2 = 0$ .

Questa espressione può essere riscritta in una forma quadratica omogenea

$$w^{\text{rec}}(t) = \frac{1}{2} [i_1(t) \quad i_2(t)] \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [i(t)]^T L i(t) \geq 0 \quad \forall t$$

Siccome  $w^{\text{rec}}(t)$  è una forma quadratica omogenea (semi)definita positiva essa è comunque nonnegativa in qualsiasi situazione.

**Avvertenza** : Se i due elementi sull'antidiagonale di  $L$  non fossero coincidenti, il differenziale  $p(t)$  di non potrebbe essere esatto, nemmeno nel caso che la  $L$  rimanesse (semi)definita positiva. Quindi la "conservatività" degli induttori accoppiati è assicurata dalla simmetria e dalla (semi)definita positività di  $L$ . ■

16.4.5 Reciprocità

**Proprietà** : Gli induttori accoppiati sono reciproci. ■

**Prova** : Siano date due qualsiasi situazioni elettriche appartenenti al dominio costitutivo condizionato  $\mathcal{R}_0$  degli induttori accoppiati, cioè :

$$\begin{bmatrix} v_1^I(t) \\ v_2^I(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^I(t) \\ i_2^I(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1^{II}(t) \\ v_2^{II}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{II}(t) \\ i_2^{II}(t) \end{bmatrix}$$

$$i_1^I(t) = i_2^{II}(t) = i_1^{II}(t) = 0 \quad \text{per } t < t_0$$

Dalle due suddette situazioni elettriche, calcoliamo i due lavori incrociati :

$$\begin{aligned} w^I(t) &= \int_{t_0}^{t^+} [v_1^I(\tau) i_1^I(\tau) + v_2^I(\tau) i_2^I(\tau) + t_0 - \tau] d\tau \\ w^{II}(t) &= \int_{t_0}^{t^+} [v_1^{II}(\tau) i_1^{II}(\tau) + v_2^{II}(\tau) i_2^{II}(\tau) + t_0 - \tau] d\tau \end{aligned}$$

Usando la rappresentazione differenziale degli induttori accoppiati possiamo sostituire le tensioni :

$$\begin{aligned} w^I(t) &= L_1 \int_{t_0}^{t^+} \dot{i}_1^I(\tau) i_1^I(\tau) d\tau + M \int_{t_0}^{t^+} \dot{i}_2^I(\tau) i_1^I(\tau) d\tau + \\ &+ M \int_{t_0}^{t^+} \dot{i}_1^I(\tau) i_2^I(\tau) d\tau + L_2 \int_{t_0}^{t^+} \dot{i}_2^I(\tau) i_2^I(\tau) d\tau + t_0 - \tau) d\tau \\ w^{II}(t) &= L_1 \int_{t_0}^{t^+} \dot{i}_1^{II}(\tau) i_1^{II}(\tau) d\tau + M \int_{t_0}^{t^+} \dot{i}_2^{II}(\tau) i_1^{II}(\tau) d\tau + \\ &+ M \int_{t_0}^{t^+} \dot{i}_1^{II}(\tau) i_2^{II}(\tau) d\tau + L_2 \int_{t_0}^{t^+} \dot{i}_2^{II}(\tau) i_2^{II}(\tau) d\tau + t_0 - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Ognuno dei due lavori incrociati è scomposto nella somma di quattro termini : a due a due i quattro termini sono tra loro uguali in seguito alla proprietà riportata nell'appendice. Se la matrice induttanza  $L$  non fosse simmetrica, gli induttori accoppiati non sarebbero reciproci. Per accertarsene, rifare i conti assumendo che i due elementi siano diversi. ■

16.4.6 Continuità analitica delle correnti

In analogia al bipolo induttore anche le correnti degli induttori accoppiati sono, in genere analiticamente continue. Supponiamo che la corrente  $i_1(t)$  e/o  $i_2(t)$  degli induttori accoppiati sia soggetta a una discontinuità in  $t = t_1$  del tipo :

$$i_1(t_1 -) = \lim_{t \rightarrow t_1 -} i_1(t) \neq i_1(t_1 +) = \lim_{t \rightarrow t_1 +} i_1(t) , \quad i_2(t_1 -) = \lim_{t \rightarrow t_1 -} i_2(t) \neq i_2(t_1 +) = \lim_{t \rightarrow t_1 +} i_2(t)$$

Questo comporterebbe che le tensioni  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  presentino in  $t = t_1$  un impulso di Dirac, rispettivamente :

$$v_1(t) = \{L_1 [i_1(t_1 +) - i_1(t_1 -)] + M [i_2(t_1 +) - i_2(t_1 -)]\} \delta(t - t_1)$$

$$v_2(t) = \{M [i_1(t_1 +) - i_1(t_1 -)] + L_2 [i_2(t_1 +) - i_2(t_1 -)]\} \delta(t - t_1)$$

**Questio** : Ci si pone la domanda : può il doppio bipolo complementare degli induttori accoppiati accettare un impulso ideale di tensione ?

**Risposta** : Come per il condensatore e l'induttore, in genere la risposta è no, eccetto casi degeneri (vedere OCap. 14 e 16).

Quindi noi possiamo assumere che le correnti  $i_{11}(t)$  e  $i_{22}(t)$  negli induttori accoppiati siano analiticamente continue :

$$\lim_{t \rightarrow t_1 -} i_{11}(t) = \lim_{t \rightarrow t_1 +} i_{11}(t) \quad \forall t_1 \in \mathbb{R}_t , \quad \lim_{t \rightarrow t_1 -} i_{22}(t) = \lim_{t \rightarrow t_1 +} i_{22}(t) \quad \forall t_1 \in \mathbb{R}_t$$

**Proprietà** : gli induttori accoppiati sono equivalenti (limitatamente all'istante  $t = t_1$  a una coppia di sfi con correnti impresse  $i_1 = i_{11}(t_1)$  e  $i_2 = i_{22}(t_1)$  .

**Prova** : infatti i valori  $v_{11}(t_1)$  e  $v_{22}(t_1)$  delle tensioni  $v_{11}(t)$  e  $v_{22}(t)$  non sono vincolati ai corrispondenti valori  $i_{11}(t_1)$  e  $i_{22}(t_1)$  , come risulta dalla rappresentazione differenziale. ■

16.4.7 Grandezze candidate e anticandidate

In analogia al bipolo induttore, le seguenti proprietà delle correnti  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  degli induttori accoppiati sono accertate :

- $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  possono venire calcolate dalle  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  se si conoscono le condizioni iniziali  $i_1(t_0)$  e  $i_2(t_0)$ .
- $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  sono funzioni analiticamente continue, a meno di casi degeneri.
- l'energia immagazzinata dipende esclusivamente da  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  .

ci consentono di affermare che le due correnti  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  denotano lo stato degli induttori accoppiati all'istante  $t$  . Quindi esse sono candidate a essere due variabili di stato per gli induttori accoppiati all'interno di un circuito. Conseguentemente, le due tensioni  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  costituiscono le due grandezze anticandidate degli induttori accoppiati. Se la matrice induttanza  $L$  è nonsingolare, vi è una corrispondenza biunivoca tra le correnti  $i_1(t)$   $i_2(t)$  e i flussi  $\phi_1(t)$  e  $\phi_2(t)$  . Cioè ad ogni punto del piano  $i_1$ - $i_2$  corrisponde un solo punto del piano  $\phi_1$ - $\phi_2$  e viceversa. Quindi noi potremmo sostituire nel ruolo di candidate i flussi  $\phi_1(t)$  e  $\phi_2(t)$  al posto delle correnti  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  .

**Caso della matrice induttanza singolare** : Fa eccezione il caso in cui la matrice

$L$  sia singolare. In questo caso l'insieme dei punti del piano  $i_1$ - $i_2$  corrisponde l'insieme dei punti di una semplice retta del piano  $\phi_1$ - $\phi_2$  passante per l'origine con equazione :  $\phi_1 M - \phi_2 L_1 = 0$  . Questo significa che non esiste una corrispondenza biunivoca tra il vettore delle due correnti e quello dei due flussi. Quindi l'insieme degli stati possibili ha dimensione 1 e non 2 . Quindi al contrario che negli induttori disaccoppiati e accoppiati con accoppiamento nonunitario, noi siamo costretti a scegliere come candidata di stato uno e uno solo dei due flussi e non le correnti. Il flusso scelto determina un punto della suddetta retta dei flussi. In altre parole sia la corrente  $i_1$  sia la corrente  $i_2$  non possono singolarmente rappresentare lo stato : lo stato può essere rappresentato da un'opportuna combinazione lineare delle stesse. ■

16.4.8 Serie e parallelo delle porte degli induttori accoppiati

Spesso può capitare che due induttori tra loro accoppiati (sia volutamente sia indesideratamente) siano tra loro connessi in serie o in parallelo. L'analisi del bipolo composto è diversa da quella del caso in cui i due induttori non fossero accoppiati (vedere Sez. 15.3).

La connessione serie implica  $i(t) = i_1(t) = -i_2(t)$  e  $\phi(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$  , da cui si ha

$$\begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies \phi(t) = L_1 i(t) - M i(t) - M i(t) + L_2 i(t)$$

La connessione serie è equivalente ad un

$$\mathcal{L}(L_{eq} = L_1 - 2M + L_2) .$$

La connessione parallelo implica  $\phi(t) = \phi_1(t) = \phi_2(t)$  e  $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$  , da cui si ha

$$i(t) = \frac{L_1 \phi(t) + M \phi(t) + M \phi(t) + L_2 \phi(t)}{L_1 L_2 - M^2}$$

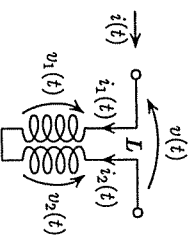
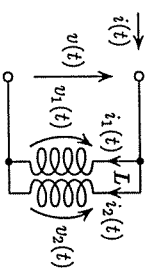
La connessione parallelo è equivalente ad un  $\mathcal{L}(L_{eq})$  ,

$$\text{dove} \quad L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

**Commento** : La connessione parallelo sarebbe patologica nel caso in cui la matrice induttanza fosse singolare.

16.5 MODELLI DEGLI INDUTTORI ACCOPPIATI

Viene introdotto il coefficiente di accoppiamento degli induttori accoppiati per valutare quantitativamente l'accoppiamento tra due induttori fisici. Infine, vengono presentati due modelli composti costituiti da due induttori (disaccoppiati) e un trasformatore ideale e un modello costituito da tre induttori (disaccoppiati).



16.5.1 Coefficiente di accoppiamento

Da un punto di vista fisico, due induttori accoppiati sono realizzati con due normali induttori che siano sufficientemente vicini in modo che i flussi creati dalle due correnti siano almeno parzialmente concatenati. Molto spesso per ottenere un accoppiamento elevato i due avvolgimenti sono avvolti attorno allo stesso nucleo ferromagnetico. Per misurare il grado di questo accoppiamento viene introdotto un opportuno parametro :

**Definizione :** dati degli induttori accoppiati con induttanze  $L_1, L_2$  e mutua induttanza  $M$ , viene introdotto il *coefficiente di accoppiamento*  $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$ .

**Proprietà :** Il coefficiente di accoppiamento  $k$  è compreso tra i limiti  $-1$  e  $+1$ . Il suo segno coincide con quello di  $M$  e, in definitiva, dalle convenzioni di segno adottate per le tensioni e correnti alle due porte.

**Prova :** dal fatto che la matrice induttanza è (semi)definita positiva.

**Interpretazione fisica :**

**Caso  $|k| = 1$  :** massimo accoppiamento possibile. dal punto di vista fisico significa che i due avvolgimenti sono così vicini che il flusso magnetico generato dalla corrente di uno qualsiasi di essi viene completamente concatenato dall'altro. Questo completo concatenamento si può avere solo nel caso ideale che le due curve che descrivono i due avvolgimenti siano coincidenti. In pratica, il valore  $\pm 1$  può essere avvicinato ma non può essere raggiunto.

**Caso  $k = 0$  :** accoppiamento nullo. si ha accoppiamento nullo, cioè i due induttori non interagiscono elettricamente : quindi il doppio bipolo degenera in due bipoli induttori disaccoppiati (diventa zero-direzionale), in questo la matrice induttanza diviene diagonale poiché  $M = 0$ . Da un punto di vista fisico, questo significa che i loro campi magnetici occupano porzioni distinte (non sovrapposte) dello spazio (i due avvolgimenti sono piuttosto lontani) ovvero che la conformazione dei loro campi magnetici da origine a contributi dei flussi concatenati che si elidono tra loro (Per esempio, due avvolgimenti vicini ma con assi tra loro ortogonali).

**Accoppiamento parassita :** In un circuito fisico si è spesso costretti, per ridurre lo spazio occupato dal circuito stesso, a montare vicini due induttori fisici (bobine con nucleo) che sono previsti disaccoppiati dal progettista. La prossimità delle due bobine può dare origine a un accoppiamento (parassita) indesiderato. In questo caso occorre modellare le due bobine come un doppio bipolo induttivo (induttori accoppiati). Per ridurre al minimo l'indesiderato accoppiamento parassita tra gli stessi, conviene montare i due induttori con gli assi degli avvolgimenti ortogonali. In altri casi, si usano i cosiddetti induttori fisici corazzati (più costosi) in cui uno schermo confina il campo magnetico in uno spazio ridotto attorno all'avvolgimento in modo da prevenire una sovrapposizione tra i due campi magnetici.

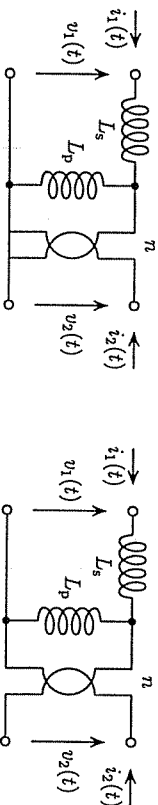
16.5.2 Modello con due induttori e un trasformatore ideale

Esaminiamo un modello equivalente molto usato degli induttori accoppiati :

**Proprietà :** Gli induttori accoppiati ammettono un modello equivalente consistente in due induttori disaccoppiati con induttanze  $L_s$  (in serie) e  $L_p$  (in parallelo) e un tr.id. con

rapporto  $n$  :

$$n = k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad , \quad L_p = k^2 L_1 \quad , \quad L_s = (1 - k^2) L_1$$



MODELLO EQUIVALENTE CON UN TR.ID. E DUE INDUTTORI DISACCOPIATI (DBT) E (DBP)

**Prova :** Calcoliamo la matrice induttanza del doppio bipolo equivalente cioè l'induttanza primaria, l'induttanza secondaria e la mutua induttanza del modello mediante le definizioni delle stesse date all'inizio della Sez. 15.4.1 :

$$L_1 = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = L_s + L_p \quad , \quad M = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = 0 \quad , \quad L_2 = \begin{bmatrix} \phi_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{L_p}{n^2}$$

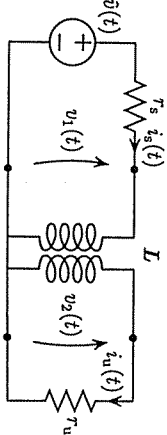
Le precedenti relazioni vengono trovate come gli elementi della matrice  $R$  di un DB adinamico, eguagliando le rappresentazioni  $(\phi_1, \phi_2) \leftarrow (i_1, i_2)$  (vedere Par. 9.x.x).

Dalle tre precedenti equazioni possiamo esplicitare le espressioni dei parametri  $L_s, L_p$  e  $n$  del modello in funzione dei parametri  $L_1, L_2$  e  $M$  degli induttori accoppiati.

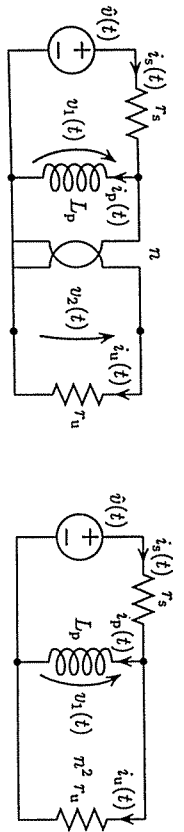
**Commento :** Le suddette formule ci assicurano che le due induttanze  $L_s$  e  $L_p$  siano sempre positive. Solo nel caso  $k = \pm 1$ , l'induttanza  $L_s$  risulta nulla, cioè l'induttore in serie alla porta 1 viene sostituito da un corto circuito. Questo risultato conferma che per  $k = \pm 1$  la matrice induttanza  $L$  è singolare e quindi le due correnti sono coinvolte in una equazione algebrica : quindi non possono diventare entrambe variabili di stato qualunque sia il circuito in cui gli induttori accoppiati siano inseriti (vedere Cap. 15.4.7).

**Commento :** Il rapporto di trasformazione  $n$  ha lo stesso segno della mutua induttanza  $M$  e del coefficiente di accoppiamento  $k$ .

**Gli induttori accoppiati e il trasformatore ideale :** Consideriamo degli induttori accoppiati con coefficiente di accoppiamento  $k = \pm 1$  connessi a una sorgente nonideale  $\mathcal{V}(\hat{v}(t)) \dagger \mathcal{R}(r_s)$  (prima porta) e un carico  $\mathcal{R}(r_u)$  (seconda porta).



Sostituiamo gli induttori accoppiati col modello costituito da un tr.id. e un  $\mathcal{L}(L_p)$  in parallelo alla prima porta. Trasferiamo il carico, moltiplicando la sua resistenza per  $n^2$ , in parallelo alla prima porta, otteniamo un circuito costituito dal parallelo della  $\mathcal{V}(\hat{v}(t)) \dagger \mathcal{R}(r_s)$ , dall'  $\mathcal{L}(L_p)$  e dal carico  $\mathcal{R}(n^2 r_u)$ .



Indicando con  $v_1(t)$  la tensione comune ai tre bipoli, calcoliamo le rispettive correnti :

$$i_s(t) = \frac{v_1(t) - \hat{v}(t)}{r_s}, \quad i_u(t) = \frac{v_1(t)}{r_u^2 r_u}, \quad i_p(t) = \frac{1}{L_p} \int_0^t v_1(\tau) d\tau + i_p(0)$$

Assumiamo che il circuito operi in condizioni tali che  $i_p(t)$  sia trascurabile rispetto a  $i_u(t)$  :

$$i_u(t) \gg i_p(t) \implies \frac{v_1(t)}{r_u^2 L_p} \gg \frac{1}{L_p} \int_0^t v_1(\tau) d\tau$$

Questa condizione comporta che il valore medio di  $v_1(t)$  sia piuttosto basso e che l'induttanza  $L_p$  sia piuttosto alta: in questo caso la corrente  $i_p(t)$  diventa trascurabile, e l'induttore può essere sostituito da un c.a.. In questo caso il modello (approssimato) degli induttori accoppiati si riduce al semplice trasformatore ideale con rapporto di trasformazione  $n = \sqrt{L_1/L_2}$ . Storicamente il tr.id. è stato introdotto proprio come modello idealizzato degli induttori accoppiati.

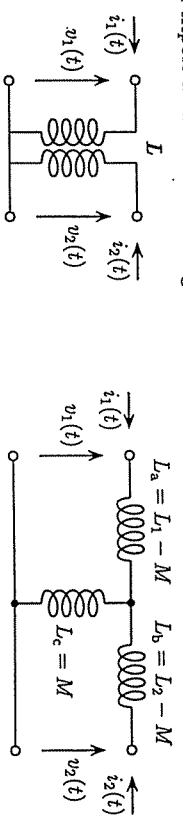
**Avvertenza:** Questo modello semplificato degli induttori accoppiati non può assolutamente essere valido in regime costante dal momento che in questo caso l'induttore sarebbe equivalente a un c.c. anche se l'induttanza  $L_p$  fosse elevatissima. ■

### 16.5.3 Modello con tre induttori a "T"

Introduciamo un modello equivalente alternativo degli induttori accoppiati, che vale solo nel caso che essi costituiscano un DBT: Calcoliamo la matrice induttanza  $L$  del tripolo di tre induttori, partendo dalla definizione degli elementi della matrice. Otteniamo

$$L_1 = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = L_a + L_c, \quad L_2 = \begin{bmatrix} \phi_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = L_b + L_c, \quad M = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_2 \\ i_1 \end{bmatrix} = L_c$$

Invertendo le tre formule precedenti, otteniamo le induttanze dei tre induttori costituenti il tripolo a "T" in funzione degli elementi della matrice  $L$ .



**Commento:** Una tra le induttanze  $L_a, L_b, L_c$  può risultare negativa: questo accade quando essi non sono simmetrici ( $L_1 \neq L_2$ ) e l'accoppiamento è elevato ( $|k| \approx 1$ ) o quando la mutua è negativa ( $M < 0$ ). Possiamo tracciare nel piano  $\alpha-k$  dove  $\alpha = L_1/L_2$  delle curve che separano il piano in regioni entro cui tutte e tre le induttanze  $L_a, L_b$  e  $L_c$  risultano positive. ■

## 16.6 APPENDICE

### 16.6.1 Una uguaglianza tra due integrali

Prima di proseguire la discussione sui componenti reciproci occorre introdurre una proprietà matematica che stabilisce l'uguaglianza di due integrali definiti.

**Proprietà:** siano date due funzioni del tempo  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  tali che  $f_1(t) = f_2(t) = 0$  per  $t < t_0$ . I due seguenti integrali definiti sono coincidenti :

$$\int_{t_0}^{t^+} \frac{d f_2(\tau)}{d\tau} f_1(t + t_0 - \tau) d\tau = \int_{t_0}^{t^+} f_2(\tau) \frac{d f_1(t + t_0 - \tau)}{d\tau} d\tau$$

Quest'uguaglianza dice che l'operatore derivata può essere spostato da una funzione all'altra.

**Prova:** Consideriamo il seguente integrale definito :

$$\int_{t_0}^{t^+} \frac{d[f_2(\tau) f_1(t + t_0 - \tau)]}{d\tau} d\tau = \left[ f_2(\tau) f_1(t + t_0 - \tau) \right]_{\tau=t_0}^{t^+} - \left[ f_2(\tau) f_1(t + t_0 - \tau) \right]_{\tau=t_0} = 0$$

esso risulta nullo dal momento che  $f_1(t + t_0 - t) = f_1(t_0 - t) = 0$  e  $f_2(t_0 - t) = 0$ . Sviluppando l'integrando, lo stesso integrale risulta uguale a :

$$\int_{t_0}^{t^+} \frac{d[f_2(\tau) f_1(t + t_0 - \tau)]}{d\tau} d\tau = \int_{t_0}^{t^+} \frac{d f_2(\tau)}{d\tau} f_1(t + t_0 - \tau) d\tau + \int_{t_0}^{t^+} f_2(\tau) \frac{d f_1(t + t_0 - \tau)}{d\tau} d\tau = 0$$

La proprietà rimane provata ricordando che  $\frac{d f_1(t + t_0 - \tau)}{d\tau} = -\frac{d f_1(t + t_0 - \tau)}{dt}$  ■

La proprietà qui dimostrata può assumere anche una forma diversa. Ricordiamo la seguente relazione tra due integrali : essa dimostra che gli argomenti  $\tau$  e  $t - \tau$  delle due funzioni  $f_1(\tau)$  e  $f_2(\tau)$  possono essere scambiati :

$$\int_{t_0}^{t^+} f_1(\tau) f_2(t + t_0 - \tau) d\tau = \int_{t_0}^{t^+} f_1(t + t_0 - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

Il lettore incontrerà questa proprietà, invero molto importante, nel momento in cui affronterà il concetto di convoluzione tra due segnali (funzioni del tempo) nei corsi successivi. Applicando questo scambio degli argomenti tra le due funzioni alla prima uguaglianza provata in questo paragrafo, si ottiene una forma alternativa della proprietà stessa :

$$\int_{t_0}^{t^+} \frac{d f_2(t + t_0 - \tau)}{d\tau} f_1(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t^+} f_2(\tau) \frac{d f_1(t + t_0 - \tau)}{d\tau} d\tau$$

fine del capitolo 16

# 17 EQUAZIONI DEI CIRCUITI DINAMICI e LINEARI

## 17.1 METODO TOTALE

Le equazioni di un circuito dinamico e lineare, scritte in accordo al metodo totale, consistono in un sistema di equazioni differenziali-algebriche (diff.alg.). Questo risultato è comune a qualsiasi altro metodo di analisi e il sistema diff.alg. risulta piuttosto scomodo da trattare. Vengono svolte alcune considerazioni preliminari riguardanti questi sistemi, che risulteranno utili nelle sezioni successive. Comunque questa sezione può essere omessa.

### 17.1.1 Circuiti dinamici lineari nonomogenei e omogenei

I circuiti dinamici lineari sono formati dai seguenti componenti :

1. Componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari omogenei di qualsiasi tipo possono essere presenti (vedere CCap. 7 e 10), insieme alle sorgenti impulsive tempo-invarianti (costanti). Tra i componenti dinamici, tempo-varianti e lineari, per il momento, solamente le sorgenti impulsive sono prese in considerazione. La presenza degli interruptori ideali (int.id.) sarà esaminata a parte nella Sez. 17.8.

2. Tra i componenti dinamici, tempo-invarianti e lineari sono presi in considerazione i componenti elementari: condensatore, induttore (vedere Sez. 15.1) e gli induttori accoppiati (vedere Sez. 16.4). Comunque, i componenti dinamici più complessi possono essere presenti indirettamente mediante modelli equivalenti costituiti da condensatori, induttori e componenti dinamici, come già discusso nella Sez. 16.1.

**Definizione** : Un circuito dinamico lineare è detto *omogeneo* quando tutti i componenti sia dinamici sia dinamici sono omogenei. Quindi in un circuito dinamico omogeneo mancano le sorgenti impulsive sia tempo-invarianti sia tempo-varianti.

**Commento** : Siccome per il momento gli int.id. sono esclusi, un circuito dinamico omogeneo è necessariamente tempo-invariante, in seguito alle assunzioni fatte precedentemente.

**Definizione** : Sia dato un generico circuito dinamico, lineare, nonomogeneo. Noi definiremo come *circuito (dinamico, lineare) omogeneo associato* il circuito ottenuto da quello originario sostituendo le sorgenti impulsive sia tempo-invarianti sia tempo-varianti, coi rispettivi bipoli omogenei associati, cioè sVi  $\rightarrow$  c c e sIi  $\rightarrow$  c.a. ■

FIG. ESEMPIO DI (A) UN CIRCUITO DINAMICO LINEARE NONOMogeneo  
DEL (B) CIRCUITO DINAMICO LINEARE OMOGENEO ASSOCIATO

### 17.1.2 Leggi di Kirchhoff

Innanzitutto suddividiamo i rami del circuito in tre sottoinsiemi a seconda che il componente del ramo sia dinamico, un condensatore o un induttore : i vettori  $v(t)$  e  $i(t)$  e la

Questo capitolo considera la costruzione delle equazioni che descrivono il comportamento dei circuiti dinamici lineari costituiti da componenti dinamici tempo-invarianti e lineari di qualsiasi tipo, da sorgenti impulsive tempo-invarianti e tempo-varianti, da interruptori ideali, da condensatori, da induttori e da induttori accoppiati. La soluzione di queste equazioni è rinviata al Cap. 19, dopo aver dedicato il Cap. 18 agli strumenti matematici necessari.

**Sez. 17.1 : Metodo totale** : Le equazioni del circuito vengono scritte seguendo il metodo totale, già incontrato per i circuiti dinamici, e consistono in un sistema di equazioni differenziali-algebriche (diff.alg.). Il metodo totale di analisi risulta piuttosto scomodo a causa dell'elevato numero di incognite ed equazioni.

**Sez. 17.2 : Metodo dei componenti complementari** : Nel calcolo cart&penna è più conveniente introdurre un metodo diverso, anch'esso di validità generale : il *metodo dei componenti complementari*. Esso consente di costruire un sistema di equazioni, in cui compaiono in veste di incognite solamente le grandezze candidate di stato, mentre le grandezze impresse contribuiscono a formare i termini noti.

**Sez. 17.3 : Equazione di stato e di uscita dei circuiti nondegeneri** : Limitatamente ai circuiti dinamici nondegeneri, il sistema differenziale viene trasformato in una *forma canonica*, usualmente chiamata *equazione di stato*, in cui tutte le grandezze candidate assumono il ruolo di *variabili di stato*. A questo sistema viene affiancato un sistema algebrico, detto *equazione di uscita* e costruito come soluzione di un *circuito dinamico ausiliario* per il calcolo delle rimanenti grandezze.

**Sez. 17.4 : Sistemi degeneri di equazioni differenziali** : L'analisi dei circuiti dinamici degeneri richiede alcune premesse sui sistemi degeneri di equazioni differenziali. Con un esempio, viene illustrato il procedimento per scomporre un sistema differenziale degenere in un *sottosistema differenziale puro* (in forma canonica) e un *sottosistema algebrico puro*.

**Sez. 17.5 : Equazione di stato e di uscita dei circuiti degeneri** : Nelle equazioni di stato dei circuiti dinamici degeneri solo una parte delle candidate diventano variabili di stato. Anche in questo caso per calcolare le altre grandezze di interesse occorre introdurre un circuito dinamico ausiliario, opportunamente modificato, affinché esso non risulti patologico.

**Sez. 17.6 : Equazione differenziale scalare di ordine n** : Un esempio dimostra che l'equazione (scalare) differenziale di ordine n con un'unica funzione incognita.

**Sez. 17.7 : Sulla continuità analitica delle candidate di stato** : Partendo dall'analisi dell'equazione di stato, si dimostra che le candidate di stato verificano il principio della continuità analitica nei circuiti dinamici nondegeneri e nei circuiti dinamici degeneri, in cui le grandezze impresse sono derivabili ovvero in quelli in cui non sono presenti le derivate delle stesse.

**Sez. 17.8 : Circuiti dinamici con interruptori ideali** : L'ultima sezione riguarda i problemi che nascono nei circuiti dinamici quando tra i bipoli tempo-varianti oltre alle sorgenti impresse siano presenti anche gli interruptori ideali : la commutazione degli stessi può provocare una variazione del numero di variabili di stato.

matrice incidenza  $A$  sono suddivisi, rispettivamente, in tre sottovettori e sottomatrici :

$$v(t) = \begin{bmatrix} v^{ad}(t) \\ v^c(t) \\ v^l(t) \end{bmatrix}^T, \quad i(t) = \begin{bmatrix} i^{ad}(t) \\ i^c(t) \\ i^l(t) \end{bmatrix}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} A^{ad} & A^c & A^l \end{bmatrix}$$

Consequentemente anche le leggi di KIRCHHOFF vengono riscritte :

$$\begin{bmatrix} v^{ad}(t) \\ v^c(t) \\ v^l(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v^l(t) \\ v^c(t) \\ v^{ad}(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^{ad} & A^c & A^l \end{bmatrix}^T v^{mod}(t)$$

$$A^{ad} i^{ad}(t) + A^c i^c(t) + A^l i^l(t) = 0$$

dove  $m_{ad}$  è il numero di rami con componenti dinamici,  $m_c$  è il numero di rami con condensatori e  $m_l$  è il numero di rami con induttori. Negli  $m_l$  rami con induttori sono compresi anche i rami delle porte degli induttori accoppiati eventualmente presenti.

### 17.1.3 Rappresentazione dei componenti

L'insieme delle relazioni costitutive dei componenti presenti nel circuito (con l'esclusione degli  $int_{id}$ ) viene suddiviso in tre sottoinsiemi :

1. Il primo sottoinsieme consiste nella rappresentazione unificata dei componenti dinamici, includendo le sorgenti impresse :

$$H^{ad} v(t) + H^{ad} i(t) = \hat{u}(t)$$

dove  $H^{ad} v$ ,  $H^{ad} i$  sono matrici di dimensioni  $m_{ad} \times m_{ad}$  diagonali a blocchi (un blocco per ogni componente). Il vettore  $\hat{u}(t)$  contiene le grandezze impresse presenti nei componenti dinamici non omogenei.

2. Il secondo sottoinsieme riguarda i condensatori. Scegliendo la rappresentazione differenziale di ciascuno, possiamo costruire la rappresentazione unificata dei condensatori :

$$i^c(t) = C v^c(t)$$

in cui la matrice  $C$  è una matrice  $m_c \times m_c$  diagonale i cui elementi sono le capacità dei condensatori.

3. Il terzo sottoinsieme riguarda tutti gli induttori, comprendendo quelli accoppiati. Scegliendo la rappresentazione differenziale di ciascuno, possiamo costruire la rappresentazione differenziale unificata degli induttori :

$$v^l(t) = L \dot{i}^l(t)$$

in cui la matrice  $L$  è una matrice  $m_l \times m_l$  diagonale a blocchi i cui blocchi  $1 \times 1$  sono le induttanze degli induttori e quelli  $2 \times 2$  sono le matrici induttanze degli induttori accoppiati.

**Esempio :** La rappresentazione unificata di tutti i componenti presenti nel circuito di Fig. è riportata qui sotto. WWWWWW DA FARE

FIG. ESEMPIO DI UN CIRCUITO CON LA RAPPRESENTAZIONE UNIFICATA DI TUTTI I COMPONENTI

### 17.1.4 Costruzione del sistema differenziale-algebrico

Uno qualsiasi dei metodi di analisi, già introdotti per i circuiti dinamici e lineari nel Cap. 12, può essere facilmente adattato ai suddetti circuiti dinamici e lineari, giungendo alla costruzione di un sistema di equazioni lineari. Se ci soffermiamo sul metodo totale (vedere CCap. 6 e 11) abbiamo come incognite le tensioni di nodo  $v^{mod}(t)$ , le tensioni di ramo  $v^{ad}(t)$ ,  $v^c(t)$  e  $v^l(t)$  e le rispettive correnti di ramo  $i^{ad}(t)$ ,  $i^c(t)$  e  $i^l(t)$ . Il sistema costruito mediante il metodo totale assume la forma vettoriale :

$$H \begin{bmatrix} v^{mod}(t) \\ v^{ad}(t) \\ v^c(t) \\ v^l(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v^l(t) \\ v^c(t) \\ v^{ad}(t) \\ i^{ad}(t) \\ i^c(t) \\ i^l(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0_{m_{ad}} \\ 0_{m_c} \\ 0_{m_l} \\ 0_{n-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} z(t) \\ 0_{m_{ad}} \\ 0_{m_c} \\ 0_{m_l} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} i^l(t) \\ i^c(t) \\ i^{ad}(t) \end{bmatrix}^T =$$

dove la matrice  $H$  è

$$H = \begin{bmatrix} -[A^{ad}]^T & I_{m_{ad}, m_{ad}} & 0_{m_{ad}, m_c} & 0_{m_{ad}, m_l} & 0_{m_{ad}, m_{ad}} & 0_{m_{ad}, m_c} & 0_{m_{ad}, m_l} & 0_{m_{ad}, m_{ad}} & 0_{m_{ad}, m_c} & 0_{m_{ad}, m_l} \\ -[A^c]^T & 0_{m_c, m_{ad}} & I_{m_c, m_c} & 0_{m_c, m_l} & 0_{m_c, m_{ad}} & 0_{m_c, m_c} & 0_{m_c, m_l} & 0_{m_c, m_{ad}} & 0_{m_c, m_c} & 0_{m_c, m_l} \\ -[A^l]^T & 0_{m_l, m_{ad}} & 0_{m_l, m_c} & I_{m_l, m_l} & 0_{m_l, m_{ad}} & 0_{m_l, m_c} & 0_{m_l, m_l} & 0_{m_l, m_{ad}} & 0_{m_l, m_c} & 0_{m_l, m_l} \\ 0_{n-1, n-1} & 0_{n-1, m_{ad}} & 0_{n-1, m_c} & 0_{n-1, m_l} & 0_{n-1, m_{ad}} & A^{ad} & A^c & A^l & 0_{n-1, m_{ad}} & 0_{n-1, m_c} \\ 0_{m_{ad}, n-1} & H^{ad} v & 0_{m_{ad}, m_c} & 0_{m_{ad}, m_l} & 0_{m_{ad}, m_{ad}} & H^{ad} i & 0_{m_{ad}, m_c} & 0_{m_{ad}, m_l} & 0_{m_{ad}, m_{ad}} & 0_{m_{ad}, m_c} \\ 0_{m_c, n-1} & 0_{m_c, m_{ad}} & 0_{m_c, m_c} & 0_{m_c, m_l} & -C & 0_{m_c, m_{ad}} & I_{m_c, m_c} & 0_{m_c, m_l} & 0_{m_c, m_{ad}} & 0_{m_c, m_l} \\ 0_{m_l, n-1} & 0_{m_l, m_{ad}} & 0_{m_l, m_c} & I_{m_l, m_l} & 0_{m_l, m_{ad}} & 0_{m_l, m_c} & 0_{m_l, m_l} & 0_{m_l, m_{ad}} & 0_{m_l, m_c} & -L \end{bmatrix}$$

Le funzioni incognite nel suddetto sistema sono  $n-1 + 2m_{ad} + 2m_c + 2m_l$  tra cui  $m_c + m_l$  compattono congiuntamente alle derivate prime. Il numero di equazioni uguaglia il numero di incognite.

### 17.1.5 Applicazione all'analisi dei circuiti

Il sistema di equazioni costruito mediante il metodo totale nel paragrafo precedente si presta ad alcune osservazioni di carattere generale, che valgono, comunque, anche per i

sistemi di equazioni ottenuti con i metodi di analisi semplificati già introdotti nel Cap. 12 (limitatamente ai circuiti dinamici) :

- Le equazioni scalari originate dalle due leggi di KIRCHHOFF e dalle rappresentazioni dei componenti dinamici (vedere matrice  $H$ ), per un totale di  $n-1+2m_{ad}+m_c+m_e+m_l$  equazioni, non contengono alcuna derivata delle grandezze incognite.
- Le tensioni di nodo  $v^{mod}(t)$ , le tensioni e correnti di ramo dei componenti dinamici  $v^{ad}(t)$  e  $v^{ed}(t)$  e le grandezze anticandidade  $i^{c}(t)$ ,  $v^{c}(t)$ , per un totale di  $n-1+2m_{ad}+m_c+m_e+m_l$  incognite, non compaiono sotto l'operatore derivata.
- In generale, le derivate  $\dot{v}_c(t)$  e  $\dot{i}_l(t)$  delle grandezze candidate  $v^c(t)$ ,  $i^l(t)$  sono  $m_c+m_e$  e appaiono in sole  $m_c+m_e$  equazioni. In genere esse non sono esplicitate a primo membro.

Un sistema con queste caratteristiche viene chiamato *differenziale-algebrico*, abbreviato in *diff.alg.*. Possiamo riscrivere il sistema in una forma più adatta separando il sistema in una coppia di sottosistemi del tipo :

- *Sottosistema differenziale puro* : nel sottosistema differenziale puro compaiono solo le grandezze incognite di cui sia presente la derivata (cioè le grandezze candidate  $v^c(t)$  e  $i^l(t)$ ). Il numero di equazioni eguaglia il numero di grandezze incognite e tutte le loro derivate sono esplicitate a primo membro (la derivata di una specifica grandezza incognita per ciascuna equazione). Il sottosistema differenziale puro viene anche chiamato *sottosistema differenziale in forma canonica*.
- *Sottosistema algebrico puro* : Il sottosistema algebrico coinvolge, in genere, tutte le grandezze incluse le candidate  $v^c(t)$  e  $i^l(t)$  che compaiono nel sottosistema differenziale puro con esclusione delle loro derivate  $\dot{v}^c(t)$  e  $\dot{i}^l(t)$ .
- Generalmente, le grandezze impresse (che non rientrano tra le incognite dal momento che sono note) compaiono in entrambi i sottosistemi.

La suddetta scomposizione di un generico sistema *diff.alg.* è piuttosto complicata e pesante. Perciò si preferisce riconsiderare l'analisi del circuito dinamico mediante un apposito metodo, che permette di giungere direttamente, nella maggior parte dei casi, al sottosistema differenziale puro e al sottosistema algebrico puro. Questo metodo costituisce l'argomento della prossima sezione.

### 17.1.6 Commenti sui sistemi differenziali-algebrici

Indipendentemente dal metodo usato per costruire il sistema *diff.alg.*, i seguenti commenti sono necessari :

- Come visto nel Cap. 15, nei bipoli conservativi (condensatore e induttore), a ogni andamento della grandezza anticandidada, rispettivamente  $i_c(t)$  e  $v_l(t)$ , possono corrispondere infiniti andamenti della grandezza candidata, rispettivamente  $v_c(t)$  e  $i_l(t)$ . Lo stesso dicasi per gli induttori accoppiati (vedere Cap. 16).
- Quindi anche la soluzione del sistema *diff.alg.*, che descrive il circuito dinamico completo, sarà in genere affetta da questa indeterminatazza.

- Supponiamo di conoscere il valore delle candidate per  $t = t_0$ . In questo caso il sistema *diff.alg.* diventa un sistema puramente algebrico in cui vi sono come incognite il valore delle anticandidade in  $t = t_0$  e di tutte le altre grandezze di ramo anch'esse in  $t = t_0$ .

$$H \begin{bmatrix} [v^{mod}(t_0)]^T & [v^{ad}(t_0)]^T & [v^c(t_0)]^T & [v^l(t_0)]^T & [i^{ad}(t_0)]^T & [i^c(t_0)]^T & [i^l(t_0)]^T \\ [v^{ed}(t_0)]^T & [v^{ed}(t_0)]^T & [v^c(t_0)]^T & [v^l(t_0)]^T & [i^{ad}(t_0)]^T & [i^c(t_0)]^T & [i^l(t_0)]^T \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{note} \\ \text{note} \end{matrix}$$

$$= [0_{m_{ad}}]^T [0_{m_c}]^T [0_{m_e}]^T [0_{n-1}]^T [i^l(t_0)]^T [0_{m_c}]^T [0_{m_e}]^T]^T$$

Essendo il numero di incognite uguale al numero di equazioni, questo sistema, se la sua matrice è nonsingolare, può essere risolto. Siamo in presenza di un unico andamento della grandezza candidata, qualora venga specificato lo stato in  $t = t_0$  (condizioni iniziali) dei componenti conservativi, cioè il valore delle grandezze candidate in  $t = t_0$ .

- In alcuni casi particolari (circuiti dinamici degeneri) ma di notevole interesse concettuale, può capitare che non sia necessario conoscere le condizioni iniziali di tutte le candidate, come verrà discusso nella Sez. 17.5.

Quanto detto distingue un sistema differenziale da un sistema algebrico.

## 17.2 METODO DEI COMPONENTI COMPLEMENTARI

Nella costruzione del sistema *diff.alg.* di un circuito dinamico, il metodo totale si presta per scrivere un programma di uso generale. Per il calcolo cartaceo è più conveniente ricorrere a un metodo diverso. Questa sezione presenta il *metodo dei componenti complementari*, di validità generale. Esso consente di costruire un sistema di equazioni, in cui compaiono solamente le grandezze candidate, che costituiscono le incognite, congiuntamente alle loro derivate prime, e le grandezze impresse, che contribuiscono a formare i termini noti (ingressi) del sistema.

### 17.2.1 Premessa

Per circuiti dinamici semplici il sistema differenziale puro può venire scritto con ragionamenti intuitivi, tenendo presente che il sistema differenziale deve contenere :

- A primo membro di ogni equazione la derivata prima di una specifica grandezza candidata : queste derivate prime costituiscono il vettore  $\dot{x}^*(t) = [[\dot{v}^c(t)]^T, [\dot{i}^l(t)]^T]^T$ .
- A secondo membro, le grandezze candidate raccolte nel corrispondente vettore  $x^*(t) = [[v^c(t)]^T, [i^l(t)]^T]^T$ .

- Sempre a secondo membro, le grandezze impresse, sia costanti sia funzioni del tempo, raccolte nel vettore  $\dot{z}(t) = [[\dot{v}^c(t)]^T, [\dot{i}^l(t)]^T]^T$ .

*Avvertenza* : Un sistema *diff.alg.* del suddetto tipo può essere scritto solo se il circuito è nondegenerato (vedere prossima sezione).

WWWWWWWW????? *Esempio* : fare un esempio.



FIGURA con circuito semplice di cui equazione di stato  
Fig. ESEMPIO DI UN CIRCUITO DINAMICO

17.2.2 Componenti complementari conservativo e dinamico

WWWWW RIVEDERE LA SIMBOLOGIA del numero candidate, numero condensatori, numero induttori, rango della matrice  $H^e$  e numero variabili di stato WWWWW ???  
In questo paragrafo, noi estendiamo il metodo già proposto nella Sez. 15.3 per i circuiti dinamici elementari a quelli generici. Un circuito dinamico e lineare può sempre essere scomposto in una coppia di componenti complementari, uno adinamico e l'altro (dinamico) conservativo :

FIGURA con circuito dinamico con 4 bipoli conservativi. (CAP. 6)

Fig. CIRCUITO DINAMICO SCOMPOSTO IN DUE COMPONENTI COMPLEMENTARI

• Il componente (complementare) conservativo è costituito da tutti i componenti conservativi presenti nel circuito : se  $m_a$ ,  $m_l$  denotano, rispettivamente, il numero di condensatori, induttori (comprese le porte di quelli accoppiati), il componente conservativo e quello dinamico hanno  $n_a = m_a + m_l$  porte. Ogni porta è propria e corrisponde a un condensatore o induttore separato dagli altri, nel senso che sia la tensione sia la corrente della porta sono coinvolte esclusivamente nella relazione costitutiva del bipolo conservativo. La eventuale presenza di induttori accoppiati, anche se essi sono tripolari, dà sempre origine a due porte proprie del componente conservativo. Infatti l'eventuale c.c. che connette due terminali degli induttori accoppiati può essere attribuito al componente adinamico. Ciascuna delle relazioni costitutive degli induttori accoppiati coinvolge le grandezze di entrambe le porte e quindi essi sono bidirezionali.

• Il componente (complementare) adinamico è costituito da tutti i rimanenti componenti (dinamici), comprese le eventuali sorgenti impulsive, sia tempo-invarianti sia tempo-varianti. Le  $n_a$  porte proprie del componente conservativo impongono al componente adinamico, dotato di  $2 n_a$  terminali, di operare come un  $n_a$ -porta improprio. Notare che il numero effettivo di terminali può essere minore nel senso che alcuni dei  $2 n_a$  terminali apparentemente distinti possono essere connessi da un c.c. interno al componente adinamico complementare. In questo caso questi terminali costituiscono di fatto un unico terminale. In casi estremi lo  $n_a$ -porta adinamico improprio si riduce a un  $(n_a + 1)$ -polo le cui  $n_a$  porte formano un cespuglio.

17.2.3 Rappresentazione del componente adinamico

Consideriamo le  $n_a$  tensioni e le  $n_a$  correnti delle  $n_a$  porte comuni ai due componenti complementari :

Le tensioni e le correnti comuni ai due  $n_a$ -porte complementari siano orientate con la convenzione normale rispetto al componente adinamico e con la convenzione nonnormale rispetto a quello conservativo. Esse sono suddivise nel vettore  $x^a(t)$  delle grandezze candidate e nel vettore  $x^b(t)$  delle grandezze anticandidate, come indicato qui a fianco :

componente conservativo	vettore delle candidate $x^a(t)$	vettore delle anticandidate $x^b(t)$
condensatore	$v_c(t)$	$i_c(t)$
induttore	$i_l(t)$	$v_l(t)$
induttori accoppiati	$i_{l1}(t)$ $i_{l2}(t)$	$v_{l1}(t)$ $v_{l2}(t)$

Commento : La suddetta ripartizione coincide con una di quelle che danno origine a una specifica rappresentazione cardinale del componente adinamico complementare, in quanto per ciascuna porta una grandezza entra a far parte di  $x^a(t)$  e l'altra di  $x^b(t)$ .

Rappresentazione implicita : Una generica rappresentazione implicita del componente adinamico complementare può essere scritta, mettendo in evidenza la suddetta ripartizione delle grandezze :

$$H^a x^a(t) + H^b x^b(t) + H^c u(t) = 0_{n_a, n_a}$$

dove  $H^a$  and  $H^b$  sono matrici  $n_a \times n_a$ . Il vettore  $u(t)$  raccoglie le grandezze impresse di tutte le sorgenti impulsive interne al componente adinamico : le sue dimensioni non dipendono dal numero delle porte e quindi possono essere qualsiasi. Il numero di righe di  $H^c$  è uguale a  $n_a$  mentre il numero di colonne coincide con le dimensioni di  $u(t)$ .

Commento : Se e solo se il componente adinamico è controllabile in  $x^a(t)$  (cioè  $|H^b| \neq 0$ ), è possibile (e opportuno) scegliere  $H^b = I$  (dove  $I$  è la matrice identità  $n_a \times n_a$ ), cioè scrivere la rappresentazione cardinale  $x^b(t) \leftarrow x^a(t)$  del componente adinamico. L'esistenza della suddetta rappresentazione cardinale, le cui grandezze indipendenti e dipendenti coincidono, rispettivamente, con le grandezze candidate e anticandidate del componente conservativo, non è assicurata per un qualsiasi  $n_a$ -porta adinamico complementare. ■

17.2.4 Rappresentazione differenziale del componente conservativo

La rappresentazione differenziale del componente conservativo è ottenuta dal "collage" delle rappresentazioni differenziali dei condensatori e degli induttori (comprese quelli accoppiati) (vedere Par. 17.1.3) :

$$\begin{matrix} i^c(t) = -C v^c(t) \\ v^l(t) = -L i^l(t) \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i^c(t) \\ v^l(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^c(t) \\ i^l(t) \end{bmatrix} \Rightarrow x^b(t) = -H^c \hat{x}^a(t)$$

Il segno "-" a secondo membro è dovuto al fatto che le tensioni e le correnti, comuni alla porte di entrambi i componenti, sono definite con una convenzione normale per il componente adinamico e quindi nonnormale per il componente conservativo. La matrice  $H^c$  è diagonale a blocchi in quanto è costituita dalle matrici delle capacità e induttanze introdotte nel Par. 17.1.3 e a loro volta diagonali a blocchi. Se non sono presenti induttori accoppiati, tutti i blocchi sono  $1 \times 1$ .

Proprietà : In seguito alla struttura diagonale a blocchi, la matrice  $H^c$  è singolare se e

solo se è singolare almeno uno dei blocchi, cioè solamente nel caso in cui siano presenti induttori accoppiati con accoppiamento unitario. ■

**Proprietà:** L'energia totale immagazzinata nei componenti conservativi  $w^{\text{con}}(t)$  è una forma quadratica omogenea definita positiva rispetto alle candidate:

$$w^{\text{con}}(t) = \sum_{k=1}^{m_c} w_{ck}(t) + \sum_{k=1}^{m_L} w_{Lk}(t) = \frac{1}{2} [v_c(t)]^T C v_c(t) + \frac{1}{2} [i_L(t)]^T L i_L(t)$$

$$w^{\text{con}}(t) = \frac{1}{2} [x^a(t)]^T H^c x^a(t) \quad \blacksquare$$

### 17.2.5 Costruzione del sistema differenziale noncanonico

Dalle rappresentazioni dei due componenti complementari può essere facilmente costruito un unico sistema differenziale (in forma noncanonica), in cui le uniche grandezze incognite sono le candidate. Eliminando il vettore delle anticandidate  $x^b(t)$  comune alle relazioni costitutive del componente adinamico e di quello conservativo, si ha:

$$H^d \dot{x}^a(t) = H^a x^a(t) + H^u \dot{u}(t) \quad \text{dove} \quad H^d = H^b H^c$$

Solo le grandezze candidate raccolte in  $x^a(t)$  rimangono presenti come incognite congiuntamente alle loro derivate prime raccolte in  $\dot{x}^a(t)$ .

**Commento:** Questo sistema è stato costruito senza fare alcuna ipotesi restrittiva: esso non è ancora scritto in forma canonica, in quanto il vettore  $\dot{x}^a(t)$  compare a primo membro premoltiplicato per la matrice  $H^d$ , che può risultare singolare. ■

**Esempio:** Dato un circuito (fare figura) costruire il sistema dif. alg.

FIG. ESEMPIO DI UN CIRCUITO DINAMICO E DEL CORRISPONDENTE SISTEMA DIFFERENZIALE

## 17.3 EQUAZIONE DI STATO E DI USCITA DEI CIRCUITI NONDEGENERI

Questa sezione partendo dal metodo dei componenti complementari introduce, per i circuiti nondegeneri, due sottosistemi di equazioni uno differenziale puro e l'altro algebrico puro.

Nel sottosistema differenziale compaiono, nel ruolo di funzioni incognite, tutte le grandezze candidate, che assumono il ruolo di variabili di stato, unitamente alle loro derivate. Nel sottosistema algebrico compaiono le variabili di ramo di interesse oltre a quelle di stato. Per i circuiti dinamici nonomogenei, in entrambi i sottosistemi possono essere presenti le grandezze impresse, che sono supposte note.

### 17.3.1 Equazione (vettoriale) di stato per circuiti nondegeneri

Per scrivere il sistema differenziale in forma canonica, occorre esprimere il vettore delle derivate delle candidate  $\dot{x}^a(t)$  rispetto al vettore delle candidate  $x^a(t)$ . L'esistenza di questa espressione non sempre è assicurata: essa esiste se e solo se la matrice  $H^d$ , di dimensioni  $n_a \times n_a$  e che premoltiplica il vettore  $\dot{x}^a(t)$ , ha rango pieno (cioè è nonsingolare). Se non vi sono induttori accoppiati con accoppiamento unitario, il rango di  $H^d$  coincide con quello di  $H^b$ , in quanto è garantita la nonsingolarità di  $H^c$ .

Nell'ipotesi che il rango di  $H^d$  sia pieno, possiamo scrivere:

$$H^d \dot{x}^a(t) = H^a x^a(t) + H^u \dot{u}(t) \implies \dot{x}^a(t) = [H^d]^{-1} H^a x^a(t) + [H^d]^{-1} H^u \dot{u}(t)$$

Conseguentemente, tutte le  $n_a$  candidate in  $x^a(t)$  diventano variabili di stato.

**Definizione:** un circuito dinamico lineare in cui tutte le candidate diventano variabili di stato viene chiamato **circuito dinamico nondegenero**.

Altrimenti esso viene chiamato **degenero**. ■

**Proprietà:** Un circuito dinamico nondegenero se e solo se non sono presenti induttori accoppiati con accoppiamento unitario (cioè se e solo se  $|H^c| \neq 0$ ) ed esiste la rappresentazione del componente adinamico complementare controllata nelle grandezze candidate (cioè se e solo se  $|H^b| \neq 0$ ). ■

**Commento:** Un circuito dinamico degenero implica che esista almeno un'equazione algebrica coinvolgente solo alcune o tutte le candidate, cioè che le candidate siano tra loro linearmente dipendenti:

$$[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots] [v_{c1}(t) v_{c2}(t) v_{c3}(t) \dots]^T + [\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots] [i_{L1}(t) i_{L2}(t) i_{L3}(t) \dots]^T = 0$$

I circuiti dinamici degeneri saranno esaminati nella Sez. 17.5.

Il sottosistema differenziale puro può essere riscritto con le notazioni tipiche della Teoria dei Sistemi:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B \dot{u}(t) \quad \text{dove:} \quad x(t) \equiv x^a(t), \quad A \equiv [H^d]^{-1} H^a \quad \text{e} \quad B \equiv [H^d]^{-1} H^u$$

**Definizioni:** Il suddetto sistema differenziale in forma canonica viene usualmente chiamato **equazione (vettoriale) di stato** e la matrice  $n \times n$   $A$  viene detta **matrice di stato**. ■

**Terminologia:** La terminologia usata per le equazioni differenziali, ovvero per i sistemi dinamici non è affatto univoca. Molti termini diversi vengono usati per indicare le funzioni del tempo note raccolte in  $B \dot{u}(t)$  che intervengono nelle equazioni differenziali:

- *funzioni forzanti* (meccanica dinamica)
- *ingressi*, *segnali d'ingresso* (teoria dei sistemi)
- *grandezze impresse* (teoria dei circuiti)
- *eccitazione* (elettronica, elettronica)
- *termini noti* (matematica)

I termini "autonomo" e "nonautonomo" sono molto spesso usati, rispettivamente, al posto di "tempo-invariante" e "tempo-variante", in particolare nella teoria dei sistemi.

La soluzione effettiva del circuito viene spesso chiamata **risposta nel dominio del tempo**. Quindi un circuito dinamico lineare è autonomo se è privo di sorgenti impulsive tempo-varianti, int.d. e resistori tempo-varianti. ■

## 17.3.2 Circuiti nondegeneri con due condensatori e/o induttori

Per illustrare la teoria sviluppata in questa sezione, conviene soffermarsi sui circuiti dinamici nondegeneri con due condensatori e/o induttori e calcolarne l'equazione di stato. Nel sottostante quadro vengono presentati tutti i casi possibili di circuiti dinamici e lineari con due condensatori e/o induttori. Entrambe le candidate diventano variabili di stato qualora il doppio bipolo dinamico complementare ammetta la rappresentazione cardinale di cui le candidate dei due bipoli conservativi siano le grandezze indipendenti, come risulta dal seguente quadro :

## Quadro dei circuiti con due bipoli conservativi e di ordine due

bipoli conserv. porte 1 2	doppio bipolo dinamico rappresentazione cardinale	l'equazione di stato è di second'ordine se e solo se esiste la rappresentazione riportata nella colonna 2
$L_1$ $L_2$	$(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$	$\begin{bmatrix} i_{a1}(t) \\ i_{a2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{11} & -r_{12} \\ L_1 & L_1 \\ -r_{21} & -r_{22} \\ L_2 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{a1}(t) \\ v_{a2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{q}_1(t) \\ L_1 \\ -\hat{q}_2(t) \\ L_2 \end{bmatrix}$
$C_1$ $C_2$	$(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$	$\begin{bmatrix} v_{a1}(t) \\ v_{a2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_{11} & -g_{12} \\ C_1 & C_1 \\ -g_{21} & -g_{22} \\ C_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a1}(t) \\ i_{a2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{q}_1(t) \\ C_1 \\ -\hat{q}_2(t) \\ C_2 \end{bmatrix}$
$L_1$ $C_2$	$(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$	$\begin{bmatrix} i_{a1}(t) \\ v_{a2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_{11} & -h_{12} \\ L_1 & L_1 \\ -h_{21} & -h_{22} \\ C_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{a1}(t) \\ v_{a2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{q}_1(t) \\ L_1 \\ -\hat{q}_2(t) \\ C_2 \end{bmatrix}$
$C_1$ $L_2$	$(i_1, v_2) \leftarrow (v_1, i_2)$	$\begin{bmatrix} v_{a1}(t) \\ i_{a2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_{11} & -h_{12} \\ C_1 & C_1 \\ -h_{21} & -h_{22} \\ L_2 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{a1}(t) \\ v_{a2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{q}_1(t) \\ C_1 \\ -\hat{q}_2(t) \\ L_2 \end{bmatrix}$

WWWWWW?? FARE quattro FIGURE qui sopra Dupl. da Cap. xxxxx ???WWWWWW  
**Estensione agli induttori accoppiati** : Nel caso in cui il doppio bipolo conservativo fosse costituito da induttori accoppiati, il circuito dinamico è di ordine due se e solo se esiste la rappresentazione controllata in corrente  $(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$  del doppio bipolo dinamico complementare e la matrice induttanza  $L$  è non singolare. In questo caso l'equazione di stato in forma compatta è :

$$\dot{z}(t) = -L^{-1} R z(t) - L^{-1} \hat{v}(t)$$

e in forma distesa :

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{a1}(t) \\ \dot{i}_{a2}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a1}(t) \\ i_{a2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{v}_1(t) \\ \hat{v}_2(t) \end{bmatrix}$$

## 17.3.3 Calcolo delle altre grandezze del circuito

Il metodo dei componenti complementari consente di costruire l'equazione (vettoriale) di stato del circuito e quindi di calcolare direttamente l'andamento temporale delle variabili di stato risolvendo l'equazione stessa (vedere Sez. 19.xx). Le variabili di stato coincidono sempre con grandezze alle porte dei due componenti complementari. Molto spesso anche le altre grandezze del circuito, cioè tensioni e/o correnti "nascoste" all'interno del componente dinamico complementare, sono di interesse. In accordo alla Teoria dei Sistemi esse vengono chiamate *variabili di uscita*. Da un punto di vista matematico, la ricerca delle tensioni e correnti interne al componente dinamico corrisponde a costruire un sistema di equazioni algebriche che coinvolge queste tensioni e correnti congiuntamente alle variabili di stato e alla grandezza impressa. Ovviamente, in questo sistema, essendo per natura algebrico, non possono comparire le derivate delle grandezze candidate.

Nei circuiti più semplici una ispezione diretta del circuito consente di trovare un'espressione algebrica delle tensioni e correnti non coinvolte nell'equazione di stato in funzione delle variabili di stato e delle grandezze impresse. Per i circuiti più complessi occorre sviluppare una procedura sistematica, consistente nella costruzione di un *circuito dinamico ausiliario*, la cui soluzione consente di conoscere le grandezze nascoste all'interno del componente dinamico complementare, come illustrato nel prossimo paragrafo.

## 17.3.4 Sistema algebrico : circuito dinamico ausiliario

Per i circuiti nondegeneri il circuito dinamico ausiliario per il calcolo delle grandezze (tensioni e correnti) interne al componente dinamico complementare (grandezze d'uscita) viene costruito nel modo seguente :

Il vettore di stato  $x(t)$  (tensioni ai capi dei condensatori e correnti fluenti negli induttori) è noto avendo supposto di aver risolto in precedenza l'equazione di stato. La soluzione dell'equazione di stato sarà vista nel Cap. 19.

In accordo al Teorema di Sostituzione (vedere Cap. 5) si ha che :

Ogni condensatore viene sostituito da una sV1 (in genere tempo-variante) la cui tensione impressa coincide con la tensione ai capi del condensatore stesso ottenuta dalla soluzione dell'equazione di stato.

Ogni induttore, compresi quelli accoppiati, viene sostituito da una sI1 (in genere tempo-variante) la cui corrente impressa coincide con la corrente dell'induttore stesso ottenuta dalla soluzione dell'equazione di stato.

Si ottiene un circuito dinamico associato a quello originario (dinamico), detto *circuito dinamico ausiliario*. Notare che le sorgenti impresse (in genere tempo-varianti) sono suddivise in due sottoinsiemi : quelle effettive, le cui grandezze impresse sono contenute nel vettore  $\hat{v}(t)$  e quelle sostitutive dei componenti conservativi, le cui grandezze impresse sono contenute nel vettore  $x(t)$ . Qualora necessario, anche le anticandidate possono essere analizzate con questo circuito ausiliario.

## 17.3.5 Equazione (vettoriale) di uscita

Il suddetto circuito adinamico ausiliario risulta formato dal componente adinamico complementare connesso ad appropriate sorgenti impulsive (in genere) tempo-varianti, che rimpiazzano i componenti conservativi.

**Proprietà:** Quando il circuito dinamico è nondegenere, il circuito adinamico associato risulta non-patologico nel senso discusso nella Sez. 11.2.

**Prova:** Infatti non esistono equazioni algebriche che coinvolgono solamente le grandezze impresse dovute ai due tipi di sorgenti impulsive.

Siccome il circuito adinamico ausiliario non è patologico (degenere), esso può essere risolto mediante il principio di sovrapposizione rispetto alla grandezza impresse (vedere Sez. 11.3). Quindi il vettore  $y(t)$  delle grandezze d'uscita assume l'espressione:

$$y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) + d_1 \hat{u}_1(t) + d_2 \hat{u}_2(t) + \dots + d_r \hat{x}_R(t)$$

dove i vettori  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , rappresentano i contributi di ogni variabile di stato al vettore delle grandezze di uscita e i vettori  $d_1, d_2, \dots, d_r$  rappresentano i contributi di ogni grandezza d'ingresso al vettore delle grandezze di uscita. La suddetta equazione è puramente algebrica e viene in genere riscritta con una notazione più compatta:

$$y(t) = C x(t) + D \hat{u}(t) \quad \text{dove } C \equiv [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] \text{ e } D \equiv [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_r]$$

che viene chiamata equazione (vettoriale) di uscita.

**Commento:** L'equazione di stato insieme all'equazione di uscita costituiscono un sistema dif. alg. L'equazione di stato può essere vista come il sottosistema differenziale puro del sistema mentre l'equazione di uscita può essere vista come il sottosistema algebrico puro (vedere Par. 17.1.5).

17.4 SISTEMI DEGENERI  
DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI-ALGEBRICHE

Prima di affrontare l'analisi dei circuiti dinamici degeneri, la cui definizione è stata introdotta nella sezione precedente, prendiamoci una pausa di riflessione con lo scopo di fare alcune considerazioni sui sistemi degeneri di equazioni dif. alg.

## 17.4.1 Sistema differenziale-algebrico lineare

Consideriamo un generico sistema dif. alg. lineare di  $m$  equazioni: le  $n$  funzioni del tempo incognite sono raccolte nel vettore  $x^a(t)$  e le loro derivate nel vettore  $\dot{x}^a(t)$ . Inoltre vi possono essere delle funzioni note del tempo, raccolte nel vettore  $\hat{u}(t)$ , che costituiscono i termini noti, meglio conosciuti come ingressi del sistema. La forma più generale di un sistema di questo tipo è:

$$H^d \dot{x}^a(t) = H^a x^a(t) + H^u \hat{u}(t)$$

Alcune delle funzioni incognite in  $x^a(t)$  possono essere presenti nell'equazione senza la loro derivata o, viceversa, altre funzioni possono essere presenti solamente con la loro derivata. Nel primo caso la corrispondente colonna di  $H^d$  è nulla, mentre nel secondo caso la corrispondente colonna di  $H^a$  è nulla. Nel seguito considereremo solamente il caso  $n = m$ .

## 17.4.2 Riduzione del sistema differenziale in forma canonica

Nel caso  $n = m$ , le matrici  $H^d$  e  $H^a$  sono quadrate  $n \times n$ . Il rango di  $H^d$  sia  $\bar{n} < n$ . Per esempio, quando una o più delle funzioni incognite compaiono nell'equazione senza la derivata, altrettante colonne della matrice  $H^d$ , di dimensioni  $n \times n$  sono nulle e quindi siamo in presenza di un caso  $\bar{n} < n$ . In questo caso possiamo moltiplicare per un'opportuna matrice  $n \times n$  nonsingolare i due membri dell'equazione e trasformarla in una forma equivalente in cui le ultime  $n - \bar{n}$  righe di  $H^d$  sono costituite da elementi nulli. Inoltre possiamo suddividere il vettore  $x^a(t)$  in due sottovettori  $x^{a1}(t)$  e  $x^{a2}(t)$  di dimensioni, rispettivamente,  $\bar{n}$  e  $n - \bar{n}$ . Si ha:

$$\begin{bmatrix} H^{d11} & H^{d12} \\ H^{d21} & H^{d22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{a1}(t) \\ x^{a2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{a11} & H^{a12} \\ H^{a21} & H^{a22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{a1}(t) \\ x^{a2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H^{u1} \\ H^{u2} \end{bmatrix} \hat{u}(t)$$

$$\text{dove: } H^{d21} = 0_{n-\bar{n}, \bar{n}}, \quad H^{d22} = 0_{n-\bar{n}, n-\bar{n}}, \quad |H^{d22}| \neq 0$$

**Proprietà:** La partizione di  $x^a(t)$  può essere fatta in modo tale che la matrice  $H^{a22}$  di dimensioni  $(n - \bar{n}) \times (n - \bar{n})$  sia nonsingolare. Questa scelta è sempre possibile: in genere può essere fatta in molti modi diversi.

**Prova:** Ragionando per assurdo, se non fosse possibile avere  $|H^{a22}| \neq 0$  significa che le ultime  $n - \bar{n}$  righe della matrice  $H^a$  non sarebbero linearmente indipendenti. Quindi con opportune combinazioni lineari delle righe medesime potremmo avere una o più righe della matrice  $H^a$  formate da tutti elementi nulli. Quindi avremmo delle equazioni algebriche in contraddizione con le altre o superflue a seconda delle relazioni tra i termini noti.

La nullità degli elementi delle sottomatrici  $H^{d21}$  e  $H^{d22}$  implica che  $n - \bar{n}$  tra le  $n$  equazioni scalari differenziali si riducono a equazioni algebriche, cioè coinvolgono solamente le funzioni incognite (appartenti al vettore  $x^a(t)$ ), senza il coinvolgimento delle loro derivate. In conclusione, il sistema originario è dif. alg. e non differenziale puro:  $n - \bar{n}$  tra le funzioni incognite possono venire espresse in funzione delle restanti  $\bar{n}$  funzioni incognite, poiché dipendono da quest'ultime tramite equazioni algebriche:

$$\bar{n} \text{ equazioni differenziali} \quad H^{d11} \dot{x}^{a1}(t) + H^{d12} \dot{x}^{a2}(t) = H^{a11} x^{a1}(t) + H^{a12} x^{a2}(t) + H^{u1} \hat{u}(t)$$

$$n - \bar{n} \text{ equazioni algebriche} \quad H^{a21} x^{a1}(t) + H^{a22} x^{a2}(t) + H^{u2} \hat{u}(t) = 0 \quad \text{dove } |H^{a22}| \neq 0$$

$$\text{Dalle } n - \bar{n} \text{ equazioni algebriche} \quad x^{a2}(t) = -[H^{a22}]^{-1} H^{a21} x^{a1}(t) - [H^{a22}]^{-1} H^{u2} \hat{u}(t)$$

$$\text{Deriviamo i due membri} \quad \dot{x}^{a2}(t) = -[H^{a22}]^{-1} H^{a21} \dot{x}^{a1}(t) - [H^{a22}]^{-1} H^{u2} \dot{\hat{u}}(t)$$

Se le  $n - \bar{n}$  equazioni scalari algebriche non coinvolgono il vettore  $\hat{u}(t)$ , l'espressione di  $\dot{x}^{a2}(t)$  non dipenderà dal vettore  $\hat{u}(t)$ . Ora sostituiamo le espressioni di  $x^{a2}(t)$  e  $\dot{x}^{a2}(t)$  nel sottosistema delle  $\bar{n}$  equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \{H^{d11} - H^{d12} [H^{a22}]^{-1} H^{a21}\} \dot{x}^{a1}(t) &= \{H^{a11} - H^{a12} [H^{a22}]^{-1} H^{a21}\} x^{a1}(t) + \\ &+ \{H^{u1} - H^{a12} [H^{a22}]^{-1} H^{u2}\} \hat{u}(t) \end{aligned}$$

Questa espressione è una forma noncanonica di un sistema differenziale di  $\bar{n}$  equazioni in  $\bar{n}$  funzioni incognite: il numero delle incognite  $\bar{n}$  è ridotto rispetto a quello del sistema originale ( $\bar{n} < n$ ). A questo punto si ripete la precedente analisi: se la matrice  $\{H_{\text{rit}} - H_{\text{d}12} [H_{\text{a}22}^{-1} H_{\text{a}21}]\}$  è nonsingolare, noi possiamo pervenire direttamente, invertendo la suddetta matrice, a una forma canonica in cui il vettore  $x^{\text{al}}(t)$  costituisce il vettore delle funzioni incognite e a primo membro vi è la derivata  $x^{\text{al}}(t)$  dello stesso vettore. In caso contrario, si può ridurre ulteriormente le funzioni incognite ripetendo la procedura. Alla fine si perviene a una forma canonica dell'equazione differenziale del tipo:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B \dot{u}(t) + B' \ddot{u}(t) + B'' \ddot{\ddot{u}}(t) + \dots$$

*Commenti:* il vettore delle funzioni incognite  $x(t)$  contiene solo una parte delle incognite originariamente presenti in  $x^{\text{a}}(t)$ . Quando la procedura di eliminazione delle funzioni incognite superflue viene ripetuta più di una volta, il numero delle funzioni rimaste in  $x(t)$  è necessariamente inferiore al rango della matrice  $H^{\text{d}}$ .

Le matrici  $A, B, B', B'', \dots$ , sono ottenute dalle matrici originali  $H^{\text{d}}, H^{\text{a}}, H^{\text{u}}$  in seguito alle manipolazioni algebriche eseguite per eliminare le funzioni incognite superflue.

Infine, ogni eventuale ripetizione dell'eliminazione delle funzioni superflue può incrementare l'ordine della derivate degli ingressi  $\dot{u}(t)$  presenti nella forma canonica. ■

*Commento:* un qualsiasi sistema misto dif. alg. nonlineare del tipo:

$$f[x^{\text{a}}(t), x^{\text{a}}(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), t] = 0$$

non sempre può essere trasformato in una forma canonica equivalente del tipo:

$$\dot{x}(t) = g[x(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots, t]$$

■

### 17.4.3 Esempio di riduzione di un sistema differenziale degenere

Sia dato il seguente sistema differenziale di tre equazioni in tre incognite in forma noncanonica:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0.5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix}$$

La matrice  $3 \times 3$  che premoltiplica il vettore delle derivate ha rango 2. Sottraendo dalla terza equazione scalare la prima, divisa per il fattore 2, e la seconda, riusciamo a eliminare le derivate  $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$  e  $\dot{x}_3(t)$  dalla terza equazione:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix}$$

Questa equazione è algebrica dal momento che non coinvolge alcuna derivata: da essa esplicitiamo  $x_3(t)$ :

$$x_3(t) = -2x_1(t) + x_2(t) + \dot{u}_1(t) - 2\dot{u}_2(t)$$

Deriviamo entrambi i membri di questa equazione:

$$\dot{x}_3(t) = -2\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) + \ddot{u}_1(t) - 2\ddot{u}_2(t)$$

Sostituendo  $x_3(t)$  e  $\dot{x}_3(t)$  nelle prime due tra le tre precedenti equazioni scalari differenziali, si ottengono due equazioni scalari differenziali nelle due funzioni incognite  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ :

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix}$$

La matrice  $2 \times 2$  che premoltiplica  $[\dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t)]^T$  è a sua volta singolare. Sottraendo dalla seconda equazione scalare la prima, le derivate  $\dot{x}_1(t)$  e  $\dot{x}_2(t)$  vengono eliminate dalla seconda equazione:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix}$$

Dalla seconda equazione scalare algebrica esplicitiamo e deriviamo  $x_2(t)$ :

$$x_2(t) = 0.8x_1(t) - 0.2\dot{u}_1(t) - 0.2\ddot{u}_2(t) + 0.4\dot{u}_1(t) - 0.8\ddot{u}_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 0.8\dot{x}_1(t) - 0.2\ddot{u}_1(t) - 0.2\ddot{\ddot{u}}_2(t) + 0.4\ddot{u}_1(t) - 0.8\ddot{\ddot{u}}_2(t)$$

Sostituendo le espressioni di  $x_2(t)$  e  $\dot{x}_2(t)$  nella prima delle precedenti equazioni scalari si perviene a un'unica equazione differenziale scalare nella funzione incognita  $x_1(t)$ :

$$-2.8\dot{x}_1(t) = 1.2x_1(t) + 1.2\dot{u}_1(t) + 0.2\ddot{u}_2(t) + 0.4\ddot{u}_1(t) - 1.4\ddot{\ddot{u}}_2(t) + 0.4\ddot{\ddot{u}}_1(t) - 0.8\ddot{\ddot{u}}_2(t)$$

Dividendo i due membri per  $-2.8$  di giunge a un'equazione differenziale di primo grado in forma canonica:

$$\dot{x}_1(t) = -3/7x_1(t) - 3/7\dot{u}_1(t) - 1/14\ddot{u}_2(t) - 1/7\ddot{u}_1(t) + 1/2\ddot{\ddot{u}}_2(t) - 1/7\ddot{\ddot{u}}_1(t) + 2/7\ddot{\ddot{u}}_2(t)$$

Il sistema dif. alg. originario riportato all'inizio del presente paragrafo è equivalente a un sistema di tre equazioni scalari: la prima equazione è differenziale in forma canonica e le due restanti sono algebriche:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3/7x_1(t) - 3/7\dot{u}_1(t) - 1/14\ddot{u}_2(t) - 1/7\ddot{u}_1(t) + 1/2\ddot{\ddot{u}}_2(t) - 1/7\ddot{\ddot{u}}_1(t) + 2/7\ddot{\ddot{u}}_2(t) \\ x_2(t) = 0.8x_1(t) - 0.2\dot{u}_1(t) - 0.2\ddot{u}_2(t) + 0.4\dot{u}_1(t) - 0.8\ddot{u}_2(t) \\ x_3(t) = -1.2x_1(t) + 0.8\dot{u}_1(t) - 2.2\dot{u}_2(t) + 0.4\dot{u}_1(t) - 0.8\ddot{u}_2(t) \end{cases}$$

## 17.5 EQUAZIONE DI STATO E DI USCITA DEI CIRCUITI DEGENERI

Questa sezione illustra la costruzione dell'equazione di stato per i circuiti dinamici degeneri sulla base delle considerazioni matematiche sviluppate nella sezione precedente. In seguito viene discussa la costruzione dell'equazione di uscita.

## 17.5.1 Richiamo del sistema differenziale noncanonico

Viene qui sotto richiamato il sistema differenziale ricavato col metodo dei componenti complementari nella Par. 16.2.5 :

$$H^d \dot{x}^a(t) = H^a x^a(t) + H^u \dot{u}(t)$$

dove le matrici  $H^d$  e  $H^a$  hanno dimensioni  $n_a \times n_a$  e i vettori  $\dot{x}^a(t)$  e  $x^a(t)$  sono costituiti da  $n_a$  elementi.

Questo sistema differenziale non è ancora in forma canonica, in quanto il vettore  $\dot{x}^a(t)$  compare, premoltiplicato per la matrice  $H^d$ , a primo membro. Questa sezione considera solamente circuiti degeneri, cioè circuiti in cui il rango  $\bar{n}$  di  $H^d$  è minore di  $n_a$ .

17.5.2 Rango nullo della matrice  $H^d$ 

Supponiamo che il rango  $\bar{n}$  della matrice  $H^d$  sia nullo ( $\bar{n} = 0$ ) : questo comporta che la matrice  $H^d = 0_{n_a, n_a}$ . Ricordando che  $H^d = H^b H^c$ , come risulta dalla Sez. 17.2, anche  $H^b = 0_{n_a, n_a}$ , eccetto il caso che vi siano degli induttori accoppiati con accoppiamento unitario. In questo caso la matrice  $H^c$  avrebbe determinante nullo. Conseguentemente le relazioni costitutive del componente dinamico complementare sono :

$$0_{n_a, n_a} x^b(t) + H^a x^a(t) + H^u \dot{u}(t) = 0_{n_a} \implies x^a(t) = -[H^a]^{-1} H^u \dot{u}(t)$$

da cui compare che il componente dinamico complementare è impressivo (questo ci garantisce che  $H^a$  sia nonsingolare). Le candidate possono essere determinate senza risolvere alcun sistema differenziale dal momento che il vettore delle loro derivate  $\dot{x}^a(t)$  sparisce dal sistema dif.alg. che diventa puramente algebrico ( $n_a$  equazioni) : il circuito è *completamente degenere* e si comporta a tutti gli effetti come un circuito dinamico, dal momento che ciascuna candidata dei condensatori e degli induttori è vincolata algebricamente.

**Esempi** : come esempi di circuiti (dinamici) completamente degeneri possiamo pensare a due circuiti costituiti da

$k$  condensatori, ciascuno in parallelo a una  $k$  induttori, ciascuno in serie a una sli oltre sVI oltre a componenti dinamici di qual- a componenti dinamici di qualsiasi tipo e siasi tipo e connessi in qualsiasi modo. connessi in qualsiasi modo.  
WWWWWW?? FARRE coppia di FIGURE qui sopra ???WWWWWW

## 17.5.3 Equazione (vettoriale) di stato

Sia il rango  $\bar{n}$  di  $H^d$  ridotto (cioè  $0 < \bar{n} < n_a$ ). L'equazione differenziale in forma noncanonica può essere trattata seguendo il metodo spiegato nella Sez. 17.4. Il sistema misto dif.alg. può essere scomposto in due sottosistemi equivalenti al sistema originario, il primo differenziale puro e il secondo algebrico puro. Il primo dei sottosistemi sarà del tipo :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B \dot{u}(t) + B' \dot{u}(t) + B'' \ddot{u}(t) + \dots$$

**Commenti** : Le variabili candidate, originariamente in  $x^a(t)$  e rimaste in  $x(t)$ , costituiscono le variabili di stato. Esse possono essere in un numero uguale o inferiore al rango della matrice  $H^d$ .

**Definizione** : L'*ordine* di un circuito dinamico degenere coincide con quello del sottosistema differenziale puro. ■

## 17.5.4 Casi topologicamente evidenti di eliminazione delle candidate

In moltissimi circuiti di interesse, l'esistenza di relazioni algebriche coinvolgenti esclusivamente le candidate ed eventualmente le grandezze impresse può essere verificata da una semplice ispezione del circuito. Quindi la degeneranza del circuito dinamico (rango non pieno della matrice  $H^d$ ) può essere accertata senza sforzo. I casi più significativi sono qui riportati :

**Maglia-C** : In presenza di una o più maglie-C indipendenti, le tensioni ai capi dei condensatori della suddetta maglia soddisfano necessariamente alla legge di KIRCHHOFF delle tensioni.

Conseguentemente si ha un'equazione algebrica omogenea in cui compaiono come incognite solo grandezze candidate :

$$\underbrace{v_{c1}(t) \pm v_{c2}(t) \pm v_{c3}(t) \pm \dots}_{\text{tensioni dei condensatori}} = 0$$

$$\underbrace{i_{L1}(t) \pm i_{L2}(t) \pm i_{L3}(t) \pm \dots}_{\text{correnti negli induttori}} = 0$$

## DUPLICARE dal Cap. 11

FIG. CIRCUITO CON UNA MAGLIA-C

## DUPLICARE dal Cap. 11

FIG. CIRCUITO CON UN TAGLIO-C

Come casi particolari si hanno due condensatori in parallelo ovvero due induttori in serie :

## DUPLICARE dal Cap. 7

CIRCUITO CON DUE CONDENS. IN PARAL.

## DUPLICARE dal Cap. 7

CIRCUITO CON DUE INDUTT. IN SERIE

**Maglia-C- $\mathcal{Y}$**  : In presenza di una Maglia-C- $\mathcal{Y}$ , le tensioni ai capi dei C e le tensioni impresse delle  $\mathcal{Y}$  costituenti la maglia soddisfano alla legge di KIRCHHOFF delle tensioni.

Conseguentemente, si ha un'equazione algebrica nonomogenea in cui compaiono come incognite solamente le candidate :

$$\underbrace{v_{c1}(t) \pm v_{c2}(t) \pm v_{c3}(t) \pm \dots}_{\text{tensioni dei condensatori}} \pm \underbrace{\hat{v}_1(t) \pm \hat{v}_2(t) \pm \hat{v}_3(t) \pm \dots}_{\text{tensioni impresse}} = 0$$

$$\underbrace{i_{L1}(t) \pm i_{L2}(t) \pm i_{L3}(t) \pm \dots}_{\text{correnti negli induttori}} \pm \underbrace{\hat{i}_1(t) \pm \hat{i}_2(t) \pm \hat{i}_3(t) \pm \dots}_{\text{correnti impresse}} = 0$$

DUPPLICARE dal Cap. 11

FIG. CIRCUITO CON UNA MAGLIA-C- $\gamma$

DUPPLICARE dal Cap. 11

FIG. CIRCUITO CON UN TAGLIO-C- $\bar{\gamma}$

Come casi particolari si hanno un condensatore in parallelo a una sVi (includendo anche i c.c.) ovvero un induttore in serie a una sli (includendo anche i c.a.) :

DUPPLICARE dal Cap. 15

CIRCUITO CON CONDENS. E sVI IN PARAL.

DUPPLICARE dal Cap. 15

CIRCUITO CON INDUTT. E sli IN SERIE

**Commento** : La presenza delle grandezze impresse nelle suddette relazioni algebriche comporta la presenza delle loro derivate nell'equazione di stato, come sarà chiarito nella Sez. 17.7.

### 17.5.5 Casi non-topologici di eliminazione della candidate

Le equazioni algebriche tra le candidate possono trarre origine dalle relazioni costitutive dei componenti dinamici presenti nel circuito. In particolare ogni qualvolta un doppio bipolo dinamico, in cui una o entrambe le relazioni costitutive coinvolgono due sole grandezze e queste sono a loro volta coincidenti con due candidate (in seguito ai bipoli conservativi e questi alle due porte) una delle due candidate non può diventare variabile di stato. Supponendo di usare la convenzione normale per entrambe le porte del doppio bipolo, si hanno i seguenti casi di interesse :

<b>Quadro dei casi di eliminazione delle candidate dovuti alle relazioni costitutive di doppi bipoli specifici</b>				
doppio bipolo dinamico	relazione costitutiva	bipolo connesso alla porta 1	bipolo connesso alla porta 2	relazione algebrica tra le candidate
sVpI	$v_2(t) = r_m i_1(t)$	L in serie	C in parall.	$v_{2L}(t) = r_m i_{1L}(t)$
sIpV	$i_2(t) = g_m v_1(t)$	C in parall.	L in serie	$i_{2L}(t) = g_m v_{1L}(t)$
sIpI	$i_2(t) = \beta i_1(t)$	L in serie	L in serie	$i_{2L}(t) = \beta i_{1L}(t)$
sVpV	$v_2(t) = \alpha v_1(t)$	C in parall.	C in parall.	$v_{2L}(t) = \alpha v_{1L}(t)$
tr.id.	$v_1(t) = r v_2(t)$	C in parall.	C in parall.	$v_{1L}(t) = r v_{2L}(t)$
tr.id.	$i_1(t) = -i_2(t)/n$	L in serie	L in serie	$i_{1L}(t) = -i_{2L}(t)/n$
giratore	$v_2(t) = i_1(t)/g_m$	L in serie	C in parall.	$v_{2L}(t) = i_{1L}(t)/g_m$
giratore	$v_1(t) = -i_2(t)/g_m$	C in parall.	L in serie	$v_{1L}(t) = -i_{2L}(t)/g_m$

Molti altri casi non-topologici di eliminazione delle candidate possono essere incontrati. Qui abbiamo presentato i casi che vengono incontrati più frequentemente.

### 17.5.6 Circuiti degeneri con due bipoli dinamici

Per illustrare la teoria sviluppata nelle precedenti sezioni, conviene soffermarsi sui circuiti dinamici degeneri con due condensatori e/o induttori e calcolarne l'equazione di stato. Quando la corrispondente rappresentazione cardinale, indicata qui sopra, non è definita, significa che vi è un'equazione algebrica che lega le due candidate : quindi il circuito è di ordine minore di 1 o 0, come risulta dai seguenti quadri :

WWWWWW QUI LE DEGENERANZE NON COINVOLGONO GRANDEZZE IMPRESSE.

<b>Quadro dei circuiti con due bipoli conservativi : ordine uno</b>		
bipoli conserv. porte	doppio bipolo dinamico costitutiva	il circuito è degenere e di prim'ordine se e solo se esiste la relazione costitutiva qui a fianco
L <sub>1</sub>   L <sub>2</sub>	$i_1(t) = \beta i_2(t)$	
per esempio : sIpI, tr.id.		
C <sub>1</sub>   C <sub>2</sub>	$v_1(t) = \alpha v_2(t)$	
per esempio : sVpV, tr.id.		
L <sub>1</sub>   C <sub>2</sub>	$i_1(t) = g_m v_2(t)$	
per esempio : sVpI, giratore		
C <sub>1</sub>   L <sub>2</sub>	$v_1(t) = r_m i_2(t)$	
per esempio : sIpV, giratore		

WWWWWW SCRIVERE L' "EQUAZIONE DI STATO DI GRADO 1 E PER OGNI CASO METTERE CONDIZIONE PER CUI UNA VARIABILE DI STATO VIENE PERSA : DETERMINANTE NULO DI UNA APPOSTA MATRICE WWWWWW QUI LE DEGENERANZE COINVOLGONO GRANDEZZE IMPRESSE.

<b>Quadro dei circuiti degeneri con due bipoli conservativi : ordine uno</b>		
bipoli conserv. porte	doppio bipolo dinamico costitutiva	il circuito è degenere e di prim'ordine se e solo se esiste la relazione costitutiva qui a fianco
L <sub>1</sub>   L <sub>2</sub>	$i_1(t) = \beta i_2(t) + \hat{i}_1(t)$	
per esempio : sIpI, tr.id.		
C <sub>1</sub>   C <sub>2</sub>	$v_1(t) = \alpha v_2(t) + \hat{v}_1(t)$	
per esempio : sVpV, tr.id.		
L <sub>1</sub>   C <sub>2</sub>	$i_1(t) = g_m v_2(t) + \hat{i}_1(t)$	
per esempio : sVpI, giratore		
C <sub>1</sub>   L <sub>2</sub>	$v_1(t) = r_m i_2(t) + \hat{v}_1(t)$	
per esempio : sIpV, giratore		

WWWWWW INSERIRE QUI SOPRA L'EQUAZIONE DI STATO DI GRADO 1 E PER OGNI CASO METTERE CONDIZIONE PER CUI UNA VARIABILE DI STATO VIENE PERSA DETERMINANTE NULLO DI UNA APPOSITA MATRICE WWWWWW  
 WWWWWW QUI CASO DI DEGENERANZA COMPLETA WWWWWW

Se inoltre capita che il doppio bipolo dinamico complementare sia impressivo e ammetta la rappresentazione cardinale contraria a quella riportata qui sopra : in questo caso esistono due relazioni algebriche che vincolano le due candidate a due grandezze impresse : entrambe le candidate di stato falliscono e il circuito è di ordine zero, cioè dinamico, come risulta dal seguente quadro :

Quadro dei circuiti con due bipoli conservativi : ordine zero		
bipoli conserv.	doppio bipolo dinamico	equazione sostitutiva di quella di stato
1	2	cardinale
$L_1$	$L_2$	$\begin{cases} i_1(t) = \hat{i}_1(t) \\ i_2(t) = \hat{i}_2(t) \end{cases} \quad \begin{cases} i_{11}(t) = \hat{i}_1(t) \\ i_{22}(t) = \hat{i}_2(t) \end{cases}$
$C_1$	$C_2$	$\begin{cases} v_1(t) = \hat{v}_1(t) \\ v_2(t) = \hat{v}_2(t) \end{cases} \quad \begin{cases} v_{a1}(t) = \hat{v}_1(t) \\ v_{a2}(t) = \hat{v}_2(t) \end{cases}$
$L_1$	$C_2$	$\begin{cases} i_1(t) = \hat{i}_1(t) \\ v_2(t) = \hat{v}_2(t) \end{cases} \quad \begin{cases} i_{a1}(t) = \hat{i}_1(t) \\ v_{a2}(t) = \hat{v}_2(t) \end{cases}$
$C_1$	$L_2$	$\begin{cases} v_1(t) = \hat{v}_1(t) \\ i_2(t) = \hat{i}_2(t) \end{cases} \quad \begin{cases} v_{a1}(t) = \hat{v}_1(t) \\ i_{a2}(t) = \hat{i}_2(t) \end{cases}$

WWWWWW INSERIRE QUI SOPRA L'EQUAZIONE DI STATO DI GRADO 0 WWWWWW

Le suddette equazioni sono puramente algebriche. Notare che i due valori delle candidate in  $t = t_0$  non possono essere arbitrari perché coincidono necessariamente con valori di grandezze impresse nello stesso istante.

### 17.5.7 Costruzione del circuito dinamico ausiliario

Come per i circuiti dinamici nondegeneri, occorre trovare un'espressione algebrica delle tensioni e correnti non coinvolte nell'equazione di stato in funzione delle variabili di stato  $e_i$ , se necessario, delle grandezze impresse. Anche per i circuiti degeneri, occorre costruire un circuito dinamico ausiliario per il calcolo delle grandezze (tensioni e correnti) interne al componente composto dinamico complementare, seguendo il metodo proposto nella Sez. 17.3 per i circuiti dinamici nondegeneri. Ma il circuito dinamico ausiliario risulta patologico nel senso visto nel Cap. 11 :

1. Calcolare il vettore di stato  $x(t)$  (che coincide con un sottosistema delle tensioni ai capi dei condensatori e delle correnti fluenti negli induttori) risolvendo l'equazione di stato.
2. Calcolare l'andamento delle candidate escluse da  $x(t)$  mediante le equazioni algebriche che le legano alle variabili di stato. Conseguentemente, le tensioni ai capi di

tutti i condensatori e le correnti fluenti in tutti gli induttori, compresi quelli accoppiati, sono tutte note.

3. I condensatori vengono rimpiazzati da sVI (in genere tempo-varianti) in cui la tensione impressa coincide con la tensione del condensatore, calcolata in precedenza, in qualità di candidata.

4. Gli induttori, compresi eventualmente quelli accoppiati, vengono rimpiazzati da sfi (in genere tempo-varianti) in cui la corrente impressa coincide con la corrente dell'induttore calcolata in precedenza, in qualità di candidata.

5. Si ottiene un circuito dinamico associato a quello originale (dinamico) e con sorgenti impresse (in genere tempo-varianti) effettive, le cui grandezze impresse sono contenute nel vettore  $\hat{u}(t)$  e sorgenti impresse sostitutive dei componenti dinamici, le cui grandezze impresse coincidono con le candidate calcolate in precedenza.

6. Le relazioni algebriche tra le candidate  $e_i$ , eventualmente, le grandezze impresse che sono causa della degeneranza del circuito dinamico si trasformano, nel circuito dinamico ausiliario, in relazioni algebriche tra le grandezze impresse. Di conseguenza, il circuito dinamico ausiliario è parzialmente indeterminato (vedere Sez. 11.2), dal momento che una parte o tutte le grandezze anticandidate dei condensatori e induttori non possono essere determinate nella soluzione del circuito stesso, in quanto esse sono le grandezze nonvincolate delle sorgenti impresse sostitutive.

### 17.5.8 Modifica del circuito dinamico ausiliario

La indeterminanza parziale del circuito dinamico ausiliario può essere superata nella maniera seguente :

- Consideriamo tutte le sorgenti impresse, che rimpiazzano i condensatori e induttori, le cui candidate non fanno parte delle variabili di stato. Le corrispondenti anticandidate possono essere facilmente calcolate analiticamente una volta note le variabili di stato, in quanto esse coincidono, a meno di un fattore costante, con le derivate delle corrispondenti candidate  $\dot{x}(t)$ .

- Usando il Teorema di Sostituzione (Cap. 6), sostituiamo le suddette sorgenti impresse con una sorgente impressiva duale (sVI  $\rightarrow$  sfi e sfi  $\rightarrow$  sVI) : la grandezza impressa coincide con la corrispondente grandezza anticandidata.

Il suddetto circuito dinamico ausiliario modificato coincide con la parte dinamica del circuito originale, alimentata alle porte da appropriate sorgenti impresse (in genere) tempo-varianti.

Applicando il principio di sovrapposizione per le sorgenti impresse, la soluzione del suddetto circuito dinamico assume la forma :

$$y(t) = C x(t) + D \hat{u}(t) + D' \dot{\hat{u}}(t) + D'' \ddot{\hat{u}}(t) + \dots$$

dove il vettore  $y(t)$  raccoglie le grandezze di interesse, dette comunemente variabili d'uscita in accordo alla terminologia della Teoria dei Sistemi. Come per i circuiti nondegeneri, la suddetta equazione vettoriale è puramente algebrica (cioè nondifferenziale) ed è chiamata



comunemente equazione di uscita. Notare che la eventuale presenza delle derivate  $\dot{u}(t)$  e  $\dot{i}(t)$  non altera la natura algebrica dell'equazione, dal momento che esse sono derivate di funzioni note e non di funzioni incognite.

**Commento** : Notare che l'equazione di stato e l'equazione di uscita costituiscono, congiuntamente, un sistema dif. alg.

**Esempio** : Considerare un circuito degenere e scrivere l'equazione di uscita. ■

### 17.5.9 Trasformazione di un circuito degenere in uno nondegenere

Senza entrare nei dettagli teorici qui esaminiamo, con un semplice esempio, come un circuito dinamico degenere possa essere trasformato in un circuito nondegenere equivalente.

**Esempio** : consideriamo un circuito con una maglia di tre condensatori. La degenerazione del circuito è contenuta all'interno del DBT costituito dai tre condensatori della maglia.

#### DUPLICARE figura dal Cap. 16

DBT A TRIANGOLO DI TRE CONDENS. E MODELLO EQUIVALENTE CON DUE CONDENS.

Cerco un DBT equivalente, costituito da due soli condensatori oltre a componenti dinamici inerti. Otteniamo un doppio bipolo a L con un condensatore in parallelo alla prima porta di capacità  $C_p$  e uno in serie di capacità  $C_s$  con in cascata alla seconda porta un trasformatore ideale con rapporto  $n : 1$ . Confronto le rappresentazioni controllate in tensione dei due DBT :

$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_3 & -C_3 \\ -C_3 & C_2 + C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_p + C_s & -n C_s \\ -n C_s & n^2 C_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{bmatrix}$$

L'equivalenza dei due doppi bipoli con diversa struttura interna si ha quando gli elementi delle due matrici coincidono

$$C_1 + C_3 = C_p + C_s, \quad C_3 = n C_s, \quad C_2 + C_3 = n^2 C_s$$

Con facili passaggi possiamo ottenere le formule affinché questo modello sia equivalente al DBT a triangolo :

$$C_s = \frac{C_3^2}{C_2 + C_3}, \quad C_p = \frac{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}{C_2 + C_3}, \quad n = \frac{C_2 + C_3}{C_3}$$

esse sono simili a quelle per il modello di induttori accoppiati visti nella Sez. 16.5.

**Commento** : Questo esempio mostra come un componente dinamico degenere possa essere sostituito da uno equivalente nondegenere. Questa sostituzione può essere estesa a componenti composti dinamici con altri tipi di degeneranza. ■

**Commento** : Questa sostituzione diventa più problematica qualora nel vincolo algebrico che provoca la degeneranza fosse compresa una grandezza impressa. In questo

caso la trasformazione circuitale coinvolgerebbe anche alcune sorgenti impresse e le loro grandezze impresse. ■  
WWW.WWW.WWW??? FARE ESEMPIO di un nullo con condensatore alla porta ingresso e induttore alla porta d'uscita.

## 17.6 EQUAZIONE DIFFERENZIALE SCALARE DI ORDINE $n$

Per i circuiti dinamici lineari, sia nondegeneri sia degeneri, l'equazione di stato consiste in un sistema differenziale di  $n$  equazioni scalari in  $n$  variabili di stato nel ruolo di incognite. Questa sezione mostra, con un esempio, come questo sistema è equivalente a un'unica equazione scalare differenziale di ordine  $n$  in un'unica grandezza incognita. Il termine noto dell'equazione, in genere funzione del tempo, è costituito dagli ingressi  $e_i$ , possibilmente, dalle loro derivate prime, seconde, ... La presenza di queste derivate non implica affatto che il circuito sia degenere come accade nell'equazione di stato.

Queste equazioni differenziali scalari sono già state considerate nel corso di Analisi II e applicata nei corsi di Fisica I e II.

### 17.6.1 Circuito di second'ordine

Per motivi di chiarezza, cominciamo con un circuito nondegenere con due bipoli elementari conservativi e due sorgenti impresse. Assumiamo di conoscere la equazione (vettoriale) di stato :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + b_{11} \dot{u}_1(t) + b_{12} \dot{u}_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + b_{21} \dot{u}_1(t) + b_{22} \dot{u}_2(t) \end{cases}$$

e di cercare un'unica equazione scalare differenziale di ordine opportuno che coinvolga solamente la funzione incognita  $x_1(t)$  con le sue derivate. A questo punto noi possiamo assumere che  $a_{12} \neq 0$ . Infatti se non fosse così, la prima delle equazioni sarebbe proprio un'equazione differenziale scalare di primo grado nell'unica incognita  $x_1(t)$ . Deriviamo la prima delle suddette equazioni scalari

$$\dot{x}_1(t) = a_{11} \dot{x}_1(t) + a_{12} \dot{x}_2(t) + b_{11} \ddot{u}_1(t) + b_{12} \ddot{u}_2(t)$$

In questa equazione sostituiamo  $\dot{x}_2(t)$  con la seconda delle prime due equazioni :

$$\dot{x}_1(t) = a_{11} \dot{x}_1(t) + a_{12} a_{21} x_1(t) + a_{12} a_{22} x_2(t) + a_{12} b_{21} \dot{u}_1(t) + a_{12} b_{22} \dot{u}_2(t) + b_{11} \ddot{u}_1(t) + b_{12} \ddot{u}_2(t)$$

In questa equazione sostituiamo  $a_{12} x_2(t)$ . Dalla prima delle due equazioni scalari che costituiscono l'equazione di stato otteniamo  $a_{12} x_2(t)$

$$a_{12} x_2(t) = \dot{x}_1(t) - a_{11} x_1(t) - b_{11} \dot{u}_1(t) - b_{12} \dot{u}_2(t)$$

Sostituendo  $a_{12} x_2(t)$  nell'equazione precedente otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= [a_{11} + a_{22}] \dot{x}_1(t) + [a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}] x_1(t) + \\ &+ [a_{12} b_{21} - a_{22} b_{11}] \dot{u}_1(t) + [a_{12} b_{22} - a_{22} b_{12}] \dot{u}_2(t) + b_{11} \ddot{u}_1(t) + b_{12} \ddot{u}_2(t) \end{aligned}$$

Questa è appunto un'equazione scalare differenziale di secondo ordine nell'unica funzione incognita  $x_1(t)$  già nota dai Corsi di Fisica e Analisi per lo studio di sistemi dinamici semplici.

**Commento :** Come è noto dal corso di Analisi II a un'equazione differenziale scalare può essere associato un polinomio le cui radici sono proprio gli autovalori della matrice di stato dell'equazione di stato da cui l'equazione scalare è stata derivata. ■

**Commento :** Questo metodo può essere esteso a equazioni di stato di ordine  $n$  qualsiasi. RIFARE QUEST'ESEMPIO CON UN SISTEMA DI ORDINE 3.

## 17.7 SULLA CONTINUITÀ ANALITICA DELLE CANDIDATE DI STATO

Nel Cap. 15 era stato accennato che le tensioni dei condensatori e le correnti degli induttori (candidato di stato) sono in genere analiticamente continue, dando delle spiegazioni di carattere intuitivo ma non rigorose. Questa sezione, partendo dall'analisi dell'equazione di stato in cui queste candidate sono coinvolte, riformula in modo più rigoroso lo studio sulla loro continuità / discontinuità analitica.

### 17.7.1 Continuità analitica delle variabili di stato

Nei circuiti nondegeneri tutte le grandezze candidate diventano variabili di stato. Inoltre esse verificano il principio di continuità analitica, enunciato nel Cap. 15, come risulta dalla proprietà :

**Proprietà :** Nei circuiti dinamici nondegeneri tutte le tensioni ai capi dei condensatori e tutte le correnti fluenti negli induttori sono funzioni analiticamente continue (senza discontinuità) per ogni valore di  $t$ . ■

**Prova :** Le tensioni ai capi dei condensatori e le correnti fluenti negli induttori costituiscono il vettore di stato  $x(t)$  il quale soddisfa alla  $\dot{x}(t) = A x(t) + B \hat{u}(t)$ . Se, per assurdo  $x(t)$  presentasse una discontinuità analitica in  $t = t_0$ , nel vettore  $\dot{x}(t)$  a primo membro sarebbero presenti degli impulsi di Dirac  $\delta(t - t_0)$ , i quali non sarebbero uguali a un secondo membro da altri impulsi. Questa prova vale anche nell'ipotesi che le grandezze impresse  $\hat{u}(t)$  siano discontinue, mentre non vale nel caso che esse contengano, a loro volta, delle delta di Dirac. Questa possibilità non è realistica. ■

### 17.7.2 Crisi del principio di continuità analitica

Verifichiamo il principio di continuità analitica delle candidate nei circuiti degeneri. Dalla Sez. 17.3 riportiamo l'equazione di stato per i circuiti dinamici nonomogenei :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B \hat{u}(t) + B' \hat{u}(t) + B'' \ddot{u}(t) + \dots$$

dove il vettore  $x(t)$  contiene le variabili candidate che sono diventate variabili di stato. Innanzitutto occorre distinguere i circuiti degeneri in base all'ordine delle derivate delle grandezze impresse  $\hat{u}(t)$ ,  $\ddot{u}(t)$ ,  $\dots$  presenti nell'equazione di stato :

- Se nessuna derivata delle grandezze impresse è presente, cioè se  $B' = 0$ ,  $B'' = 0$ ,  $\dots$ , l'equazione di stato è formalmente uguale a quella dei circuiti nondegeneri.

Questo caso si verifica ogniqualvolta le equazioni algebriche tra le candidate non coinvolgono le grandezze impresse. Quindi anche in presenza di discontinuità delle grandezze impresse, le variabili di stato verificano il principio di continuità analitica. Anche le candidate escluse dallo stato verificano lo stesso principio, essendo legate da equazioni algebriche omogenee alle variabili di stato.

- Se le derivate prime di alcune grandezze impresse sono presenti nell'equazione di stato, cioè se  $B' \neq 0$ ,  $B'' \neq 0$ ,  $\dots$ , e se le suddette grandezze impresse sono analiticamente continue con le loro derivate, anche le variabili di stato verificano il principio di continuità analitica e lo stesso dicasi per le candidate escluse dallo stato.

- Se le derivate prime di alcune grandezze impresse sono presenti nell'equazione di stato e se le suddette grandezze impresse sono discontinue in  $t = t_1$ , anche le variabili di stato saranno in genere discontinue in  $t = t_1$  e lo stesso dicasi per le candidate escluse. Quindi il principio di continuità analitica viene violato da una o più candidate. In questo caso nel vettore  $\hat{u}(t)$  sono presenti delle Delta di Dirac e, conseguentemente, anche nel vettore  $\dot{x}(t)$  a primo membro. In corrispondenza compaiono delle discontinuità analitiche nel vettore  $x(t)$ .

- Quando nell'equazione di stato sono presenti derivate di ordine superiore di grandezze impresse con discontinuità, l'andamento temporale delle variabili di stato e delle candidate respinte può contenere impulsi ideali, ovvero le loro derivate.

**Nascita di impulsi ideali (naturali) :** Il fatto che una o più candidate presentino delle discontinuità implica necessariamente che le variabili anticandidate corrispondenti debbano avere un andamento impulsivo ideale allo stesso istante. Questo comportamento può essere comune ad altre tensioni e correnti di ramo (uscite) del circuito. ■

## 17.8 CIRCUITI DINAMICI CON INTERRUTTORI IDEALI

Nelle precedenti sezioni di questo capitolo sono stati considerati i sistemi dif.alg. di equazioni atti a descrivere un circuito dinamico lineare e con sorgenti impulsive sia tempo-varianti sia tempo-invarianti. Questa sezione esamina gli stessi circuiti dinamici in cui siano presenti anche gli interruttori ideali (int.id.) tra i bipoli tempo-varianti.

### 17.8.1 Circuiti dinamici con interruttori ideali

Consideriamo circuiti dinamici composti da :

- Sorgenti impulsive sia tempo-invarianti sia tempo-varianti (CCap. 7 e 14).
- Componenti adinamici tempo-invarianti omogenei di ogni tipo (CCap. 7 e 10).
- Condensatori, induttori e induttori accoppiati (CCap. 15-16).
- Interruttori ideali (Cap. 14).

Vediamo come possono essere esaminati questi circuiti :

- Innanzitutto occorre notare che ogni int.id. si comporta come un c.a. ovvero come un c.c. nell'intervallo di tempo che intercorre tra due commutazioni successive. Qualora siano presenti più di un int.id., le loro commutazioni possono esse simultanee.
- L'analisi di un circuito con la presenza degli int.id. può essere ricondotta a quella dei circuiti senza int.id. ricorrendo ad alcuni accorgimenti. In ogni intervallo che intercorre tra due commutazioni successive all'interno del circuito (non necessariamente dovute allo stesso int.id.) il circuito si comporta come un circuito dinamico tempo-invariante (a parte le eventuali sorgenti impulsive tempo-varianti) e lineare.
- Dalle precedenti considerazioni nasce spontanea l'idea di analizzare un circuito dinamico con int.id. analizzando in successione temporale i circuiti che si hanno in ciascun intervallo tra le commutazioni.
- Per completare questo tipo di analisi occorre analizzare il comportamento del circuito nell'intervallo infinitesimale  $(t_1^-, t_1^+)$  in cui uno o più degli int.id. commuta da c.a.  $\rightarrow$  c.c. ovvero da c.c.  $\rightarrow$  c.a. (vedere paragrafo seguente).

### 17.8.2 Crisi del principio di continuità analitica dovuta alle commutazioni

Occorre esaminare il circuito nell'intervallo infinitesimale  $(t_1^-, t_1^+)$ . Se il principio di continuità delle candidate può essere applicato, noi sappiamo che le tensioni sui condensatori e le correnti negli induttori sono analiticamente continue:

$$v_c(t_1^-) = v_c(t_1^+) \quad , \quad i_L(t_1^-) = i_L(t_1^+)$$

Ma la commutazione in  $t = t_1$  di un int.id. può creare o distruggere vincoli algebrici tra le grandezze candidate. Consideriamo un circuito contenente una maglia costituita da due condensatori e un int.id. I due condensatori  $C_1$  e  $C_2$  vengono connessi in parallelo dalla chiusura dell'int.id., quindi le due candidate (tensioni), tra loro indipendenti per  $t < t_1$ , sono forzate a coincidere per  $t > t_1$ . In altre parole la chiusura dell'int.id. crea un vincolo (equazione) algebrico tra le due candidate (tensioni) diminuendo il numero delle variabili di stato di un'unità. Questo implica che le due candidate o almeno una di esse subiscano una discontinuità analitica in  $t = t_1$ . Un caso analogo al precedente si verifica in presenza di un taglio formato da due induttori  $L_1$ ,  $L_2$  e un int.id..

In conclusione le variabili di stato possono diminuire o crescere in numero, in seguito alla comparsa o alla scomparsa di relazioni algebriche tra le candidate. A questo si associa la possibilità che alcune delle candidate subiscano una discontinuità in  $t = t_1$ . Altrimenti, si può assumere che il principio di continuità sia valido:

**Regola generale**: se tutte le candidate sono in grado di diventare variabili di stato, qualsiasi sia la configurazione (aperto / chiuso) di ciascun int.id., il principio di continuità rimane valido, dal momento che in nessuna configurazione degli int.id. possono nascere legami algebrici tra le candidate.

Altrimenti, quando si incontra una configurazione in cui compare un vincolo algebrico tra le candidate, una o più di queste candidate subiscono una discontinuità analitica. Conseguentemente, le variabili anticandidate corrispondenti hanno un andamento impulsivo ideale allo stesso istante. Questo comportamento può essere condiviso da altre tensioni e

correnti di ramo legate algebricamente alle anticandidate.

Al contrario, la scomparsa di un legame algebrico tra le candidate non crea discontinuità tra le candidate. Per esempio in presenza di una maglia formata da due condensatori e un int.id., l'apertura dell'int.id. non provoca alcuna anomalia. Infatti le tensioni ai capi dei due condensatori sono necessariamente coincidenti prima dell'apertura. Appena l'int.id. si apre, le due tensioni rimangono uguali per la continuità analitica e in seguito evolveranno e diventeranno diverse.

**Avvertenza**: È piuttosto frequente il caso di commutazioni simultanee di due o più int.id. all'interno dello stesso circuito. Lo studio di questi casi è piuttosto critico e non viene approfondito in questi appunti.

### 17.8.3 Commutazioni di int.id. con eliminazione di candidate

Qui sotto riportiamo alcuni casi significativi anche se non esaustivi di circuiti in cui la manovra di un int.id. implica una eliminazione di candidate.

un int.id. la cui chiusura formi una maglia-C. Caso particolare, un int.id. in parallelo a un condensatore.  $\mathcal{L}$ . Caso particolare, un int.id. in serie a un induttore.

FIG. MAGLIA-C CON INT.ID.

tr.id. con un condensatore in parallelo alla prima porta e un int.id. in parallelo alla seconda.

FIG. TAGLIO-C CON INT.ID.

tr.id. con un  $\mathcal{L}$  in serie alla prima porta e un int.id. in serie alla seconda.

FIG. TR.ID. CON C E INT.ID.

FIG. TR.ID. CON  $\mathcal{L}$  E INT.ID.

WWW.WWW??? FARE altri casi (QUADRO NEL PAR. 17.5.5) con esempi significativi

# 18 CISOIDI, SINUSOIDI ed ESPONENZIALI di MATRICE

WWWWWW?? ANTIPIARE parte delle sinusoidi e appendice sulla trigonometria nel capitolo 14 sui circuiti dinamici ordine uno ???WWWWWW

WWWWWW?? FIGURA EMBLEMMA generiche cisoidi ???WWWWWW

Questo capitolo riguarda esclusivamente alcuni concetti matematici che non sono in genere approfonditi nei corsi propedeutici di Analisi Matematica ma che sono strumenti indispensabili per l'analisi dei circuiti dinamici lineari. Tra questi vi sono le funzioni cisoidi e l' esponenziale di matrice.

**Sez. 18.1 : Cisoidi :** Le cisoidi sono funzioni reali di argomento reale caratterizzate da una coppia di numeri complessi : la *pulsazione complessa* e il *fasore*. Queste funzioni unificano in un'unica classe gli esponenziali, le sinusoidi e le funzioni costanti e funzioni meno note, quali le sinusoidi con inviluppo esponenziale.

**Sez. 18.2 : Sottoclassi isofrequenziali di cisoidi :** Le cisoidi sono suddivise in sottoclassi, ciascuna caratterizzata da una specifica pulsazione complessa. Ciascuna sottoclasse costituisce uno spazio lineare. In particolare vengono introdotti i vettori e le matrici cisoidali isofrequenziali costituiti da cisoidi della stessa sottoclasse.

**Sez. 18.3 : Soluzione di un sistema differenziale :** Con un esempio si mostra che le sottoclassi di cisoidi isofrequenziali sono indispensabili per trovare le soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari.

**Sez. 18.4 : Esponenziali di matrice :** Vengono introdotti gli *esponenziali di matrice* che sono matrici particolari i cui elementi sono dipendenti dal tempo: essi sono costituiti da un'opportuna combinazione di matrici cisoidali isofrequenziali e sono indispensabili per esprimere la soluzione dei sistemi di equazioni differenziali lineari in forma compatta.

**Sez. 18.5 : Calcolo degli esponenziali di matrice :** Vengono presentati alcuni esercizi rivolti al calcolo degli esponenziali di matrice con lo speranza di far comprendere che essi sono meno ostici di quanto possa sembrare. Il loro calcolo richiede la conoscenza del concetto di autovettore e autovettore di una matrice quadrata di elementi costanti.

**Sez. 18.6 : Sinusoidi :** Per la loro importanza, lo studio delle sinusoidi, che sono appunto le cisoidi con pulsazione complessa puramente immaginaria  $s = j\omega$ , viene approfondito. Esse sono le uniche cisoidi periodiche e questo comporta delle proprietà non condivise dalle altre sottoclassi di cisoidi.

**Sez. 18.7 : Funzioni periodiche :** Le sinusoidi servono come base per rappresentare qualsiasi funzione periodica mediante lo sviluppo in serie di Fourier. WWWWW SCRIVERE DI PIU

**Sez. 18.8 : Appendice sui numeri complessi, autovallori e autovettori :** L'appendice riassume alcune formule trigonometriche di largo uso, le principali definizioni e proprietà dei numeri complessi indispensabili per trattare la pulsazione complessa e i fasori delle cisoidi e sinusoidi e gli esponenziali di matrice. L'ultima parte riassume i concetti che sono alla base degli autovallori e autovettori di una matrice, che sono indispensabili nel calcolo degli esponenziali di matrice.

## 18.1 CISOIDI

Le cisoidi sono una classe di funzioni reali di argomento reale. La loro definizione richiede di scondinare dall'asse dei numeri reali nel piano dei numeri complessi. Questa è la prima volta che i numeri complessi intervengono in questo corso. Tra le cisoidi sono comprese classi di funzioni apparentemente diverse e, in genere, già note al lettore come gli esponenziali, le sinusoidi e le funzioni costanti, oltre alle sinusoidi con inviluppo esponenziale meno note ma molto importanti nella soluzione delle equazioni differenziali lineari.

### 18.1.1 Cisoidi, fasore e pulsazione complessa

**Definizioni :** Le *cisoidi*, il cui nome deriva dall'acronimo di *cosinus + i sinus*, costituiscono una classe di funzioni reali di variabile reale  $(\mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^1)$ . Ciascuna cisoida è caratterizzata da una specifica coppia di parametri scalari complessi, chiamati *fasore* e *pulsazione complessa*, in accordo ad una delle seguenti espressioni, tra loro equivalenti :

$$\left. \begin{array}{l} \text{fasore} \\ \bar{u}_1 = a_1 + j b_1 \\ u_1 = u_1 \exp(j \phi_1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{cisoida} \\ u_1(t) = \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \Re\{\bar{u}_1 \exp(s_1 t)\} \\ [\bar{u}_1 \exp(s_1 t) + \bar{u}_1^* \exp(s_1^* t)] / 2 \\ u_1 \exp(\sigma_1 t) [\cos(\phi_1) \cos(\omega_1 t) - \sin(\phi_1) \sin(\omega_1 t)] \\ u_1 \exp(\sigma_1 t) \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{array} \right.$$

*pulsazione complessa*  
 $s_1 = \sigma_1 + j \omega_1$

**Avvertenza :** Per  $s_1 = \sigma_1$  (reale), il fasore  $\bar{u}_1 = a_1 + j b_1$  della cisoida  $u_1(t)$  può essere supposto reale (cioè  $\bar{u}_1 = a_1$ ) senza perdita di generalità, dal momento che la parte immaginaria  $b_1$  del fasore non ha alcun effetto sulla cisoida stessa

$$u_1(t) = \Re\{[a_1 + j b_1] \exp(\sigma_1 t)\} = \Re\{a_1 \exp(\sigma_1 t)\} + \Re\{j b_1 \exp(\sigma_1 t)\} = a_1 \exp(\sigma_1 t)$$

che risulta coincidente col ben noto esponenziale (funzione reale di variabile reale).

**Avvertenza :** Consideriamo la cisoida  $u_1(t)$  caratterizzata dalla coppia fasore-pulsazione  $(\bar{u}_1, s_1)$  e la cisoida  $u_2(t)$  caratterizzata dalla coppia coniugata  $(\bar{u}_1^*, s_1^*)$ . Si può verificare facilmente che  $u_2(t) \equiv u_1(t)$  :

$$\left. \begin{array}{l} u_1(t) = \Re\{\bar{u}_1 \exp(s_1 t)\} \\ u_2(t) = \Re\{\bar{u}_1^* \exp(s_1^* t)\} \end{array} \right\} u_1(t) = u_2(t) = [\bar{u}_1 \exp(s_1 t) + \bar{u}_1^* \exp(s_1^* t)] / 2$$

Quindi, per  $s_1$  complessa, la stessa cisoida può essere associata indistintamente alla coppia  $(\bar{u}_1, s_1)$  e alla coppia coniugata  $(\bar{u}_1^*, s_1^*)$ .

**Corrispondenza binivoca :** Assumiamo che, qualora la pulsazione complessa  $s$  sia reale ( $\omega = 0$ ), il fasore  $\bar{u}$  della cisoida sia esclusivamente reale e che, qualora la pulsazione  $s$  sia complessa, la sua parte immaginaria sia positiva ( $\omega > 0$ ) e il fasore sia un numero complesso qualsiasi. Queste assunzioni permettono di stabilire una corrispondenza binivoca tra l'insieme di tutte le coppie "fasore,pulsazione complessa"  $(\bar{u}, s)$  e l'insieme di tutte le cisoidi  $\Re\{\bar{u} \exp(s t)\}$ . Fa eccezione la cisoida con ampiezza nulla  $u_1(t) = 0$  a cui corrispondono tutte le coppie  $(0, s_1)$  con  $s_1$  qualsiasi.

**Comportamento asintotico** : Per **comportamento asintotico** di una cisoida si intende l'andamento (qualitativo) della cisoida per  $t \rightarrow \infty$  : esso è strettamente legato alla pulsazione complessa della cisoida piuttosto che al fasore.

**Spirale logaritmica** : Le cisoidi possono essere interpretate da un punto di vista geometrico. La funzione  $U_1(t) = \bar{u}_1 \exp(s_1 t)$  che compare nella definizione sotto l'operatore  $\mathfrak{R}[\ ]$  è una funzione complessa della variabile reale  $t$ . Quindi  $U_1(t)$  può essere interpretata come un vettore che varia col tempo nel piano dei numeri complessi. Se la coda del vettore è centrata nell'origine, la punta del vettore descrive una curva parametrica nel piano complesso, il cui parametro è  $t$ . Nel caso generico in cui  $\sigma_1 \neq 0$  e  $\omega_1 \neq 0$ , questa curva è una **spirale logaritmica**, la cui proiezione sull'asse reale è proprio la cisoida. Questa curva consente di interpretare il fasore e la pulsazione complessa :

- Il fasore  $\bar{u}_1$  determina il punto di  $U_1(t)$  associato a  $t = 0$  cioè  $\bar{u}_1 = U_1(0)$ .
- La pulsazione complessa  $s_1$  coincide con la derivata logaritmica (che risulta costante) di  $U_1(t)$  : 
$$s_1 = \sigma_1 + j\omega_1 = \frac{1}{U_1(t)} \frac{dU_1(t)}{dt} \quad \forall t$$

In particolare  $\omega_1$  stabilisce la velocità angolare espressa in rad/s del punto che descrive la spirale, mentre  $\sigma_1$  stabilisce la velocità radiale logaritmica di espansione (per  $\sigma_1 > 0$ ) o contrazione (per  $\sigma_1 < 0$ ) del punto medesimo (distanza dall'origine).

I seguenti quadri riassumono le caratteristiche di tutte le cisoidi, riportando il diagramma temporale, il comportamento asintotico e la curva  $U_1(t)$  nel piano complesso :

fasore $\bar{u}_1 = a_1 \pm j b_1 = u_1 \exp(j \phi_1)$		pulsazione $s_1 = \sigma_1 \pm j \omega_1$	
$s_1$	$\sigma_1 = 0, \pm j\omega_1 = 0$	$\sigma_1 < 0, \pm j\omega_1 = 0$	$\sigma_1 > 0, \pm j\omega_1 = 0$
$u_1(t)$	$a_1$	$a_1 \exp(\sigma_1 t)$	
nome	costante	esponenziale decrescente	esponenziale crescente
diagramma temporale			
comportam. asintotico	rimane costante = $a_1$	converge $\rightarrow 0$ monotonicamente	diverge monotonicamente
$U_1(t)$ nel piano complesso			

Come risulta dal suddetto quadro, nel caso  $\sigma_1 \neq 0$  e  $\omega_1 = 0$  il fasore  $\bar{u}_1 = a_1$  è reale. La spirale logaritmica degenera in una porzione dell'asse reale.

Per  $\sigma_1 = 0$  e  $\omega_1 = 0$  la spirale degenera in un punto fisso sull'asse reale di ascissa  $a_1$ . Per  $\sigma_1 < 0$  e  $\omega_1 = 0$ , si ha un segmento che viene percorso dal punto di ascissa  $a_1$  fino a raggiungere asintoticamente l'origine.

Per  $\sigma_1 > 0$  e  $\omega_1 = 0$ , si ha una semiretta che viene percorsa dal punto di ascissa  $a_1$  verso  $+\infty$  per  $a_1 > 0$  oppure verso  $-\infty$  per  $a_1 < 0$ .

**Quadro delle cisoidi con s complessa**

fasore $\bar{u}_1 = a_1 \pm j b_1 = u_1 \exp(j \phi_1)$		pulsazione $s_1 = \sigma_1 \pm j \omega_1$	
$s_1$	$\sigma_1 = 0, \pm j\omega_1 \neq 0$	$\sigma_1 < 0, \pm j\omega_1 \neq 0$	$\sigma_1 > 0, \pm j\omega_1 \neq 0$
$u_1(t)$	$a_1 \cos(\omega_1 t) - b_1 \sin(\omega_1 t)$ $u_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$	$\exp(\sigma_1 t) [a_1 \cos(\omega_1 t) - b_1 \sin(\omega_1 t)]$ $u_1 \exp(\sigma_1 t) \cos(\omega_1 t + \phi_1)$	$\exp(\sigma_1 t) [a_1 \cos(\omega_1 t) - b_1 \sin(\omega_1 t)]$ $u_1 \exp(\sigma_1 t) \cos(\omega_1 t + \phi_1)$
nome	sinusoide (pura) (con inilup. costante)	sinusoide con inilup. esponenziale decrescente	sinusoide con inilup. esponenziale crescente
diagramma temporale			
comportam. asintotico	oscilla permanentemente	converge $\rightarrow 0$ oscillando	diverge oscillando
$U_1(t)$ nel piano complesso	circonferenza	spirale in contrazione	spirale in espansione

Come riportato nel suddetto quadro, nel caso  $\sigma_1 = 0$  (velocità radiale logaritmica nulla) e  $\omega_1 \neq 0$ , la spirale logaritmica degenera in una circonferenza percorsa periodicamente dal punto. Il raggio è uguale al modulo  $|u_1| = u_1$  del fasore  $\bar{u}_1$ , mentre la posizione del punto sulla circonferenza per  $t = 0$  determina la fase  $\phi_1$  del fasore.

## 18.2 SOTTOCLASSI ISOFREQUENZIALI DI CISOIDI

L'insieme di tutte le cisoidi non costituisce uno spazio lineare, dal momento che la combinazione lineare di cisoidi con pulsazioni complesse diverse non è più una cisoida. Al contrario, le sottoclassi di cisoidi caratterizzate dalla stessa pulsazione complessa, chiamate in seguito **sottoclassi isofrequenziali**, costituiscono specifici spazi lineari.

18.2.1 Sottoclassi caratterizzate dalla stessa pulsazione reale

Consideriamo le sottoclassi caratterizzate da una pulsazione reale  $s = \sigma$ , cioè le sottoclassi delle ben note funzioni esponenziali reali di variabile reale. Ogni esponenziale  $u_1(t) = a_1 \exp(\sigma t)$  si distingue dagli altri della stessa sottoclasse per il diverso valore del fasore  $\bar{u}_1 = a_1$  (puramente reale).

**Proprietà:** Ogni sottoclasse isofrequenziale di cisoidi (cioè con la stessa  $s = \sigma$  reale) ovvero l'insieme dei loro fasori costituisce uno spazio lineare di dimensione 1.

**Prova:** Ricordiamo la corrispondenza binivoca tra gli esponenziali di una qualsiasi sottoclasse e i loro fasori (reali). Moltiplichiamo un esponenziale  $u_1(t)$ , con fasore  $\bar{u}_1 = a_1$ , per uno scalare reale  $\alpha$  qualsiasi: otteniamo un altro esponenziale  $u_2(t)$  della stessa sottoclasse, il cui fasore  $\bar{u}_2 = \alpha a_1$  risulta uguale a  $a_1$  moltiplicato per  $\alpha$ :

$$u_2(t) = \alpha u_1(t) = \alpha a_1 \exp(\sigma t) \iff \bar{u}_2 = \alpha a_1 = \alpha \bar{u}_1$$

Infine, la somma  $u_3(t)$  di due esponenziali qualsiasi  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  della stessa sottoclasse e con fasori  $a_1$  e  $a_2$ , è a sua volta un esponenziale della stessa sottoclasse, il cui fasore  $a_3$  coincide con la somma di  $a_1$  e  $a_2$ :

$$u_3(t) = u_1(t) + u_2(t) = a_1 \exp(\sigma t) + a_2 \exp(\sigma t) = (a_1 + a_2) \exp(\sigma t) \iff a_3 = a_1 + a_2$$

WWWWWW?? FARE FIGURA illustrante la somma di esponenziali ???WWWWWW

18.2.2 Sottoclassi caratterizzate dalla stessa pulsazione complessa

Consideriamo le sottoclassi di cisoidi caratterizzate da una pulsazione complessa  $s = \sigma + j\omega$ : ogni cisoid  $u_1(t) = \Re\{\bar{u}_1 \exp(\sigma t)\}$  si distingue dalle altre cisoidi della stessa sottoclasse per il diverso valore del fasore  $\bar{u}_1$ , in genere complesso.

**Proprietà:** Ogni sottoclasse isofrequenziale di cisoidi (con la stessa  $s = \sigma + j\omega$ ) ovvero l'insieme dei loro fasori costituisce uno spazio lineare di dimensione 2.

**Prova:** Ricordiamo la corrispondenza binivoca tra le cisoidi di una qualsiasi sottoclasse isofrequenziale e i loro fasori. Moltiplichiamo una cisoid  $u_1(t)$ , con fasore  $\bar{u}_1$ , per uno scalare reale  $\alpha$  qualsiasi: otteniamo una cisoid  $u_2(t)$  della stessa sottoclasse, il cui fasore  $\bar{u}_2$  è uguale al fasore  $\bar{u}_1$  moltiplicato per  $\alpha$ :

$$u_2(t) = \alpha u_1(t) = \alpha \Re\{\bar{u}_1 \exp(\sigma t)\} = \Re\{\alpha \bar{u}_1 \exp(\sigma t)\} \iff \bar{u}_2 = \alpha \bar{u}_1$$

Infine, la somma  $u_3(t)$  di due cisoidi qualsiasi  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  della stessa sottoclasse è a sua volta una cisoid della stessa sottoclasse, il cui fasore  $\bar{u}_3$  coincide con la somma dei rispettivi fasori:

$$u_3(t) = u_1(t) + u_2(t) = \Re\{\bar{u}_1 \exp(\sigma t)\} + \Re\{\bar{u}_2 \exp(\sigma t)\} \iff \bar{u}_3 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$$

WWWWWWWW?? FARE FIGURA illustrante prodotto per scalare ???WWWWWW

18.2.3 Derivata e integrale delle cisoidi

La seguente proprietà caratterizza le cisoidi rispetto a qualsiasi altra classe di funzioni: essa spiega il ruolo insostituibile che hanno le cisoidi nella soluzione delle equazioni differenziali lineari e tempo-invarianti e quindi nello studio dei circuiti dinamici e lineari.

**Proprietà:** L'insieme delle derivate temporali di una qualsiasi sottoclasse isofrequenziale di cisoidi coincide con la sottoclasse isofrequenziale stessa. In altre parole, la derivata di una cisoid con fasore  $\bar{u}_1$  e pulsazione complessa  $s$  è a sua volta una cisoid  $u_2(t)$  con la medesima pulsazione complessa (isofrequenziale) e con fasore  $\bar{u}_2 = s \bar{u}_1$ .

$$u_2(t) = \frac{d u_1(t)}{dt} = \frac{1}{s} [s \bar{u}_1 \exp(s t) + s^* \bar{u}_1^* \exp(s^* t)] \iff \bar{u}_2 = s \bar{u}_1$$

Analogamente, l'integrale di una cisoid soddisfa la seguente:

**Proprietà:** L'insieme degli integrali di una qualsiasi sottoclasse isofrequenziale di cisoidi coincide, a meno della costante additiva arbitraria propria dell'integrale, con la sottoclasse isofrequenziale stessa. Più precisamente, l'integrale di una cisoid con fasore  $\bar{u}_1$  e pulsazione complessa  $s$  è a sua volta una cisoid  $u_2(t)$  con la medesima pulsazione  $s$  e con fasore  $\bar{u}_2 = \bar{u}_1/s$ .

**Prova:** Integrando la cisoid, si ha:

$$u_2(t) = \int u_1(t) dt = \frac{1}{s} \left[ \frac{1}{s} \bar{u}_1 \exp(s t) + \frac{1}{s^*} \bar{u}_1^* \exp(s^* t) \right] \iff \bar{u}_2 = \frac{\bar{u}_1}{s}$$

18.2.4 Vettori e matrici cisoidali (isofrequenziali)

L'importanza delle sottoclassi di cisoidi isofrequenziali nella soluzione di equazioni differenziali ci suggerisce di introdurre:

**Definizione:** Un vettore  $u(t) \in \mathbb{R}^n(t)$  è detto *vettore cisoidale (isofrequenziale)* qualora i suoi elementi siano cisoidi della stessa sottoclasse:  $u(t) = \Re\{\exp(s t) \bar{u}\}$ . Il vettore  $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$  contiene i fasori delle cisoidi, mentre la pulsazione  $s$  è comune a tutte le cisoidi.

**Definizione:** Una matrice  $U(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}(t)$  è detta *matrice cisoidale (isofrequenziale)* qualora i suoi elementi siano cisoidi della stessa sottoclasse:  $U(t) = \Re\{\exp(s t) \bar{U}\}$ . La matrice  $\bar{U}$  contiene i fasori delle cisoidi, mentre la pulsazione  $s$  è comune a tutte le cisoidi.

Le derivate dei vettori e delle matrici cisoidali sono di estremo interesse nella soluzione di sistemi di equazioni differenziali lineari. Qui ricordiamo che la derivata di un vettore/matrice è, per definizione, un vettore/matrice delle stesse dimensioni i cui elementi sono le derivate dei corrispondenti elementi del vettore/matrice originale. Quindi la derivata di un vettore/matrice cisoidale è

$$\frac{d u(t)}{dt} = \Re\{\exp(s t) s \bar{u}\}, \quad \frac{d U(t)}{dt} = \Re\{\exp(s t) s \bar{U}\}$$

18.2.5 Esponenziali

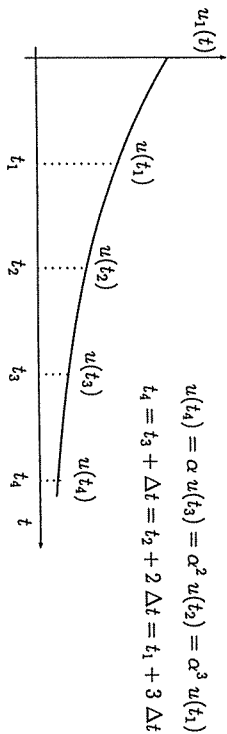
In un dato intervallo di tempo  $\Delta t$ , la funzione esponenziale  $\exp(\sigma t)$  varia di un fattore moltiplicativo costante  $\exp(\sigma \Delta t)$ , indipendente da  $t$ . Infatti si ha che

$$\exp(\sigma (t + \Delta t)) = \exp(\sigma t) \exp(\sigma \Delta t)$$

Questo fattore è maggiore di 1 per  $\sigma > 0$  e minore di 1 per  $\sigma < 0$ .  
Se campioniamo un'esponenziale con passo costante  $\Delta t$ , noi abbiamo

$$\exp[\sigma(t + k \Delta t)] = \exp(\sigma t) [\exp(\sigma \Delta t)]^k$$

che costituisce una successione geometrica al variare di  $k$ .



$$u(t_4) = \alpha u(t_3) = \alpha^2 u(t_2) = \alpha^3 u(t_1)$$

$$t_4 = t_3 + \Delta t = t_2 + 2 \Delta t = t_1 + 3 \Delta t$$

18.2.6 Esempi

Esempio 1 : Ripetiamo i fasori di alcune cisoidi con pulsazione complessa  $\sigma_1 \pm j \omega_1$  :

cisoidi	fasore	
	rappresentazione polare	rappresentazione cartesiana
15 exp( $\sigma_1 t$ ) cos( $\omega_1 t + \pi/4$ )	15 exp( $j \pi/4$ )	$15/\sqrt{2} + j 15/\sqrt{2}$
10 exp( $\sigma_1 t$ ) cos( $\omega_1 t - \pi/2$ )	10 exp( $-j \pi/2$ )	$0 - j 10$
0,4 exp( $\sigma_1 t$ ) sin( $\omega_1 t$ )	0,4 exp( $-j \pi/2$ )	$0 - j 0,4$
12 exp( $\sigma_1 t$ ) cos( $\omega_1 t + 3/4\pi$ )	12 exp( $j 3/4\pi$ )	$-12/\sqrt{2} + j 12/\sqrt{2}$
-3 exp( $\sigma_1 t$ ) sin( $\omega_1 t$ )	3 exp( $+j \pi/2$ )	$0 + j 3$
0,8 cos( $\omega_1 t - \pi/6$ )	0,8 exp( $-j \pi/6$ )	$0,4\sqrt{3} - j 0,4$
20 cos( $\omega_1 t + \pi/3$ )	20 exp( $+j \pi/3$ )	$10 + j 10\sqrt{3}$
1,5 exp( $\sigma_1 t$ )	1,5	1,5
-8 exp( $\sigma_1 t$ )	8 exp( $-j \pi$ )	-8

Esempio 2 : Ripetiamo i fasori delle derivate di alcune cisoidi con pulsazione complessa assegnata :

derivata della cisoidi	fasore rappresentazione cartesiana
$\frac{d}{dt} [4 \exp(-2t) \cos(5t + \pi/3)]$	$-(4 + 10\sqrt{3}) + j(10 - 4\sqrt{3})$
$\frac{d}{dt} [2 \exp(t) \cos(3t + \pi/6)]$	$\sqrt{3} - 3 + j(1 + 3\sqrt{3})$

Cisoidi in discoteca : Una discoteca organizza una festa aperta a tutte le cisoidi. Una funzione costante, appena entrata, rimbrota una sinusoide :

"Sei già così ubriaca che non sei neppure in grado di andare dritta", e la sinusoide di rimando :

"Ebbene sì, sono ubriaca ma le mie curve sono migliori delle tue."

Un esponenziale crescente incrocia un esponenziale decrescente, e :

"Ogni volta che ti vedo mi sembri sempre più fiacco, non arriverai certo lontano." e l'esponenziale decrescente di rimando : "Chi va piano va sano e lontano."

ma l'esponenziale crescente insiste :

"Ma se sono due giorni che sei strano sul tuo asintoto !!"

Dopo mezz'ora entra un altro esponenziale decrescente, che si siede in un angolo.

Una pimpante sinusoide lo nota e l'invita : "Su vieni con noi, integrati con gli altri."

E l'esponenziale con aria sconsolata :

"Ho provato più volte a integrarmi ma sono sempre rimasto un esponenziale decrescente."

18.3 SOLUZIONE DI UN SISTEMA DIFFERENZIALE

Con un esempio sviluppato nei dettagli, si mostra che le sottoclassi di cisoidi isofrequenziali sono indispensabili per calcolare sia le soluzioni generali sia quelle particolari dei sistemi di equazioni differenziali lineari.

WWWWWW??? riscrivere la sezione con notazione matriciale ?????WWWW

18.3.1 Una soluzione del sistema differenziale non omogeneo

La sostituzione delle cisoidi coi rispettivi fasori ci consente di uscire dal dominio del tempo e di sostituire le operazioni di derivazione e/o integrazione rispetto a  $t$  con operazioni algebriche tra quantità complesse. Questo ci permette di trasformare le equazioni differenziali e/o integrali lineari in equazioni algebriche. Come esempio, consideriamo un sistema di tre equazioni differenziali lineari e non omogenee nelle funzioni incognite  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  e  $x_3(t)$ , con tre cisoidi isofrequenziali nel ruolo di grandezze forzanti (funzioni note) e coefficienti costanti e reali :

$$\begin{cases} b_{11} \dot{x}_1(t) + b_{12} \dot{x}_2(t) + b_{13} \dot{x}_3(t) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + a_{13} x_3(t) + \hat{u}_1(t) \\ b_{21} \dot{x}_1(t) + b_{22} \dot{x}_2(t) + b_{23} \dot{x}_3(t) = a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + a_{23} x_3(t) + \hat{u}_2(t) \\ b_{31} \dot{x}_1(t) + b_{32} \dot{x}_2(t) + b_{33} \dot{x}_3(t) = a_{31} x_1(t) + a_{32} x_2(t) + a_{33} x_3(t) + \hat{u}_3(t) \end{cases}$$

dove  $\hat{u}_1(t) = \Re[\exp(\hat{s}t) \hat{u}_1]$ ,  $\hat{u}_2(t) = \Re[\exp(\hat{s}t) \hat{u}_2]$  e  $\hat{u}_3(t) = \Re[\exp(\hat{s}t) \hat{u}_3]$ .

Prima congettura : Le tre funzioni incognite siano cisoidi con la stessa pulsazione

complessa  $\hat{s}$  delle tre cisoidi forzanti :

$$x_1(t) = \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_1\} \quad , \quad x_2(t) = \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_2\} \quad , \quad x_3(t) = \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_3\}$$

in cui  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  e  $\bar{x}_3$  sono i fasori incogniti.

**Verifica** : Per verificare questa congettura, riscriviamo il sistema d'equazioni differenziali sostituendo le funzioni forzanti e le funzioni incognite con le loro espressioni cisoidali :

$$\begin{cases} b_{11} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_1\} + b_{12} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_2\} + b_{13} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_3\} = \\ = a_{11} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_1\} + a_{12} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_2\} + a_{13} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_3\} + \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{u}_1\} \\ b_{21} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_1\} + b_{22} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_2\} + b_{23} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_3\} = \\ = a_{21} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_1\} + a_{22} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_2\} + a_{23} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_3\} + \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{u}_2\} \\ b_{31} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_1\} + b_{32} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_2\} + b_{33} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_3\} = \\ = a_{31} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_1\} + a_{32} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_2\} + a_{33} \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_3\} + \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{u}_3\} \end{cases}$$

Ciascuna equazione uguaglia le somme di alcune cisoidi : in ciascuna equazione la somma di cisoidi può essere raccolta sotto un unico operatore  $\Re\{\}$ . Questa operazione è lecita dal momento che l'operatore  $\Re\{\}$  può essere scambiato con il prodotto per uno scalare reale (tutti i coefficienti del sistema differenziale sono assunti reali) e con gli operatori somma "+" e differenza "-". Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \Re\{\exp(\hat{s} t) [b_{11} \hat{s} \bar{x}_1 + b_{12} \hat{s} \bar{x}_2 + b_{13} \hat{s} \bar{x}_3 - a_{11} \bar{x}_1 - a_{12} \bar{x}_2 - a_{13} \bar{x}_3 - \bar{u}_1]\} = 0 \\ \Re\{\exp(\hat{s} t) [b_{21} \hat{s} \bar{x}_1 + b_{22} \hat{s} \bar{x}_2 + b_{23} \hat{s} \bar{x}_3 - a_{21} \bar{x}_1 - a_{22} \bar{x}_2 - a_{23} \bar{x}_3 - \bar{u}_2]\} = 0 \\ \Re\{\exp(\hat{s} t) [b_{31} \hat{s} \bar{x}_1 + b_{32} \hat{s} \bar{x}_2 + b_{33} \hat{s} \bar{x}_3 - a_{31} \bar{x}_1 - a_{32} \bar{x}_2 - a_{33} \bar{x}_3 - \bar{u}_3]\} = 0 \end{cases}$$

Il primo membro di ciascuna equazione è una cisoida, il cui fasore è l'espressione tra  $[\ ]$  contenente le incognite  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  e  $\bar{x}_3$ . Siccome ciascuna cisoida deve essere nulla, il sistema di equazioni è soddisfatto se e solo se i tre rispettivi fasori sono nulli. Quindi il sistema differenziale di tre equazioni in tre funzioni incognite diventa un sistema algebrico di tre equazioni in tre incognite complesse :

$$\begin{bmatrix} b_{11} \hat{s} - a_{11} & b_{12} \hat{s} - a_{12} & b_{13} \hat{s} - a_{13} \\ b_{21} \hat{s} - a_{21} & b_{22} \hat{s} - a_{22} & b_{23} \hat{s} - a_{23} \\ b_{31} \hat{s} - a_{31} & b_{32} \hat{s} - a_{32} & b_{33} \hat{s} - a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix}$$

Quindi la congettura risulta valida eccetto il caso in cui il determinante della matrice del suddetto sistema risulti nullo. ■

**Commento** : Se la pulsazione  $\hat{s}$  delle funzioni forzanti è reale, anche i nove coefficienti del sistema algebrico risultano reali. Inoltre, siccome le cisoidi forzanti sono esponenziali, i fasori  $\bar{u}_1$ ,  $\bar{u}_2$  e  $\bar{u}_3$ , che operano da termini noti, sono reali per definizione (vedere Par.18.1.1). Quindi anche i tre fasori incogniti  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  e  $\bar{x}_3$  risulteranno reali.

Al contrario, se la pulsazione  $\hat{s}$  è complessa, i tre termini noti  $\bar{u}_1$ ,  $\bar{u}_2$  e  $\bar{u}_3$  e i nove coefficienti del sistema risulteranno, in genere, complessi. Quindi anche i tre fasori incogniti  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  e  $\bar{x}_3$  risulteranno, in genere, complessi. ■

### 18.3.2 Ricerca di altre soluzioni del sistema differenziale

Per ora abbiamo trovato l'unica soluzione costituita esclusivamente da cisoidi della stessa sottoclasse delle funzioni forzanti. Potremmo ora vedere se vi sono altre soluzioni. Innanzitutto dimostriamo la seguente proprietà :

**Proprietà** : Se il sistema differenziale ammette più di una soluzione, la differenza tra una qualsiasi coppia di soluzioni è a sua volta una soluzione del sistema differenziale omogeneo associato.

**Prova** : Qualora  $x_1^{(1)}(t)$ ,  $x_2^{(1)}(t)$ ,  $x_3^{(1)}(t)$  e  $x_1^{(2)}(t)$ ,  $x_2^{(2)}(t)$ ,  $x_3^{(2)}(t)$  denotino le due diverse soluzioni, possiamo scrivere le seguenti relazioni :

$$\begin{cases} b_{11} \dot{x}_1^{(1)}(t) + b_{12} \dot{x}_2^{(1)}(t) + b_{13} \dot{x}_3^{(1)}(t) = a_{11} x_1^{(1)}(t) + a_{12} x_2^{(1)}(t) + a_{13} x_3^{(1)}(t) + \bar{u}_1(t) \\ b_{21} \dot{x}_1^{(1)}(t) + b_{22} \dot{x}_2^{(1)}(t) + b_{23} \dot{x}_3^{(1)}(t) = a_{21} x_1^{(1)}(t) + a_{22} x_2^{(1)}(t) + a_{23} x_3^{(1)}(t) + \bar{u}_2(t) \\ b_{31} \dot{x}_1^{(1)}(t) + b_{32} \dot{x}_2^{(1)}(t) + b_{33} \dot{x}_3^{(1)}(t) = a_{31} x_1^{(1)}(t) + a_{32} x_2^{(1)}(t) + a_{33} x_3^{(1)}(t) + \bar{u}_3(t) \\ b_{11} \dot{x}_1^{(2)}(t) + b_{12} \dot{x}_2^{(2)}(t) + b_{13} \dot{x}_3^{(2)}(t) = a_{11} x_1^{(2)}(t) + a_{12} x_2^{(2)}(t) + a_{13} x_3^{(2)}(t) + \bar{u}_1(t) \\ b_{21} \dot{x}_1^{(2)}(t) + b_{22} \dot{x}_2^{(2)}(t) + b_{23} \dot{x}_3^{(2)}(t) = a_{21} x_1^{(2)}(t) + a_{22} x_2^{(2)}(t) + a_{23} x_3^{(2)}(t) + \bar{u}_2(t) \\ b_{31} \dot{x}_1^{(2)}(t) + b_{32} \dot{x}_2^{(2)}(t) + b_{33} \dot{x}_3^{(2)}(t) = a_{31} x_1^{(2)}(t) + a_{32} x_2^{(2)}(t) + a_{33} x_3^{(2)}(t) + \bar{u}_3(t) \end{cases}$$

Sottraendo la seconda tripletta di equazioni dalla prima, si ottiene un'unica tripletta di equazioni differenziali omogenee che dimostra la proprietà.

$$\begin{cases} b_{11} [\dot{x}_1^{(1)}(t) - \dot{x}_1^{(2)}(t)] + b_{12} [\dot{x}_2^{(1)}(t) - \dot{x}_2^{(2)}(t)] + b_{13} [\dot{x}_3^{(1)}(t) - \dot{x}_3^{(2)}(t)] = \\ = a_{11} [x_1^{(1)}(t) - x_1^{(2)}(t)] + a_{12} [x_2^{(1)}(t) - x_2^{(2)}(t)] + a_{13} [x_3^{(1)}(t) - x_3^{(2)}(t)] \\ b_{21} [\dot{x}_1^{(1)}(t) - \dot{x}_1^{(2)}(t)] + b_{22} [\dot{x}_2^{(1)}(t) - \dot{x}_2^{(2)}(t)] + b_{23} [\dot{x}_3^{(1)}(t) - \dot{x}_3^{(2)}(t)] = \\ = a_{21} [x_1^{(1)}(t) - x_1^{(2)}(t)] + a_{22} [x_2^{(1)}(t) - x_2^{(2)}(t)] + a_{23} [x_3^{(1)}(t) - x_3^{(2)}(t)] \\ b_{31} [\dot{x}_1^{(1)}(t) - \dot{x}_1^{(2)}(t)] + b_{32} [\dot{x}_2^{(1)}(t) - \dot{x}_2^{(2)}(t)] + b_{33} [\dot{x}_3^{(1)}(t) - \dot{x}_3^{(2)}(t)] = \\ = a_{31} [x_1^{(1)}(t) - x_1^{(2)}(t)] + a_{32} [x_2^{(1)}(t) - x_2^{(2)}(t)] + a_{33} [x_3^{(1)}(t) - x_3^{(2)}(t)] \end{cases}$$

### 18.3.3 Calcolo delle altre soluzioni

**Seconda congettura** : Consideriamo il sistema differenziale omogeneo associato ed esaminiamo se esiste una terna di cisoidi isofrequenziali (con pulsazione  $s$  non specificata) :

$$[x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T = \Re\{\exp(s t) [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \bar{x}_3]^T\}$$

che sia una soluzione dello stesso.

**Verifica** : Per verificare questa congettura, riscriviamo il sistema d'equazioni differenziali omogeneo sostituendo le funzioni incognite con le rispettive cisoidi incognite. Operando come nel Par. 18.3.1., in ciascuna equazione raccogliamo le cisoidi sotto un unico operatore  $\Re\{\}$  e otteniamo il seguente sistema :

$$\begin{cases} \Re\{\exp(s t) [b_{11} s \bar{x}_1 + b_{12} s \bar{x}_2 + b_{13} s \bar{x}_3 - a_{11} \bar{x}_1 - a_{12} \bar{x}_2 - a_{13} \bar{x}_3]\} = 0 \\ \Re\{\exp(s t) [b_{21} s \bar{x}_1 + b_{22} s \bar{x}_2 + b_{23} s \bar{x}_3 - a_{21} \bar{x}_1 - a_{22} \bar{x}_2 - a_{23} \bar{x}_3]\} = 0 \\ \Re\{\exp(s t) [b_{31} s \bar{x}_1 + b_{32} s \bar{x}_2 + b_{33} s \bar{x}_3 - a_{31} \bar{x}_1 - a_{32} \bar{x}_2 - a_{33} \bar{x}_3]\} = 0 \end{cases}$$



Il primo membro di ciascuna equazione è una ciscoide il cui fasore è l'espressione tra [...] contenente i tre fasori incogniti e la pulsazione incognita: siccome ciascuna ciscoide deve essere nulla, il sistema di equazioni è soddisfatto se e solo se i tre rispettivi fasori sono nulli. Quindi il sistema differenziale omogeneo di tre equazioni in tre funzioni incognite diventa un sistema algebrico anch'esso omogeneo di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{bmatrix} b_{11}s - a_{11} & b_{12}s - a_{12} & b_{13}s - a_{13} \\ b_{21}s - a_{21} & b_{22}s - a_{22} & b_{23}s - a_{23} \\ b_{31}s - a_{31} & b_{32}s - a_{32} & b_{33}s - a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stiamo di fronte a un sistema algebrico omogeneo nel dominio complesso. A parte soluzioni banali in cui i tre fasori sono nulli, qualsiasi sia la pulsazione complessa  $s$ , noi otteniamo soluzioni significative solo nel caso che la matrice del sistema sia singolare, cioè per valori di  $s$  che annullino il determinante della matrice. In genere esso si annulla per tre (al massimo) valori  $s_1, s_2$  e  $s_3$ : se questi valori sono distinti noi avremo tre vettori cisoidali caratterizzati da tre diverse pulsazioni che soddisfano al sistema differenziale omogeneo associato.

$$\begin{aligned} s_1 &\longrightarrow \Re\{q_1 \exp(s_1 t) [\bar{x}_1^{(1)} \bar{x}_2^{(1)} \bar{x}_3^{(1)}]^T\} \\ s_2 &\longrightarrow \Re\{q_2 \exp(s_2 t) [\bar{x}_1^{(2)} \bar{x}_2^{(2)} \bar{x}_3^{(2)}]^T\} \\ s_3 &\longrightarrow \Re\{q_3 \exp(s_3 t) [\bar{x}_1^{(3)} \bar{x}_2^{(3)} \bar{x}_3^{(3)}]^T\} \end{aligned}$$

Questi tre vettori sono definiti a meno della costanti moltiplicative arbitrarie (in genere) complesse  $q_1, q_2$  e  $q_3$ .

Quindi l'insieme di tutte le soluzioni del sistema differenziale originario (nonomogeneo) visto nel Par. 18.3.1 assume la forma

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_1\} + \Re\{q_1 \exp(s_1 t) \bar{x}_1^{(1)}\} + \Re\{q_2 \exp(s_2 t) \bar{x}_1^{(2)}\} + \Re\{q_3 \exp(s_3 t) \bar{x}_1^{(3)}\} \\ x_2(t) &= \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_2\} + \Re\{q_1 \exp(s_1 t) \bar{x}_2^{(1)}\} + \Re\{q_2 \exp(s_2 t) \bar{x}_2^{(2)}\} + \Re\{q_3 \exp(s_3 t) \bar{x}_2^{(3)}\} \\ x_3(t) &= \Re\{\exp(\hat{s} t) \bar{x}_3\} + \Re\{q_1 \exp(s_1 t) \bar{x}_3^{(1)}\} + \Re\{q_2 \exp(s_2 t) \bar{x}_3^{(2)}\} + \Re\{q_3 \exp(s_3 t) \bar{x}_3^{(3)}\} \end{aligned}$$

Le costanti arbitrarie  $q_1, q_2$  e  $q_3$  ci dicono che questo insieme di soluzioni costituisce uno spazio affine di dimensione tre, usualmente chiamato *soluzione generale*.

**Commento**: Senza entrare nei dettagli possiamo affermare che non esiste alcuna altra soluzione al di fuori di quelle comprese nella soluzione generale. ■

## 18.4 ESPONENZIALE DI MATRICE

Vengono introdotti gli *esponenziali di matrice* che sono matrici particolari dipendenti dal tempo: essi sono costituiti da un'opportuna combinazione di matrici cisoidali isofrequenziali e sono indispensabili per esprimere la soluzione dei sistemi di equazioni differenziali lineari in forma compatta.

### 18.4.1 Definizione e proprietà dell'esponenziale di matrice

Cerchiamo una matrice  $E(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}(t)$ , se esiste, che soddisfi alle condizioni:

$$E(0) = I_{n \times n}, \quad \frac{dE(t)}{dt} = \dot{E}(t) = A E(t) \quad \text{dove } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

La seconda condizione stabilisce che  $E(t)$  è una soluzione dell'equazione differenziale:

$$\dot{X}(t) = A X(t) \quad \text{dove } X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}(t) \text{ è incognita}$$

Comunque  $E(t)$  non è l'unica soluzione di questa equazione:

**Proprietà 1**: Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale  $\dot{X}(t) = A X(t)$  sono matrici della forma  $H(t) = E(t) B$ , in cui  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Prova**: Per accertare l'esistenza di altre soluzioni dell'equazione  $\dot{X}(t) = A X(t)$ , oltre alla  $E(t)$ , sostituiamo la matrice incognita  $X(t)$  con la matrice  $\check{X}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}(t)$ :

$$X(t) = E(t) \check{X}(t) \implies \dot{X}(t) = \dot{E}(t) X(t) + E(t) \dot{\check{X}}(t) = A E(t) \check{X}(t) + E(t) \dot{\check{X}}(t)$$

dove la seconda relazione è ottenuta dalla derivazione della prima. Sostituendo  $X(t)$  e  $\check{X}(t)$  nell'equazione differenziale e integrando i due membri, otteniamo la soluzione:

$$A E(t) \check{X}(t) + E(t) \dot{\check{X}}(t) = A E(t) \check{X}(t) \implies \dot{\check{X}}(t) = 0_{n \times n} \implies \check{X}(t) = X_0 \forall t$$

dove  $X_0$  è una matrice arbitraria  $\in \mathbb{R}^{n \times n}$  che raggruppa le costanti di integrazione: si ha che  $\check{X}(0) = X(0) = X_0$ . Ripristinando la matrice incognita originaria  $X(t)$  si ha che ciascuna soluzione assume la forma  $X(t) = E(t) X_0$ , provando la proprietà.

**Proprietà 2**: La matrice  $E(t)$  soddisfa alla condizione

$$E(t + \Delta t) = E(\Delta t) E(t) \quad \forall t$$

**Prova**: L'unica soluzione  $X(t)$  dell'equazione differenziale  $\dot{X}(t) = A X(t)$  con la condizione iniziale  $X(0) = I_n$  ha la forma  $X(t) = E(t)$ . Con una traslazione dell'asse dei tempi  $t = t' + \Delta t$ , abbiamo  $X(t' + \Delta t) = E(t' + \Delta t)$ . Per  $\Delta t = 0$  abbiamo  $X(t') = E(t')$ . Consideriamo  $t'$  come inizio del nuovo asse dei tempi e  $\Delta t$  la variabile che descrive il nuovo asse dei tempi. Quindi  $X(t')$  è il valore iniziale di  $X(t)$ . Abbiamo

$$X(t' + \Delta t) = E(\Delta t) X(t') = E(\Delta t) E(t')$$

Dal confronto con la precedente espressione di  $X(t' + \Delta t)$  si ha:

$$E(t' + \Delta t) = E(\Delta t) E(t') \implies E(t' + \Delta t) = E(\Delta t) E(t')$$

**Corollario**: Dalla precedente proprietà si ha che l'inversa della matrice  $E(t)$  coincide con la stessa matrice in cui il tempo  $t$  è cambiato di segno:

$$[E(t)]^{-1} = E(-t)$$

**Prova**: Dalla proprietà 2 ponendo  $\Delta t = -t$  si ha

$$E(-t) E(t) = E(t - t) = E(0) = I_{n \times n}$$

**Commento**: Le proprietà della matrice  $E(t)$  sono la generalizzazione, a livello matriciale, delle ben note proprietà dell'esponenziale scalare  $\exp(a t)$ :

$$\begin{aligned} \exp(a t) &= 1 \iff E(0) = I_{n \times n} \\ \frac{d \exp(a t)}{dt} &= a \exp(a t) \iff \frac{dE(t)}{dt} = A E(t) \end{aligned}$$

$$\exp(a(t + \Delta t)) = \exp(a(t) \Delta t) \exp(a(t)) \iff E(t + \Delta t) = E(\Delta t) E(t)$$

**Definizione :** Questa analogia ci suggerisce per la matrice  $E(t)$  il nome di *esponenziale di matrice* e la notazione  $\exp(t A) = E(t)$  che ha il pregio di mettere in evidenza la matrice  $A$  che caratterizza  $E(t)$  e la sua derivata. ■

### 18.4.2 Matrici cisoidali ed esponenziale di matrice

**Congettura :** Consideriamo l'equazione differenziale  $\dot{X}(t) = A X(t)$  dove  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}(t)$  e facciamo la congettura che la matrice delle funzioni incognite sia una matrice cisoidale isofrequenziale  $X(t) = \Re[\exp(s t) \bar{X}]$ . Questa ipotesi è valida? Per quali valori di  $s$  e  $\bar{X}$  risulta valida? Per rispondere non ci resta che fare una verifica. ■

**Verifica :** Per provare la consistenza della congettura eseguiamo all'interno dell'equazione  $\dot{X} = A X(t)$  le sostituzioni  $X(t) \rightarrow \Re[\exp(s t) \bar{X}]$  e  $X'(t) \rightarrow \Re[\exp(s t) s \bar{X}]$  e riuniamo tutti i termini sotto un unico operatore  $\Re[ \ ]$  :

$$\Re[\exp(s t) s \bar{X}] = A \Re[\exp(s t) \bar{X}] \iff \Re\{\exp(s t) [s \bar{X} - A \bar{X}]\} = 0_{n,n}$$

Il primo membro della suddetta equazione costituisce proprio una matrice cisoidale, di cui  $[s \bar{X} - A \bar{X}]$  è la matrice dei fasori e  $s$  la pulsazione complessa. Ripetendo la procedura già seguita nella Sez. 18.3, noi sappiamo che una matrice cisoidale è nulla se e solo se la rispettiva matrice dei fasori è nulla :

$$s \bar{X} - A \bar{X} = 0_{n,n} \implies [s I_{n,n} - A] \bar{X} = 0_{n,n}$$

Otteniamo un sistema algebrico di  $n \times n$  equazioni in  $n^2 + 1$  incognite (in genere complesse) : la pulsazione complessa  $s$  e i fasori contenuti nella matrice  $\bar{X}$ . Se il determinante di  $[s I_{n,n} - A]$  è diverso da zero, la matrice  $\bar{X}$  deve essere necessariamente nulla. Quindi esistono soluzioni cisoidali nonbanali (cioè non-nulle) se e solo se la pulsazione complessa  $s$  comune alle  $n^2$  cisoidi annulla il determinante  $[s I_{n,n} - A]$ , cioè se coincide con uno tra gli  $n$  autovalori  $s_1, s_2, \dots, s_n$  di  $A$ . In questo caso, sia  $s_k$  uno degli autovalori, la corrispondente matrice dei fasori  $\bar{X}^k$  può essere diversa da zero : tutte le  $n$  colonne di  $\bar{X}^k$  appartengono allo spazio nullo associato alla matrice singolare  $[s_k I_{n,n} - A]$  ; quindi essa assume la forma :

$$s_k \longrightarrow \bar{X}^k = x^k [q^k]^T \text{ dove } x^k \text{ (vettore colonna)} \times [q^k]^T \text{ (vettore riga)}$$

dove  $\bar{x}^k$  è l'autovettore di  $A$ , definito a meno di una costante arbitraria, associato all'autovettore  $s_k$ , mentre  $q^k$  riunisce la  $n$  costanti arbitrarie (una per ciascuna colonna di  $\bar{X}^k$ ). Gli elementi di  $q^k$  devono essere considerati reali in presenza di un autovettore  $s^k$  reale e complessi coniugati in presenza di autovettori complessi coniugati.

Quindi a ciascun autovettore  $s_k$  noi possiamo associare la seguente matrice cisoidale

$$s_k \longrightarrow X^k(t) = \Re[\exp(s_k t) \bar{X}^k] = \Re[\exp(s_k t) \bar{x}^k [q^k]^T]$$

che soddisfa all'equazione differenziale.

Da quanto detto siamo in grado di rispondere positivamente alla congettura iniziale :

**Proprietà :** Una matrice cisoidale  $\Re[\exp(s t) \bar{X}]$  è una soluzione dell'equazione  $\dot{X}(t) = A X(t)$  se e solo se la pulsazione complessa  $s$  coincide con un autovettore  $s_k$  di  $A$  e la matrice dei fasori  $\bar{X}$  è uguale al prodotto dell'autovettore (colonna) associato post-moltiplicato per un vettore (riga) arbitrario. ■

### 18.4.3 Espressione analitica dell'esponenziale di matrice

Assumiamo che gli  $n$  autovalori di  $A$  siano distinti. In generale essi sono sia reali sia complessi coniugati. A ciascuno di essi è associata la matrice cisoidale  $\Re[\exp(s_k t) \bar{x}^k [q^k]^T]$  che è una soluzione dell'equazione  $\dot{X}(t) = A X(t)$ . Essendo quest'equazione lineare e omogenea, anche la somma di queste  $n$  soluzioni è a sua volta una soluzione della suddetta equazione. Quindi l'insieme di tutte le soluzioni delle equazioni, la cosiddetta *soluzione generale*, assume l'espressione

$$X(t) = \sum_{k=1}^n \Re[\exp(s_k t) \bar{x}^k [q^k]^T] = \Re \left\{ \sum_{k=1}^n \exp(s_k t) \bar{x}^k [q^k]^T \right\} = \sum_{k=1}^n [\exp(s_k t) \bar{x}^k [q^k]^T]$$

Essa costituisce uno spazio lineare descritto dagli  $n^2$  elementi arbitrari presenti nei vettori arbitrari  $q^k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). I termini della sommatoria all'interno di  $\Re[ \ ]$  sono reali oppure complessi coniugati a coppie. Per questo motivo l'operatore  $\Re[ \ ]$  può essere soppresso nell'ultima sommatoria sulla destra.

Questa stessa sommatoria può essere arrangiata in forma di un prodotto di tre matrici :

$$X(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}^1 & \bar{x}^2 & \dots & \bar{x}^n \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} \exp(s_1 t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp(s_2 t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \exp(s_n t) \end{bmatrix}}_{E_0(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} [q^1]^T \\ [q^2]^T \\ \vdots \\ [q^n]^T \end{bmatrix}}_Q = S E_0(t) Q$$

dove  $S$  è la matrice, in genere complessa, le cui colonne coincidono con gli autovettori di  $A$ ,  $E_0(t)$  è la matrice diagonale che raggruppa gli esponenziali associati agli autovettori e  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è una matrice arbitraria che raggruppa i vettori arbitrari.

La soluzione generale  $X(t)$  coincide con l'esponenziale di matrice  $\exp(t A)$  qualora sia verificata la condizione  $X(0) = I_{n,n}$  che richiede che la matrice arbitraria  $Q$  soddisfi alla :

$$X(0) = I_{n,n} \implies S I_{n,n} Q = I_{n,n} \implies Q = S^{-1}$$

Quindi noi abbiamo la seguente espressione analitica dell'esponenziale di matrice

$$\exp(t A) = S E_0(t) S^{-1}$$

**Commento :** L'esponenziale di matrice  $\exp(t A)$  è definito anche nel caso che gli autovalori di  $A$  siano multipli. Comunque esso soddisfa sempre alla definizione e alle proprietà discusse nel Par. 18.4.1. La sua espressione analitica in qualche caso è uguale a quella introdotta nel caso degli autovalori distinti in altri casi assume una forma diversa. Qualche esempio è riportato nel Par. 18.5.7. ■

### 18.5 CALCOLO DEGLI ESPONENZIALI DI MATRICE

Qui riportiamo alcuni esempi rivolti al calcolo degli esponenziali di matrice con lo scopo di far prendere dimistichezza con un argomento piuttosto ostico al primo impatto e di approfondire gli aspetti teorici. Il loro calcolo richiede la conoscenza del concetto di autovettore e autovettore di una matrice quadrata di elementi costanti.

18.5.1 Esempio 1

Calcoliamo  $\exp(tA)$  in cui  $A$  è riportata qui sotto insieme ai suoi autovalori e autovettori:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{determinante di } [sI_{2,2} - A] \Rightarrow \text{Autovalori: } \begin{cases} s_1 = 5 \\ s_2 = -1 \end{cases}$$

$$(1-s) \times (3-s) - 8 = 0$$

autovettore  $[1 \ \alpha_1]^T$  associato a  $s_1 = 5$ :  $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

autovettore  $[1 \ \alpha_2]^T$  associato a  $s_2 = -1$ :  $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

La matrice degli autovettori  $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$

Il primo elemento di ciascun autovettore è stato posto uguale a 1 dal momento che ciascun autovettore è definito a meno di una costante moltiplicativa arbitraria. Possiamo ora scrivere l'espressione dell'esponenziale di matrice:

$$\exp(tA) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} \exp(5t) & 0 \\ 0 & \exp(-t) \end{bmatrix}}_{E_0(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}$$

Sviluppando il prodotto delle tre matrici possiamo ottenere una differente espressione:

$$\exp(tA) = \exp(5t) \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} + \exp(-t) \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Verifica: Per verificare la correttezza del risultato, calcoliamo  $\exp(tA)$  in  $t = 0$ :

$$\exp(0A) = \exp(5 \times 0) \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} + \exp(-1 \times 0) \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La derivata di  $\exp(tA)$  ed il prodotto  $A \exp(tA)$ :

$$\frac{d\exp(tA)}{dt} = \exp(5t) \begin{bmatrix} 5/3 & 5/3 \\ 10/3 & 10/3 \end{bmatrix} + 1 \exp(-1t) \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \exp(tA) = \exp(5t) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} + \exp(-1t) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} =$$

$$= \exp(5t) \begin{bmatrix} 5/3 & 5/3 \\ 10/3 & 10/3 \end{bmatrix} + \exp(-1t) \begin{bmatrix} -2/3 & +1/3 \\ +2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

risultano coincidenti in accordo alla definizione vista nel Par. 18.4.1.

18.5.2 Esempio 2

Calcoliamo  $\exp(tA)$  in cui  $A$  è riportata qui sotto insieme ai suoi autovalori e autovettori:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{determinante di } [sI_{2,2} - A] \Rightarrow \text{Autovalori: } \begin{cases} s_1 = 2 \\ s_2 = -4 \end{cases}$$

$$-s \times (-2-s) - 8 = 0$$

autovettore  $[1 \ \alpha_1]^T$  associato a  $s_1 = 2$ :  $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

autovettore  $[1 \ \alpha_2]^T$  associato a  $s_2 = -4$ :  $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

La matrice degli autovettori  $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix}$

Il primo elemento di ciascun autovettore è stato posto uguale a 1 dal momento che ciascuno di essi è definito a meno di una costante moltiplicativa arbitraria. Possiamo ora scrivere l'espressione dell'esponenziale di matrice:

$$\exp(tA) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} \exp(2t) & 0 \\ 0 & \exp(-4t) \end{bmatrix}}_{E_0(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}$$

Sviluppando il prodotto delle tre matrici possiamo ottenere una differente espressione:

$$\exp(tA) = \exp(2t) \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 4/3 & 1/3 \end{bmatrix} + \exp(-4t) \begin{bmatrix} 1/3 & -1/6 \\ -4/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Verifica: Per verificare la correttezza del risultato, calcoliamo  $\exp(tA)$  in  $t = 0$ :

$$\exp(0A) = \exp(2 \times 0) \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 4/3 & 1/3 \end{bmatrix} + \exp(-4 \times 0) \begin{bmatrix} 1/3 & -1/6 \\ -4/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La derivata di  $\exp(tA)$  ed il prodotto  $A \exp(tA)$ :

$$\frac{d\exp(tA)}{dt} = \exp(2t) \begin{bmatrix} 4/3 & 1/3 \\ 8/3 & 2/3 \end{bmatrix} + \exp(-4t) \begin{bmatrix} -4/3 & +2/3 \\ 16/3 & -8/3 \end{bmatrix}$$

$$A \exp(tA) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \exp(tA) = \exp(2t) \begin{bmatrix} 4/3 & 1/3 \\ 8/3 & 2/3 \end{bmatrix} + \exp(-4t) \begin{bmatrix} -4/3 & 2/3 \\ 16/3 & -8/3 \end{bmatrix}$$

risultano coincidenti in accordo alla definizione vista nel Par. 18.4.1.

18.5.3 Esempio 3

Calcoliamo  $\exp(tA)$  in cui  $A$  è riportata qui sotto insieme ai suoi autovettori e autovettrici :

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \implies \text{determinante di } [sI_{2,2} - A] \implies \text{Autovettori : } \begin{cases} s_1 = -3 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{autovettore } [1 \ \alpha_1]^T \text{ associato a } s_1 = -3 : \implies \begin{bmatrix} -4+3 & -2 \\ 1 & -1+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{autovettore } [1 \ \alpha_2]^T \text{ associato a } s_2 = -2 : \implies \begin{bmatrix} -4+2 & -2 \\ 1 & -1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{La matrice degli autovettori } S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix} \implies S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Il primo elemento di ciascun autovettore è stato posto uguale a 1 dal momento che ciascuno di essi è definito a meno di una costante moltiplicativa arbitraria. Possiamo ora scrivere l'espressione dell'esponenziale di matrice :

$$\exp(tA) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} \exp(-3t) & 0 \\ 0 & \exp(-2t) \end{bmatrix}}_{E_0(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}$$

Sviluppando il prodotto delle tre matrici possiamo ottenere una differente espressione :

$$\exp(tA) = \exp(-3t) \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \exp(-2t) \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Verifica :** Per verificare la correttezza del risultato, calcoliamo  $\exp(tA)$  in  $t = 0$  :

$$\exp(0A) = \exp(-3 \times 0) \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \exp(-2 \times 0) \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La derivata

$$\frac{d\exp(tA)}{dt} = \exp(-3t) \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \exp(-2t) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

risulta uguale al prodotto  $A \exp(tA)$  in accordo alla definizione vista nel Par. 18.4.1. ■

18.5.4 Esempio 4

Calcoliamo  $\exp(tA)$  in cui  $A$  è riportata qui sotto insieme ai suoi autovettori e autovettrici :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \implies \text{determinante di } [sI_{2,2} - A] \implies \text{Autovettori : } \begin{cases} s_1 = j \\ s_2 = -j \end{cases}$$

$$\text{autovettore } [1 \ \alpha_1]^T \text{ associato a } s_1 = j : \implies \begin{bmatrix} -j & 1 \\ -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

$$\text{autovettore } [1 \ \alpha_2]^T \text{ associato a } s_2 = -j : \implies \begin{bmatrix} j & 1 \\ -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

$$\text{La matrice degli autovettori } S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \implies S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -j/2 \\ 1/2 & j/2 \end{bmatrix}$$

Il primo elemento di ciascun autovettore è stato posto uguale a 1 dal momento che ciascuno di essi è definito a meno di una costante moltiplicativa arbitraria. Possiamo ora scrivere l'espressione dell'esponenziale di matrice :

$$\exp(tA) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} \exp(jt) & 0 \\ 0 & \exp(-jt) \end{bmatrix}}_{E_0(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & -j/2 \\ 1/2 & j/2 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}$$

Sviluppando il prodotto delle tre matrici possiamo ottenere una differente espressione :

$$\exp(tA) = \exp(jt) \begin{bmatrix} 1/2 & -j/2 \\ j/2 & 1/2 \end{bmatrix} + \exp(-jt) \begin{bmatrix} 1/2 & j/2 \\ -j/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

**Verifica :** Per verificare la correttezza del risultato, calcoliamo  $\exp(0A)$  :

$$\exp(0A) = \begin{bmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ -\sin(0) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La derivata ed il prodotto  $A \exp(tA)$  :

$$\frac{d\exp(tA)}{dt} = \begin{bmatrix} -\sin(t) & \cos(t) \\ -\cos(t) & -\sin(t) \end{bmatrix}, \quad A \exp(tA) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

risultano coincidenti in accordo alla definizione vista nel Par. 18.4.1. ■

18.5.5 Esempio 5

Calcoliamo  $\exp(tA)$  in cui  $A$  è riportata qui sotto insieme ai suoi autovettori e autovettrici :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \implies \text{determinante di } [sI_{2,2} - A] \implies \text{Autovettori : } \begin{cases} s_1 = 3 + j6 \\ s_2 = 3 - j6 \end{cases}$$

$$\text{autovettore } [1 \ \alpha_1]^T \text{ associato a } s_1 = 3 + j6 \implies \begin{bmatrix} 2-j6 & -10 \\ 4 & -2-j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/5 - j3/5 \end{bmatrix}$$

$$\text{autovettore } [1 \ \alpha_2]^T \text{ associato a } s_2 = 3 - j6 \implies \begin{bmatrix} 2+j6 & -10 \\ 4 & -2+j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/5 + j3/5 \end{bmatrix}$$

La matrice degli autovettori e la sua inversa risultano :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/5 - j3/5 & 1/5 + j3/5 \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 - j/6 & j5/6 \\ 1/2 + j/6 & -j5/6 \end{bmatrix}$$

Il primo elemento di ciascun autovettore è stato posto uguale a 1 dal momento che ciascuno di essi è definito a meno di una costante moltiplicativa arbitraria.

Possiamo ora scrivere l'espressione dell'esponenziale di matrice :

$$\exp(tA) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/5 - j3/5 & 1/5 + j3/5 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} \exp(t(3+j6)) & 0 \\ 0 & \exp(t(3-j6)) \end{bmatrix}}_{E_0(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 - j/6 & j5/6 \\ 1/2 + j/6 & -j5/6 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}$$

Sviluppando il prodotto delle tre matrici possiamo ottenere una differente espressione :

$$\exp(tA) = \exp(t(3+j6)) \begin{bmatrix} 1/2 - j/6 & j5/6 \\ -j/3 & 1/2 + j/6 \end{bmatrix} + \exp(t(3-j6)) \begin{bmatrix} 1/2 + j/6 & -j5/6 \\ j/3 & 1/2 - j/6 \end{bmatrix}$$

$$\exp(tA) = \exp(3t) \begin{bmatrix} \cos(6t) + 1/3 \sin(6t) & -5/3 \sin(6t) \\ 2/3 \sin(6t) & \cos(6t) - 1/3 \sin(6t) \end{bmatrix}$$

Verifica : Per verificare la correttezza del risultato, calcoliamo  $\exp(0A)$  :

$$\exp(0A) = \exp(3 \times 0) \begin{bmatrix} \cos(6 \times 0) + 1/3 \sin(6 \times 0) & -5/3 \sin(6 \times 0) \\ 2/3 \sin(6 \times 0) & \cos(6 \times 0) - 1/3 \sin(6 \times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La derivata :

$$\frac{d\exp(tA)}{dt} = \exp(3t) \begin{bmatrix} 3 \cos(6t) + \sin(6t) & -5 \sin(6t) \\ 2 \sin(6t) & 3 \cos(6t) - 1 \sin(6t) \end{bmatrix} + \exp(3t) \begin{bmatrix} -6 \sin(6t) + 2 \cos(6t) & -10 \cos(6t) \\ 4 \cos(6t) & -6 \sin(6t) - 2 \cos(6t) \end{bmatrix} = \exp(3t) \begin{bmatrix} 5 \cos(6t) - 5 \sin(6t) & -10 \cos(6t) - 5 \sin(6t) \\ 4 \cos(6t) + 2 \sin(6t) & \cos(6t) - 7 \sin(6t) \end{bmatrix}$$

ed il prodotto  $A \exp(tA)$  :

$$A \exp(tA) = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \exp(3t) \begin{bmatrix} \cos(6t) + 1/3 \sin(6t) & -5/3 \sin(6t) \\ 2/3 \sin(6t) & \cos(6t) - 1/3 \sin(6t) \end{bmatrix}$$

risultano coincidenti in accordo alla definizione vista nel Par. 18.4.1. ■

18.5.6 Esempio 6

Calcoliamo  $\exp(tA)$  in cui  $A$  è riportata qui sotto insieme ai suoi autovalori e autovettori :

$$A = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & -7/4 \\ 7/2 & -3/2 & -5/2 \\ 13/4 & 1/4 & -19/4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{determinante di } [sI_3 - A] \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -2 \\ s_2 = -1 \\ s_3 = -3 \end{cases}$$

$$\text{Autovettore } [1 \ \alpha_1 \ \beta_1]^T \text{ associato a } s_1 = -2 : \begin{bmatrix} 9/4 & 1/4 & -7/4 \\ 7/2 & 1/2 & -5/2 \\ 13/4 & 1/4 & -11/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Autovettore } [1 \ \alpha_2 \ \beta_2]^T \text{ associato a } s_2 = -1 : \begin{bmatrix} 5/4 & 1/4 & -7/4 \\ 7/2 & -1/2 & -5/2 \\ 13/4 & 1/4 & -15/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Autovettore } [1 \ \alpha_3 \ \beta_3]^T \text{ associato a } s_3 = -3 : \begin{bmatrix} 13/4 & 1/4 & -7/4 \\ 7/2 & 3/2 & -5/2 \\ 13/4 & 1/4 & -7/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La matrice degli autovettori e la sua inversa risultano :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 5/4 & 1/4 & -3/4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il primo elemento di ciascun autovettore è stato posto uguale a 1 dal momento che ciascun autovettore è definito a meno di una costante moltiplicativa arbitraria.

Possiamo ora scrivere l'espressione dell'esponenziale di matrice :

$$\exp(tA) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} \exp(-2t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-1t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-3t) \end{bmatrix}}_{E_0(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 5/4 & 1/4 & -3/4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}$$

Sviluppando il prodotto delle tre matrici possiamo ottenere una differente espressione :

$$\exp(tA) = \frac{\exp(-2t)}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{\exp(-1t)}{4} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 10 & 2 & -6 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} + \exp(-3t) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Verifica : Calcoliamo  $\exp(0 A)$  :

$$\exp(0 A) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 10 & 2 & -6 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La derivata :

$$\frac{d\exp(t A)}{dt} = \frac{\exp(-2t)}{-2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{\exp(-1t)}{4} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 10 & 2 & -6 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} - 3 \exp(-3t) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ed il prodotto  $A \exp(t A)$  :

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & -7/4 \\ 7/2 & -3/2 & -5/2 \\ 13/4 & 1/4 & -19/4 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\exp(-2t)}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{\exp(-1t)}{4} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 10 & 2 & -6 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} + \exp(-3t) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

risultano coincidenti in accordo alla definizione vista in Par. 18.4.1. ■

18.5.7 Esempi di esponenziali di matrice con autovalori multipli

Questo paragrafo riporta alcuni esponenziali di matrice  $\exp(t A)$  nel caso in cui gli autovalori di  $A$  non sono distinti. Con questi esempi, senza entrare nei troppo pesanti dettagli teorici, intendiamo che il lettore si ricordi che l'esponenziale di matrice è definito per qualsiasi matrice  $A$ .

18.5.8 Autovalori multipli

Nel caso di autovalori multipli l'espressione  $A = S A^{ins} S^{-1}$  può trasformarsi, non necessariamente, in una forma più complicata (forma di Jordan), qui non menzionata. In questo caso, oltre ai vettori cisoidali, nella matrice  $\exp(t A)$  possono essere presenti anche vettori cisoidali moltiplicati per polinomi in  $t$ . Per esempio :

- coppia complessa coniugata di autovalori  $\sigma_k \pm j\omega_k$  con molteplicità  $\mu_k$  :  
cisoidi di pulsazione  $\sigma_k \pm j\omega_k$  moltiplicata per un polinomio in  $t$   
di grado non superiore a  $\mu_k - 1$ .
- coppia immaginaria coniugata di autovalori  $\pm j\omega_k$  con molteplicità  $\mu_k$  :  
sinusoide di pulsazione  $\omega_k$  moltiplicata per un polinomio in  $t$   
di grado non superiore a  $\mu_k - 1$ .

- autovalore reale  $\sigma_k$  con molteplicità  $\mu_k$  :  
esponenziale  $\exp(\sigma_k t)$  moltiplicato per un polinomio in  $t$   
di grado non superiore a  $\mu_k - 1$ .
- autovalore nell'origine con molteplicità  $\mu_0$  :  
polinomio in  $t$   
di grado non superiore a  $\mu_0 - 1$ .

Per un approfondimento si rinvia ai testi specializzati di Teoria dei Sistemi Lineari.

Esempio 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \implies \text{autovalori } 3, 3, 3 \implies \exp(t A) = \exp(3t) \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I calcoli seguiti per calcolare  $\exp(t A)$  non sono qui spiegati : comunque noi siamo in grado di controllare la correttezza del risultato, verificando che  $\exp(t A)$  soddisfa alle condizioni necessarie e sufficienti che lo definiscono (vedere Par. 18.4.1) :

Verifica : Calcoliamo  $\exp(0 A)$

$$\exp(0 A) = \exp(3 \times 0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0^2/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La derivata ed il prodotto  $A \exp(t A)$

$$\frac{d\exp(t A)}{dt} = A \exp(t A)$$

$$\exp(3t) \begin{bmatrix} 3 & 3t+1 & 3t^2/2+t^1 \\ 0 & 3 & 3t+1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \exp(3t) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \exp(3t) \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

risultano coincidenti in accordo alla definizione in Par. 18.4.1. ■

Esempio 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \text{autovalori } 0, 0, 1 \implies \exp(t A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \exp(t)-1 & 0 & \exp(t) \end{bmatrix}$$

I calcoli seguiti per calcolare  $\exp(t A)$  non sono qui spiegati : comunque noi siamo in grado di controllare la correttezza del risultato, verificando che  $\exp(t A)$  soddisfa alle condizioni necessarie e sufficienti che lo definiscono (vedere Par. 18.4.1) :

Verifica : Calcoliamo  $\exp(0 A)$

$$\exp(0 A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \exp(0)-1 & 0 & \exp(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La derivata ed il prodotto  $A \exp(t A)$

$$\frac{\exp(t A)}{dt}, \quad A \exp(t A)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \exp(t) - 1 & 0 & \exp(t) \end{bmatrix}$$

risultano coincidenti in accordo alla definizione in Par. 18.4.1.

### 18.6 SINUSOIDI

Tra le cisoidi si incontrano molto spesso le sinusoidi, che sono appunto le cisoidi con la pulsazione immaginaria  $s = j\omega$ . Il loro studio viene qui approfondito per la loro importanza. Esse sono le uniche cisoidi periodiche e, inoltre, servono come base per rappresentare qualsiasi funzione periodica mediante la serie di Fourier. Per questo motivo esse godono di proprietà che non sono condivise dalle altre cisoidi.

#### 18.6.1 Sinusoidi e fasori

Per la loro estrema importanza nelle applicazioni approfondiamo lo studio delle sinusoidi, benché esse costituiscano un caso particolare delle cisoidi. A differenza delle rimanenti cisoidi le sinusoidi sono periodiche, in quanto esse sono caratterizzate da una pulsazione complessa puramente immaginaria  $s_1 = \pm j\omega_1$ :

$$u_1(t) = \Re\{\bar{u}_1 \exp(j \omega_1 t)\} = \Re\{u_1 \exp(j \phi_1)\} \exp(\omega_1 t) = u_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

Ogni sinusoidi è individuata biunivocamente da tre parametri:

- *ampiezza*  $u_1$ , positiva per convenzione, coincidente col modulo del fasore.
- *fase (iniziale)*  $\phi_1$ , definita a meno di un multiplo intero di  $2\pi$
- *pulsazione*  $\omega_1$ , positiva per convenzione.

Le convenzioni sulla positività dell'ampiezza  $u_1$  e della pulsazione  $\omega_1$  non sono riduttive in quanto il loro segno può essere cambiato purché venga cambiata opportunamente anche la fase  $\phi$ :

$$\begin{aligned} -u_1 \rightarrow u_1 &\iff \phi_1 \rightarrow \phi_1 \pm \pi : \text{infatti } -u_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) = u_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1 \pm \pi) \\ -\omega_1 \rightarrow \omega_1 &\iff \phi_1 \rightarrow -\phi_1 : \text{infatti } u_1 \cos(-\omega_1 t + \phi_1) = u_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \end{aligned}$$

Altri parametri, dipendenti dai precedenti, vengono comunemente usati in alternativa:

- *frequenza*:  $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$
- *periodo*:  $T_1 = \frac{1}{f_1}$
- *valore efficace*:  $u_1^{eff} = \frac{u_1}{\sqrt{2}}$

Le seguenti proprietà sono casi particolari di quelle viste per le cisoidi ma vengono qui ripetute dal momento che vengono usate molto spesso:

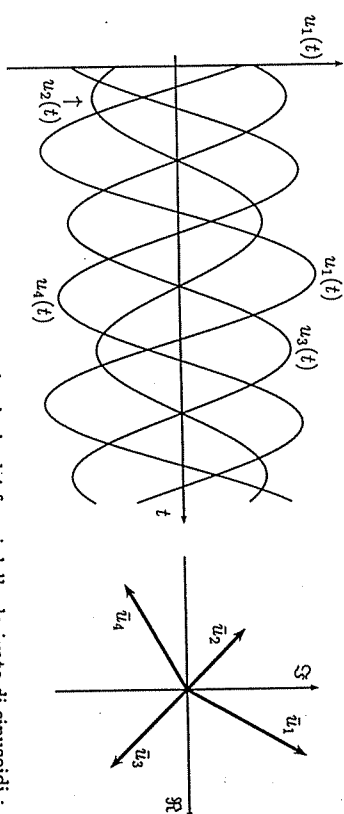
**Proprietà**: il fasore della derivata di una sinusoidi è uguale al fasore della sinusoidi moltiplicato per  $j\omega_1$ .

**Proprietà**: il fasore dell'integrale di una sinusoidi è uguale al fasore della sinusoidi diviso per  $j\omega_1$ .

**Esempi**: riportiamo qui sotto alcuni esempi di sinusoidi e dei corrispondenti fasori:

sinusoidi $u(t)$	fasore $\bar{u}$	
	rappresentazione polare	rappresentazione cartesiana
$u_1(t) = 2, 6 \cos(\omega_1 t + \pi/3)$	$\bar{u}_1 = 2, 6 \exp(+j\pi/3)$	$1, 3 + j1, 3\sqrt{3}$
$u_2(t) = 1, 6 \cos(\omega_1 t + 3/4\pi)$	$\bar{u}_2 = 1, 6 \exp(j3/4\pi)$	$-1, 6/\sqrt{2} + j1, 6/\sqrt{2}$
$u_3(t) = 2, 1 \cos(\omega_1 t - \pi/4)$	$\bar{u}_3 = 2, 1 \exp(-j\pi/4)$	$1, 05\sqrt{2} - j1, 05\sqrt{2}$
$u_4(t) = 2, 3 \cos(\omega_1 t - 5\pi/6)$	$\bar{u}_4 = 2, 3 \exp(-j5\pi/6)$	$-1, 15\sqrt{3} - j1, 15$
$15 \cos(\omega_1 t + \pi/4)$	$15 \exp(j\pi/4)$	$15/\sqrt{2} + j15/\sqrt{2}$
$8 \cos(\omega_1 t - \pi/6)$	$8 \exp(-j\pi/6)$	$4\sqrt{3} - j4$
$10 \cos(\omega_1 t - \pi/2)$	$10 \exp(-j\pi/2)$	$0 - j10$
$4 \sin(\omega_1 t)$	$4 \exp(-j\pi/2)$	$0 - j4$

Le sinusoidi e i corrispondenti fasori riportati nelle prime quattro righe del quadro soprastante sono tracciati nelle Fig. 18.6.



**Esempi**: riportiamo alcuni esempi sul calcolo dei fasori delle derivate di sinusoidi:

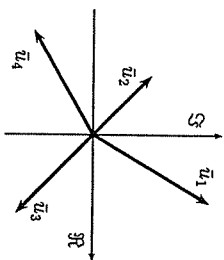
fasore		sinusoide
representazione polare	representazione cartesiana	
$20 \exp(+j5\pi/6)$	$-10\sqrt{3} + j10$	$\frac{d[4 \cos(5t + \pi/3)]}{dt}$
$6 \exp(+j2\pi/3)$	$-3 + j3\sqrt{3}$	$\frac{d[2 \cos(3t + \pi/6)]}{dt}$

WWWWWWW?? FARE FIGURA di sinusoidi con le loro derivate nel dominio del tempo mettendo in rilievo che la derivata resta amplificata se aumenta la frequenza. ???WWWWWW

18.6.2 Diagramma fasoriale

Un insieme di fasori di sinusoidi isofrequenziali può essere rappresentato nel piano dei numeri complessi. Questa rappresentazione vien detta *diagramma fasoriale*. La seguente terminologia è di uso comune quando vengono confrontati dei fasori ovvero le corrispondenti sinusoidi isofrequenziali; siano  $\bar{u}_1 = u_1 \exp(j\phi_1)$  e  $\bar{u}_2 = u_2 \exp(j\phi_2)$  due fasori qualsiasi, si dice che :

$\phi_a = \phi_b$	$\bar{u}_a$ e $\bar{u}_b$ sono <i>in fase</i>
$\phi_b + \pi > \phi_a > \phi_b$	$\bar{u}_a$ è <i>in anticipo</i> rispetto a $\bar{u}_b$
$\phi_b - \pi < \phi_a < \phi_b$	$\bar{u}_a$ è <i>in ritardo</i> rispetto a $\bar{u}_b$
$\phi_a - \phi_b = \pm\pi/2$	$\bar{u}_a$ e $\bar{u}_b$ sono <i>in quadratura</i>
$\phi_a - \phi_b = \pm\pi$	$\bar{u}_a$ e $\bar{u}_b$ sono <i>in opposizione</i>



La figura  $\surd$  riporta quattro fasori. Possiamo osservare che  $\bar{u}_1$  è in ritardo rispetto a  $\bar{u}_2$  e  $\bar{u}_4$  e in anticipo rispetto a  $\bar{u}_3$ ,  $\bar{u}_3$  è in ritardo rispetto a  $\bar{u}_1$ , in anticipo rispetto a  $\bar{u}_4$  e in opposizione di fase con  $\bar{u}_2$ . Possiamo concludere che nessuno dei quattro fasori è in ritardo ovvero in anticipo rispetto a tutti gli altri.

**Avvertenza:** tenere presente che nelle precedenti definizioni occorre che  $\phi_1$  e  $\phi_2$  siano definite in modo che  $|\phi_1 - \phi_2| \leq \pi$ . Quindi occorre fare attenzione ai multipli interi arbitrari di  $2\pi$  con cui è definita la fase di ciascun fasore. ■

18.7 FUNZIONI PERIODICHE

WWWWW VEDERE TESTO DI ROSA-THOMAS E CIVALLERI

Una qualsiasi funzione periodica  $f(t)$  di pulsazione  $\omega_1 = 2\pi/T_1$  può essere descritta dal cosiddetto sviluppo in serie di Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k \omega_1 t) + b_k \sin(k \omega_1 t)] = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k \omega_1 t + \phi_k)$$

dove ogni coefficiente della serie è definito dalle seguenti formule :

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(\tau) d\tau, \quad a_k = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} f(\tau) \cos(k \omega_1 \tau) d\tau \quad \text{per } k = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} f(\tau) \sin(k \omega_1 \tau) d\tau \quad \text{per } k = 1, 2, 3, \dots$$

Le due coppie di parametri  $(A_k, \phi_k)$  e  $(a_k, b_k)$  sono legate dalle dalle :

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \phi_k = \angle(a_k - j b_k) \quad \text{per } k = 1, 2, 3, \dots$$

$$a_k = A_k \cos(\phi_k), \quad b_k = -A_k \sin(\phi_k) \quad \text{per } k = 1, 2, 3, \dots$$

Se la serie viene troncata dopo i primi  $n + 1$  termini, noi otteniamo una approssimazione della  $f(t)$  :

$$f(t) \simeq a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k \omega_1 t) + b_k \sin(k \omega_1 t)] = a_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(k \omega_1 t + \phi_k)$$

Questo sviluppo in serie costituisce una funzione analiticamente continua dal momento che ogni funzione "cos" e "sin" è analiticamente continua. D'altra parte anche una funzione discontinua, per esempio una funzione periodica con forma di onda rettangolare, può essere sviluppata con questo sviluppo in serie. Negli intorno dei punti di discontinuità l'approssimazione sarà soggetta ad un errore maggiore o uguale in valore assoluto alla metà del salto dovuto alla discontinuità. Se il numero dei termini dello sviluppo presi in considerazione per il calcolo numerico è adeguato, lo sviluppo stesso presenterà in corrispondenza della discontinuità una pendenza assai elevata, la quale fa del suo meglio per avvicinare la discontinuità.

**Commento:** Se la funzione periodica ha valor medio nullo si ha  $a_0 = 0$ . Se essa presenta una simmetria pari rispetto all'asse delle ordinate, i coefficienti  $b_1, b_2, b_3, \dots$  risultano nulli, mentre, se essa ha presenta una simmetria dispari, i coefficienti  $a_1, a_2, a_3, \dots$  risultano nulli.

Lo sviluppo in serie di Fourier consente di giungere ad un risultato molto importante :

**Avvertenza:** vedremo nel Cap. 22, che lo sviluppo in serie di Fourier ci consente di analizzare qualsiasi circuito lineare con grandezze impresse periodiche, applicando il principio di sovrapposizione. La soluzione può venire espressa come una sommatoria partendo dai singoli termini sinusoidali dello sviluppo in serie.

WWWWW dire che il valore medio del quadrato della funzione periodica è uguale alla somma dei valori medi dei quadrati delle armoniche.

WWWWW In corrispondenza di una discontinuità della funzione periodica, la convergenza della serie non è uniforme. Si ha un doppio limite per  $t \rightarrow t_{disc}$  e per  $k \rightarrow \infty$ . Occorre vedere legge con cui  $t$  e  $k$  tendono al proprio limite.

WWWWW CONTROLLARE sul testo (Amerio ?) usato dagli studenti in analisi I e II.



e-mail all'autore : Siamo un comitato di sinusoidi nato con lo scopo di difendere la nostra identità. Noi abbiamo letto le bozze di questo capitolo che ci sono state inviate da una cisoida, che non vuole essere nominata. Noi riteniamo che tu non ci abbia presentato sotto la luce che ci meritiamo. Da un lato veniamo presentate in mezzo alle cisoidi e dall'altro in mezzo alle funzioni periodiche. Ma rispetto alle altre cisoidi noi mostriamo una insuperabile coerenza morale tanto è vero che solo noi rimaniamo fedeli a noi stesse anche attraverso i secoli, mentre le altre cisoidi non durano perché si afflosciano o esplodono. Rispetto alle altre funzioni periodiche noi abbiamo origini molto più nobili, come attestato dal nostro DNA purissimo che si trasmette inalterato di "derivazione in derivazione", come garantito dai più illustri matematici. Le altre funzioni periodiche hanno un DNA meno puro in seguito ad incroci e questo è attestato dal fatto che il loro DNA si modifica di "derivazione in derivazione": i connotati della derivata di una funzione periodica triangolare non assomigliano certo a quelli della funzione originaria e neppure nelle derivazioni successive i "connotati triangolari" ritornano fuori ?

## 18.8 APPENDICE SUI NUMERI COMPLESSI, AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Questa appendice riguarda le formule trigonometriche e i numeri complessi, che risultano indispensabili nell'analisi dei circuiti dinamici lineari. Essi servono per trattare la pulsazione complessa e i fasori delle cisoidi e sinusoidi anche nei prossimi capitoli.

### 18.8.1 Formule trigonometriche

Si ricordano le formule trigonometriche che ricorrono spesso nell'analisi dei circuiti :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + 2k\pi) &= \cos(\alpha) \quad \forall k \text{ intero} & , & \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha) \quad \forall k \text{ intero} \\ \sin(\alpha + \pi/2) &= \cos(\alpha) & , & \quad \cos(\alpha + \pi/2) = -\sin(\alpha) & , & \quad [\cos(\alpha)]^2 + [\sin(\alpha)]^2 = 1 \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & , & \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(2\alpha) &= 2[\cos(\alpha)]^2 - 1 = 1 - 2[\sin(\alpha)]^2 & , & \quad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} & , & \quad \sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} \\ [\cos(\alpha)]^2 &= [1 + \cos(2\alpha)]/2 & , & \quad [\sin(\alpha)]^2 = [1 - \cos(2\alpha)]/2 \end{aligned}$$

### 18.8.2 Numeri complessi

Questo paragrafo richiama i concetti fondamentali della teoria dei numeri complessi.

**Notazione cartesiana :** Un numero complesso  $z$  è definito da una coppia di numeri reali : il primo,  $a = \Re(z) \in \mathbb{R}^1$ , è la *parte reale* e il secondo,  $b = \Im(z) \in \mathbb{R}^1$ , la *parte immaginaria*. Il numero complesso viene rappresentato da  $z = a + j b$ , dove il simbolo  $j$  definisce un'entità matematica tale che  $j^2 = j \times j = -1$ .

**Nullità e uguaglianza :** Un numero complesso  $z$  è nullo,  $z = 0$ , qualora  $\Re(z) = 0$  e  $\Im(z) = 0$ . I numeri complessi  $z_1$  e  $z_2$  sono uguali,  $z_1 = z_2$ , se sono uguali le parti reali,  $a_1 = a_2$ , e le parti immaginarie,  $b_1 = b_2$ .

**Piano complesso :** Ogni numero complesso può essere associato al punto di un piano (detto *piano complesso*) in cui l'ascissa coincide con la parte reale e l'ordinata con la parte immaginaria.

**Operazioni algebriche :** Per i numeri complessi sono definite le stesse operazioni algebriche già definite per i numeri reali. Se usiamo la notazione cartesiana, abbiamo :

addizione	$z = z_1 + z_2$	$z = a + jb = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
sottrazione	$z = z_1 - z_2$	$z = a - jb = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$
prodotto	$z = z_1 z_2$	$z = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
inversione	$z = \frac{1}{z_1}$	$z = \frac{a_1 - jb_1}{a_1^2 + b_1^2}$
divisione	$z = \frac{z_1}{z_2}$	$z = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$

WWWWWW?? AGGIUNGERE nella tabella qui sopra quadrato, radice quadrata e cubo di numeri complessi

**Numeri complessi coniugati** : un numero complesso  $z_2$  è il coniugato di  $z_1$ , cioè  $z_2 = z_1^*$ , qualora le parti reali siano uguali e le parti immaginarie abbiano lo stesso valore assoluto ma segno opposto:  $\Re(z_1) = \Re(z_2)$  e  $\Im(z_1) = -\Im(z_2)$ .

**Proprietà** : un numero complesso e il suo coniugato soddisfano alle relazioni :

$$z_1 + z_1^* = 2a = 2\Re(z_1) \quad , \quad z_1 - z_1^* = j2b = j2\Im(z_1) \quad , \quad z_1 z_1^* = a^2 + b^2$$

**Notazione polare** : Oltre alla notazione cartesiana esiste anche la **notazione polare**, anch'essa costituita da una coppia di numeri reali : il **modulo** (ovvero **ampiezza**)  $|z|$  e l'**argomento** (ovvero la **fase**)  $\phi = Lz$ . Il modulo e la fase sono ottenuti dalla parte reale e immaginaria :

$$\text{modulo } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad \text{fase } Lz = \begin{cases} \arctan(b/a) & \forall a > 0 \\ \arctan(b/a) \pm \pi & \forall a < 0 \end{cases}$$

Con la notazione polare un numero complesso viene indicato da  $z = |z| e^{j\phi}$ .

**Trasformazione delle notazioni** : Per passare dalla notazione polare a quella cartesiana occorre richiamare la formula di EULERO :  $e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$ , che ci consente di scrivere :

$$\text{parte reale } a = |z| \cos(\phi) \quad , \quad \text{parte immaginaria } b = |z| \sin(\phi)$$

È ben noto che la fase di un numero complesso è strettamente legata all'arcotangente del rapporto tra la parte immaginaria e quella reale. Questo legame richiede una precisazione, in quanto il lettore sprovveduto spesso rimane tratto in inganno :

La fase di un numero complesso è definita a meno di multipli interi di  $2\pi$  l'arcotangente del rapporto tra la parte immaginaria e quella reale è definita a meno di multipli interi di  $\pi$

Qui sotto viene riportata l'espressione della fase di un numero complesso in funzione della parte reale e immaginaria, mediante l'uso della funzione arcotangente :

Fase $Lz$ di un numero complesso : $z = a + jb$			$k$ intero arbitrario
$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$	
$a > 0$	$Lz = \arctan(b/a) + 2k\pi$	$Lz = 2k\pi$	$Lz = \arctan(b/a) + 2k\pi$
$a = 0$	$Lz = \pi/2 + 2k\pi$	indeterminata	$Lz = -\pi/2 + 2k\pi$
$a < 0$	$Lz = \arctan(b/a) \pm \pi + 2k\pi$	$Lz = \pm\pi + 2k\pi$	$Lz = \arctan(b/a) \pm \pi + 2k\pi$

**Avvertenza** : Il fatto che la fase sia indeterminata qualora la parte reale e immaginaria siano nulle (ovvero qualora sia nullo il modulo) deve essere interpretato che esiste un solo numero complesso con modulo nullo nel senso che in questo caso la fase non ha senso. La fase non ha interesse anche per l'inverso dello 0 ( $\infty$ ) definito ricorrendo a un passaggio al limite.

In notazione polare il coniugato diventa  $z^* = |z| e^{-j\phi}$ .

I precedenti risultati possono essere ricordati meglio visualizzando il problema nei quattro quadranti del piano complesso.

**Commento** : Quando siamo in presenza di una funzione complessa di variabile reale o immaginaria, anche la fase della funzione complessa risulta una funzione reale di variabile reale o immaginaria. In questo caso l'addendo arbitrario  $2k\pi$  della fase deve essere scelto in modo coerente prendendo in considerazione la funzione complessa nel suo assieme (vedere ???Cap. 20??). In altre parole, non possiamo scegliere l'addendo arbitrario per un dato valore della variabile indipendentemente da quello scelto per gli altri valori.

**Operazioni algebriche** : La notazione polare risulta molto comoda per eseguire il prodotto, l'inversione e il rapporto di numeri complessi :

prodotto	$z = z_1 z_2$	$z =  z  \exp(jLz) =  z_1   z_2  \exp(jLz_1 + jLz_2)$
inversione	$z = 1/z_1$	$z =  z  \exp(jLz) = [1/ z_1 ] \exp(-jLz_1)$
divisione	$z = z_1/z_2$	$z =  z  \exp(jLz) = [ z_1 / z_2 ] \exp(jLz_1 - jLz_2)$

WWWWWW?? INSERIRE nella tabella anche potenze intere e radici quadrate, cubiche, eccetera. ???WWWWWW

Per svolgere la somma di numeri complessi la notazione polare non è opportuna; conviene utilizzare la notazione cartesiana per gli addendi e per il numero risultante.

**Commento** : Siccome per i numeri complessi sono definite le stesse operazioni algebriche già introdotte per i numeri reali, qualsiasi manipolazione algebrica sui numeri reali può essere estesa anche ai numeri complessi.

### 18.8.3 Autovalori e autovettori

Questa appendice riguarda i concetti che sono alla base degli autovalori e autovettori di una matrice quadrata che vengono usati nel calcolo dell'esponenziale di matrice. Vengono richiamati brevemente le definizioni di autovalori e autovettori di una matrice  $A$  di dimensioni  $n \times n$ .

Costruiamo la matrice  $[A - \lambda I_{n,n}]$ , in cui  $\lambda$  è una variabile scalare e  $I_{n,n}$  la matrice identità  $n \times n$ . Il determinante  $|A - \lambda I_{n,n}|$  è un polinomio in  $\lambda$  con coefficienti reali : siccome il coefficiente del termine di grado più alto  $\lambda^n$  è uguale a 1, il suddetto polinomio ha sempre grado  $n$  e, conseguentemente, ha  $n$  radici reali e/o complesse coniugate  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ :

$$|A - \lambda I_{n,n}| = 0 \quad \text{per } \lambda = \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

**Definizione** : le radici  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  dell'equazione  $|A - \lambda I_{n,n}| = 0$  vengono chiamati **autovalori** della matrice  $A$ .

Costruiamo i seguenti  $n$  sistemi di equazioni lineari

$$[A - \lambda_k I_{n,n}] \vec{x}^k = 0 \quad \text{per } k = 1, 2, \dots, n$$

Ognuno di questi  $n$  sistemi è omogeneo (termini noti sono nulli) e singolare (in seguito alla definizione di autovalore) dal momento che la matrice  $A - \lambda_k I_{n,n}$  ha rango  $n - 1$  nel caso che l'autovalore  $\lambda_k$  sia semplice. Quindi il vettore incognito  $\vec{x}^k$  è definito a meno di un fattore moltiplicativo arbitrario.

**Definizione :** Il vettore  $\tilde{x}^k$  soluzione del sistema viene detto *autovettore* della matrice  $A$  associato all'autovale  $\lambda_k$ .

**Commento :** ogni autovettore associato a un autovale reale è a sua volta reale, dal momento che la matrice del sistema lineare  $[A - \lambda_k I_{n,n}]$  è a sua volta reale, mentre la coppia di autovettori associati a una coppia complessa coniugata di autovalori è, a sua volta, complessa coniugata.

**Normalizzazione dell'autovettore :** spesso per ogni autovettore il corrispondente autovettore viene normalizzato in modo che  $[\tilde{x}^k]^T \tilde{x}^k = 1$ . Anche dopo la suddetta normalizzazione per ogni autovale reale sono definiti due autovettori uguali a meno del segno, mentre per ogni coppia di autovalori complessi coniugati sono definiti infinite coppie di autovettori uguali a meno di una rotazione di fase arbitraria.

**Proprietà :** Qualora gli autovalori di  $A$  siano distinti, valgono le due relazioni seguenti :

$$A = S A^{diag} S^{-1} \text{ dove } A^{diag} = \text{Diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \text{ e } S = [\tilde{x}^1 \tilde{x}^2 \dots \tilde{x}^n]$$

Questa relazione vale qualsiasi siano le costanti moltiplicative arbitrarie scelte per ciascun autovettore (colonna di  $S$ ). La  $A^{diag}$  è la matrice diagonale, i cui elementi (sulla diagonale) sono costituiti dagli autovalori, e  $S$  è la matrice costituita dagli autovettori collocati nello stesso ordine e già introdotta nella Sez. 14.2.

**Proprietà :** La precedente scomposizione di  $A$  consente di ottenere una analoga scomposizione per una potenza di ordine qualsiasi della stessa matrice :

$$A^2 = S [A^{diag}]^2 S^{-1}, \quad A^3 = S [A^{diag}]^3 S^{-1}, \quad A^4 = S [A^{diag}]^4 S^{-1}, \quad \dots$$

I risultati suddetti consentono di ritrovare l'espressione analitica dell'espansione di matrice già vista nella Sez. 18.xx. La diagonalizzazione della matrice  $S A^{diag} S^{-1} = A$  può essere estesa anche alla matrice  $\exp(t A)$  nel caso in cui gli  $n$  autovalori siano distinti.

**18.8.4 Espansione di Taylor dell'espansione di matrice**

**Proprietà :** la seguente espressione "diagonalizzata" vale per l'espansione di matrice :

$$\exp(t A) = S \text{Diag}[\exp(t s_1), \exp(t s_2), \dots, \exp(t s_n)] S^{-1}$$

**Prova :** applicando l'espressione diagonalizzata delle potenze di  $A$  all'espansione di Taylor  $\exp(t A)$  si ha :

$$\exp(t A) = S S^{-1} + S \frac{t}{1!} A^{diag} S^{-1} + S \frac{t^2}{2!} [A^{diag}]^2 S^{-1} + S \frac{t^3}{3!} [A^{diag}]^3 S^{-1} + \dots$$

e raccogliendo come pre-fattore comune la matrice  $S$  e come post-fattore comune la sua inversa  $S^{-1}$  si ha :

$$\exp(t A) = S \left[ I_{n,n} + \frac{t}{1!} A^{diag} + \frac{t^2}{2!} [A^{diag}]^2 + \frac{t^3}{3!} [A^{diag}]^3 + \dots \right] S^{-1}$$

La matrice compresa tra  $[ \ ]$  è diagonale : gli  $n$  elementi della diagonale coincidono con le ben note espansioni di Taylor degli esponenziali scalari  $\exp(t s_1), \exp(t s_2), \dots, \exp(t s_n)$ .

Consideriamo le soluzioni di una generica equazione di stato omogenea : si ha la seguente

**Proprietà :** L'insieme di tutte le soluzioni di una equazione di stato omogenea

**Proprietà :**  $\tilde{x}(t) = A x(t)$  costituisce uno spazio lineare.

**Prova :** Siano  $x^{(p1)}(t)$  e  $x^{(p2)}(t)$  due soluzioni qualsiasi dell'equazione di stato. Una qualsiasi combinazione lineare di  $x^{(p1)}(t)$  e  $x^{(p2)}(t)$  è, a sua volta, una soluzione dell'equazione stessa.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}^{(p1)}(t) &= A x^{(p1)}(t) \\ \tilde{x}^{(p2)}(t) &= A x^{(p2)}(t) \end{aligned} \right\} \implies [\alpha_1 \tilde{x}^{(p1)}(t) + \alpha_2 \tilde{x}^{(p2)}(t)] = A [\alpha_1 x^{(p1)}(t) + \alpha_2 x^{(p2)}(t)]$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1$

Le dimensioni del suddetto spazio lineare saranno accertate più avanti.

**Proprietà :** Sia  $x(t)$  una soluzione qualsiasi di un'equazione di stato omogenea. Le sue derivate  $\dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(2)}(t)$  sono, a loro volta, soluzioni della stessa equazione :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = A x(t) &\implies \ddot{x}(t) = A \dot{x}(t) \implies x^{(3)}(t) = A \dot{x}^{(2)}(t) \implies \dots \\ &\Downarrow \\ &\implies \ddot{x}(t) = A^2 x(t) \implies x^{(3)}(t) = A^3 x(t) \implies \dots \end{aligned}$$

ove  $x^{(\mu)}(t)$  denota la  $\mu$ -esima derivata di  $x(t)$  ed  $A^\mu$  la  $\mu$ -esima potenza di  $A$ .

**Derivate di ordine superiore :** Assumiamo di conoscere il valore del vettore di stato  $x(t)$  in  $t = 0 : x_0 = x(0)$ . Anche le derivate di qualsiasi ordine in  $t = 0$  sono note :

$$\dot{x}(0) = A x_0, \quad \ddot{x}(0) = A^2 x_0, \quad x^{(3)}(0) = A^3 x_0, \quad \dots$$

**Espansione di Taylor della soluzione :** Possiamo scrivere l'espansione di Taylor della soluzione  $x(t)$  intorno al punto  $t = 0 :$

$$x(t) = x(0) + \frac{t}{1!} \dot{x}(0) + \frac{(t)^2}{2!} \ddot{x}(0) + \frac{(t)^3}{3!} x^{(3)}(0) + \dots$$

Indicando con  $I_{n,n}$  la matrice identità  $n \times n$ , l'espansione può essere riscritta nella forma :

$$x(t) = \left[ I_{n,n} + \frac{t}{1!} A + \frac{(t)^2}{2!} A^2 + \frac{(t)^3}{3!} A^3 + \dots \right] x_0$$

Si può dimostrare che la suddetta espansione converge  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\forall t \in \mathbb{R}_t$ .

# 19 SOLUZIONI DEI CIRCUITI DINAMICI e LINEARI

## 19.1 SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI STATO

Nel Cap. 17 abbiamo imparato a scrivere le equazioni di stato e di uscita, che descrivono un circuito dinamico e lineare. Qui consideriamo la soluzione dell'equazione di stato, mediante gli strumenti introdotti nel Cap. 18, con lo scopo di descrivere il comportamento dinamico di questi circuiti sia nondegeneri sia degeneri. L'insieme delle soluzioni costituisce uno spazio affine di dimensioni  $n$ , caratterizzato dalle *pulsazioni* e dai *modi naturali* del circuito. Inoltre si dimostra il principio di sovrapposizione rispetto alle condizioni iniziali.

### 19.1.1 Soluzione dell'equazione di stato

Consideriamo l'equazione di stato di un generico circuito lineare nonomogeneo, sia nondegeneri sia degeneri (vedere Ssez. 17.3 e 17.5):

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B \hat{u}(t) + B' \dot{u}(t) + B'' \ddot{u}(t) + \dots \quad \text{dove } x(t) \in \mathbb{R}^n(t)$$

in cui le forme d'onda degli ingressi  $\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t), \dots, \hat{u}_r(t)$  possono assumere andamenti qualsiasi: le loro derivate possono essere presenti solo nel caso che il circuito sia degeneri. Senza ledere la generalità del nostro approccio, noi possiamo sostituire il vettore di stato incognito  $x(t) \in \mathbb{R}^n(t)$  con un altro vettore incognito  $\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^n(t)$  legato al precedente dalla:

$$x(t) = \exp[(t - t_0)A] \tilde{x}(t) \implies \tilde{x}(t) = A \exp[(t - t_0)A] \tilde{x}(t) + \exp[(t - t_0)A] \tilde{x}(t)$$

dove  $\exp[(t - t_0)A]$  è stato introdotto nella Sez. 18.4 e la seconda equazione è ottenuta derivando la prima. Sostituendo  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$  nell'equazione di stato, otteniamo la seguente equazione differenziale:

$$\begin{aligned} A \exp[(t - t_0)A] \tilde{x}(t) + \exp[(t - t_0)A] \dot{\tilde{x}}(t) &= \\ = A \exp[(t - t_0)A] \tilde{x}(t) + B \dot{u}(t) + B' \ddot{u}(t) + B'' \ddot{\ddot{u}}(t) + \dots &\implies \\ \implies \dot{\tilde{x}}(t) = \exp[-(t - t_0)A] [B \dot{u}(t) + B' \ddot{u}(t) + B'' \ddot{\ddot{u}}(t) + \dots] & \end{aligned}$$

Integrando i due membri otteniamo la soluzione:

$$\tilde{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \exp[-(\tau - t_0)A] [B \dot{u}(\tau) + B' \ddot{u}(\tau) + B'' \ddot{\ddot{u}}(\tau) + \dots] d\tau$$

dove il vettore  $x_0$  raggruppa le costanti arbitrarie di integrazione rappresentanti le condizioni iniziali. Infatti si ha che  $\tilde{x}(t_0) = x(t_0) = x_0$ . Moltiplicando per  $\exp[(t - t_0)A]$  i due membri, ripristiniamo il vettore di stato originario  $x(t)$ :

$$x(t) = \underbrace{\exp[(t - t_0)A] x_0}_{\text{soluzione libera } x^{\text{lib}}(t)} + \underbrace{\int_{t_0}^t \exp[(t - \tau)A] [B \dot{u}(\tau) + B' \ddot{u}(\tau) + B'' \ddot{\ddot{u}}(\tau) + \dots] d\tau}_{\text{soluzione forzata } x^{\text{for}}(t)}$$

**Proprietà:** Esiste una corrispondenza biunivoca tra una qualsiasi soluzione  $x(t)$  e il suo valore  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  in  $t = t_0$ . Infatti una volta fissato  $x_0$  esiste un'unica soluzione  $x(t)$  e una volta scelta la  $x(t)$  esiste un unico vettore  $x_0 = x(t_0)$ . ■

**Definizioni:** Qualora il vettore  $x_0$  assuma un valore specifico, siamo in presenza di una *soluzione particolare* dell'equazione di stato  $x^{\text{part}}(t) = \exp[(t - t_0)A] x_0 + x^{\text{for}}(t)$ . Qualora considerassimo l'insieme di tutte le soluzioni  $x(t) \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$  siamo in presenza della *soluzione generale* dell'equazione di stato. ■

Nel Cap. 17 abbiamo imparato a scrivere le equazioni di stato e di uscita, che descrivono un circuito dinamico e lineare. Nel successivo Cap. 18 abbiamo introdotto i vettori e le matrici cisoidali e gli esponenziali di matrice, strumenti indispensabili per risolvere sistemi di equazioni differenziali. Questo capitolo considera le soluzioni delle equazioni di stato e di uscita dei circuiti dinamici lineari e le loro proprietà.

**Sez. 19.1 : Soluzione dell'equazione di stato :** La *soluzione generale* dell'equazione di stato dei circuiti dinamici, sia nondegeneri sia degeneri, viene espressa mediante l'esponenziale di matrice e risulta scomposta nella somma della *soluzione libera* e della *soluzione forzata*. Essa costituisce uno spazio affine di dimensioni  $n$ , caratterizzato dalle *pulsazioni* e dai *modi naturali*.

**Sez. 19.2 : Soluzioni particolari e similari :** La soluzione generale dell'equazione di stato nonomogenea coincide con la soluzione generale dell'equazione omogenea associata sommata a una soluzione particolare qualsiasi dell'equazione originaria. In pratica, quando le funzioni forzanti sono cisoidali conviene scegliere come soluzione particolare la *soluzione similare*, che è costituita da un vettore cisoidale isofrequenziale con le cisoidi forzanti.

**Sez. 19.3 : Determinazione delle soluzioni similari :** Vengono esaminate le condizioni di esistenza delle soluzioni similari associate alle specifiche sottoclassi di cisoidi: funzioni costanti, sinusoidi, esponenziali. Inoltre vengono introdotti i metodi analitici per il loro calcolo.

**Sez. 19.4 : Stabilità :** La soluzione viene scomposta nella somma della *soluzione transitoria* e della *soluzione a regime*. Viene introdotto il concetto di *stabilità* per i circuiti dinamici lineari, comune a qualsiasi sistema dinamico lineare. Esso conduce a notevoli semplificazioni e proprietà importanti sia dal punto di vista concettuale sia dal punto di vista ingegneristico.

**Sez. 19.5 : Interpretazione della continuità analitica delle candidate :** Nel Cap. 17 erano state discusse le condizioni per cui le tensioni ai capi dei condensatori e le correnti fluenti negli induttori (candidate di stato) sono analiticamente continue o discontinue. Qui viene interpretato questo risultato da un punto di vista fisico.

**Sez. 19.6 : Procedura cartagena :** Per calcolare la soluzione effettiva di un circuito dinamico lineare, cioè l'andamento in funzione del tempo di una o più variabili (tensione e/o corrente) del circuito si consiglia di procedere nel modo riassunto qui di seguito e basato sulla teoria sviluppata in precedenza.

## 19.1.2 Proprietà della soluzione generale

**Soluzione forzata** : Il termine  $x^{for}(t)$  dipende dalle grandezze impresse  $\hat{u}(t)$  e non dipende dal vettore delle condizioni iniziali  $x_0$ . Esso coincide con quell'unica soluzione del circuito originario in cui tutte le variabili di stato sono nulle per  $t = 0$ . Esso viene chiamato *soluzione forzata*.

**Soluzione libera** : Il termine  $x^{lib}(t) = \exp[(t - t_0)A] x_0$  dipende esclusivamente dal vettore delle condizioni iniziali  $x_0$  e non dipende dalle grandezze impresse (ingressi)  $\hat{u}(t)$ . Esso coincide con la soluzione del circuito omogeneo associato soggetto allo stesso vettore iniziale  $x_0$  e viene chiamato *soluzione libera*.

**Proprietà** : L'espressione analitica della soluzione generale di un'equazione di stato non omogenea dimostra immediatamente che la soluzione stessa costituisce uno spazio affine (*affinità lineare*) di dimensione  $n$ . Se l'equazione è omogenea, la soluzione generale costituisce uno spazio lineare di dimensioni  $n$ . Infatti nel caso omogeneo la soluzione forzata  $x^{for}(t)$  sparisce dalla soluzione generale. D'altra parte è proprio  $x^{for}(t)$  che trasla lo spazio lineare costituito da tutte le soluzioni dell'equazione di stato omogenea associata nello spazio affine costituito da tutte le soluzioni dell'equazione di stato non omogenea.

**Terminologia** : Come già accennato nel Cap. 5, l'aggettivo "lineare" usato accanto alle termine "spazio" corrisponde al doppio aggettivo "lineare omogeneo" usato accanto alle usuali equazioni algebriche e differenziali e anche in questi appunti. L'aggettivo "affine" accanto al termine "spazio" corrisponde al doppio aggettivo "lineare non omogeneo" usato nelle usuali equazioni algebriche e differenziali.

Le suddette considerazioni suggeriscono di introdurre :

**Pulsazioni e modi naturali** : Le proprietà dell'esponenziale di matrice discusse nel Cap. 18 ci dicono che la soluzione libera è costituito dalla combinazione di vettori cisoidali (isofrequenziali) :

$$x^{lib}(t) = \exp[(t - t_0)A] x_0 = \left\{ \sum_{k=1}^n \exp(s_k t) x^k [S^{-1}]_k^e \right\} x_0$$

i termini della sommatoria costituiscono i *modi naturali* del circuito, mentre le rispettive pulsazioni complesse, coincidenti con gli autovalori della matrice di stato, prendono il nome di *pulsazioni naturali*. L'aggettivo "naturale" ci ricorda che queste forme d'onda non dipendono dagli ingressi  $\hat{u}(t)$  (cioè dall'esterno) ma nascono naturalmente in un circuito dinamico sia omogeneo (privò di ingressi) sia non omogeneo.

**Base della soluzione generale** : I modi naturali costituiscono una base nello spazio lineare delle soluzioni molto conveniente dal momento che essi sono le soluzioni più semplici tra tutte le soluzioni particolari dal punto di vista analitico. A questo fine il vettore di cisoidi originati da una coppia complessa coniugata di autovalori contano come due modi naturali. Quindi ogni soluzione particolare è una combinazione lineare dei modi naturali e della soluzione forzata e si distingue dalle altre soluzioni particolari per il valore dei coefficienti della combinazione. Se i coefficienti sono lasciati indeterminati noi siamo in presenza della soluzione generale.

## 19.1.3 Principio di sovrapposizione per le condizioni iniziali

Siccome la soluzione generale di un circuito dinamico omogeneo costituisce uno spazio lineare, vale il principio di sovrapposizione per le condizioni iniziali :

**Teorema** : sia dato un circuito dinamico lineare omogeneo e siano dati due vettori qualsiasi delle condizioni iniziali  $x_0^{(1)}$  e  $x_0^{(2)}$  con le rispettive soluzioni particolari  $x^{(p1)}(t)$  e  $x^{(p2)}(t)$ . Se combiniamo linearmente questi due vettori  $x_0^{(3)} = \alpha_1 x_0^{(1)} + \alpha_2 x_0^{(2)}$ , la rispettiva soluzione particolare  $x^{(p3)}(t)$  risulta

$$x^{(p3)}(t) = \exp[(t - t_0)A] [\alpha_1 x_0^{(1)} + \alpha_2 x_0^{(2)}] = \alpha_1 x^{(p1)}(t) + \alpha_2 x^{(p2)}(t) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1$$

**Applicazione** : Questo principio ci consente di analizzare un circuito dinamico tempo-invariante lineare e omogeneo applicando le condizioni iniziali sui componenti conservativi una alla volta e sommando tutti i contributi. Il vettore delle condizioni iniziali sia scomposto nella somma di  $n$  vettori, ciascuno con un solo elemento non nullo :

$$\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_{02} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix}$$

$$x_0 = x_0^{(1)} + x_0^{(2)} + \dots + x_0^{(n)}$$

Questa scomposizione suggerisce di calcolare la soluzione effettiva applicando le condizioni iniziali a un elemento dinamico per volta e sommando tutti i contributi :

$$x(t) = \alpha_1 \exp[(t - t_0)A] x_0^{(1)} + \alpha_2 \exp[(t - t_0)A] x_0^{(2)} + \dots + \alpha_n \exp[(t - t_0)A] x_0^{(n)}$$

**Commento** : Dal punto di vista delle applicazioni numeriche il principio di sovrapposizione può risultare inutilmente laborioso rispetto ad altri metodi. Comunque, esso ha un'importanza concettuale.

## 19.1.4 Stato di un circuito

Le precedenti conclusioni sulla soluzione generale dell'equazione di stato richiedono alcune riflessioni. Un circuito fisico, il cui modello sia dinamico e lineare, ha necessariamente un'unica soluzione, mentre le soluzioni del sistema differenziale sono infinite. Quindi, per conoscere quest'unica soluzione occorre avere a disposizione ulteriori informazioni sul circuito. Queste informazioni sono costituite dallo stato del circuito all'istante  $t_0$  in cui iniziamo ad analizzarlo: lo stato è rappresentato dal valore  $x_0$  in  $t = t_0$  del vettore di stato  $x(t)$ , già noto come vettore delle condizioni iniziali. Per conoscere l'evoluzione dinamica del circuito per  $t > t_0$ , è necessario e sufficiente conoscere il valore del vettore di stato  $x(t)$  in  $t = t_0$  e non negli istanti  $t < t_0$ . Ciò significa che :

*lo stato contiene le informazioni sulla storia passata del circuito, che risultano necessarie e sufficienti nel momento presente, per poter predire la sua storia futura.*

In altre parole, è necessario e sufficiente conoscere il valore  $x_0$  di  $x(t)$  in  $t = t_0$ , ignorando l'andamento di  $x(t)$  per  $t < t_0$  per poter valutare il comportamento di  $x(t)$  per  $t > t_0$ .

- **passato** (intervallo di tempo  $(-\infty, t_0)$ ): non è necessario conoscere  $\hat{u}(t)$  e  $x(t)$   $\forall t \in (-\infty, t_0)$  per prevedere la storia futura, cioè l'andamento di  $x(t)$   $\forall t \in (t_0, +\infty)$ .
- **presente** (istante di tempo  $t_0$ ): è necessario conoscere  $x_0 = x(t_0)$  per prevedere la storia futura, cioè  $x(t)$   $\forall t \in (t_0, +\infty)$ . Infatti  $x_0$  contiene il risultato dell'andamento di  $x(t)$  e  $\hat{u}(t)$  nel passato.
- **futuro** (intervallo di tempo  $(t_0, +\infty)$ ): è necessario e sufficiente conoscere  $\hat{u}(t)$   $\forall t \in (t_0, +\infty)$  oltre che  $x_0 = x(t_0)$  per conoscere la storia futura, cioè  $x(t)$   $\forall t \in (t_0, +\infty)$ .

**Commento:** Queste osservazioni spiegano perché nel modello del condensatore carico la tensione impressa  $\hat{u}(t)$  della sVI in serie al condensatore scarico possa essere indifferentemente  $\hat{u}(t) = v_0 \text{ sca}(t - t_0)$  ovvero  $\hat{u}(t) = v_0$  (vedere Cap. 15).

**Il portafoglio dello studente:** Uno studente un pò squattrinato intende decidere di fare alcune spese. Innanzitutto, egli considera l'intensità del "verde" del suo portafoglio, la quale è il risultato delle spese da lui affrontate in precedenza oltre che degli eventuali soldi guadagnati e/o ricevuti dai genitori.

**Questo:** Con quali regole le spese (uscita  $y(t)$ ) sostenute nel passato e i soldi guadagnati e/o ricevuti dai genitori (ingresso  $\hat{u}(t)$ ) condizionano le decisioni per le spese future?

**Risposta:** Le spese fatte e i soldi ricevuti nel passato non condizionano singolarmente le decisioni future; esse vengono condizionate dai soldi rimasti nel portafoglio  $x(t_0)$ , che a loro volta dipendono dalla differenza tra la somma delle entrate (integrale di  $\hat{u}(t)$ ) e la somma delle uscite (integrale di  $y(t)$ ). Quindi non interessa conoscere le informazioni dettagliate (data, entità, sulle singole uscite (mensa, pizzeria, panini, discoteca, cinema, libri, benzina per il motorino, ...) sostenute nel mese di aprile e sulle singole entrate per decidere le spese del mese di maggio. L'unica informazione necessaria sul mese di aprile passato sono la somma dei soldi rimasti nel portafoglio e sul conto corrente (per i più fortunati) a fine mese (valore di  $x(t_0)$ ). È questa la variabile, congiuntamente alle entrate previste (ingresso  $\hat{u}(t)$ ) nel mese di maggio, che consente allo studente di decidere gli acquisti (uscita  $y(t)$ ) nel mese di maggio. ■

## 19.2 SOLUZIONI PARTICOLARI E SIMILARI

La soluzione generale dell'equazione di stato non omogenea coincide con la soluzione generale dell'equazione omogenea associata sommata a una soluzione particolare qualsiasi dell'equazione originaria. In pratica, quando le funzioni forzanti sono cisoidi conviene scegliere come soluzione particolare la *soluzione similare*, che è costituita da un vettore cisoidale isofrequenziale con la stessa pulsazione delle cisoidi forzanti.

### 19.2.1 Nuova espressione della soluzione generale

Nel Par. 19.1.2 avevamo visto che la soluzione generale di un circuito dinamico lineare e non omogeneo costituisce uno spazio affine: quindi due soluzioni particolari qualsiasi soddisfanno alla seguente proprietà:

**Teorema:** siano  $x^{(p1)}(t)$  e  $x^{(p2)}(t)$  due soluzioni qualsiasi, con  $x^{(p1)}(t) \neq x^{(p2)}(t)$ , dell'equazione di stato di un circuito dinamico lineare non omogeneo, sia nondegenera sia degenere. La loro differenza  $x^{(p1)}(t) - x^{(p2)}(t)$  è a sua volta una soluzione del circuito dinamico omogeneo associato (cioè in cui è annullato il vettore delle grandezze impresse).

■ **Prova:** Con riferimento al Par. 19.1.1,  $x^{(p1)}(t)$  e  $x^{(p2)}(t)$  hanno le espressioni

$$x^{(p1)}(t) = \exp[(t - t_0)A] x_0^{(p1)} + x^{for}(t) \quad \text{e} \quad x^{(p2)}(t) = \exp[(t - t_0)A] x_0^{(p2)} + x^{for}(t).$$

La differenza  $x^{(p2)}(t) - x^{(p1)}(t) = \exp[(t - t_0)A] [x_0^{(p2)} - x_0^{(p1)}]$  coincide con la soluzione del circuito omogeneo associato con condizioni iniziali  $x_0 = x_0^{(p2)} - x_0^{(p1)}$ .

■ **Corollario:** La soluzione generale di un circuito dinamico non omogeneo è data dalla soluzione generale del circuito omogeneo associato  $\exp(tA)q$ , ove  $q \in \mathbb{R}^n$  è arbitrario, sommata a una soluzione particolare qualsiasi  $x^{(p)}(t)$  del circuito non omogeneo originario:

$$x(t) = \exp[(t - t_0)A]q + x^{(p)}(t)$$

■ **Commento:** In altre parole, siccome la soluzione generale dell'equazione di stato non omogenea costituisce uno spazio affine, la differenza di due soluzioni qualsiasi è a sua volta una soluzione dell'equazione di stato omogenea associata. Infatti la soluzione forzata presente in qualsiasi soluzione di un'equazione di stato non omogenea si cancella nella differenza.

L'espressione originaria della soluzione generale comprendente la soluzione forzata è un caso particolare di questa espressione. Questa espressione più generale è molto importante per calcolare la soluzione generale di circuiti con ingressi cisoidali: in questo caso come soluzione particolare viene scelta la cosiddetta soluzione similare, come sarà chiarito nella Par. 19.2.3.

■ **Soluzione effettiva:** Per calcolare la soluzione effettiva (unica) di un circuito dinamico non omogeneo occorre specificare il valore del vettore arbitrario  $q$  nella espressione della soluzione generale. La *soluzione effettiva*  $x^{eff}(t)$  viene determinata come la soluzione particolare che in  $t = t_0$  coincide con il vettore  $x_0$  delle condizioni iniziali. Si può verificare facilmente che essa viene determinata dalla scelta  $q = x_0 - x^{(p)}(t_0)$ , quindi si ha:

$$x^{eff}(t) = \exp[(t - t_0)A] [x_0 - x^{(p)}(t_0)] + x^{(p)}(t)$$

### 19.2.2 Principio di sovrapposizione per le soluzioni particolari

Le soluzioni particolari dei circuiti dinamici lineari non omogenei obbediscono al principio di sovrapposizione analogamente ai circuiti dinamici (vedere Cap. 11):

■ **Proprietà:** Sia dato un circuito dinamico lineare con  $K$  sorgenti impulsive (ovvero ingressi):  $\hat{u}(t) = [\hat{u}_1(t) \hat{u}_2(t) \dots \hat{u}_K(t)]^T$ . Sostituiamo  $K - 1$  delle sorgenti impulsive col corrispondente bipolo omogeneo associato, lasciando invariata la restante sorgente. In questo modo otteniamo  $K$  diversi circuiti ausiliari, ciascuno con una sola sorgente impulsiva, diversa per ciascun circuito ausiliario. Se  $x^{(p1)}(t)$ ,  $x^{(p2)}(t)$ , ...,  $x^{(pK)}(t)$  denotano  $K$  soluzioni particolari qualsiasi dei rispettivi  $K$  circuiti ausiliari, la loro somma

$$x^{(p)}(t) = x^{(p1)}(t) + x^{(p2)}(t) + \dots + x^{(pK)}(t)$$

è una soluzione particolare del circuito originario.

*Prova* : L'equazione di stato del circuito originario può essere scritta nella forma :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B \dot{u}(t) + B' \ddot{u}(t) + \dots \implies \\ \implies \dot{x}(t) &= A x(t) + \sum_{k=1}^K [b_k \dot{u}_k(t) + b_k'' \ddot{u}_k(t) + \dots] \end{aligned}$$

dove  $b_k$ ,  $b_k'$  e  $b_k''$  sono la  $k$ -esima colonna delle rispettive matrici  $B$ ,  $B'$  e  $B''$ .

Scriviamo le equazioni di stato di ciascuno dei  $K$  circuiti ausiliari ottenute da quella del circuito originario, azzerando le  $K-1$  grandezze impresse escluse dal circuito e rimpiazzando il vettore incognito  $x(t)$  con le rispettive soluzioni  $x^{(p1)}(t)$ ,  $x^{(p2)}(t)$ , ...,  $x^{(pK)}(t)$  :

$$\dot{x}^{(pk)}(t) = A x^{(pk)}(t) + b_k \dot{u}_k(t) + b_k'' \ddot{u}_k(t) + \dots \quad k = 1, 2, \dots, K$$

Sommando le  $K$  equazioni membro a membro, si ottiene la prova cercata :

$$\dot{x}^{(p)}(t) = A x^{(p)}(t) + \sum_{k=1}^K [b_k \dot{u}_k(t) + b_k'' \ddot{u}_k(t) + \dots]$$

*Commento* : La suddetta proprietà è molto usata per analizzare circuiti con sorgenti impresse tempo-varianti con forme d'onda diverse.

*Commento* : La soluzione forzata soddisfa al principio di sovrapposizione per le soluzioni particolari.

*Commento* : In principio, qualsiasi soluzione particolare del circuito dinamico originale (nonomogeneo) può essere scelta per scrivere l'equazione generale del circuito stesso, non è necessario scegliere come soluzione particolare la soluzione forzata. In pratica, per alcune classi di grandezze impresse (cisoidi, polinomi, ... di grande interesse nei circuiti) conviene scegliere una specifica soluzione particolare, chiamata *soluzione similare* e indicata da  $x^{sim}(t)$ . Essa è caratterizzata dal fatto di "essere simile" all'ingresso, nel senso che ha la stessa forma analitica dell'ingresso con valori in genere diversi dei parametri, come risulterà chiaro nel paragrafo seguente.

### 19.2.3 Soluzioni similari con ingressi cisoidali

Consideriamo l'equazione di stato di un circuito dinamico nonomogeneo, il cui vettore degli ingressi sia costituito da cisoidi con la medesima pulsazione complessa  $s_1$  :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B \dot{u}(t) + B' \ddot{u}(t) + \dots \quad \text{dove } \ddot{u}(t) = \Re[\exp(t s_1) \ddot{u}]$$

ove  $\ddot{u}$  è il vettore dei corrispondenti fasori.

In questo caso è ragionevole fare la seguente congettura :

*Congettura* : Assumiamo che esista una soluzione particolare, che chiameremo *soluzione similare*, costituita da un vettore di cisoidi isofrequenziali  $x^{sim}(t) = \Re[\exp(t s_1) \ddot{x}^{sim}]$ , ove  $\ddot{x}^{sim}$  è un vettore di fasori, che costituiscono le incognite da determinare per verificare la congettura, mentre  $s_1$  è nota e coincide con quella delle grandezze impresse. ■

*Verifica* : Per provare la consistenza della congettura sostituiamo  $x(t) \rightarrow x^{sim}(t)$  nell'equazione di stato :

$$\begin{aligned} \Re[s_1 \exp(t s_1) \ddot{x}^{sim}] &= A \Re[\exp(t s_1) \ddot{x}^{sim}] + \\ &+ B \Re[\exp(t s_1) \ddot{u} + B' \Re[s_1 \exp(t s_1) \ddot{u}] + B'' \Re[s_1^2 \exp(t s_1) \ddot{u}] + \dots \\ \text{Posso mettere tutti i termini a primo membro sotto un unico operatore } \Re[ ] & \\ \Re[\exp(t s_1) \{s_1 \ddot{x}^{sim} - A \ddot{x}^{sim} - B \ddot{u} - B' s_1 \ddot{u} - B'' s_1^2 \ddot{u} + \dots\}] &= 0_n \end{aligned}$$

Questa equazione impone la nullità del vettore cisoidale isofrequenziale che costituisce il primo membro. La nullità si ottiene se e solo se il vettore dei fasori, coincidente con l'espressione tra [ ], è nullo.

$$s_1 \ddot{x}^{sim} - A \ddot{x}^{sim} - B \ddot{u} - B' s_1 \ddot{u} - B'' s_1^2 \ddot{u} - \dots = 0_n$$

In questo modo siamo passati dall'equazione differenziale nel dominio del tempo a un'equazione algebrica nel campo complesso :

$$[s_1 I_{n,n} - A] \ddot{x}^{sim} = [B + s_1 B' + s_1^2 B'' + \dots] \ddot{u}$$

La matrice  $[s_1 I_{n,n} - A]$  di questo sistema nonomogeneo è nonsingolare se e solo se la pulsazione complessa  $s_1$  degli ingressi non coincide con una delle pulsazioni naturali del circuito ; altrimenti la matrice è singolare .

- Se  $s_1$  non coincide con alcuna pulsazione naturale del circuito, la congettura sull'esistenza di una soluzione similare risulta valida : il vettore dei fasori della soluzione similare è :

$$\ddot{x}^{sim} = [s_1 I_{n,n} - A]^{-1} [B + s_1 B' + s_1^2 B'' + \dots] \ddot{u}$$

- Se  $s_1$  coincide con una pulsazione naturale del circuito, la congettura non risulta valida. Comunque, può essere trovata una soluzione particolare, detta *soluzione pseudosimilare*, che è del tipo della cisoidale degli ingressi moltiplicata per un opportuno polinomio in  $t$ . Questa circostanza non è frequente e non viene qui ulteriormente approfondita per motivi di spazio.
- WWWWW FARE ESEMPIO

*Commento* : Il suddetto metodo per trovare la soluzione similare di un circuito con ingressi cisoidali può essere applicato direttamente alle equazioni generate dalle due leggi di Kirchhoff e alle relazioni costitutive dei componenti senza ricorrere all'equazione di stato. Questo problema, invero molto importante, costituisce l'argomento del Cap. 20 . ■

*Commento* : Nel paragrafo seguente considereremo in maggior dettaglio i casi in cui gli ingressi siano particolari sottoclassi di cisoidi. ■

### 19.3 DETERMINAZIONE DELLE SOLUZIONI SIMILARI

Vengono esaminate le condizioni di esistenza delle soluzioni similari associate alle specifiche sottoclassi di cisoidi : funzioni costanti, sinusoidi, esponenziali. Inoltre vengono introdotti i metodi analitici per il loro calcolo.

## 19.3.1 Circuiti (autonomi) con ingressi costanti

Cominciamo dagli ingressi costanti  $\hat{u}(t) = \hat{u}$ , cioè dalle ciscoidi con pulsazione complessa  $s_1 = 0$  (Circuiti tempo-invarianti). Riprendiamo i risultati ottenuti nel precedente paragrafo, imponendo  $s_1 = 0$ :

**Proprietà:** La soluzione similare  $x^{\text{sim}}$  non dipende da  $t$  e viene determinata, imponendo  $\hat{x}(t) = 0_n$  nell'equazione di stato  $\hat{x}(t) = A x(t) + B \hat{u}$ :

$$0_n = A x(t) + B \hat{u} \implies x^{\text{sim}} = -A^{-1} B \hat{u} \text{ purché } |A| \neq 0$$

**Commento:** Nel caso di circuiti degeneri l'eventuale presenza di termini additivi del tipo  $B' \hat{u}(t) + \dots$  non ha alcun effetto poiché  $\hat{u}(t) = \hat{u}(t) = \dots = 0$ .

**Avvertenza:** La singolarità di  $A$  implica che la matrice stessa abbia uno o più autovallori nulli. In questo caso la soluzione similare costante  $x^{\text{sim}}$  non esiste. Occorre calcolare la soluzione "pseudosimilare" che consiste in un polinomio in  $t$  di grado opportuno: su questo problema affronteremo qualche esercizio.

**Taglio sI-C con le sI costanti:** Se la somma delle correnti impresse delle sI del taglio è diversa da 0, anche la somma delle correnti fluenti nei condensatori deve essere diversa da 0. Quindi non esiste la soluzione similare in quanto le correnti fluenti nei condensatori non possono essere tutte nulle.

**Circuito dinamico associato:** In presenza di grandezze impresse costanti, si preferisce calcolare la soluzione similare (costante) senza utilizzare l'equazione di stato, ma riconsiderando il circuito stesso. Siccome le tensioni e correnti di ramo sono costanti, le loro derivate sono nulle. Quindi tutti i condensatori e gli induttori risultano equivalenti, rispettivamente, a dei c.a. e a dei c.c. (vedere Cap. 15). Per il calcolo della soluzione similare, si preferisce procedere nel modo seguente:

- Costruire il circuito dinamico associato eseguendo nel circuito dinamico originario le sostituzioni: ogni condensatore  $\rightarrow$  c.a. e ogni induttore  $\rightarrow$  c.c., compresi quelli accoppiati.
  - Analizzare il suddetto circuito dinamico tempo-invariante e lineare mediante i metodi già visti nel CCap. 11-13.
  - Nel caso in cui il circuito dinamico associato risultasse incompatibile (patologico) (matrice di stato singolare) significa che la soluzione similare non può essere definita.
- WWWWW FARE ESEMPIO

## 19.3.2 Soluzioni similari con ingressi sinusoidali

Consideriamo il caso in cui gli ingressi siano sinusoidali, cioè ciscoidi con pulsazione complessa  $s_1 = j\omega_1$ . Essi costituiscono un caso particolare ma molto frequente dei circuiti con ingressi ciscoidali, considerati nel Par. 19.2.4. Quindi il vettore degli ingressi ha la forma

$\hat{u}(t) = \Re[\exp(j\omega_1 t) \hat{u}]$ . Per la loro estrema importanza, rivisitiamo in dettaglio i risultati ottenuti nel Par. 19.2.4, imponendo  $s_1 = j\omega_1$ . Il vettore dei fasori della soluzione similare è immediatamente riscritto nella forma:

$$\hat{x}^{\text{sim}} = [j\omega_1 I_{n,n} - A]^{-1} [B + j\omega_1 B' + (j\omega_1)^2 B'' + \dots] \hat{u}$$

**Commento:** La suddetta soluzione similare esiste se e solo se la matrice  $A$  non ha autovallori immaginari puri concidenti con  $\pm j\omega_1$ . Vedremo nella Sez. 19.4 che la maggior parte dei circuiti sono asintoticamente stabili e quindi tutti gli autovallori hanno la parte reale negativa. In queste circostanze, incontrate molto spesso nella pratica, la soluzione similare sinusoidale esiste.

**Commento:** Il suddetto metodo per calcolare la soluzione a regime è un'anticipazione del notissimo metodo dei fasori, che verrà sviluppato nel Cap. 20 per l'analisi dei circuiti operanti in regime sinusoidale.

WWWWW Qui di seguito mostriamo alcuni casi in cui la soluzione similare dovuta associata a ingressi sinusoidali non esiste.

**Taglio sI-C||L con sI sinusoidali con pulsazione  $\omega_1$  e risonatori  $L||C$  con risonanza  $\omega_1$  (vedere Cap. 23):** se la somma delle correnti impresse sinusoidali delle sI del taglio è diversa da 0, anche la somma delle correnti fluenti nei risonatori  $L||C$  deve essere diversa da 0. Quindi non esiste la soluzione similare in quanto le correnti fluenti nei risonatori  $L||C$  non possono essere tutte nulle.

WWWWW I risonatori saranno discussi nel Cap. 23 ???

## 19.3.3 Soluzioni similari con altri ingressi

**Ingressi polinomiali:** Siano le grandezze impresse del circuito dei polinomi in  $t$  di grado non superiore a  $k$ . Dal momento che la derivata di un polinomio è ancora un polinomio, si può congetturare che esista una soluzione similare di tipo polinomiale.

Il calcolo della soluzione similare polinomiale può essere fatto ponendo  $x^{\text{sim}}(t)$  uguale a un vettore di polinomi dello stesso grado, con i vettori dei coefficienti incogniti. Sostituendo  $x^{\text{sim}}(t)$  nell'equazione e uguagliando i due membri, i vettori dei coefficienti incogniti vengono calcolati. Qui non ci dilunghiamo nei passaggi matematici, in quanto le funzioni forzanti polinomiali non vengono incontrate spesso, eccetto i casi  $k = 1, 2, 3$ .

WWWWW FARE ESEMPIO CON INGRESSO A RAMPA.

**Ingressi ciscoidali moltiplicati per un polinomio:**

WWWWW DA SCRIVERE

## 19.3.4 Soluzione similare composta

Dal momento che le soluzioni similari sono a tutti gli effetti delle soluzioni particolari dell'equazione di stato, anche per esse vale il principio di sovrapposizione stabilito per le soluzioni particolari nel Par. 19.2.2. Quando gli ingressi sono costituiti da più ciscoidi



con pulsazioni diverse (compresa l'eventuale pulsazione nulla) e/o da polinomi in  $t$ , possiamo concludere che esiste una soluzione particolare costituita dalla sovrapposizione delle soluzioni similari originate da ogni singolo ingresso nel caso che esso operi da solo nel circuito. Questa soluzione particolare costituita dalla sovrapposizione di più soluzioni similari prende, qualora necessario, il nome di *soluzione similare composta*, e nel caso che non vi sia ambiguità, di *soluzione similare*.

**Esempio** : WWWWW ESEMPIO DA SCRIVERE COMPLETAMENTE

19.3.5 Soluzioni similari con ingressi periodici o pseudoperiodici

I circuiti dinamici con ingressi periodici sono quelli nonautonomi in cui tutte le grandezze impresse (ingressi) sono funzioni periodiche del tempo, con in comune lo stesso periodo. Lo "stesso periodo" deve essere inteso nel senso che i periodi delle singole grandezze impresse possono non coincidere ma che esiste per ciascuno di essi un multiplo intero comune a tutte, il quale costituisce il periodo comune a tutte le grandezze impresse.

Qui ricordiamo che un ingresso periodico può sempre essere approssimato dalla serie di Fourier come visto nel Cap. 18. Quindi una sVi periodica può essere sostituita dalla serie di sVi sinusoidali con pulsazioni appropriate, mentre una sVi periodica può essere sostituita dal parallelo di sli sinusoidali con pulsazioni appropriate.

WWWWWW?? FARE DUE FIGURE AFFIANCATE ???WWWWWW

**Definizione** : I circuiti dinamici con ingressi *pseudoperiodici* sono quelli nonautonomi in cui tutte le grandezze impresse sono funzioni periodiche del tempo, con periodi qualsiasi, cioè senza alcun intero multiplo in comune. Il termine "pseudoperiodico" ricorda che l'insieme degli ingressi non è periodico, benché ciascuno degli ingressi sia periodico.

**Esempio A** : Un circuito alimentato da tre sVi con le seguenti tensioni impresse

$$\hat{v}_1(t) = 5 \cos(1000 t), \quad \hat{v}_2(t) = 8 \cos(1000 + \sqrt{2}) t + \pi/4, \quad \hat{v}_3(t) = 4 \cos(1000\sqrt{3} t - \pi/3)$$

è pseudoperiodico. Infatti il rapporto di due periodi qualsiasi delle tre sinusoidi sono numeri irrazionali : conseguentemente non esiste un multiplo intero dei tre periodi. ■

**Esempio B** : Un circuito alimentato da tre sVi con le seguenti tensioni impresse

$$\hat{v}_1(t) = 5 \cos(1000 t), \quad \hat{v}_2(t) = 8 \cos(1200 t + \pi/4), \quad \hat{v}_3(t) = 4 \cos(5000 t - \pi/3)$$

è periodico. Infatti i periodi  $T_1 = \pi/500$  s,  $T_2 = \pi/600$  s e  $T_3 = \pi/2500$  s delle tre sinusoidi sono frazioni intere del periodo  $T_0 = \pi/100$  s. ■  
Quindi per i circuiti con ingressi periodici e/o pseudoperiodici può essere trovata una soluzione similare composta, applicando il principio di sovrapposizione :

- Si scompone ogni grandezza impressa periodica nonsinusoidale nella somma di sinusoidi (armoniche) con frequenze una multipla dell'altra, mediante il ben noto sviluppo in serie di Fourier. Quindi tutte le grandezze impresse sono sinusoidali (comprendendo anche le eventuali grandezze costanti).

- Per ogni grandezza sinusoidale impressa si trova la corrispondente soluzione similare che sarà una sinusoidale della stessa frequenza con ampiezza e fase opportune. Si sommano tutte le soluzioni similari parziali, ottenendo la soluzione similare composta.

- la soluzione similare composta può essere periodica o pseudoperiodica se il circuito è periodico o, rispettivamente, pseudoperiodico, e costituisce la soluzione a regime, se il circuito è asintoticamente stabile (vedere Sez. 19.4).

**Avvertenza** : se  $\hat{v}(t)$  è un'onda quadra (per esempio), la soluzione a regime non sarà in genere un'onda quadra. Solamente le sinusoidi, tra le grandezze impresse periodiche, danno origine a soluzioni a regime dello stesso tipo (cioè con la stessa forma) oltre alle grandezze costanti. ■

19.4 STABILITÀ, SOLUZIONE TRANSITORIA

E A REGIME

WWWWWW?? QUESTA SEZIONE È LUNGA : POTREBBE CONVENIRE SPEZZARLA IN DUE O TRE ???WWWWWW

Basandoci sulle definizioni molto generali introdotte nella sezione precedente, introduciamo il concetto di *stabilità* per i circuiti dinamici lineari, comune a qualsiasi sistema dinamico lineare. Esso conduce a notevoli semplificazioni e proprietà importanti sia dal punto di vista concettuale sia dal punto di vista ingegneristico. Infine vengono definite la soluzione transitoria e quella a regime.

19.4.1 Comportamento asintotico dei circuiti dinamici

**Questio** : il comportamento asintotico di una soluzione particolare di un circuito dinamico dipende o non dipende dalle condizioni iniziali ?  
Il problema è affrontato qui di seguito, limitatamente ai circuiti dinamici lineari :

**Proprietà** : Sia dato un circuito dinamico lineare, e due qualsiasi soluzioni particolari  $x^{(p1)}(t)$  e  $x^{(p2)}(t)$  corrispondenti a due diverse condizioni iniziali  $x_0^{(1)}$  e  $x_0^{(2)}$ . La loro differenza

$$x^{(p1)}(t) - x^{(p2)}(t) = \exp[(t - t_0)A][x_0^{(1)} - x_0^{(2)}] = S \text{ Diag} [e^{(t-t_0)s_1}, e^{(t-t_0)s_2}, \dots, e^{(t-t_0)s_n}] S^{-1} [x_0^{(1)} - x_0^{(2)}]$$

è una soluzione del circuito omogeneo associato (Par. 17.1.1).  
La precedente espressione ci dice che la differenza tra le due soluzioni :

- $x^{(p1)}(t) - x^{(p2)}(t)$  tende a scomparire per  $t \rightarrow \infty$  se e solo se la matrice  $\exp[(t - t_0)A] \rightarrow 0_{n,n}$  per  $t \rightarrow +\infty$ , indipendentemente dal valore del vettore  $[x_0^{(2)} - x_0^{(1)}]$ .  
Questo risultato può essere reinterpretato :

tutte le soluzioni, dopo un opportuno intervallo di tempo, tendono a coincidere

In questo caso il circuito viene detto *asintoticamente stabile*, dal momento che vi è un unico comportamento asintotico, indipendente dalle condizioni iniziali. Considerando le pulsazioni naturali  $s_1, s_2, \dots, s_n$  del circuito, si ha che esso è asintoticamente stabile qualora ciascuna pulsazione naturale abbia la parte reale negativa : infatti tutti i modi naturali si esauriscono entro un certo tempo.  
WWWWWW Questa condizione vale anche qualora le pulsazioni naturali siano multiple.

- $x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)$  tende a divergere per  $t \rightarrow \infty$  se e solo se la matrice  $\exp[(t-t_0)A] \rightarrow$  *illimitata* per  $t \rightarrow +\infty$ , indipendentemente dal valore del vettore  $[x_0^{(2)} - x_0^{(1)}]$ . Questo risultato può essere reinterpretato:

tutte le possibili soluzioni si allontanano indefinidamente tra loro

In questo caso il circuito viene detto *instabile*.

Considerando le pulsazioni naturali  $s_1, s_2, \dots, s_n$  del circuito, si ha che esso è instabile qualora almeno una pulsazione naturale abbia la parte reale positiva: infatti vi è almeno un modo naturale divergente. WWWWW Nel caso di pulsazioni multiple queste condizioni devono essere modificate.

- $x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)$  non scompare e non diverge per  $t \rightarrow \infty$  se e solo se la matrice  $\exp[(t-t_0)A]$  né tende a zero né diverge per  $t \rightarrow +\infty$ , indipendentemente dal valore del vettore  $[x_0^{(2)} - x_0^{(1)}]$ . Questo risultato può essere reinterpretato:

tutte le soluzioni, dopo un opportuno intervallo di tempo, non tendono a coincidere e non si allontanano indefinidamente

In questo caso il circuito viene detto *semplicemente stabile*, dal momento che esso non ha un unico comportamento asintotico.

Considerando le pulsazioni naturali  $s_1, s_2, \dots, s_n$  del circuito, si ha che esso è semplicemente stabile qualora nessuna pulsazione naturale abbia la parte reale positiva e almeno una abbia la parte reale nulla: infatti nessun modo naturale diverge e almeno uno non si esaurisce. WWWWW Nel caso di pulsazioni multiple con  $\sigma = 0$  cambia.

Questo risultato, comune a tutti i sistemi dinamici lineari, ci permette di associare il concetto di stabilità al circuito dinamico stesso piuttosto che a una coppia di soluzioni particolari del circuito stesso. In altre parole, il concetto di stabilità è associato all'insieme di tutte le soluzioni particolari (la soluzione generale), che costituisce uno spazio lineare (circuito omogeneo) o affine (circuito non omogeneo).

**Proprietà:** Siccome la differenza tra due soluzioni particolari qualsiasi non dipende dalle grandezze impresse  $\hat{u}(t)$ , la stabilità di un circuito dinamico non omogeneo dipende esclusivamente dal circuito dinamico omogeneo associato.

Dalle suddette considerazioni possono essere tratte facilmente le seguenti conclusioni molto importanti:

**Proprietà:** un circuito dinamico lineare è asintoticamente stabile, semplicemente stabile o instabile se e solo se la più grande delle parti reali delle pulsazioni naturali è, rispettivamente negativa, nulla o positiva. ■

**Avvertenza:** Queste conclusioni possono non valere quando esistono pulsazioni naturali multiple con parte reale nulla: infatti le pulsazioni naturali di molteplicità  $\mu$  e con parte reale nulla possono dare origine a modi naturali divergenti (per  $t \rightarrow \infty$ ) del tipo  $P_{\mu-1}(t)$  ovvero  $P_{\mu-1}(t) \cos(\omega t + \phi)$ , in cui  $P_{\mu-1}(t)$  indica un polinomio di grado  $\mu - 1$ . ■

### 19.4.2 Soluzione transitoria e soluzione a regime

Consideriamo un circuito dinamico lineare le cui sorgenti impulsive siano costanti e/o sinusoidali e/o periodiche con periodo qualsiasi. Le grandezze impresse delle sorgenti periodiche possono essere scomposte nella somma di sinusoidi tramite la serie di Fourier. Si assuma che il circuito sia asintoticamente stabile. In queste condizioni la soluzione similita composta  $x^{sim}(t)$  è definita ed è data da una somma di sinusoidi (compresa eventualmente una funzione costante) con le medesime pulsazioni, per il principio di sovrapposizione. Scomponiamo la soluzione effettiva  $x^{eff}(t)$  nella somma di due contributi:

$$x^{eff}(t) = \underbrace{\exp[(t-t_0)A][x_0 - x^{sim}(t_0)]}_{\text{soluzione transitoria } x^{tra}(t)} + \underbrace{x^{sim}(t)}_{\text{sol. a regime } x^{reg}(t)}$$

Questi due contributi hanno un preciso significato fisico:

La soluzione transitoria  $x^{tra}(t)$  dipende sia dal vettore delle condizioni iniziali  $x_0$  sia dal valore iniziale  $x^{reg}(t_0)$  della soluzione a regime; più precisamente, essa dipende dallo scostamento tra i vettori  $x_0$  e  $x^{reg}(t_0)$ . Per questo motivo essa non gode del principio di sovrapposizione rispetto alle condizioni iniziali o alle grandezze impresse. Nel caso che  $x_0$  e  $x^{reg}(t_0)$  siano coincidenti, la soluzione transitoria è assente.

Indipendentemente dal vettore delle condizioni iniziali  $x_0$ , dopo un po' di tempo la soluzione transitoria si esaurisce e conseguentemente la soluzione effettiva coincide asintoticamente con la soluzione similita:

$$x^{eff}(t) \simeq x^{sim}(t) \quad \forall t \rightarrow +\infty$$

che merita il nome di *soluzione a regime* e indicata dal simbolo  $x^{reg}(t)$  dal momento che è formata dalla somma di sinusoidi più, eventualmente, una costante, cioè di funzioni periodiche.

**Commento:** La  $x^{reg}(t)$  non dipende dal vettore delle condizioni iniziali  $x_0$ , mentre dipende dalle grandezze impresse  $\hat{u}(t)$ . ■

**Costante di tempo dominante:** Consideriamo le pulsazioni naturali del circuito e in particolare l'inverso, cambiato di segno, della parte reale: essi hanno le dimensioni fisiche di un tempo e sono chiamate costanti di tempo. Se una o più delle costanti risulta negativa il circuito è instabile. Se risultano tutte positive il circuito è asintoticamente stabile. La più grande di esse, che prende il nome di *costante di tempo dominante*, è la figura di merito che ci dà una indicazione quantitativa del tempo che impiega il circuito per raggiungere il regime. ■

### 19.4.3 Confronto con la soluzione libera e la soluzione forzata

Limitatamente ai circuiti in cui è definita la soluzione a regime, confrontiamo la soluzione transitoria e quella a regime con la soluzione libera e quella forzata, già introdotte nella Sez. 14.4. Richiamiamo qui sotto l'espressione della soluzione effettiva, scomponendola una prima volta nella somma della soluzione transitoria e di quella a regime e una seconda volta nella somma della soluzione libera e di quella forzata:

$$x^{eff}(t) = \underbrace{\exp[(t-t_0)A][x_0 - x^{reg}(t_0)]}_{\text{soluzione transitoria}} + x^{reg}(t)$$

$$x^{eff}(t) = \underbrace{\exp[(t-t_0)A] x_0}_{\text{soluzione libera } x^{lib}(t)} + \underbrace{x^{res}(t) - \exp[(t-t_0)A] x^{res}(t_0)}_{\text{soluzione forzata } x^{for}(t)}$$

Dalla due suddette scomposizioni, si ha che la soluzione a regime non coincide, in genere, con quella forzata. Infatti, la differenza tra la soluzione forzata e quella a regime costituisce una soluzione particolare del circuito omogeneo associato. Comunque, se la soluzione generale del circuito omogeneo associato si esaurisce, la soluzione a regime e quella forzata tendono a coincidere per  $t \rightarrow \infty$ , cioè sono asintoticamente uguali. Inoltre si ha che la soluzione libera  $x^{lib}(t)$  coincide con la soluzione particolare del circuito omogeneo associato soggetto alle stesse condizioni iniziali. Siccome essa dipende esclusivamente dalle condizioni iniziali e non dalle grandezze impresse, essa soddisfa al principio di sovrapposizione rispetto alle condizioni iniziali (vedere Par. 19.1.3).

La soluzione forzata  $x^{for}(t)$  coincide con quell'unica soluzione particolare del circuito originario in cui tutte le variabili di stato sono nulle per  $t = t_0$ . Questa condizione significa che l'energia immagazzinata in tutti i componenti conservativi è nulla in  $t = t_0$  per i circuiti non degeneri e per i circuiti degeneri in cui non intervengono le derivate degli ingressi. La soluzione forzata dipende dalle grandezze impresse e non dipende dalle condizioni iniziali. Quindi per essa vale il principio di sovrapposizione rispetto alle grandezze impresse (vedere Par. 19.2.2).

**19.4.4 Casi topologicamente evidenti di circuiti semplicemente stabili**

Molto spesso l'esistenza di pulsazioni naturali nell'origine risulta evidente da una ispezione diretta del circuito stesso. In un primo luogo l'esistenza di equazioni algebriche tra le derivate temporali delle candidate di stato può essere accertata da un'analisi dei tagli e delle maglie:

**Taglio-C** ovvero **taglio-C-sfi**: la presenza di un taglio-C ovvero un taglio-C-sfi implica che le derivate delle tensioni dei condensatori e le (eventuali) correnti impresse siano legate da una relazione algebrica:

$$\underbrace{\sum_m C_m \dot{v}_{Cm}(t)}_{\text{correnti condensatori}} + \underbrace{\sum_p \dot{i}_p(t)}_{\text{correnti impresse}} = 0$$

$$\underbrace{\sum_\mu L_\mu \dot{i}_{L\mu}(t)}_{\text{tensioni induttori}} + \underbrace{\sum_\nu \dot{v}_\nu(t)}_{\text{tensioni impresse}} = 0$$

Come casi particolari si hanno due condensatori in serie ovvero un condensatore in serie a una sfi o a un c.a. ■

Come casi particolari si hanno due induttori in parallelo ovvero un induttore in parallelo a una sfi o a un c.c. ■

**Commento**: Ogni relazione algebrica coinvolgente solamente derivate delle variabili di stato, con l'esclusione di tutte le variabili stesse, e, eventualmente, grandezze impresse implica la dipendenza lineare tra le righe della matrice  $A$  corrispondenti alle derivate coinvolte. Questa dipendenza lineare implica, a sua volta, che una pulsazione naturale sia nulla. Quindi il circuito è semplicemente stabile qualora le rimanenti pulsazioni naturali abbiano parte reale negativa. Se la pulsazione naturale nulla fosse multipla potrebbe

eserci l'instabilità del circuito.  
FARE ESEMPI

**Avertenza**: non confondere le condizioni per cui si ha una pulsazione naturale nulla (relazione algebrica tra le derivate delle variabili di stato) con le condizioni in cui una candidata non diventa variabile di stato (relazione algebrica tra le candidate). Come ormai noto, quest'ultimo caso da origine ai circuiti dinamici degeneri. Quindi l'ordine del sistema differenziale non decresce affatto come accade in presenza di un'equazione algebrica coinvolgente solamente variabili di stato (vedere Cap. 17). ■

**19.4.5 Altri casi evidenti di circuiti semplicemente stabili**

Le equazioni algebriche tra le derivate delle candidate possono trarre origine anche dalle relazioni costitutive dei componenti dinamici presenti nel circuito. In particolare ogni qualvolta un doppio bipolo, in cui una o entrambe le relazioni costitutive coinvolgono due sole variabili a loro volta coincidenti con le derivate di due candidate (in seguito alle connessioni con i componenti conservativi) nasce una relazione algebrica in cui sono presenti solamente derivate delle candidate. Per esempio:

doppio bipolo : relazione	porta 1	porta 2	relazione algebrica
$sVPV : v_2(t) = \alpha v_1(t)$	induttore in parallelo	induttore in parallelo	$L_2 \dot{i}_{L2}(t) = \alpha L_1 \dot{i}_{L1}(t)$
tr.id. : $v_1(t) = n v_2(t)$	induttore in parallelo	induttore in parallelo	$L_1 \dot{i}_{L1}(t) = n L_2 \dot{i}_{L2}(t)$
$sVPI : v_2(t) = r_m i_1(t)$	condensatore in serie	induttore in parallelo	$L_2 \dot{i}_{L2}(t) = r_m C_1 \dot{v}_{C1}(t)$
giratore : $v_2(t) = i_1(t)/g_m$	condensatore in serie	induttore in parallelo	$L_2 \dot{i}_{L2}(t) = C_1 \dot{v}_{C1}(t)/g_m$
$sIPV : \dot{i}_2(t) = g_m v_1(t)$	induttore in parallelo	condensatore in serie	$C_2 \dot{v}_{C2}(t) = g_m L_1 \dot{i}_{L1}(t)$
giratore : $v_1(t) = -\dot{i}_2(t)/g_m$	induttore in parallelo	condensatore in serie	$L_1 \dot{i}_{L1}(t) = -C_2 \dot{v}_{C2}(t)/g_m$
$sIPI : \dot{i}_2(t) = \beta i_1(t)$	condensatore in serie	condensatore in serie	$C_2 \dot{v}_{C2}(t) = \beta C_1 \dot{v}_{C1}(t)$
tr.id. : $i_1(t) = -\dot{i}_2(t)/n$	condensatore in serie	condensatore in serie	$C_1 \dot{v}_{C1}(t) = C_2 \dot{v}_{C2}(t)/n$

**19.4.6 Stabilità e comportamento asintotico dell'energia**

La stabilità di un circuito dinamico lineare non omogeneo e tempo-variante limitatamente alle sorgenti impresse dipende esclusivamente dalla stabilità del circuito omogeneo associato. Vediamo ora come la stabilità di un circuito dinamico, tempo-invariante e omogeneo non degenero può essere spiegata in termini dell'energia totale  $w^{com}(t)$  immagazzinata nei componenti conservativi:

$$w^{com}(t) = \frac{1}{2} [x(t)]^T H^c x(t) = \frac{1}{2} [x_0]^T \{ \exp[(t-t_0)A] \}^T H^c \exp[(t-t_0)A] x_0$$

dove  $H^c$  è la matrice  $n \times n$  che descrive il componente complementare conservativo (vedere Sez. 13.2). La stabilità del circuito e il comportamento asintotico dell'energia sono legati da:

- Se il circuito è asintoticamente stabile,  $w^{com}(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$
- Se il circuito è semplicemente stabile,  $w^{com}(t) \rightarrow$  valore finito per  $t \rightarrow \infty$
- Se il circuito è instabile,  $w^{com}(t)$  diverge per  $t \rightarrow \infty$

**Proprietà :** Le precedenti considerazioni energetiche ci consentono di trarre direttamente delle conclusioni sulla stabilità di alcune sottoclassi di circuiti dinamici, tempo-varianti, lineari e omogenei di uso frequente :

- se il componente dinamico (omogeneo) complementare è dissipativo, la potenza  $p^{dis}(t)$  assorbita da esso è una forma quadratica omogenea definita positiva (nulla solo nell'origine). In questo caso l'energia immagazzinata  $w^{com}(t)$  decresce per ogni valore di  $t$  fino al valore 0. Il circuito dinamico è asintoticamente stabile. Infatti per il teorema della potenza totale (Cap. 6) si ha che

$$p^{com}(t) + p^{dis}(t) = 0 \implies \frac{dw^{com}(t)}{dt} = -p^{dis}(t) \leq 0$$

WWWW FARE ESEMPIO

- se il componente dinamico (omogeneo) complementare è strettamente attivo,  $w^{com}(t)$  cresce per ogni valore di  $t$  fino al valore  $\infty$ . Il circuito dinamico è instabile. Infatti per il teorema della potenza totale (Cap. 6) si ha che

$$p^{com}(t) + p^{dis}(t) = 0 \implies \frac{dw^{com}(t)}{dt} = -p^{dis}(t) \geq 0$$

WWWW FARE ESEMPIO

- nel caso di un componente dinamico (omogeneo) complementare attivo non si possono trarre conclusioni dirette. Occorre esaminare le parti reali di tutte le pulsazioni complesse per capire il comportamento asintotico.  
WWWW FARE ESEMPIO

**Avertenza :** Le precedenti conclusioni possono essere estese ai circuiti degeneri. ■

#### 19.4.7 Punti di equilibrio stabili e instabili

Consideriamo un circuito dinamico, tempo-invariante e lineare/nonomogeneo, in cui le sorgenti impulsive presenti siano esclusivamente tempo-invarianti (costanti).

1. Se non vi sono pulsazioni naturali nell'origine (equivalente alla nonsingularità di  $A$ ), la soluzione similare esiste e fornisce il *punto di equilibrio* del circuito che è unico.
2. Se, inoltre, il circuito è asintoticamente stabile (cioè la parte reale di tutte le pulsazioni naturali è negativa), qualsiasi soluzione, indipendentemente dal punto iniziale, raggiungerà questo punto di equilibrio, che viene chiamato *punto di equilibrio asintoticamente stabile*.

3. Se, al contrario, il circuito è instabile (la parte reale di uno o più delle pulsazioni naturali positive), nessuna soluzione, anche se il vettore delle condizioni iniziali  $z_0$  è molto vicino al punto d'equilibrio, terminerà nel suddetto punto, che è chiamato *punto di equilibrio instabile*.  
WWWWWW?? L'eccezione (più accademica che realistica) si ha quando  $z_0$  appartiene a un opportuno sottoinsieme. ???WWWWWW

#### 19.4.8 Orbite stabili e instabili

Consideriamo un circuito dinamico, tempo-variante e lineare/nonomogeneo, in cui le sorgenti impulsive sono tempo-varianti e periodiche (eventualmente sinusoidali), mentre tutti gli altri componenti sono tempo-invarianti.

1. Se non vi sono pulsazioni naturali immaginarie pure  $\pm j\omega_c$  coincidenti con le pulsazioni delle grandezze impresse, la soluzione similare esiste e sarà a sua volta periodica con lo stesso periodo.
2. Se, inoltre, il circuito è asintoticamente stabile (la parte reale di tutte le pulsazioni naturali è negativa), la soluzione similare descrive una *orbita stabile* nello spazio degli stati.
3. Se, al contrario, il circuito è instabile (la parte reale di una o più delle pulsazioni naturali è positiva), la soluzione similare descrive una *orbita instabile* nello spazio degli stati.
4. Da un punto di vista pratico, un'orbita instabile implica che anche se noi partiamo da un vettore delle condizioni iniziali  $z_0$  infinitamente vicino all'orbita stessa la traiettoria si allontana dalla stessa senza caderci sopra.

#### 19.4.9 Circuiti fisici con modello dinamico lineare instabile

In un circuito, il cui modello è lineare e instabile, le tensioni ai capi dei condensatori e le correnti fluenti negli induttori non vengono limitate inferiormente e/o superiormente. Quindi l'energia immagazzinata in essi può raggiungere valori elevati quanto si vuole. Da un punto di vista fisico non ha senso parlare di energia elevata quanto si vuole entro un circuito fisico le cui dimensioni geometriche sono finite. Inoltre, in seguito alle leggi di Kirchhoff anche le tensioni e correnti dei componenti dinamici crescono in modo illimitato. Conseguentemente, qualsiasi modello lineare non è più aderente alla realtà qualora le tensioni e/o correnti assumano valori illimitati.

1. In queste condizioni un componente fisico deve essere descritto da un modello nonlineare, che tenga conto di eventuali fenomeni di saturazione spesso presenti per valori sufficientemente ampi della tensione e/o corrente : per esempio nei componenti a semiconduttore (vedere Cap. 5).
2. Altrimenti deve essere sottinteso che il circuito fisico si guasta in modo irreparabile in seguito ai valori troppo elevati delle tensioni e/o correnti. I guasti irreparabili possono essere di natura diversa, per esempio :

- Alterazione chimica (irreversibile) delle caratteristiche del mezzo isolante.
- Per esempio, perforazione irreversibile del dielettrico in un condensatore.
- Temperatura troppo elevata di tutto ovvero di una parte del circuito fisico.
  - con conseguente alterazione irreversibile dei materiali.
- Fusione del mezzo conduttore, con conseguente interruzione.
- Fusione del mezzo ferromagnetico con distruzione della geometria originaria.

Le considerazioni precedenti spiegano come mai nella pratica di tutti i giorni i circuiti fisici con un modello adeguato lineare e dinamico, siano di fatto stabili. Comunque lo studio dei modelli lineari dinamici instabili è importante :

*Occorre conoscere il nemico per poterlo evitare.*

#### 19.4.10 Circuiti fisici con modello dinamico lineare semplicemente stabile

In un circuito semplicemente stabile uno o più dei modi naturali sono permanenti nel senso che essi sono delle sinusoidi che non si esauriscono o funzioni costanti nonulle. Si incontra questo caso negli oscillatori (descritti da un modello lineare) in cui una coppia di poli è immaginaria. L'ampiezza e la fase di questi modi naturali, che dipende dalle condizioni iniziali, può essere modificata da disturbi sempre presenti nei circuiti fisici e non può essere stabilizzata, mentre la frequenza è stabile dal momento che è una caratteristica del modo naturale. Questa oscillazione da origine a un'orbita semplicemente stabile nello spazio degli stati.

Per valutare l'ampiezza e la fase dei modi naturali di un oscillatore occorre considerare le non linearità del circuito anche se molto deboli dal momento che sono proprio queste a determinare l'ampiezza dei modi naturali dell'oscillatore. Quindi un modello lineare semplicemente stabile non è sufficientemente adeguato per trovare l'ampiezza e la fase dell'oscillazione : occorre considerare un modello nonlineare anche se il circuito fisico può apparire lineare (vedere Cap. 20).

#### 19.4.11 WWWWWW Aggiunte

Dimostrare che circuiti RC hanno tutti le pulsazioni naturali reali e quelli LC (conservativi) hanno tutte le pulsazioni immaginarie. Vedere dove collocare questo argomento.

#### 19.4.12 WWWWWW Autovalori nulli

WWWWW INSERIRE IN UN APPOSTO QUADRO : i circuiti di second'ordine con un autovalore nullo : per esempio, tagli di due condensatori e maglie di induttori.

### 19.5 INTERPRETAZIONE DELLA DISCONTINUITÀ ANALITICA DELLE CANDIDATE

Nella Sez. 17.7 avevamo discusso le condizioni per cui le candidate di stato sono grandezze analiticamente continue. In questa sezione interpretiamo queste condizioni da un punto di vista fisico. Questa sezione può essere saltata.

#### 19.5.1 Interpretazione fisica della degeneranza

Come visto in precedenza, il numero di pulsazioni naturali di un circuito dinamico lineare nondegenere è uguale al numero di condensatori e induttori presenti nel circuito. Nei circuiti degeneri il loro numero è inferiore. Quindi circuiti molto simili tra loro possono presentare un numero diverso di pulsazioni naturali :

Per esempio, supponiamo che vi sia una maglia costituita da 3 condensatori a da un resistore di resistenza molto piccola : se il resistore viene rimpiazzato da un c.c., il circuito diventa degenere, dal momento che si crea una maglia-C, e una pulsazione naturale scompare, dal momento che l'ordine  $n \times n$  della matrice di stato  $A$  decresce.

Fig. CIRCUITO CON SCOMPARSA DI UNA PULSAZIONE NATURALE

**Questo :** Che cosa significa, da un punto di vista matematico, "la scomparsa di una pulsazione naturale" ?

**Risposta :** Significa che la pulsazione naturale è andata all'∞ .  
 Quindi quando la suddetta resistenza  $\rightarrow 0$  una pulsazione naturale  $\rightarrow \infty$ .

**Commento :** un autovalore di una matrice può tendere all'∞ nello stesso modo in cui una radice di un polinomio di terzo grado tende all'∞ quando il coefficiente del termine di terzo grado tende a zero.

La risposta al primo quesito suggerisce un altro quesito.

**Quesito :** Qual'è la cisoidale la cui pulsazione  $s \rightarrow \infty$  ?

**Risposta :** Consideriamo una funzione  $f(t)$  che per  $t < 0$  sia nulla e che per  $t > 0$  coincida con la cisoidale  $\Re\{u|\sigma\} \exp(\sigma t)$  dove  $s = \sigma < 0$  (commune esponenziale). Il fattore moltiplicativo  $u|\sigma|$  ci assicura che l'area sottesa dalla  $f(t)$  sia uguale a  $u$ , come visto nell'introduzione degli impulsi nonideali nella Sez. 14.4. Rammentando la definizione della delta di Dirac nella Sez. 14.4, calcoliamo il limite :

$$\lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \Re\{u|\sigma\} \exp(\sigma t) = u \delta(t)$$

Queste considerazioni danno una spiegazione intuitiva, anche se non rigorosa, del fatto che in un circuito degenerare possono nascere tensioni e correnti impulsive. Nei circuiti degeneri nascono modi naturali la cui pulsazione complessa è  $\infty$  nel piano complesso, cioè modi "infinitamente rapidi".

**Commento :** Se noi ammettiamo che le grandezze anticandidate possano assumere andamenti impulsivi, possiamo reinterpretare i circuiti dinamici degeneri nel caso in cui le condizioni iniziali siano in contrasto con la(e) equazione(i) algebrica(he) tra le grandezze candidate. L'impulso di Dirac rende istantaneamente compatibili i valori iniziali della candidate con le suddette equazioni.

Questa circostanza può essere incontrata più volte nello stesso circuito nel senso che più di un modo naturale può essere impulsivo. Come caso limite, consideriamo un circuito dinamico, in cui nessuna grandezza candidata diventa variabile di stato: esso si comporta a tutti gli effetti come un circuito adinamico senza uno stato che ricordi la sua storia passata. In altre parole, tutti i suoi modi naturali sono così rapidi che le tensioni dei condensatori e le correnti negli induttori si adattano istantaneamente (cioè con andamento impulsivo ideale) all'azione delle grandezze impresse (ingressi).

### 19.5.2 Modello dinamico degenerare / nondegenerare di un circuito fisico

Il fatto che nei circuiti fisici con modello dinamico degenerare possano nascere delle tensioni e/o correnti impulsive solleva un altro problema. Questa rapidità ci dice anche che un modello a parametri concentrati può venire meno o che è necessario aggiungere nel modello molti altri parametri parassiti dinamici, come accennato nel presente paragrafo. Comunque queste considerazioni ci consentono di raggiungere una conclusione qualitativa: se misuriamo le tensioni e correnti di un circuito il cui modello sia degenerare con buona approssimazione, gli impulsi di tensione e corrente potranno essere estremamente rapidi ma comunque nonideali cioè con una durata finita.

Supponiamo di trovarci tra le mani un circuito fisico che debba funzionare con segnali piuttosto rapidi. Innanzitutto, teniamo presente che a ogni corrente e a ogni tensione sono associati, rispettivamente, dei campi magnetici ed elettrici e che a questi campi, a loro volta, sono associate una energia magnetica ed elettrica (Corso di Fisica II).

Quando queste correnti e tensioni variano rapidamente, anche le suddette energie, anche se limitate, variano rapidamente generando delle potenze non trascurabili rispetto alle altre potenze in gioco nel circuito fisico. Ciascuna delle suddette energie può essere tenuta in conto nel modello introducendo un induttore (detto in genere *induttore parassita*) per l'energia magnetica e un condensatore (detto in genere *condensatore parassita*) per l'energia elettrica.

In principio, il numero di induttori e condensatori parassiti può essere molto elevato. In particolare, se la rapidità delle tensioni e correnti è molto elevata, questo numero tende a infinito. Nasce spontanea la domanda:

**Questio:** Quanti condensatori e induttori devono essere presi in considerazione nel modello del circuito fisico?

**Risposta:** Una risposta rigorosa e di validità generale è troppo complessa per poter essere data nell'ambito di questi appunti. In principio si deve rispondere "fino a che il modello descrittivo con sufficiente accuratezza il comportamento del componente fisico. In pratica è difficile stabilire il significato di "sufficiente accuratezza". L'esperienza è indispensabile per dare una risposta significativa. Comunque, la conoscenza del comportamento del modello che stiamo studiando ci permette di trarre suggerimenti sul come migliorarlo per avvicinarci a una descrizione più realistica del circuito fisico.

**Commento:** Al giorno d'oggi la tecnologia fornisce nuovi componenti fisici sempre più sofisticati che operano a frequenze sempre più elevate. La costruzione di modelli adeguati di questi componenti è spesso più difficile da risolvere che la stessa costruzione del componente fisico.

**Questio:** E se fosse necessario introdurre un numero molto elevato di condensatori e

induttori parassiti?

**Risposta:** Questa necessità significa che il modello circuitale del circuito fisico da noi considerato non è più in grado di fornire una descrizione adeguata dei fenomeni elettrici. Conseguentemente, occorre ricorrere a un modello di natura matematica diversa, noto comunemente come *modello a parametri distribuiti*, cioè un modello che ricorre direttamente alle equazioni di MAXWELL senza passare attraverso alla troppo brutale (in questo caso) semplificazione che da origine al *modello a parametri concentrati* (modello circuitale). ■  
 WWWWWW??? FARÈ esempio di rete passabasso RC a scala e la resistenza di un resistore tende a zero, i due condensatori adiacenti tendono al parallelo e il circuito tende a perdere una variabile di stato. ???WWWWWW

### 19.6 PROCEDURA CARTA&PENNA

WWWWW Occorre studiare il futuro di questa sezione. WWWWWW

Potrebbe essere infarcita di un esempio numerico completo con costruzione dell'equazione di stato e la sua soluzione. In questo caso il testo potrebbe essere prosciugato.

Oppure potrebbe essere abolita.

Oppure potrebbe essere trasferita negli esercizi come introduzione del capitolo degli esercizi sui circuiti dinamici. WWWWWW

Per calcolare la soluzione effettiva di un circuito dinamico lineare, cioè l'andamento in funzione del tempo di una o più grandezze (tensione e/o corrente) del circuito si consiglia di procedere nel modo riassunto qui di seguito e basato sulla teoria sviluppata nei CCap. 17 e 18. Ovviamente, per circuiti particolari la procedura può venire semplificata.

#### 19.6.1 Condizioni iniziali per i componenti conservativi

Occorre conoscere le condizioni iniziali cioè i valori delle grandezze candidate dei componenti dinamici conservativi condensatori, induttori e induttori accoppiati. Nella pratica, ci si trova davanti a uno dei seguenti casi:

- Le condizioni iniziali (vettore  $x_0$ ) sono tra i dati del problema e quindi sono già note.
- Il circuito dinamico contiene uno o più interruttori ideali: assumiamo che all'istante  $t_0$ , in cui uno o più degli int.id. commutano, tutte le grandezze candidate diventino variabili di stato, qualsiasi sia la posizione degli interruttori. In questo caso, rimane valido il principio della continuità analitica delle variabili di stato. Conseguentemente, il vettore delle condizioni iniziali  $x(t_0^+)$  all'istante  $t_0^+$  appena successivo alla manovra del/degli int.id. rimane uguale al valore  $x(t_0^-)$  dello stesso vettore all'istante  $t_0^-$  appena precedente alla manovra. Quindi, esse possono essere calcolate dall'analisi del circuito nella configurazione precedente alla commutazione dell'interruttore.
- Se il circuito in questa configurazione è asintoticamente stabile e se il transitorio può essere considerato esaurito, può bastare analizzare la soluzione a regime.
- Nel caso in cui la manovra del/degli int.id. modifica le variabili di stato il calcolo del vettore  $x(t_0^+)$  richiede molta precauzione.

### 19.6.2 Formulazione dell'equazione di stato

Applicare il metodo dei componenti complementari (adattivo e conservativo) per formulare le equazioni di stato. Durante la formulazione viene implicitamente verificato se tutte le candidate di stato diventano variabili di stato.

Se il circuito è di grado 1 o 2 o in qualche caso anche superiore, si può pensare di usare metodi più intuitivi, che si prefiggono lo scopo di scrivere tante equazioni quante sono le candidate di stato, le quali equazioni coinvolgono solo le grandezze impresse, le candidate e le loro derivate. Questi metodi intuitivi possono ispirarsi a qualcuno dei metodi semplificati discussi nel Cap. 11.

FARE ESEMPI

### 19.6.3 Variabili di stato

Una volta note le condizioni iniziali e le equazioni di stato, la soluzione effettiva del circuito dinamico consiste nel risolvere l'equazione di stato del circuito, che ha come incognite le grandezze candidate che sono diventate effettivamente variabili di stato.

È necessario trovare l'andamento delle variabili di stato, anche nel caso in cui sia richiesto solamente l'andamento di altre variabili del circuito.

L'andamento effettivo delle variabili di stato, cioè della soluzione  $x(t)$  che soddisfa all'equazione di stato, viene calcolato scomponendolo nella somma di due contributi, come descritto nei due paragrafi seguenti.

### 19.6.4 Soluzione similare

Il primo contributo consiste in una soluzione particolare del circuito originale. Viene scelta la soluzione similare, che è strettamente connessa agli andamenti delle grandezze impresse (ingressi) del circuito. Nella pratica questi andamenti sono di tipo cisoidale: costanti, sinusoidi, esponenziali ovvero polinomi ovvero una loro combinazione lineare.

Quindi la soluzione similare può essere calcolata sostituendo nell'equazione di stato del circuito originale una funzione simile alla grandezza impressa (con la stessa pulsazione complessa) ma col vettore dei fasori diverso. In questo modo viene generata un'equazione algebrica, di cui il vettore dei fasori raggruppa le incognite.

La soluzione similare può venire calcolata direttamente, cioè senza passare attraverso l'equazione di stato, seguendo il metodo che sarà sviluppato nel Cap. 18 (Pseudoregime cisoidale).

Nel caso di presenza di diverse sorgenti impresse con diversi andamenti (cisoidi) conviene calcolare la soluzione similare composta mediante il principio di sovrapposizione.

### 19.6.5 Soluzione generale e effettiva del circuito

Una volta nota la soluzione particolare, si deve calcolare la soluzione generale del circuito omogeneo associato, derivato da quello originale sopprimendo tutte le sorgenti impresse.

Nella suddetta soluzione generale vi è un vettore di coefficienti indeterminati.

Dalla somma della soluzione generale del circuito omogeneo associato e della soluzione similare del circuito nonomogeneo si ottiene la soluzione generale del circuito originale, cioè con tutte le sorgenti impresse al loro posto.

I coefficienti indeterminati presenti nella suddetta soluzione generale possono venire calcolati imponendo che all'istante iniziale le variabili di stato coincidano con le condizioni iniziali calcolate in precedenza.

### 19.6.6 Calcolo delle grandezze diverse dalle variabili di stato

Se il problema richiedeva il calcolo di grandezze diverse dalle variabili di stato del circuito, conviene seguire la procedura:

Assumiamo che il circuito sia nondegenere: sostituiamo tutti i componenti conservativi presenti nel circuito con delle sorgenti impresse, cioè:

- ogni condensatore  $\rightarrow$  sVi tempo-variante
- ogni induttore  $\rightarrow$  sli tempo-variante
- ogni coppia di induttori accoppiati  $\rightarrow$  due sli tempo-varianti

Nel caso che il circuito sia degenere i componenti conservativi le cui grandezze candidate diventano variabili di stato sono trattati come nel caso dei circuiti nondegeneri, mentre quelli le cui grandezze non rientrano tra le variabili di stato devono essere trattati nel modo seguente:

- ogni condensatore  $\rightarrow$  sli tempo-variante
  - ogni induttore  $\rightarrow$  sVi tempo-variante
- (includendo una singola porta degli induttori accoppiati)

Il circuito così ottenuto è adattivo e tempo-variante limitatamente alle sorgenti impresse: la sua soluzione coi metodi noti per i circuiti adattivi consente di calcolare qualsiasi altra grandezza.

## 20 CIRCUITI

# in PSEUDOREGIME CISOIDALE e in REGIME SINUSOIDALE

WWWWWW??? INDICARE con  $\delta$  la pulsazione delle cisoidi impresse

WWWWWW??? FIGURA EMBLEMA diagramma fasoriale di un circuito ???WWWWWWWWWW  
Questo capitolo prende in considerazione i circuiti dinamici e lineari che operano in *pseudoregime cisoidale*, cioè nel caso in cui tutte le tensioni e correnti (comprese quelle impresse) sono cisoidi della stessa sottoclasse. Questo pseudoregime, molto importante dal punto di vista concettuale, comprende come caso particolare, il *regime sinusoidale* molto più noto ed usato nella pratica. L'analisi di questi circuiti consiste nella sostituzione delle grandezze cisoidali coi rispettivi fasori e si riduce alla soluzione di un sistema di equazioni algebriche nel dominio complesso. In questo modo possiamo estendere senza difficoltà i metodi, regole e proprietà dei circuiti dinamici ai circuiti dinamici operanti in pseudoregime cisoidale (incluso il regime sinusoidale).

**Sez. 20.1 : Pseudoregime cisoidale e regime sinusoidale :** Vengono esaminate le condizioni necessarie e sufficienti in cui un circuito opera in pseudoregime cisoidale ovvero in regime sinusoidale, cioè tutte le tensioni e correnti sono cisoidi (sinusoidi) della stessa sottoclasse. L'analisi di un circuito operante in pseudoregime cisoidale e in regime sinusoidale viene ricondotta alla scrittura e soluzione di un sistema di equazioni algebriche nel dominio complesso, introducendo i fasori delle cisoidi.

**Sez. 20.2 : Relazioni topologiche e costitutive :** Le grandezze cisoidali sono sostituite dai loro fasori : essi vengono introdotti direttamente nelle relazioni topologiche e costitutive del circuito trasformandole in equazioni algebriche, comprese quelle originariamente differenziali e/o integrali.

**Sez. 20.3 : Bipoli composti :** Vengono discusse le relazioni costitutive dei bipoli composti di tipo generale e operanti in pseudoregime cisoidale e introdotti i concetti di *impedenza e ammettenza* di un bipolo. Esse risultano, in genere, funzioni della pulsazione complessa  $s$ .

**Sez. 20.4 : Doppî bipoli composti :** Vengono discusse le relazioni costitutive di doppi bipoli composti di tipo generale e operanti in regime sinusoidale e introdotti i concetti di *matrice impedenza e matrice ammettenza* insieme alle altre quattro matrici delle rimanenti rappresentazioni esplicite. Anche i parametri presenti in queste rappresentazioni risultano, in genere, funzioni della pulsazione complessa  $s$ .

**Sez. 20.5 : Estensione di regole, proprietà e metodi dei circuiti dinamici :** Tramite alcuni esempi, viene mostrato come molte delle regole, proprietà e metodi per analizzare i circuiti e/o componenti composti dinamici tempo-invarianti, introdotti nel CCap. 7-13, possono essere estesi senza alcun sforzo concettuale all'analisi dei circuiti dinamici che operano in pseudoregime cisoidale e in regime sinusoidale, grazie all'introduzione dei fasori.

### 20.1 PSEUDOREGIME CISOIDALE E REGIME SINUSOIDALE

Nella pratica di tutti i giorni lo pseudoregime cisoidale viene incontrato meno frequentemente del più noto regime sinusoidale : comunque esso è molto importante dal punto di vista concettuale, in particolare per introdurre le funzioni di rete. D'altro canto, se ci limitiamo a studiare il regime sinusoidale, risparmiamo poche energie rispetto allo studio dello pseudoregime cisoidale. Infatti entrambi, in seguito alla introduzione dei fasori delle tensioni e correnti del circuito, conducono alla scrittura di un sistema di equazioni algebriche nel dominio complesso.

#### 20.1.1 Condizioni necessarie e sufficienti per lo pseudoregime cisoidale

Esaminiamo le condizioni necessarie e sufficienti per cui tutte le tensioni e correnti di un circuito dinamico sono cisoidi della stessa sottoclasse, cioè con la medesima pulsazione complessa  $s$ . Consideriamo un circuito dinamico lineare :

1. I componenti del circuito siano :

componenti adinamici tempo-invarianti lineari omogenei (vedere CCap. 7 e 10)  
sorgenti impulsive tempo-varianti con grandezza impressa cisoidale

$$\hat{u}(t) = \Re\{\exp(\hat{s}t) \hat{u}\}$$

con pulsazione complessa comune  $\hat{s}$  (vedere CCap. 15 e 18)

( Il vettore cisoidale  $\hat{u}(t)$  riunisce le loro grandezze impresse )  
condensatori, induttori e induttori accoppiati (vedere CCap. 15-16)

2. Nessuna pulsazione naturale del circuito coincida con la pulsazione  $\hat{s}$  delle sorgenti impulsive : questa condizione garantisce l'esistenza della soluzione similare  $x^{sim}(t)$  dell'equazione di stato, che consiste in un vettore cisoidale  $x^{sim}(t) = \Re\{\exp(\hat{s}t) \hat{x}^{sim}\}$  della stessa sottoclasse del vettore  $\hat{u}(t)$ .

3. Come visto nel Cap. 19, la soluzione generale assume la forma analitica :

$$x(t) = \exp[(t - t_0) A] [x_0 - x^{sim}(t_0)] + \underbrace{\Re\{\exp(\hat{s}t) \hat{x}^{sim}\}}_{\text{soluz. similare}}$$

soluzione transitoria

Se i valori iniziali  $x_0$  delle variabili di stato sono tali che la soluzione transitoria sia nulla ( $x_0 = x^{sim}(t_0)$ ), il vettore di stato risulta cisoidale  $x(t) = x^{sim}(t)$ . Difficilmente questa condizione viene soddisfatta nella pratica.

**Proprietà :** Sotto le condizioni precedenti, tutte le grandezze del circuito sono cisoidi della sottoclasse caratterizzata dalla pulsazione  $\hat{s}$  : il circuito opera in pseudoregime cisoidale. Infatti, consideriamo l'equazione di uscita  $y(t) = C x^{sim}(t) + D \hat{u}(t)$ . Dal momento che sia  $x^{sim}(t)$  sia  $\hat{u}(t)$  sono vettori cisoidali della stessa sottoclasse, anche il vettore  $y(t)$  appartiene a questa sottoclasse.

Notare che se  $x_0 \neq x^{sim}(0)$ ,  $x(t)$  è costituito dalla soluzione transitoria e da quella similare. Ma la soluzione similare, essendo cisoidale, può svanire prima di quella transitoria. ■

Un circuito dinamico operante in pseudoregime cisoidale può essere analizzato facendo ricorso alle proprietà delle cisoidi esaminate nel Cap. 18. In altre parole, essendo tutte



le cisoidi della stessa sottoclasse, possiamo sostituirle con i rispettivi fasori. In questo modo tutte le relazioni topologiche e costitutive, comprese quelle originariamente differenziali, che descrivono un circuito dinamico diventano relazioni algebriche nel dominio complesso. Noi possiamo "dimenticarci" delle equazioni differenziali ricorrendo alle più semplici equazioni algebriche nel dominio complesso.

*Lo studente non intenda questa affermazione come un tacito consenso da parte del docente a dimenticarsi delle equazioni differenziali.*

### 20.1.2 Condizioni necessarie e sufficienti per il regime sinusoidale

Quando la pulsazione complessa  $s$  dello pseudoregime cisoidale è puramente immaginaria, il circuito si trova ad operare in regime sinusoidale, che per sua natura è periodico. Quindi il regime sinusoidale può essere esaminato con l'uso dei fasori essendo un "particolare" pseudoregime cisoidale. Ma la periodicità di questo regime implica delle proprietà particolari non condivise da un generico pseudoregime cisoidale: per questo motivo il metodo dei fasori è stato ed è ancora di estremo interesse ingegneristico.

**Nota storica:** Infatti, grazie al metodo dei fasori, originariamente conosciuto come metodo dei vettori rotanti, generazioni di ingegneri e tecnici elettrotecnici hanno potuto operare professionalmente dimenticandosi della esistenza delle equazioni differenziali e del concetto di derivata e integrale. In anni in cui i moderni calcolatori non erano ancora stati inventati, questo metodo ha avuto un ruolo insostituibile nell'analisi e progetto dei circuiti elettrici impiegati nella generazione, trasmissione e utilizzazione dell'energia elettrica. ■  
Comunque le condizioni per cui si ha il regime sinusoidale sono diverse da quelle per uno pseudoregime cisoidale. In base alla teoria esposta nel Cap. 19, un circuito dinamico lineare opera in regime sinusoidale, cioè tutte le tensioni e le correnti presenti nel circuito variano col tempo con legge sinusoidale con la stessa  $\omega$ , una volta verificate le seguenti condizioni:

#### 1. Il circuito sia costituito dai seguenti componenti:

componenti adinamici tempo-invarianti lineari omogenei, sorgenti impulsive con grandezze impresse sinusoidali isofrequenziali di pulsazione  $\omega$ , condensatori, induttori e induttori accoppiati.

#### 2. Il circuito sia asintoticamente stabile, cioè tutte le pulsazioni complesse naturali $s_k$ siano nel semipiano sinistro del piano complesso cioè:

$$x(t) = \underbrace{\exp[(t-t_0)A]}_{\text{soluzione transitoria}} \underbrace{|x_0 - x^{\text{sim}}(t_0)|}_{\text{soluz. similare}} + \underbrace{\Re[\exp(j\omega t)]}_{\text{soluz. similare}} \underbrace{\tilde{x}^{\text{sim}}}_{\text{soluz. similare}}$$

$$s_k = \sigma_k \pm j\omega_k \quad \text{con } \sigma_k < 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Questa condizione ci assicura che tutti i modi naturali, compresi nella soluzione transitoria, si esauriscano e che nessuna pulsazione naturale può coincidere con la pulsazione immaginaria  $\pm j\omega$  delle grandezze impresse.

3. Dall'ultimo intervento sul circuito, sia trascorso un intervallo di tempo  $\Delta t$  molto più grande del valore assoluto dell'inverso della parte reale di ciascuna pulsazione naturale:  $\Delta t \gg 1/|\sigma_k|$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . In questo caso i modi naturali, essendo il circuito asintoticamente stabile, risultano esauriti e le variabili di stato hanno raggiunto la soluzione similare (a regime sinusoidale), indipendentemente dai valori iniziali  $x_0$  delle variabili stesse. Questa condizione non ritrova riscontro in un generico pseudoregime cisoidale.

**Commento:** Nel caso di circuiti instabili (vedere Sez. 19.4), la soluzione similare sinusoidale esiste ma è sovrastata dalla soluzione del circuito omogeneo associato, che contiene una o più cisoidi illimitate per  $t \rightarrow +\infty$ , cioè associate a pulsazioni naturali con  $\sigma_k > 0$ . Nel caso di circuiti semplicemente stabili, la soluzione sinusoidale similare sarà sovrapposta a una componente costante (nel caso che via sia una pulsazione naturale nell'origine  $s_k = 0$ ) e/o a un'altra componente sinusoidale con pulsazione  $\omega_k$  (nel caso che vi sia una coppia coniugata immaginaria di pulsazioni naturali  $s_k = \pm j\omega_k$ ). Se la coppia coniugata immaginaria di pulsazioni naturali  $\pm j\omega_k$  coincidesse con la pulsazione  $\omega$  delle sorgenti impulsive, la soluzione similare (a regime) non esiste. In questo caso possiamo ricorrere alla soluzione pseudosimilare consistente in una sinusoida moltiplicata per un polinomio in  $t$  (vedere Cap. 19). In questo caso il circuito non è in grado di raggiungere il regime sinusoidale.

## 20.2 RELAZIONI TOPOLOGICHE E COSTITUTIVE

Questa sezione presenta l'uso diretto dei fasori per l'analisi dei circuiti operanti in pseudoregime cisoidale e in regime sinusoidale senza ricorrere all'equazione differenziale di stato come fatto per il calcolo della soluzione similare nel Cap. 19. A questo scopo le relazioni topologiche (Leggi di KIRCHHOFF) e le relazioni costitutive dei componenti vengono trasformate in equazioni algebriche tra grandezze complesse.

### 20.2.1 Relazioni topologiche

Le leggi topologiche nel dominio dei fasori sono ottenute in modo diretto sostituendo i vettori cisoidali della stessa sottoclasse coi rispettivi vettori di fasori come discusso nel Cap. 18. Le due leggi di KIRCHHOFF (in qualsiasi forma matriciale siano, vedere Cap. 4) rimangono relazioni algebriche omogenee con i medesimi coefficienti costanti e reali:

*Quadro delle Leggi di Kirchhoff nel dominio dei fasori*

Legge di KIRCHHOFF	dominio del tempo	dominio dei fasori
delle tensioni	$v(t) = A^T v^{\text{nod}}(t)$	$\tilde{v} = A^T \tilde{v}^{\text{nod}}$
delle tensioni	$B v(t) = 0$	$B \tilde{v} = 0$
delle correnti	$A i(t) = 0$	$A \tilde{i} = 0$
delle correnti	$i(t) = B^T i^{\text{cic}}(t)$	$\tilde{i} = B^T \tilde{i}^{\text{cic}}$

ove i vettori  $\tilde{v}^{\text{nod}}$ ,  $\tilde{i}^{\text{cic}}$ ,  $\tilde{v}$  e  $\tilde{i}$  sono formati dai fasori, rispettivamente, delle tensioni nodali, correnti cicliche, tensioni di ramo e correnti di ramo.

20.2.2 Relazioni costitutive

Vengono introdotte le relazioni costitutive nel dominio dei fasori di tutti i componenti elementari (non-compositi) che possono essere presenti in un circuito che operi in pseudoregime cisoidale.

Nei componenti dinamici impressivi occorre introdurre il fasore della grandezza impressa, mentre la grandezza nonvincolata nel dominio del tempo rimane nonvincolata nel dominio dei fasori, come risulta dal seguente quadro :

Quadro delle relazioni costitutive dei bipoli dinamici impressivi

componente	dominio del tempo	dominio dei fasori
c.c.	$v(t) = 0, i(t)$ nonvincolata	$\bar{v} = 0, \bar{i}$ nonvincolata
c.a.	$i(t) = 0, v(t)$ nonvincolata	$\bar{i} = 0, \bar{v}$ nonvincolata
$\bar{y}$ cisoidale	$v(t) = \Re[\bar{v} \exp(st)]$ $i(t)$ nonvincolata	$\bar{v} = \bar{v} = \bar{v} \exp(j\phi_v)$ $\bar{i}$ nonvincolata
$\bar{x}$ cisoidale	$i(t) = \Re[\bar{i} \exp(st)]$ $v(t)$ nonvincolata	$\bar{i} = \bar{i} = \bar{i} \exp(j\phi_i)$ $\bar{v}$ nonvincolata

Nei componenti dinamici omogenei nonimpressivi si hanno relazioni costitutive algebriche tra i fasori con gli stessi coefficienti costanti e reali già presenti nelle rispettive relazioni nel dominio del tempo, come risulta dal seguente quadro :

Quadro delle relazioni costitutive dei componenti dinamici omogenei

compon.	dominio del tempo	dominio dei fasori	compon.	dominio del tempo	dominio dei fasori
$\mathcal{R}$	$v(t) = r i(t)$	$\bar{v} = r \bar{i}$	nullore	$v_1(t) = 0$ $v_2(t) = 0$	$\bar{v}_1 = 0$ $\bar{v}_2 = 0$
$\mathcal{V}_x$	$v_1(t) = 0$ $v_2(t) = r_m i_1(t)$ $i_2(t)$ nonvinc.	$\bar{v}_1 = 0$ $\bar{v}_2 = r_m \bar{i}_1$ $\bar{i}_2$ nonvinc.	$\mathcal{I}_y$	$i_1(t) = 0$ $i_2(t) = g_m v_1(t)$ $v_2(t)$ nonvinc.	$\bar{i}_1 = 0$ $\bar{i}_2 = g_m \bar{v}_1$ $\bar{v}_2$ nonvinc.
$\mathcal{I}_x$	$v_1(t) = 0$ $i_2(t) = \beta i_1(t)$ $v_2(t)$ nonvinc.	$\bar{v}_1 = 0$ $\bar{i}_2 = \beta \bar{i}_1$ $\bar{v}_2$ nonvinc.	$\mathcal{V}_y$	$i_1(t) = 0$ $v_2(t) = \alpha v_1(t)$ $i_2(t)$ nonvinc.	$\bar{i}_1 = 0$ $\bar{v}_2 = \alpha \bar{v}_1$ $\bar{i}_2$ nonvinc.
tr.id.	$v_1(t) = n v_2(t)$ $i_1(t) = i_2(t)/n$	$\bar{v}_1 = n \bar{v}_2$ $\bar{i}_1 = \bar{i}_2/n$	giratore	$v_1(t) = i_2(t)/g_m$ $i_1(t) = g_m v_2(t)$	$\bar{v}_1 = \bar{i}_2/g_m$ $\bar{i}_1 = g_m \bar{v}_2$

Commento : Dall'osservazione dei due quadri precedenti si conclude che i concetti di omogeneità e impressività di un bipolo rimangono inalterati nel dominio dei fasori.

Nelle relazioni costitutive dei componenti dinamici conservativi è presente la pulsazione complessa  $s$ , che rimpiazza la derivata  $d/dt$  o la sua inversa  $1/s$  che rimpiazza l'integrale

$f$  di. Qui trasformiamo nel dominio dei fasori solamente le rappresentazioni differenziali dei componenti elementari incontrati nel CCap. 15-16. Comunque, se trasformassimo le rappresentazioni integrali ritroveremo le stesse equazioni nel dominio dei fasori.

Quadro delle relazioni costitutive dei componenti dinamici omogenei

componente	dominio del tempo	dominio dei fasori
$\mathcal{C}$	$i(t) = C \dot{v}(t)$	$\bar{i} = s C \bar{v}$
$\mathcal{L}$	$v(t) = L \dot{i}(t)$	$\bar{v} = s L \bar{i}$
$\mathcal{L}$	$v_1(t) = L_1 \dot{i}_1(t) + M \dot{i}_2(t)$ $v_2(t) = M \dot{i}_1(t) + L_2 \dot{i}_2(t)$	$\bar{v}_1 = s L_1 \bar{i}_1 + s M \bar{i}_2$ $\bar{v}_2 = s M \bar{i}_1 + s L_2 \bar{i}_2$

Commento : Nelle suddette rappresentazioni nel dominio dei fasori non compaiono le condizioni iniziali. Infatti il pseudoregime cisoidale richiede che le condizioni iniziali assumano un valore specifico, come detto nel Par. 20.1.1.

20.3 BIPOLI COMPOSITI

Questa sezione considera i bipoli composti operanti in pseudoregime cisoidale, mettendo in evidenza il loro comportamento in regime sinusoidale.

20.3.1 Impedenza e ammettenza

L'introduzione dei fasori delle tensioni e correnti cisoidali e la conseguente algebrizzazione delle equazioni del circuito suggerisce di definire per un bipolo omogeneo i concetti di impedenza e ammettenza : essi hanno lo stesso ruolo, rispettivamente, della resistenza e della conduttanza di un bipolo omogeneo composto operante in regime costante (vedere Cap. 7).

Definizione : L'impedenza  $z$  è una funzione complessa razionale della pulsazione complessa  $s$  definita dal rapporto dei fasori della tensione e della corrente :

Definizione : L'ammettenza  $y$  è una funzione complessa razionale della pulsazione complessa  $s$  definita dal rapporto dei fasori della corrente e della tensione :

$$z(s) = \frac{\bar{v}}{\bar{i}} \quad y(s) = \frac{\bar{i}}{\bar{v}}$$

Commento : L'impedenza e l'ammettenza sono parametri complessi ma non sono fasori in quanto non rappresentano cisoidi : esse possono essere considerate come operatori tra fasori. Per questo motivo, il loro simbolo non è barrato.

Consideriamo le funzioni impedenza e ammettenza nel regime sinusoidale : la parte reale e immaginaria di queste funzioni risultano molto importanti e meritano un apposito nome :

	impedenza	ammettenza
rapporto di fasori	$z(j\omega) = r(\omega) + jx(\omega) = \frac{\bar{v}}{\bar{i}}$	$y(j\omega) = g(\omega) + jb(\omega) = \frac{\bar{i}}{\bar{v}}$
parte reale	$r(\omega)$ è detta <i>resistenza</i>	$g(\omega)$ è detta <i>conduttanza</i>
parte immaginaria	$x(\omega)$ è detta <i>reattanza</i>	$b(\omega)$ è detta <i>suscettanza</i>
Dalle proprietà dei numeri complessi si hanno le seguenti relazioni :		
parte reale	$r(\omega) = \frac{g(\omega)}{g(\omega)^2 + b(\omega)^2}$	$g(\omega) = \frac{r(\omega)}{r(\omega)^2 + x(\omega)^2}$
parte immaginaria	$x(\omega) = -\frac{b(\omega)}{g(\omega)^2 + b(\omega)^2}$	$b(\omega) = -\frac{x(\omega)}{r(\omega)^2 + x(\omega)^2}$

**Avvertenza :** La parte reale (resistenza) e la parte immaginaria (reattanza) dell'impedenza non coincidono affatto con le inverse della conduttanza e della suscettanza e viceversa, eccetto il caso di impedenze puramente reali o immaginarie.

**Esempio :** Consideriamo il bipolo dinamico composto costituito dal parallelo di un  $R(500/3 \Omega)$  e di un  $C(20 \mu F)$  operate in un regime sinusoidale con  $\omega = 300 \text{ rad s}^{-1}$ : l'ammettenza  $y$  e l'impedenza  $z$  sono uguali a :

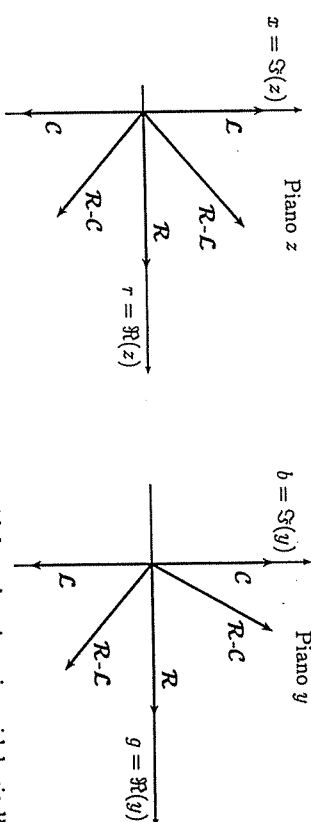
$$y = \frac{1}{500/3} + j 300 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = \frac{3}{500} + j \frac{3}{500} \text{ S} \implies z = \frac{1}{y} = \frac{500}{6} - j \frac{500}{6} \Omega$$

**20.3.2 Fase dell'impedenza e ammettenza dei bipoli**

Lo sfasamento tra i fasori della tensione e corrente dei bipoli omogenei coincide con la fase dell'impedenza  $\angle(\bar{v}/\bar{i}) = \angle z(j\omega) = -\angle y(j\omega)$  e suggerisce la seguente terminologia :

bipolo è detto :	fase del bipolo	terminologia corrente
induttivo	$\angle z(j\omega) = -\angle y(j\omega) = \pi/2$	$\bar{v}$ anticipa in quadratura $\bar{i}$
resistivo-induttivo	$0 < \angle z(j\omega) = -\angle y(j\omega) < \pi/2$	$\bar{v}$ anticipa $\bar{i}$
resistivo	$\angle z(j\omega) = -\angle y(j\omega) = 0$	$\bar{v}$ e $\bar{i}$ sono in fase
resistivo-capacitivo	$0 > \angle z(j\omega) = -\angle y(j\omega) > -\pi/2$	$\bar{i}$ anticipa $\bar{v}$
capacitivo	$\angle z(j\omega) = -\angle y(j\omega) = -\pi/2$	$\bar{i}$ anticipa in quadratura $\bar{v}$

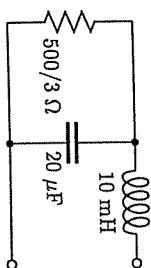
Il piano complesso delle impedenze e il piano complesso delle ammettenze sono riportati nelle Fig. 20.3.1 e 20.3.2.



**Commento :** Diversamente dallo pseudoregime cisoidale, nel regime sinusoidale sia l'impedenza sia l'ammettenza dei  $C$  e degli  $L$  sono puramente immaginarie dal momento che  $s = j\omega$ .

**Commento :** Vedremo nella prossima sezione come un qualsiasi bipolo composto esclusivamente da  $R$  e  $L$  è resistivo-induttivo, per ciascun valore di  $\omega$ , mentre un qualsiasi bipolo composto esclusivamente da  $R$  e  $C$  è resistivo-capacitivo. I bipoli composti da  $R$ ,  $C$  e  $L$  possono essere resistivi-capacitivi in certi intervalli di  $\omega$  e resistivi-induttivi in altri intervalli.

**Esempio :** Consideriamo il bipolo dinamico composto nella Fig. 20.3.3, assumendo che operi in regime sinusoidale con valore arbitrario di  $\omega$  : calcoliamo l'impedenza, che risulta una funzione di  $j\omega$  :



$$z(j\omega) = j\omega L + \frac{r/(j\omega C)}{r + 1/(j\omega C)}$$

$$z(j\omega) = j\omega \cdot 0.01 + \frac{500}{3 + j\omega \cdot 10^{-2}} \Omega$$

Se valutiamo l'impedenza  $z(j\omega)$  in  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$  e in  $\omega = 4000 \text{ rad/s}$  si ottiene :

$$z(j 1000) = j 1000 \cdot 0.01 + \frac{500}{3 + j 1000 \cdot 10^{-2}} = j 10 + \frac{500(3 - j 10)}{109} = \frac{1500}{109} - j \frac{3910}{109}$$

$$z(j 4000) = j 4000 \cdot 0.01 + \frac{500}{3 + j 4000 \cdot 10^{-2}} = j 40 + \frac{500}{3 + j 40} = \frac{1500}{1609} + j \frac{6416000}{1609} \Omega$$

In  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$  il bipolo composto si comporta come un bipolo resistivo-capacitivo, mentre in  $\omega = 4000 \text{ rad/s}$  si comporta come un bipolo resistivo-induttivo.

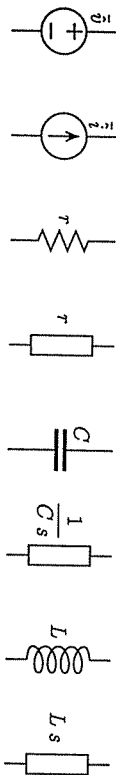
Il valore di  $\omega$  per cui il bipolo passa dal comportamento resistivo-capacitivo a quello resistivo-induttivo è determinato dalla nullità della reattanza :

$$x(j\omega) = \omega/100 + \frac{-5\omega}{9 + \omega^2/10000} = \omega \frac{\omega^2/1000000 - 4.91}{9 + \omega^2/10000} \implies \omega \approx 2220 \text{ rad/s}$$

**Commento :** I valori delle resistenze induttanze e capacità di un generico bipolo composto  $R$ - $L$ - $C$  influenzano sia la parte reale sia quella immaginaria dell'impedenza ovvero ammettenza del bipolo stesso.

### 20.3.3 Simboli circuitali in pseudoregime cisoidale

La figura riporta i modi in cui si usa indicare i componenti di un circuito operante in pseudoregime cisoidale, ovvero in regime sinusoidale.



Una  $\hat{V}$  (cisoidale) con fasore della tensione impressa  $\bar{v}$  viene indicato col simbolo grafico usuale con accanto  $\bar{v}$ .

Una  $\hat{I}$  (isoidale) con fasore della corrente impressa  $\bar{i}$  viene indicato col simbolo grafico usuale con accanto  $\bar{i}$ .

Un  $\mathcal{R}(r)$  viene indicato da uno scatolotto o dal simbolo grafico usuale con accanto  $r$ .

Un  $\mathcal{L}(L)$  viene indicato da uno scatolotto (rettangolo) con due terminali con accanto  $sL$  oppure  $j\omega L$  oppure dal simbolo usuale con accanto la induttanza  $L$ .

Un  $\mathcal{C}(C)$  viene indicato da uno scatolotto con accanto  $1/(sC)$  oppure  $1/(j\omega C)$  oppure dal simbolo usuale con accanto la capacità  $C$ .

Un generico bipolo di impedenza  $z(s)$  [ $z(j\omega)$ ] viene indicato da uno scatolotto con due terminali con accanto  $z(s)$  [ $z(j\omega)$ ].

Quindi, quando un bipolo è rappresentato da uno scatolotto, la specificità del bipolo è affidata esclusivamente all'etichetta.

I doppi bipoli dinamici notevoli (vedere Cap. 10) vengono indicati come al solito.

### 20.3.4 Connessioni serie e parallelo di bipoli composti omogenei

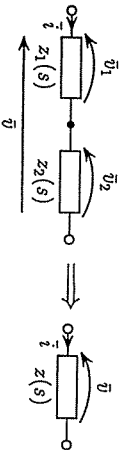
In analogia alle regole per le serie e parallelo di bipoli dinamici, le connessioni serie e parallelo di bipoli dinamici omogenei nel dominio dei fasori vengono calcolate:

**Proprietà:** l'impedenza  $z(s)$  e l'ammettenza  $y(s)$  del bipolo formato dalla serie e dal parallelo di due bipoli d'impedenza  $z_1(s)$  e  $z_2(s)$  e  $1/y_1(s)$  e  $1/y_2(s)$  possono essere calcolate in modo analogo alle resistenze e conduttanze dei bipoli dinamici (vedere Cap. 7):

**Serie di due bipoli**

impedenza :  $z(s) = z_1(s) + z_2(s)$

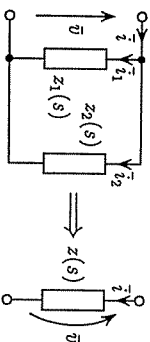
ammettenza :  $y(s) = \frac{y_1(s)y_2(s)}{y_1(s) + y_2(s)}$



**Parallelo di due bipoli**

ammettenza :  $y(s) = y_1(s) + y_2(s)$

impedenza :  $z(s) = \frac{z_1(s)z_2(s)}{z_1(s) + z_2(s)}$



**Commento:** Generalizzando le connessioni serie e parallelo, possiamo affermare che l'impedenza e/o ammettenza di un bipolo composto, operante in pseudoregime cisoidale,

possono essere calcolate con le stesse regole usate per i bipoli dinamici lineari e omogenei incontrate nei Cap. 7, 11 e 13.  
Esempi: WWWWW FARE

### 20.3.5 Bipoli composti nonomogenei

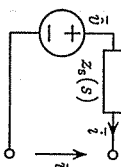
Introduciamo le relazioni costitutive nel dominio dei fasori dei bipoli composti nonomogenei, in analogia a quelle dinamiche in regime costante: esse sono caratterizzate da un'impedenza (ovvero ammettenza) interna e da una grandezza impressa cisoidale: in genere sono definite la rappresentazione controllata in corrente e quella controllata in tensione e i corrispondenti modelli equivalenti. Il fasore della grandezza impressa equivalente risulta in genere dipendente dalla pulsazione complessa  $s$ .

**Modello di Thevenin**

(Sorgente nonideale di tensione)

$$\bar{v} = \bar{v}(s) - z_0(s)\bar{i}$$

una  $\hat{V}$ , di cui  $\bar{v}(s)$  è il fasore della tensione impressa, in serie a un bipolo d'impedenza  $z_0(s)$ .



$$\bar{v}(s) = \bar{i}(s)z_0(s)$$

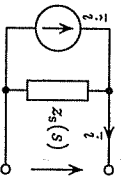
$$z_0(s) = \frac{1}{y_0(s)}$$

**Modello di Norton**

(Sorgente nonideale di corrente)

$$\bar{i} = \bar{i}(s) - y_0(s)\bar{v}$$

una  $\hat{I}$ , di cui  $\bar{i}(s)$  è il fasore della corrente impressa, in parallelo a un bipolo d'ammettenza  $y_0(s)$ .



$$\bar{i}(s) = \bar{v}(s)y_0(s)$$

$$y_0(s) = \frac{1}{z_0(s)}$$

**Trasformazioni tra i modelli di Thevenin e di Norton**

Le formule per passare da un modello all'altro sono analoghe a quelle già incontrate nel Cap. 7 per i bipoli dinamici nonomogenei e sono riportate qui sotto:

**Commento:** I modelli di THEVENIN e NORTON di un bipolo composto operante in pseudoregime cisoidale possono essere calcolati mediante i rispettivi Teoremi che valgono anche in pseudoregime cisoidale, come vedremo nella Sez. 20.5.

### 20.3.6 Esempi di impedenze e ammettenze

Esempi da scrivere con lo scopo di far prendere confidenza agli studenti con le impedenze e le ammettenze.

### 20.4 DOPPI BIPOLI COMPOSITI

Questa sezione introduce alcuni concetti, molto diffusi nell'uso pratico, riguardanti i doppi bipoli composti operanti nel pseudoregime cisoidale e nel regime sinusoidale.

#### 20.4.1 Rappresentazioni esplicite dei doppi bipoli dinamici

Le quattro rappresentazioni cardinali, incontrate nel Cap. 8 per i doppi bipoli dinamici, rimangono valide nel dominio dei fasori:

## Quadro delle rappresentazioni cardinali dei doppi bipoli

representazione	grand. dipen.	matrice	grand. indep.	grand. impr.
1) controllata in corrente ( $v_1, v_2$ ) $\leftarrow$ ( $i_1, i_2$ )	$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{v}_1(s) \\ \bar{v}_2(s) \end{bmatrix}$
2) controllata in tensione ( $i_1, i_2$ ) $\leftarrow$ ( $v_1, v_2$ )	$\begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{i}_1(s) \\ \bar{i}_2(s) \end{bmatrix}$
3) prima ibrida ( $v_1, i_2$ ) $\leftarrow$ ( $i_1, v_2$ )	$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} h'_{11}(s) & h'_{12}(s) \\ h'_{21}(s) & h'_{22}(s) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{v}_1(s) \\ \bar{i}_2(s) \end{bmatrix}$
4) seconda ibrida ( $i_1, v_2$ ) $\leftarrow$ ( $v_1, i_2$ )	$\begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} h''_{11}(s) & h''_{12}(s) \\ h''_{21}(s) & h''_{22}(s) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{i}_1(s) \\ \bar{v}_2(s) \end{bmatrix}$

Un confronto con le corrispondenti rappresentazioni dei doppi bipoli adinamici, tempo-invarianti e lineari (vedere Cap. 9) suggerisce i seguenti commenti:

- I quattro elementi della matrice di ciascuna delle quattro rappresentazioni cardinali sono in genere funzioni complesse della pulsazione complessa  $s$  al contrario dei corrispondenti parametri dei doppi bipoli adinamici che sono costanti.
- La matrice (complessa) impedenza  $Z(s)$  sostituisce la matrice (reale) resistenza  $R$ , mentre la matrice (complessa) ammettenza  $Y(s)$  sostituisce la matrice (reale) conduttanza  $G$ . Anche gli elementi delle matrici ibride  $H'(s)$  e  $H''(s)$ , benché mantengano lo stesso nome e simbolo del caso adinamico, sono in genere funzioni complesse di  $s$ .
- Se e solo se il doppio bipolo è nonomogeneo (cioè se contiene sorgenti impulsive), apparirà nella rappresentazione, accanto alla matrice, un vettore di fasori di tensioni e/o correnti impresse. Esse sono in genere funzioni di  $s$ .
- Le dimensioni fisiche di ogni elemento sono analoghe a quelle dei doppi bipoli adinamici e cioè sono di uno dei seguenti quattro tipi:
  - (trans)impedenza (trans)ammettenza rapporto di tensioni rapporto di correnti
  - misurata in  $\Omega$  misurata in S adimensionato adimensionato
- Vedremo nella Sez. 21.3 che ciascuno dei quattro elementi della matrice di ciascuna rappresentazione cardinale costituisce una funzione di rete. Gli elementi  $( )_{11}$  e  $( )_{22}$  sono funzioni immittenze, mentre gli elementi  $( )_{12}$  e  $( )_{21}$  sono funzioni di trasferimento.

Le due rappresentazioni noncardinali, incontrate nel Cap. 9 per i doppi bipoli adinamici, rimangono valide nel dominio dei fasori:

## Quadro delle rappresentazioni noncardinali dei doppi bipoli

representazione	grand. dipen.	matrice	grand. indep.	grand. impr.
5) di trasmissione diretta ( $v_1, i_1$ ) $\leftarrow$ ( $v_2, i_2$ )	$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{i}_1 \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} t'_{11}(s) & t'_{12}(s) \\ t'_{21}(s) & t'_{22}(s) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{v}_2 \\ -\bar{i}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{v}_1(s) \\ \bar{i}_1(s) \end{bmatrix}$
6) di trasmissione inversa ( $v_2, i_2$ ) $\leftarrow$ ( $v_1, i_1$ )	$\begin{bmatrix} \bar{v}_2 \\ -\bar{i}_2 \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} t''_{11}(s) & t''_{12}(s) \\ t''_{21}(s) & t''_{22}(s) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{i}_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{v}_2(s) \\ \bar{i}_2(s) \end{bmatrix}$

Un confronto con le corrispondenti rappresentazioni noncardinali dei doppi bipoli adinamici, tempo-invarianti e lineari (vedere Cap. 9) suggerisce i seguenti commenti:

- Gli elementi delle matrici di trasmissione  $T'(s)$  e  $T''(s)$ , benché mantengano lo stesso nome e simbolo del caso adinamico, sono in genere funzioni complesse di  $s$ .
- Se e solo se il doppio bipolo è nonomogeneo, apparirà nella rappresentazione noncardinale, accanto alla matrice, un vettore di fasori di tensioni e/o correnti impresse. Le dimensioni fisiche di ogni elemento sono analoghe a quelle dei doppi bipoli adinamici.
- Vedremo, sempre nella Sez. 21.4xxx, che ciascuno dei quattro elementi della matrice delle rappresentazioni noncardinali non sono in genere una funzione di rete. Questo è dovuto al fatto che le due variabili indipendenti sono alla stessa porta. Essi potrebbero essere visti come funzioni di rete nel caso che le due porte del doppio bipolo fossero chiuse su un nullore con una  $\mathcal{V}$  in serie ovvero una  $\mathcal{I}$  in parallelo alla porta d'ingresso del nullore stesso. Altrimenti, esse possono essere viste come inverse di funzioni di rete.

Come per i doppi bipoli adinamici, ogni doppio bipolo composito dinamico ammette almeno una tra le sei rappresentazioni esplicite, eccetto il caso in cui sia patologico.

## 20.4.2 Equilibratura, simmetria, reciprocità e direzionalità

Le seguenti definizioni già introdotte per i doppi bipoli adinamici sono immediatamente estendibili nel dominio dei fasori: doppi bipoli equilibrati, simmetrici, reciproci, unidirezionali, zerodirezionali. Siccome gli elementi di ciascuna matrice sono in genere complessi, le condizioni qui sotto riportate sono da intendere nel dominio dei numeri complessi:

**Quadro dei doppi bipoli dinamici tempo-invarianti lineari omogenei**  
*Condizioni di equilibrio, simmetria, reciprocità e unidirezionalità*

	equilibrato (1)		zerodirezionale (3)	
	simmetrico (2) recipoco		unidirez. 1 → 2	unidirez. 1 ← 2
$Z(s)$	$z_{12}(s) = z_{21}(s)$	$z_{11}(s) = z_{22}(s)$	$z_{12}(s) = 0$	$z_{21}(s) = 0$
$Y(s)$	$y_{12}(s) = y_{21}(s)$	$y_{11}(s) = y_{22}(s)$	$y_{12}(s) = 0$	$y_{21}(s) = 0$
$H(s)$	$h_{12}(s) = -h_{21}(s)$	$ H'(s)  = 1$	$h_{12}(s) = 0$	$h_{21}(s) = 0$
$H''(s)$	$h''_{12}(s) = -h''_{21}(s)$	$ H''(s)  = 1$	$h''_{12}(s) = 0$	$h''_{21}(s) = 0$
$T'(s)$	$ T'(s)  = 1$	$t'_{11}(s) = t'_{22}(s)$	$ T'(s)  = 0$	nondefinita
$T''(s)$	$ T''(s)  = 1$	$t''_{11}(s) = t''_{22}(s)$	nondefinita	$ T''(s)  = 0$

- (1) l'equilibratura (3 vincoli) ⇒ la simmetria (2 vincoli)
- (2) la simmetria (2 vincoli) ⇒ la reciprocità (1 vincolo) con un'eccezione come una "doppia unidirezionalità" 1 → 2 e 1 ← 2
- (3) la zerodirezionalità (2 vincoli) può essere vista
- la reciprocità ⇒ l'impossibilità della unidirezionalità
- la nonreciprocità ⇒ l'impossibilità della zerodirezionalità
- sia  $T'(s)$  sia  $T''(s)$  non sono definite in un doppio bipolo zerodirezionale

**Commento :** La reciprocità di un doppio bipolo dinamico lineare omogeneo, già introdotta nel dominio del tempo mediante i lavori incrociati (vedere Cap. 16), nel dominio dei fasori diventa molto più semplice e analoga a quella introdotta per i doppi bipoli adinamici nel Cap. 9. WWWWW DIMOSTRARE

**20.4.3 Sorgenti pilotate dinamiche**

Quando la matrice di una rappresentazione cardinale di un doppio bipolo omogeneo ha solamente l'elemento (2) non nullo, siamo in presenza di un componente che merita il nome di *sorgente pilotata dinamica* per analogia con le sorgenti pilotate adinamiche già incontrate nel Cap. 9. L'elemento non nullo è in genere una funzione complessa della pulsazione complessa  $s$ , in quanto esso costituisce il rapporto tra il fasore della grandezza pilotata e il fasore della grandezza pilotante. Nella Par. 21.1.4 queste funzioni verranno chiamate funzioni di trasferimento.

**Quadro delle sorgenti pilotate dinamiche**

rappres. cardinale	controllata in corrente $(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$	controllata in tensione $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$	prima ibrida $(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$	seconda ibrida $(i_1, v_2) \leftarrow (v_1, i_2)$
matrice	$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_{m}(s) & 0 \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_m(s) & 0 \end{bmatrix}$	$H' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta(s) & 0 \end{bmatrix}$	$H'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha(s) & 0 \end{bmatrix}$
nome specifico	sorgente di tensione pilotata in corrente	sorgente di corrente pilotata in tensione	sorgente di corrente pilotata in corrente	sorgente di tensione pilotata in tensione
	$V_X$ dinamica	$I_Y$ dinamica	$I_X$ dinamica	$V_Y$ dinamica

**Commento :** Non esistono, in genere, componenti fisici il cui modello sia una sorgente pilotata dinamica. Comunque, possono essere realizzati doppi bipoli fisici composti, il cui modello è una sorgente pilotata dinamica. Inoltre, analogamente ai doppi bipoli adinamici, esse sono necessarie per costruire i modelli cardinali di doppi bipoli dinamici qualsiasi, come sarà visto nel paragrafo seguente.

**20.4.4 Modelli cardinali dei doppi bipoli**

In analogia ai modelli dei doppi bipoli adinamici (vedere Cap. 9), le sorgenti pilotate dinamiche permettono di introdurre i quattro modelli cardinali equivalenti dei doppi bipoli: per ciascuna rappresentazione cardinale di un doppio bipolo non omogeneo e non improprio può essere introdotto il corrispondente modello cardinale costituito da due bipoli omogenei, due sorgenti pilotate dinamiche e due sorgenti impulsive, come riportato nel quadro:

**Quadro dei modelli cardinali dei doppi bipoli dinamici lineari**

rappresentazione cardinale	porta 1	porta 2
1) contr. in corrente $(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$	serie $\bar{v}_1 = \overbrace{z_{11}(s)\bar{i}_1 + z_{12}(s)\bar{i}_2}^{V_X} + \bar{v}_1(s)$ bipolo $V_X$ parallelo $\bar{i}_1 = \overbrace{y_{11}(s)\bar{v}_1 + y_{12}(s)\bar{v}_2}^{I_Y} + \bar{i}_1(s)$ bipolo $I_Y$ serie $\bar{v}_2 = \overbrace{z_{22}(s)\bar{i}_2 + z_{21}(s)\bar{i}_1}^{V_X} + \bar{v}_2(s)$ bipolo $V_X$ parallelo $\bar{i}_2 = \overbrace{y_{22}(s)\bar{v}_2 + y_{21}(s)\bar{v}_1}^{I_Y} + \bar{i}_2(s)$ bipolo $I_Y$	serie $\bar{v}_2 = \overbrace{z_{22}(s)\bar{i}_2 + z_{21}(s)\bar{i}_1}^{V_X} + \bar{v}_2(s)$ bipolo $V_X$ parallelo $\bar{i}_2 = \overbrace{y_{22}(s)\bar{v}_2 + y_{21}(s)\bar{v}_1}^{I_Y} + \bar{i}_2(s)$ bipolo $I_Y$
2) contr. in tensione $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$	serie $\bar{i}_1 = \overbrace{h'_{11}(s)\bar{v}_1 + h'_{12}(s)\bar{v}_2}^{V_Y} + \bar{i}_1(s)$ bipolo $V_Y$ parallelo $\bar{v}_1 = \overbrace{h''_{22}(s)\bar{i}_2 + h''_{21}(s)\bar{i}_1}^{I_X} + \bar{v}_1(s)$ bipolo $I_X$	serie $\bar{v}_2 = \overbrace{h''_{22}(s)\bar{i}_2 + h''_{21}(s)\bar{i}_1}^{I_X} + \bar{v}_2(s)$ bipolo $I_X$ parallelo $\bar{i}_2 = \overbrace{h'_{22}(s)\bar{v}_2 + h'_{21}(s)\bar{v}_1}^{V_Y} + \bar{i}_2(s)$ bipolo $V_Y$
3) prima ibrida $(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$	serie $\bar{v}_1 = \overbrace{h'_{11}(s)\bar{v}_1 + h'_{12}(s)\bar{v}_2}^{V_Y} + \bar{v}_1(s)$ bipolo $V_Y$ parallelo $\bar{i}_1 = \overbrace{h''_{22}(s)\bar{i}_2 + h''_{21}(s)\bar{i}_1}^{I_X} + \bar{i}_1(s)$ bipolo $I_X$	serie $\bar{v}_2 = \overbrace{h''_{22}(s)\bar{i}_2 + h''_{21}(s)\bar{i}_1}^{I_X} + \bar{v}_2(s)$ bipolo $I_X$ parallelo $\bar{i}_2 = \overbrace{h'_{22}(s)\bar{v}_2 + h'_{21}(s)\bar{v}_1}^{V_Y} + \bar{i}_2(s)$ bipolo $V_Y$
4) seconda ibrida $(i_1, v_2) \leftarrow (v_1, i_2)$	serie $\bar{i}_1 = \overbrace{h'_{11}(s)\bar{v}_1 + h'_{12}(s)\bar{v}_2}^{V_Y} + \bar{i}_1(s)$ bipolo $V_Y$ parallelo $\bar{v}_1 = \overbrace{h''_{22}(s)\bar{i}_2 + h''_{21}(s)\bar{i}_1}^{I_X} + \bar{v}_1(s)$ bipolo $I_X$	serie $\bar{v}_2 = \overbrace{h''_{22}(s)\bar{i}_2 + h''_{21}(s)\bar{i}_1}^{I_X} + \bar{v}_2(s)$ bipolo $I_X$ parallelo $\bar{i}_2 = \overbrace{h'_{22}(s)\bar{v}_2 + h'_{21}(s)\bar{v}_1}^{V_Y} + \bar{i}_2(s)$ bipolo $V_Y$

WWWWWW Duplicare Dal Cap. 9 LE FIGURE relative ai suddetti modelli.

Prova : È analoga a quella fatta per i modelli dei doppi bipoli adinamici nel Cap. 9 e

quindi viene omessa.

**Commento :** Come per i doppi bipoli dinamici (vedere Par. xxx) esistono anche due modelli derivati dalle rappresentazioni noncardinali. Essi hanno un nullo al loro interno e non vengono qui ricordati, dal momento che sono poco usati.

**20.4.5 Esempi di doppi bipoli dinamici**

Esempi da scrivere con lo scopo di far prendere confidenza agli studenti con i doppi bipoli dinamici.

WWWWWW Fare vedere che i fasori delle grandezze impresse equivalenti dipendono in genere dalla pulsazione complessa.

**20.5 ESTENSIONE DI REGOLE, PROPRIETÀ E METODI DEI CIRCUITI ADINAMICI**

L'introduzione dei fasori ci consente di estendere immediatamente proprietà, teoremi, e metodologie di natura algebrica, introdotte per i circuiti dinamici lineari nel CCap. 7-13 ai circuiti dinamici lineari che operano nello pseudoregime cisoidale. Alcune di queste estensioni sono già state discusse nelle precedenti sezioni di questo capitolo.

**20.5.1 Elenco delle estensioni**

Questo paragrafo contiene un'elenco delle regole, proprietà e metodi specifici dei circuiti dinamici che ritroviamo tali e quali anche nei circuiti operanti in pseudoregime cisoidale.

**Dal Cap. 7**

Modelli di THÉVENIN e di NORRÓN (vedere Par. 20.3.6)  
 Regole per la serie e parallelo di bipoli (vedere Par. 20.3.5)

Regole dei partitori (serie e parallelo) (vedere Sez. 23.4)  
 Primo e secondo teorema di MILLMANN (vedere Par. 20.5.9)  
 Principio della falsa posizione

**Dai CCap. 8 e 9**

Rappresentazioni dei multiporle e dei doppi bipoli  
 Componenti reciproci

Doppi bipoli simmetrici, equilibrati, unidirezionali e zero direzionali (vedere Par. 20.4.2)  
 Primo teorema di equivalenza

Regole per il cambiamento della rappresentazione  
 Trasformazioni triangolo→stella e stella→triangolo (vedere Par. 20.5.7)

**Dal Cap. 10**

Proprietà dei circuiti con più nullori  
 Modelli cardinali e noncardinali dei doppi bipoli (vedere Par. 20.4.4)  
 Trasformazioni dei bipoli connessi alle porte del tr.id. e del giratore.

**Dal Cap. 11**

Metodo totale (vedere Par. 21.1.2)  
 Circuiti dinamici patologici  
 Ricollocazione delle sorgenti impulsive

Principio di sovrapposizione

Secondo e terzo teorema di equivalenza  
 Teoremi di THÉVENIN e NORRÓN (vedere Par. 20.5.8)  
 Teoremi di compensazione

**Dal Cap. 12**

Metodo nodale puro e modificato  
 Metodo alle maglie (anelli) puro e modificato

**Dal Cap. 13**

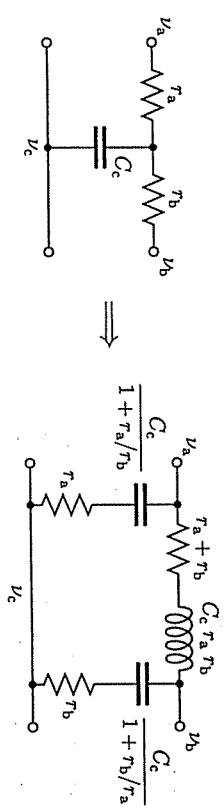
Primo e secondo teorema di MILLER (vedere Par. 20.5.10)  
 Regole per le connessioni di bipoli e doppi bipoli  
 Metodi aggregati e rimpiazzati

**20.5.2 Esempio 1 : Trasformazione stella→triangolo**

Le formule per le trasformazioni stella-triangolo, benché assolutamente valide anche nel dominio dei fasori, possono comportare un certo appesantimento nell'uso pratico, come illustrato in questo esempio. Consideriamo il DBT a stella dinamico nella Fig. 1 in cui campiano due  $\mathcal{R}$  e un  $\mathcal{C}$ . Trasformiamolo in un DBT equivalente a triangolo con le formule date nel Cap. 9. Le impedenze  $z^{ab}$ ,  $z^{bc}$  e  $z^{ca}$  dei tre bipoli del DBT a triangolo risultano :

$$z^{ab} = \frac{r_a + r_b + s C_c r_a r_b}{\mathcal{R}}, \quad z^{bc} = \frac{r_b + r_a/r_b}{\mathcal{R}}, \quad z^{ca} = \frac{r_c + 1 + r_b/r_a}{\mathcal{C}}$$

Interpretando le impedenze di questi bipoli dinamici, otteniamo il DBT a triangolo equivalente al DBT a stella originario in Fig. 2.



Notare che le tre impedenze del triangolo hanno l'unico zero reale e negativo coincidente:  $z_2 = -[1/r_a + 1/r_b]/C_c$ .

**Commento :** Mentre nel DBT a stella sono presenti solamente due  $\mathcal{R}$  e un  $\mathcal{C}$ , nel DBT a triangolo equivalente sono presenti tre  $\mathcal{R}$ , due  $\mathcal{C}$  e un  $\mathcal{L}$ . Questo fatto può consigliare l'uso di queste trasformazioni qualora si desideri che il DBT equivalente sia valido per qualsiasi valore della pulsazione complessa  $s$ . Nel caso in cui il DBT a triangolo debba essere equivalente solo in un pseudoregime cisoidale con un valore fissato  $s_1$  della pulsazione  $s$ , le tre funzioni impedenza del DBT a triangolo si ridurrebbero, per  $s = s_1$ , a tre numeri complessi. In questo caso il DBT a triangolo non sarebbe più complicato del DBT a stella equivalente.





# 21 FUNZIONI di RETTE

## 21.1 GENERALITÀ

Qui vengono definite le funzioni di rete di un circuito operante in pseudoregime cisoidale come rapporto tra il fasore di una grandezza qualsiasi del circuito e il fasore di una grandezza impressa. Questo rapporto dipende dalla pulsazione  $s$  comune a tutte le grandezze impresse cisoidali, che caratterizzano lo pseudoregime cisoidale: viene provato che ogni funzione di rete è una funzione razionale nella pulsazione complessa  $s$ . Esse sono suddivise tra funzioni immettenza e funzioni di trasferimento. Infine le funzioni di rete sono messe in relazione con le equazioni di stato.

### 21.1.1 Rappresentazione unificata

Scriviamo le relazioni costitutive nel dominio dei fasori di tutti i componenti in una rappresentazione unificata:

$$H^{v0} \bar{v} + s H^{v1} \bar{i} + H^{i0} \bar{i} + s H^{i1} \bar{i} = \bar{u} \implies [H^{v0} + s H^{v1}] \bar{v} + [H^{i0} + s H^{i1}] \bar{i} = \bar{u}$$

in cui  $H^{v0}$ ,  $H^{v1}$ ,  $H^{i0}$ ,  $H^{i1}$  sono matrici  $m \times m$  di parametri reali costanti.

Noi abbiamo assunto di adottare per i condensatori, induttori e induttori accoppiati le rispettive rappresentazioni differenziali. Questo ci assicura che la pulsazione complessa  $s$  compaia solamente come fattore scalare che moltiplica le matrici  $H^{v1}$  e  $H^{i1}$ ; queste due matrici contengono la capacità, l'induttanza e la matrice induttanza dei componenti dinamici contenuti nel circuito.

### 21.1.2 Metodo totale di analisi nel dominio dei fasori

Il metodo totale, introdotto nel Cap. 11 per l'analisi dei circuiti dinamici, tempo-invarianti e lineari, viene qui generalizzato ai circuiti dinamici lineari nel dominio dei fasori. Partendo dalle leggi di KIRCHHOFF e dalla rappresentazione unificata, scriviamo il sistema di equazioni del metodo totale:

$$\begin{bmatrix} -A^T & I_{m,m} & 0_{m,m} \\ 0_{n-1,m} & 0_{n-1,m} & A \\ 0_{m,n-1} & H^{v0} + sH^{v1} & H^{i0} + sH^{i1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}^{nod} \\ \bar{v} \\ \bar{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_{n-1} \\ \bar{u} \end{bmatrix}$$

Dove i simboli significano:

$n$ : numero dei nodi del grafo,  $m$ : numero dei rami del grafo

$A$ : matrice incidenza  $(n-1) \times m$

$H^{v0}$ ,  $H^{v1}$ ,  $H^{i0}$ ,  $H^{i1}$  matrici  $m \times m$  diagonali a blocchi.

ogni blocco contiene i coefficienti delle relazioni costitutive.

$I_{m,m}$ : matrice identità  $m \times m$

$0_m$ ,  $0_{n-1}$  vettori di  $m$  e  $(n-1)$  elementi nulli

$0_{m,m}$ ,  $0_{m,n-1}$ ,  $0_{n-1,m}$ ,  $0_{n-1,n-1}$ : matrici di elementi nulli; i pedici denotano le dimensioni.

$\bar{u}$ : vettore dei fasori delle grandezze impresse.

$\bar{v}^{nod}$ ,  $\bar{v}$  e  $\bar{i}$ : vettori dei fasori delle tensioni di nodo, tensioni e correnti di ramo.

WWWWWW??? diagrammi di Nyquist o Bode o dislocazione poli e zeri di una generica funzione di rete ???WWWWWWWW

L'algebrizzazione delle equazioni consente l'introduzione delle funzioni di rete. Esse sono definite dal rapporto di fasori di due grandezze cisoidali e non come rapporto delle trasformate di LAPLACE delle stesse grandezze. Comunque, molti dei problemi formali qui discussi valgono anche nel dominio di LAPLACE, che non viene discusso in questo testo. Vengono introdotte le funzioni di rete sempre nello pseudoregime cisoidale. Esse risultano fondamentali per descrivere molte proprietà e applicazioni ingegneristiche dei circuiti dinamici lineari.

**Sez. 21.1 : Generalità** : Le funzioni di rete vengono definite come rapporto tra il fasore di una grandezza cisoidale qualsiasi e il fasore di una grandezza impressa cisoidale e sono funzioni razionali nella pulsazione complessa  $s$ . Esse sono suddivise nelle funzioni immettenza e nelle funzioni di trasferimento.

**Sez. 21.2 : Zeri e poli** : Dal momento che le funzioni di rete sono rapporti di polinomi nella pulsazione complessa  $s$ , sia il numeratore sia il denominatore hanno radici reali e/o complesse coniugate in numero pari al loro grado. Queste radici, chiamate, rispettivamente zeri e poli della funzione di rete, hanno un significato fisico molto importante, che viene discusso.

**Sez. 21.3 : Funzioni di rete in regime sinusoidale** : La periodicità del regime sinusoidale consente di formulare alcune proprietà delle funzioni di rete esclusive del regime sinusoidale. In particolare conviene mettere in evidenza l'ampiezza, la fase e le parti reale e immaginaria di una generica funzione di rete  $F(j\omega)$  e introdurre il corrispondente *diagramma polare* (*diagramma di NYQUIST*). Infine sono introdotti alcuni consigli pratici utili per calcolare una funzione di rete. Successivamente vengono discusse le funzioni di rete elementari che vengono più frequentemente incontrate nella pratica.

**Sez. 21.4 : Normalizzazione** : Nell'analisi numerica di un circuito fisico, i valori numerici dei parametri e delle grandezze elettriche assumono molto spesso valori molto più piccoli e/o molto più grandi della rispettiva unità di misura. L'esecuzione dei calcoli provoca tedio all'utente che lavora con cartapezza e overflow e/o underflow al computer. Per rimediare conviene eseguire una *normalizzazione* dei valori numerici delle grandezze e dei parametri fisici.

**Sez. 21.5 : Grandezze logaritmiche** : Le grandezze che caratterizzano una funzione di rete non sono appropriate per tracciare diagrammi o per eseguire calcoli; in questi casi si preferisce sostituirle con grandezze logaritmiche, che consentono di rendere più leggibili i diagrammi dell'ampiezza e della fase, più amichevoli i valori numerici delle grandezze in gioco e di scompare in addendi semplici l'ampiezza della funzione.

**Commento :** La matrice del sistema lineare contiene la topologia del circuito (matrice di incidenza  $A$ ) e le relazioni costitutive dei componenti omogenei (matrici  $[H^{v0} + sH^{v1}]$  e  $[H^{i0} + sH^{i1}]$ ).

Il determinante della matrice è un polinomio in  $s$ . Nell'ipotesi che questo polinomio non sia identicamente nullo (cioè nullo per qualsiasi valore di  $s$ ), la soluzione del sistema lineare esiste e può essere ottenuta invertendo la matrice del sistema :

$$\begin{bmatrix} \bar{u}^{nod} \\ \bar{v} \\ \bar{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^T & I_{m,m} & 0_{m,m} \\ 0_{n-1,n-1} & 0_{n-1,m} & A \\ 0_{m,n-1} & H^{v0} + sH^{v1} & H^{i0} + sH^{i1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_{n-1} \\ \bar{i} \end{bmatrix}$$

**Commento :** L'inversione della matrice contenuta nella suddetta formula costituisce un momento cruciale di questo metodo di analisi sia dal punto di vista concettuale sia dal punto di vista numerico. Gli zeri del determinante della matrice diventano i poli degli elementi della sua inversa e conseguentemente coincidono con le pulsazioni naturali viste nel Cap. 19. Questo aspetto sarà più chiaro dopo la lettura della prossima sezione. ■

### 21.1.3 Definizione

Una generica funzione di rete in un circuito viene definita nello pseudoregime cisoidale. Le grandezze impresse presenti del circuito siano azzerate eccetto la grandezza impressa  $\hat{u}(t)$  di nostro interesse, che in questo caso prende il nome *variabile d'ingresso*. Una qualsiasi tensione o corrente di ramo del circuito di nostro interesse, che indichiamo con  $y(t)$ , può essere scelta come *grandezza d'uscita*.

**Definizione :** Una *funzione di rete* è il rapporto tra il fasore di una grandezza di ramo  $y(t)$ , scelta come uscita, e il fasore di una grandezza impressa  $\hat{u}(t)$ , che ha il ruolo di ingresso. ■

**Proprietà :** In seguito alla linearità del circuito, il suddetto rapporto non dipende dal fasore della cisoidale dell'ingresso  $\hat{u}(t)$ , ma solamente dalla sua pulsazione complessa  $s$ , che costituisce l'argomento della funzione di rete in quanto compare nelle relazioni costitutive dei componenti dinamici (vedere Sez. 19.1).

**Commento :** Dal momento che in un circuito possono essere presenti più di una sorgente impressiva, le cui grandezze impresse ha il ruolo di ingresso  $e$ , ovviamente, molte tensioni e correnti (uscite), molte funzioni di rete possono essere definite. ■

**Commenti :** La soluzione del metodo totale nel dominio dei fasori ci fornisce i fasori delle tensioni di nodo, delle tensioni di ramo e delle correnti di ramo (grandezze d'uscita) in funzione dei fasori delle grandezze impresse (vedere Par. 21.1.2). Quindi gli elementi dell'inversa della matrice del sistema sono le funzioni di rete il cui la grandezza d'ingresso è identificata dalla colonna dell'elemento stesso e la cui grandezza d'uscita è identificata dalla riga. La regola di di KRAMER afferma che ogni elemento della matrice inversa coincide col rapporto del complemento algebrico dell'elemento corrispondente della matrice da invertire e il determinante della matrice stessa. Quindi, a meno di eventuali cancellazioni di fattori comuni al numeratore e al denominatore, il denominatore di ciascuna funzione di rete coincide col determinante della matrice del sistema ed è comune a tutte le funzioni di rete dello stesso circuito. Questo argomento sarà ripreso più avanti nell'ambito delle equazioni di stato (Par. 21.2.5). ■

### 21.1.4 Classi di funzioni di rete

In una funzione di rete qualsiasi ogni grandezza in  $\bar{y}$  è una tensione o una corrente di ramo e analogamente ogni ingresso in  $\bar{u}$  è una tensione o una corrente impressa. Conseguentemente ogni funzione di rete può essere interpretata come l'impedenza o ammettenza di un bipolo composto che può essere individuato all'interno del circuito oppure come un elemento fuori dalla diagonale di una matrice cardinale di un opportuno doppio bipolo composto che può essere individuato all'interno del circuito. Le seguenti diverse classi di funzioni di rete sono definite :

Quadro delle funzioni di rete : funzioni immettenze

uscita sul $\mu$ -esimo ramo		impedenze		ammettenze	
uscita sul $\mu$ -esimo ramo	tensione	corrente impressa	tensione impressa	corrente	tensione impressa
ingresso nel $\nu$ -esimo ramo	corrente impressa	tensione impressa	corrente impressa	tensione impressa	corrente
rapporto :	$\frac{\text{uscita}}{\text{ingresso}}$	$\frac{\bar{u}_\mu}{\bar{i}_\nu}$	$\frac{\bar{u}_\mu}{\bar{i}_\nu}$	$\frac{\bar{i}_\mu}{\bar{u}_\nu}$	$\frac{\bar{i}_\mu}{\bar{u}_\nu}$

**Commento :** Il termine *immettanza* è derivato dalla fusione di *impedenza* e *ammettenza*, quindi indica la sottoclasse delle funzioni di rete definite dal rapporto dei fasori delle grandezze (tensione e corrente) di un bipolo composto.

WWWWW FARE ESEMPI :

Quadro delle funzioni di rete : funzioni di trasferimento

uscita sul $\mu$ -esimo ramo		transimpedenze		transammettenze		rapporti di corrente		rapporti di tensione	
uscita sul $\mu$ -esimo ramo	tensione	corrente impressa	tensione impressa	corrente impressa	tensione impressa	corrente impressa	tensione impressa	corrente impressa	tensione impressa
ingresso nel $\nu$ -esimo ramo	corrente impressa	tensione impressa	corrente impressa	tensione impressa	corrente impressa	tensione impressa	corrente impressa	tensione impressa	corrente impressa
rapporto :	$\frac{\text{uscita}}{\text{ingresso}}$	$\frac{\bar{u}_\mu}{\bar{i}_\nu}$	$\frac{\bar{u}_\mu}{\bar{i}_\nu}$	$\frac{\bar{i}_\mu}{\bar{u}_\nu}$	$\frac{\bar{i}_\mu}{\bar{u}_\nu}$	$\frac{\bar{i}_\mu}{\bar{i}_\nu}$	$\frac{\bar{u}_\mu}{\bar{u}_\nu}$	$\frac{\bar{i}_\mu}{\bar{i}_\nu}$	$\frac{\bar{u}_\mu}{\bar{u}_\nu}$

**Commento :** Le funzioni di trasferimento si riferiscono a due grandezze di rami diversi del circuito : quindi esse risultano essere elementi fuori dalla diagonale di una matrice cardinale di un doppio bipolo composto, le cui porte coincidono coi rami in cui vi è la sorgente impressiva (ingresso) e la grandezza d'uscita.

WWWWW FARE ESEMPI :

### 21.1.5 Matrici delle funzioni di rete ed equazioni di stato e uscita

Consideriamo l'equazione di stato e l'equazione d'uscita nello pseudoregime cisoidale. Esprimiamo il vettore dei fasori delle uscite del circuito  $\bar{y}$  in funzione del vettore dei fasori degli ingressi  $\bar{u}$  :

$$\text{equazione di stato : } \dot{\bar{x}} = [s I - A]^{-1} [B + s B' + \dots] \bar{u}$$

$$\text{equazione d'uscita : } \bar{y} = C \bar{x} + [D + s D' + \dots] \bar{u} \quad \left. \begin{array}{l} \text{equazione di stato} \\ \text{equazione d'uscita} \end{array} \right\} \bar{y} = F(s) \bar{u}$$

$$\text{dove } F(s) = C [s I - A]^{-1} [B + s B' + \dots] + [D + s D' + \dots]$$

$F(s)$  è una matrice, in cui ogni elemento  $F_{\mu\nu}(s)$  coincide, per definizione, con la funzione di rete definita dal rapporto tra il fasore  $\tilde{y}_\mu$  della grandezza d'uscita  $y_\mu(t)$  e il fasore  $\tilde{u}_\nu$  della grandezza d'ingresso  $u_\nu(t)$  :

$$F_{\mu\nu}(s) = \frac{\tilde{y}_\mu}{\tilde{u}_\nu} = \frac{\text{tensione o corrente d'uscita}}{\text{tensione o corrente impressa}}$$

Quindi  $F(s)$  è chiamata *matrice delle funzioni di rete* del circuito.

**Proprietà** : una qualsiasi funzione di rete  $F(s)$  è razionale :

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{ove } N(s) \text{ e } D(s) \text{ sono polinomi in } s \text{ con coefficienti reali}$$

**Proprietà** : Nei circuiti in cui  $B' = 0, B'' = 0, \dots, D' = 0, D'' = 0, \dots$  (circuiti nondegeneri ovvero degeneri senza coinvolgimento di grandezze impresse) il grado del numeratore di ogni funzione di rete è inferiore o uguale a quello del denominatore. ■

**Prova** : In questo caso la matrice  $F(s)$  delle funzioni di rete ha la forma :

$$F(s) = C [sI - A]^{-1} B + D$$

in cui la matrice  $D$  viene sommata alla matrice delle funzioni di rete discussa nella proprietà precedente : la sua presenza consente al grado del numeratore di ogni elemento della matrice  $F(s)$  di raggiungere il grado del denominatore  $n$ , ma non di superarlo. ■ **Proprietà** : Se oltre all'ipotesi di nondegeneranza del circuito aggiungiamo la condizione  $D = 0$ , il grado del numeratore di ogni funzione di rete è inferiore a quello del denominatore. ■

**Prova** : La matrice  $F(s)$  delle funzioni di rete si semplifica :

$$F(s) = C [sI - A]^{-1} B$$

Applicando la regola di KRAMER (vedere Par. 21.1.3) sull'inversione di matrici, si ha che ogni elemento della matrice  $[sI - A]^{-1}$  è una funzione razionale. Il grado del numeratore non può mai superare  $n - 1$ , mentre il grado del denominatore è sempre uguale a  $n$ . La presenza delle matrici moltiplicative  $C$  e  $B$  non può incrementare il massimo grado tra i numeratori o diminuire quello del denominatore. ■

**Commento** : Le funzioni di rete possono avere il grado del numeratore superiore a quello del denominatore solamente se il circuito è degenere. Questo caso non è affatto raro : per esempio esistono spesso immettenze in cui il grado del numeratore e del denominatore non coincidono.

#### Funzione impedenza

Alimentando un bipolo composito con una sVi costruiamo un circuito di cui l'impedenza del bipolo è necessariamente una funzione di rete. Se il grado del denominatore dell'impedenza supera quello del denominatore, il circuito è sicuramente degenere. Infatti quando il numeratore supera quello del denominatore noi possiamo estrarre in serie all'impedenza stessa un induttore la cui corrente coincide con quella della sVi. ■

#### Funzione ammettenza

Alimentando un bipolo composito con una sVi costruiamo un circuito di cui l'ammettenza del bipolo è necessariamente una funzione di rete. Se il grado del numeratore dell'ammettenza supera quello del denominatore, il circuito è sicuramente degenere. Infatti quando il numeratore supera quello del denominatore noi possiamo estrarre in parallelo all'ammettenza stessa un condensatore la cui tensione coincide con quella della sVi. ■

WWWWWW??? FARE DUE FIGURE COME ESEMPI ???WWWWW

## 21.2 ZERI E POLI

Dal momento che le funzioni di rete sono funzioni razionali nella pulsazione complessa  $s$ , sia il numeratore sia il denominatore hanno radici reali e/o complesse coniugate. Queste radici, chiamate, rispettivamente zeri (quelle del numeratore) e poli (quelle del denominatore), hanno un significato fisico molto importante.

### 21.2.1 Richiamo del Teorema fondamentale dell'algebra

**Definizione** : Se consideriamo una generica funzione di rete  $F(s) = N(s)/D(s)$ , le radici del numeratore  $N(s)$  costituiscono gli zeri di  $F(s)$ , mentre le radici del denominatore  $D(s)$  costituiscono i poli di  $F(s)$ . ■

Il *teorema fondamentale dell'algebra* ci dice che un polinomio di grado  $n$  ha  $n$  radici, le quali possono essere reali e/o complesse coniugate. Queste radici ci consentono di decomporre il polinomio in  $n$  fattori di primo grado. In presenza di una coppia di radici complesse coniugate, i rispettivi fattori sono anch'essi complessi coniugati. Comunque, il prodotto di ciascuna coppia di fattori complessi coniugati da origine a un fattore di secondo grado con coefficienti reali. Quindi una funzione di rete può essere scomposta nel prodotto/rapporto di fattori del primo e secondo ordine (con coefficienti reali).

### 21.2.2 Espressione della funzione di rete tramite zeri e poli

Una qualsiasi funzione di rete può assumere una espressione in cui vengono messi in evidenza gli zeri (radici del numeratore) e i poli (radici del denominatore) della funzione stessa, oltre a una costante moltiplicativa. Questa espressione dimostra che gli zeri e i poli caratterizzano binivocamente una qualsiasi funzione di rete a meno della costante moltiplicativa reale :

$$F(s) = h s^{u_0} \underbrace{\prod_{z=1}^{K_z} [1 + s/\sigma_z]}_{\text{zeri reali}} \underbrace{\prod_{z=1}^{K_{zc}} [1 + s/(q_{zc}\omega_{zc}) + (s/\omega_{zc})^2]}_{\text{coppie complesse di zeri}} \underbrace{\prod_{z=1}^{K_p} [1 + s/\sigma_p]}_{\text{poli reali}} \underbrace{\prod_{z=1}^{K_{pc}} [1 + s/(q_{pc}\omega_{pc}) + (s/\omega_{pc})^2]}_{\text{coppie complesse di poli}}$$

dove i parametri presenti vanno interpretati come segue :

- $h$  : costante moltiplicativa
- $u_0$  : numero (intero) di zeri nell'origine
- $(\forall u_0 > 0)$   $u_0$  numero (intero) di poli nell'origine
- $(\forall u_0 < 0)$   $|u_0|$  : numero (intero) di poli nell'origine
- $u_0 = 0$  sia zeri sia poli nell'origine sono assenti
- $K_z$  : numero di zeri reali esclusi quelli eventuali nell'origine
- $K_{zc}$  : numero di coppie di zeri complessi coniugati
- $K_p$  : numero di poli reali esclusi quelli eventuali nell'origine
- $K_{pc}$  : numero di coppie di poli complessi coniugati
- Grado del numeratore :  $u_0 + K_z + 2K_{zc}$   $\forall u_0 > 0$ ,  $K_z + 2K_{zc}$   $\forall u_0 \leq 0$

Grado del denominatore :  $K_{pr} + 2K_{pc} \quad \forall u_0 \geq 0, \quad -u_0 + K_{pr} + 2K_{pc} \quad \forall u_0 < 0$

$-s_{pr}$  :  $\nu$ -esima zero reale

$\omega_{pr}$  : modulo della  $\nu$ -esima coppia di zeri complessi coniugati

$q_{pr}$  : parametro che definisce la fase della  $\nu$ -esima coppia di zeri complessi coniugati

$-s_{pv}$  :  $\nu$ -esimo polo reale

$\omega_{pv}$  : modulo della  $\nu$ -esima coppia di poli complessi coniugati

$q_{pv}$  : parametro che definisce la fase della  $\nu$ -esima coppia di poli complessi coniugati

**Commento** : il parametro  $q$  sostituisce la fase  $\phi$  per individuare una coppia complessa coniugata di zeri o poli :

$$q = \frac{1}{2 \sin(\phi - \pi/2)}$$

dove  $\phi$  è la fase dello zero o polo complesso con parte immaginaria positiva. Da questa formula si deduce che il parametro  $q$  in valore assoluto è necessariamente uguale o più grande di 0,5.

Comunque il parametro  $q$  può essere definito per un generico fattore di secondo grado : per esempio esso assume valori inferiori a 0,5 qualora la coppia di radici sia reale :

$$\text{forma del generico fattore di grado 2 : } s^2/\omega^2 + s/(q\omega) + 1$$

$0 < q < 0,5$  : la coppia si riduce a due radici reali negative distinte.

$q = 0,5$  : la coppia si riduce a due radici reali negative coincidenti.

$0,5 < q < \infty$  : coppia complessa coniugata con parte reale negativa.

$$q = \pm\infty$$
 : coppia complessa coniugata immaginaria pura.

$-\infty < q < -0,5$  : coppia complessa coniugata con parte reale positiva.

$q = -0,5$  : la coppia si riduce a due radici reali positive coincidenti.

$0 > q > -0,5$  : la coppia si riduce a due radici reali negative distinte.

**Commento** : Senza ledere alcuna generalità, possiamo assumere che  $|q|$  sia in ogni caso maggiore di 0,5, in quanto in tutti gli altri casi il corrispondente fattore di secondo grado in  $s$  può essere scomposto nel prodotto di due fattori di primo grado in  $s$  senza introdurre coefficienti complessi.

**Avvertenza** : in caso di una coppia di radici reali  $\sigma_1, \sigma_2$ , con  $\sigma_1 \geq 0$  e  $\sigma_2 \leq 0$ , il fattore di secondo grado dovrebbe assumere una forma diversa : i coefficienti dei termini di grado 0 e grado 2 avrebbero segno opposto.

**Commento** : il parametro  $q$  coincide col fattore  $Q$  che sarà introdotto nel denominatore della funzione di rete di un risonatore nonideale (vedere Cap. 21). ■

**zero / polo all'∞** : quando i gradi del numeratore e del denominatore non coincidono, si usa dire che la funzione di rete ha uno zero [polo] all'infinito. Introduciamo il parametro intero  $u_\infty$ , che denota la differenza di grado tra il denominatore e il numeratore :

$$u_\infty = -u_0 + K_{pr} + 2K_{pc} - K_{sr} - 2K_{sc}$$

Si può constatare immediatamente che :

$$u_\infty > 0 \text{ zero di } F(s) \text{ per } s \rightarrow \infty \text{ di molteplicità } u_\infty : F(s \rightarrow \infty) = 0$$

$$u_\infty < 0 \text{ polo di } F(s) \text{ per } s \rightarrow \infty \text{ di molteplicità } -u_\infty : F(s \rightarrow \infty) = \infty$$

$$u_\infty = 0 \text{ né zeri né poli di } F(s) \text{ all'infinito : } F(s \rightarrow \infty) = \text{valore finito}$$

### 21.2.3 Poli e pulsazioni naturali

Per dimostrare una proprietà fondamentale dei poli di una funzione di rete, occorre richiamare la matrice delle funzioni di rete  $F(s)$  :

$$\bar{y} = F(s) \bar{u} \text{ dove } F(s) = C [s I - A]^{-1} [B + s B' + \dots] + [D + s D' + \dots]$$

Da questa formula si ha che in genere il denominatore di una qualsiasi funzione di rete coincide col determinante della matrice  $[s I - A]$  : quindi, in genere, tutte le funzioni di rete di un circuito hanno gli stessi poli, che a loro volta coincidono con le pulsazioni naturali del circuito.

Siccome ciascuna funzione di rete ha uno specifico numeratore, qualche zero di questo numeratore può coincidere con un polo della funzione : in questo caso si ha una cancellazione di zeri del numeratore con poli presenti nel denominatore. In questo caso l'insieme dei poli di una specifica funzione di rete del circuito coincidono con un sottoinsieme delle pulsazioni naturali.

Siccome i poli coincidono con l'insieme o un sottoinsieme delle pulsazioni naturali, la dislocazione dei poli nel piano complesso ci permette di stabilire immediatamente la stabilità del circuito, eccetto il caso (non molto frequente) in cui i poli con parte reale positiva siano stati cancellati dalla presenza di zeri coincidenti con essi.

### 21.2.4 Significato degli zeri

Il significato fisico degli zeri (radici del numeratore) di una funzione di rete può essere interpretato nel dominio del tempo. Sia dato un circuito operante in pseudoregime cisoidale con grandezza impressa  $\bar{u}_i(t)$ , caratterizzata dalla coppia fasore-pulsazione  $(\bar{u}_i, s_1)$  ovvero  $(\bar{u}_i^*, s_1^*)$ . Consideriamo una funzione di rete  $F(s)$ , definita dall'ingresso  $\bar{u}_i(t)$ , con uno zero reale in  $s_1$  ovvero una coppia di zeri complessi in  $(s_1, s_1^*)$ . La grandezza d'uscita cisoidale  $\bar{y}(t)$  è caratterizzata dalla pulsazione complessa  $s_1$  e dal fasore  $\bar{y}_1 = F(s_1) \bar{u}_i$ . Per cui noi possiamo concludere che

la cisoidale d'uscita è nulla qualora la pulsazione della cisoidale d'ingresso coincida con uno zero della funzione di rete

Da cui possiamo giungere alle seguenti conclusioni di interesse pratico :

Zero all'∞ impedisce la presenza di cisoidi con pulsazione  $s \rightarrow +\infty$  nella grandezza d'uscita.

Zero nell'origine impedisce la presenza di termini costanti nella grandezza d'uscita.

Coppia di zeri immaginari  $\pm j\omega_1$  impedisce la presenza di sinusoidi con pulsazione

$$s = \pm j\omega_1 \text{ nella grandezza d'uscita.}$$

Coppia di zeri complessi  $s = \sigma_1 \pm j\omega_1$  impedisce la presenza di cisoidi con pulsazione

$$s = \sigma_1 \pm j\omega_1 \text{ nella grandezza d'uscita.}$$

I precedenti risultati possono essere facilmente estesi a un doppio bipolo dinamico e omogeneo, rappresentato da una delle quattro matrici cardinali :  $Z(s)$ ,  $Y(s)$ ,  $H'(s)$ ,  $H''(s)$ . Uno zero reale ovvero una coppia complessa di zeri delle funzioni di rete, costituenti gli elementi  $( )_{12}$  o  $( )_{21}$  della matrice fanno sì che il doppio bipolo diventi unidirezionale o zero-direzionale alla pulsazione (frequenza)  $s_1$ , ovvero  $(s_1, s_1^*)$ .

Essi sono chiamati zeri di trasmissione del doppio bipolo.

**Proprietà** : Se il doppio bipolo è reciproco gli zeri degli elementi fuori della diagonale di una qualsiasi delle matrici cardinali sono coincidenti. Infatti se essi non fossero coincidenti il doppio bipolo sarebbe unidirezionale per specifici valori di  $s$ .

**Proprietà** : Gli zeri di un doppio bipolo formato dalla cascata di due doppi bipoli coincidono con quelli dei due doppi bipoli.

**Prova** : Dalle proprietà della cascata di doppi bipoli adinamici unidirezionali e zero-dinamici (vedere Cap. 13).

**Esempio** : In un doppio bipolo a scala ogni bipolo produce uno zero per i valori di  $s$  per cui esse diventa un c.a. (rami in serie) ovvero un c.c. (rami in parallelo).

**21.2.5 Rivisitazione degli zeri e dei poli**

Riscriviamo la relazione tra fasore dell'ingresso, fasore dell'uscita e della relativa funzione di rete nella forma :

$$F(s) = \frac{\tilde{y}}{\tilde{u}} = \frac{N(s)}{D(s)} \implies \tilde{y} D(s) = \tilde{u} N(s)$$

dove  $N(s)$  e  $D(s)$  sono scritti prima della cancellazione di eventuali fattori comuni dovuti a zeri e poli coincidenti. Conseguentemente si ha che  $D(s)$  coincide con il determinante della matrice  $[sI - A]$  e  $N(s)$  con un opportuno minore algebrico della stessa matrice. Esaminiamo i seguenti quattro casi riguardanti una generica pulsazione complessa  $s_1$  rispetto al numeratore  $N(s)$  e al denominatore  $D(s)$  :

<p><b>Caso</b> : <math>N(s_1) \neq 0</math> e <math>D(s_1) = 0</math> :</p> <p>Vi è un polo in <math>s = s_1</math>.</p> <p>Il fasore dell'uscita <math>\tilde{y}</math> può essere diverso da zero anche nel caso che il fasore dell'ingresso <math>\tilde{u}</math> sia nullo. Questo fasore di valore arbitrario corrisponde a un modo naturale con pulsazione naturale <math>s_1</math> del circuito, dal momento che può sussistere anche con ingresso nullo.</p>	<p><b>Caso</b> : <math>N(s_1) = 0</math> e <math>D(s_1) \neq 0</math> :</p> <p>Vi è uno zero in <math>s = s_1</math>.</p> <p>Il fasore dell'uscita <math>\tilde{y}</math> è necessariamente nullo anche nel caso che il fasore dell'ingresso <math>\tilde{u}</math> sia diverso da zero, cioè anche nel caso che vi sia un ingresso cisoidale con pulsazione <math>s_1</math>. Questo significa che questa grandezza d'ingresso non è in grado di influenzare la grandezza d'uscita.</p>
<p><b>Caso</b> : <math>N(s_1) = 0</math> e <math>D(s_1) = 0</math> :</p> <p>Non esiste alcun zero o polo in <math>s = s_1</math>.</p> <p>Vi sono due fattori del numeratore e del denominatore coincidenti che si annullano a vicenda. Questo significa che vi è un modo naturale del circuito che non compare nella suddetta funzione di rete.</p>	<p><b>Caso</b> : <math>N(s_1) \neq 0</math> e <math>D(s_1) \neq 0</math> :</p> <p>Non esiste alcun zero o polo in <math>s = s_1</math>.</p> <p>Il fasore dell'uscita <math>\tilde{y}</math> può essere nullo se e solo se anche il fasore dell'ingresso <math>\tilde{u}</math> è nullo. Conseguentemente, un ingresso cisoidale con pulsazione <math>s_1</math> sarà sempre presente nell'uscita.</p>

**Avvertenza** : Esistono solamente i quattro casi sovrastanti nell'ipotesi che la radice  $s_1$  di  $N(s)$  ovvero  $D(s)$  sia semplice. Altrimenti la casistica sarebbe più articolata. ■

**Avvertenza** : Quando occorre calcolare gli zeri e i poli di una data funzione di rete, non potete limitarvi a calcolare due polinomi il cui rapporto sia la funzione di rete stessa : occorre anche accertare l'eventuale presenza di fattori comuni ai due polinomi e provvedere alla cancellazione degli stessi. Senza la cancellazione degli eventuali fattori comuni non ha alcun senso affermare che il grado del numeratore e del denominatore della funzione di rete sono i gradi dei due polinomi ■

**21.2.6 Modi naturali noncontrollabili e nonosservabili**

**WWWW** Questo paragrafo non fa parte del programma dell' A.A. 1999-2000. La cancellazione zero/polo può essere interpretata dal punto di vista dei sistemi dinamici. Consideriamo la matrice delle funzioni di rete incontrata nel Par. 21.1.5 :

$$F(s) = C [sI - A]^{-1} [B + s B' + \dots] + [D + s D' + \dots]$$

nella quale compare l'inversa della matrice  $[sI - A]$ . Dalla  $A = S \text{Diag}[s_1, s_2, \dots, s_n] S^{-1}$  abbiamo :

$$sI - A = s S S^{-1} - S \text{Diag}[s_1, s_2, \dots, s_n] S^{-1} = S [sI_n - \text{Diag}[s_1, s_2, \dots, s_n]] S^{-1}$$

A questo punto siamo in grado di invertire la suddetta matrice

$$[sI - A]^{-1} = S \text{Diag}[1/(s-s_1), 1/(s-s_2), \dots, 1/(s-s_n)] S^{-1} = \sum_{k=1}^n [S]_{1k}^{\text{col}} \frac{1}{s-s_k} [S^{-1}]_{k1}^{\text{rig}}$$

Da cui si ottiene

$$F(s) = \sum_{k=1}^n \left\{ C [S]_{1k}^{\text{col}} \frac{1}{s-s_k} [S^{-1}]_{k1}^{\text{rig}} [B + s B' + \dots] + D + s D' + \dots \right\}$$

Il polo  $1/(s-s_k)$  può non comparire nel denominatore di una data funzione di rete  $F_{\mu,\nu}(s)$  per due diversi motivi :

- L'elemento  $\nu$ -esimo del vettore riga  $[S^{-1}]_{k1}^{\text{rig}} [B + s B' + \dots]$  risulta nullo. In questo caso, la grandezza d'ingresso che definisce la funzione di rete non è in grado di controllare il modo naturale associato alla pulsazione  $s_k$ .
- L'elemento  $\mu$ -esimo del vettore colonna  $C [S]_{1k}^{\text{col}}$  risulta nullo. In questo caso, la grandezza d'uscita che definisce la funzione di rete non è in grado di osservare il modo naturale associato alla pulsazione  $s_k$ .

Questo problema non viene qui ulteriormente approfondito, in quanto è oggetto di studio in corsi successivi. ■

**21.2.7 Comportamento all'origine e all'infinito**

Tra gli zeri di una funzione hanno un ruolo molto importante quelli nell'origine e quelli all'infinito. I seguenti valori di una funzione di rete  $F(s)$  hanno un significato fisico :

$$F(0) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$$

**Proprietà :** il valore di  $F(0)$  denota il comportamento del circuito in regime costante (pulsazione nulla) :

Il caso  $F(0) = 0$  (termine noto del numeratore è nullo) implica che vi siano condensatori o induttori che, essendo equivalenti, rispettivamente, a c.a. o c.c. operino come trappole, bloccando il passaggio di tensioni e correnti costanti dalla sorgente impressa costante verso il ramo in cui è definita l'uscita di  $F(s)$ .

Se più componenti dinamici bloccano le tensioni e le correnti costanti, la molteplicità dello zero coincide in genere col numero di componenti che bloccano le grandezze costanti. ■

**Commento :** In presenza di un circuito fisico l'individuazione del comportamento della funzione di rete per  $s \rightarrow \infty$  dipende dalla differenza  $\omega_\infty$  tra il grado del denominatore e quello del numeratore. Infatti per  $s \rightarrow \infty$  qualsiasi condensatore e induttore parasita presente nel circuito fisico non è più trascurabile. Se ne teniamo conto nella funzione di rete, sia il numeratore sia il denominatore della stessa cresceranno di grado in modo drammatico. In pratica quando facciamo tendere  $s \rightarrow \infty$  in un circuito fisico, si sottintende che  $|s|$  è elevata ma non troppo in modo che l'effetto di ulteriori condensatori e induttori parassiti rimanga ancora trascurabile. D'altra parte se  $|s|$  è così elevata che occorre tenere in considerazione un numero molto elevato di condensatori e induttori parassiti, significa che il modello a parametri concentrati (circuito) non è più adeguato e deve essere sostituito da un modello a parametri distribuiti. ■

**Commento :** Esempi interessanti saranno esaminati nel Cap. 23.

### 21.2.8 Zeri e poli delle immettenze

Come già detto (vedere Par. 21.1.4) il termine immettenza indica sia un'impedenza sia un'ammettenza di un bipolo, cioè una sottoclasse delle funzioni di rete che si contrappongono alle funzioni di trasferimento. Consideriamo più dettagliatamente il significato degli zeri e dei poli delle immettenze.

I poli di un'impedenza sono le pulsazioni naturali (o almeno una parte delle stesse) di un circuito realizzato dal bipolo di cui consideriamo l'impedenza e da una sli cisoidale che alimenta il bipolo, ovvero sono le pulsazioni naturali del circuito omogeneo associato costituito dal bipolo chiuso su un c.a. ■

$$F(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s)$$

**Proprietà :** il valore di  $F(s)$  per  $s \rightarrow +\infty$  denota il comportamento del circuito per frequenze molto elevate.

Se  $F(\infty) \rightarrow 0$  (il grado del denominatore supera quello del numeratore) significa che vi sono condensatori o induttori che, essendo equivalenti a un c.c. o a un c.a. per  $s \rightarrow \infty$ , bloccano il passaggio di tensioni e correnti di frequenza molto elevata verso il ramo del circuito in cui è definita l'uscita di  $F(s)$ .

Anche in questo caso la eventuale molteplicità dello zero all' $\infty$  corrisponde in genere al numero di componenti che contribuiscono all'interdizione dei segnali a frequenza molto elevata. ■

I poli dell'ammettenza, coincidenti con gli zeri dell'impedenza, sono le pulsazioni naturali (o almeno una parte delle stesse) di un circuito costituito dallo stesso bipolo e da una sVi cisoidale, ovvero sono le pulsazioni naturali del circuito omogeneo associato costituito dal bipolo chiuso su un c.c. ■

FIG. BIPOLO COMPOSITO DINAMICO CHIUSO SU UN C.C. E SU UN C.A.

La funzione inversa della funzione immettenza di un dato circuito è a sua volta la funzione immettenza duale di un altro circuito ottenuto da quello originario sostituendo la sorgente impressa con la sorgente impressa duale. Quindi gli zeri presenti nell'impedenza di un bipolo composito qualsiasi sono a loro volta i poli dell'ammettenza del medesimo bipolo, mentre gli zeri dell'ammettenza sono a loro volta i poli dell'impedenza.

### 21.2.9 Metodo pratico per calcolare le pulsazioni naturali

In base alle considerazioni dei paragrafi precedenti, possiamo costruire un metodo pratico per calcolare le pulsazioni naturali di un circuito. Il metodo non sempre funziona ma quando funziona risulta più semplice che quello ortodosso basato sul calcolo della matrice di stato  $A$  e dei suoi autovalori.

Innanzitutto consideriamo il circuito omogeneo associato e inseriamo :  
 una sVi al posto di un opportuno c.c. latente. L'ammettenza del bipolo complementare alla sVi è una funzione di rete del circuito e i suoi poli coincidono con le pulsazioni naturali o con alcune delle stesse.  
 Se il grado del denominatore dell'impedenza coincide col numero delle variabili di stato, ogni pulsazione naturale del circuito coincide con un polo della ammettenza.

**Commento :** Questo metodo può essere applicato mediante una qualsiasi funzione di rete. Il successo dipende dalla capacità di intuire quali funzioni di rete contengano tutte le pulsazioni naturali tra i loro poli. ■

**Commento :** Questo metodo può risultare rapido anche per circuiti dinamici di ordine 3, 4, 5, ..., come risulta dai seguenti esempi :  
 WWWWW FARE ESEMPLI.

### 21.3 FUNZIONI DI RETE IN REGIME SINUSOIDALE

#### WWWWW ADATTARE QUESTA PREMESSINA

Quando la pulsazione complessa  $s$  dello pseudoregime cisoidale è puramente immaginaria, il circuito si trova ad operare in regime sinusoidale, che per sua natura è periodico. Quindi il regime sinusoidale può essere esaminato con l'uso dei fasori : il contenuto del Cap. 19 vale anche in regime sinusoidale e qui non viene ripetuto. Ma la periodicità di questo regime implica delle proprietà particolari non condivise da un generico pseudoregime cisoidale. Questo capitolo riconsidera solamente questi aspetti peculiari del regime sinusoidale. Questa sezione riprende in esame le funzioni di rete  $F(j\omega)$ , evidenziando l'ampiezza, la fase e le parti reale e immaginaria di una generica funzione di rete di un

circuito operante in regime sinusoidale e, infine, introduce il corrispondente *diagramma polare (diagramma di Nyquist)*.

### 21.3.1 Funzioni di rete lungo l'asse immaginario

Una generica funzione di rete  $F(s)$  definita nello pseudoregime cisoidale è una funzione complessa di variabile complessa. Quando ci limitiamo a esaminare la stessa funzione di rete in un regime sinusoidale, la pulsazione complessa  $s$  può assumere solo valori immaginari, quindi  $F(s)$ , che in origine è una funzione complessa di variabile complessa, diventa una funzione complessa di variabile immaginaria  $F(j\omega)$ . Questo fatto porta ad alcune conclusioni che non valgono nel caso generale. Per esempio, Consideriamo le funzioni impedenza e ammettenza già introdotti nel Cap. 20 per lo pseudoregime cisoidale: nel regime sinusoidale la parte reale e immaginaria di queste funzioni risultano molto importanti e meritano un apposito nome.

### 21.3.2 Grandezze reali ottenute dalla funzione di rete complessa

Per ogni valore immaginario puro  $s = j\omega$ , la funzione di rete assegna il numero complesso  $F(j\omega)$ . Sulla base della matematica dei numeri complessi, dalla funzione complessa  $F(j\omega)$  possiamo definire alcune funzioni reali di variabile reale:

modulo (ampiezza)	fase	parte reale	parte immaginaria
$ F(j\omega) $	$\beta^F(\omega) = \angle F(j\omega)$	$\Re[F(j\omega)]$	$\Im[F(j\omega)]$

Per esaminare meglio queste funzioni reali scomponiamo il numeratore  $N(s)$  e il denominatore  $D(s)$  nelle parti pari e in quelle dispari:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_2(s^2) + sN_1(s^2)}{D_2(s^2) + sD_1(s^2)}$$

ove  $N_2(s^2)$ ,  $D_2(s^2)$ ,  $N_1(s^2)$  e  $D_1(s^2)$   
sono polinomi in  $s^2$  con coefficienti reali  
o, equivalentemente, polinomi pari in  $s$ .

**Proprietà:** Il fatto che l'argomento  $s = j\omega$  sia puramente immaginario fa sì che la parte reale del numeratore e del denominatore siano derivate dalle parti pari  $N_2(s^2)$  e  $D_2(s^2)$  e le parti immaginarie dalle parti dispari  $sN_1(s^2)$  e  $sD_1(s^2)$ :

parti reale	dispari	immaginaria	
$N_2(s^2) \rightarrow N_2(-\omega^2)$	;	$sN_1(s^2) \rightarrow j\omega N_1(-\omega^2)$	
$D_2(s^2) \rightarrow D_2(-\omega^2)$	;	$sD_1(s^2) \rightarrow j\omega D_1(-\omega^2)$	

Una funzione  $F(s)$  pari in  $s$  è puramente reale lungo l'asse immaginario, mentre una funzione  $F(s)$  dispari in  $s$  è puramente immaginaria lungo lo stesso asse.

**Proprietà:** Analizziamo una generica funzione di rete lungo l'asse immaginario: cambiando segno a  $\omega$  in  $F(j\omega)$ , otteniamo la funzione complessa coniugata  $F(j\omega)^*$ , come risulta qui di seguito:

$$F(j\omega) = \frac{N_2(-\omega^2) + j\omega N_1(-\omega^2)}{D_2(-\omega^2) + j\omega D_1(-\omega^2)} \implies F(-j\omega) = \frac{N_2(-\omega^2) - j\omega N_1(-\omega^2)}{D_2(-\omega^2) - j\omega D_1(-\omega^2)} = F(j\omega)^*$$

Questa proprietà comporta che  $|F(j\omega)| = |F(-j\omega)| = |F(j\omega)|^2$

### 21.3.3 Ampiezza

Il modulo (ampiezza)  $|F(j\omega)|$  è una funzione pari in  $\omega$  ovvero è la radice quadrata del rapporto di polinomi nel quadrato di  $\omega$ . Molto spesso si preferisce usare il *quadrato dell'ampiezza*  $M^F(\omega^2) = |F(j\omega)|^2$  al posto dell'ampiezza stessa:

$$|F(j\omega)| = \sqrt{\frac{[N_2(-\omega^2)]^2 + [\omega N_1(-\omega^2)]^2}{[D_2(-\omega^2)]^2 + [\omega D_1(-\omega^2)]^2}}, \quad M^F(\omega^2) = \frac{[N_2(-\omega^2)]^2 + [\omega N_1(-\omega^2)]^2}{[D_2(-\omega^2)]^2 + [\omega D_1(-\omega^2)]^2}$$

**Commento:** Siccome il quadrato dell'ampiezza è una funzione razionale in  $\omega^2$ , esso è usato per studiare l'approssimazione nel progetto dei filtri elettrici.

### 21.3.4 Fase

La funzione fase  $\beta^F(\omega)$  può essere calcolata per mezzo del numeratore e denominatore della funzione di rete:

$$\beta^F(\omega) = \angle F(j\omega) = \angle N(j\omega) - \angle D(j\omega) = \frac{1}{2} \angle \left[ \frac{F(j\omega)}{F(-j\omega)} \right] = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{F(j\omega)}{F(-j\omega)} \right]$$

Essa è definita a meno di un multiplo intero arbitrario di  $2\pi$ . La funzione fase ha una simmetria dispari rispetto a  $\omega$ , qualora la costante additiva arbitraria  $\pm 2k\pi$  sia scelta opportunamente:  $\angle F(j\omega) = -\angle F(-j\omega)$ .

**Proprietà:** la fase è una funzione continua  $\forall \omega$  eccetto in corrispondenza delle eventuali coppie immaginarie coniugate di zeri e poli (compresa l'origine), dove la fase subisce una variazione di  $\pm\pi$  o un suo multiplo. Notare che la fase è definita a meno di multipli interi di  $2\pi$ .

**WWWWWW** Fare esempi WWWWW

**Fase per  $\omega \rightarrow 0$ :** La fase di  $F(s)$ , qualora  $|F(j\omega)| = 0$ , non è determinata: infatti la fase dell'unico numero complesso con ampiezza (modulo) nulla non è determinata (dalla matematica dei numeri complessi). Se i termini noti del numeratore e denominatore sono diversi da 0 la funzione di rete è reale, positiva o negativa. Quindi la fase vale 0 ovvero  $\pm\pi$ . Altrimenti, la fase dipende da quanti sono i termini di grado più basso del numeratore o del denominatore che sono nulli. Con un passaggio al limite ( $\omega \rightarrow 0$ ) si ha che la fase può essere  $\pm k\pi/2$ .

**Fase per  $\omega \rightarrow \infty$ :** Nel tracciare il diagramma polare occorre eseguire un passaggio al limite. Nella pratica questo caso capita molto spesso per  $s = 0$  e per  $s \rightarrow \infty$ .

### 21.3.5 Parti reale e immaginaria

La parte reale  $\Re[F(j\omega)]$  è una funzione pari in  $\omega$  ovvero il rapporto di polinomi in  $\omega^2$ , mentre la parte immaginaria  $\Im[F(j\omega)]$  è una funzione dispari in  $\omega$  ovvero il rapporto di polinomi in  $\omega^2$ , moltiplicato per  $\omega$ :

Parte reale: $\Re[F(j\omega)]$	Parte immaginaria: $\Im[F(j\omega)]$
$\frac{N_2(-\omega^2)D_2(-\omega^2) + \omega^2 N_1(-\omega^2)D_1(-\omega^2)}{[D_2(-\omega^2)]^2 + \omega^2 [D_1(-\omega^2)]^2}$	$\frac{\omega N_1(-\omega^2)D_2(-\omega^2) - \omega N_2(-\omega^2)D_1(-\omega^2)}{[D_2(-\omega^2)]^2 + \omega^2 [D_1(-\omega^2)]^2}$

**Commento:** Le parti reale e immaginaria di un'impedenza (ammettenza) intervengono per il calcolo della potenza attiva e reattiva in funzione di  $\omega$  (vedere Sez. 20.2).

21.3.6 Consigli per il calcolo cart&xpenna

Nell'operare con le funzioni di rete conviene tenere presenti alcuni suggerimenti pratici per l'esecuzione cart&xpenna dei calcoli :

- **Scelta dell'argomento della funzione** : durante il calcolo cart&xpenna di una funzione di rete, in particolare nel caso che ci interessi esclusivamente l'ampiezza e/o fase lungo l'asse  $j\omega$ , conviene analizzare il circuito usando come argomento la pulsazione complessa  $s$  e solo all'ultimo momento eseguire la sostituzione  $s \rightarrow j\omega$ . Se si preferisce fin dall'inizio usare come argomento  $j\omega$  conviene tenere abbinati i due simboli " $j$ " e " $\omega$ " nelle operazioni algebriche, come se costituissero un unico simbolo " $j\omega$ " e eseguire alla fine le sostituzioni :

$$j^k \rightarrow 1 \quad k = 0, 4, 8, \dots, \quad j^k \rightarrow j \quad k = 1, 5, 9, \dots$$

$$j^k \rightarrow -1 \quad k = 2, 6, 10, \dots, \quad j^k \rightarrow -j \quad k = 3, 7, 11, \dots$$

- Se il numeratore e/o il denominatore sono scomposti in fattori di ordine più basso, conviene lasciarli nella suddetta forma. In particolare, conviene mettere ogni fattore di primo grado (zero o polo reale) nella forma  $(1 + s/\sigma_0)$ , e quelli di secondo grado (coppia di zeri o poli complessi coniugati) nella forma  $(1 + s/(j\omega_0) + (s/\omega_0)^2)$ . Fanno eccezione fattori del tipo  $s^{m_0}$ , dove  $m_0$  è un intero positivo o negativo. Questi fattori non possono essere ricondotti a una delle forme precedenti. Essi corrispondono a zeri ( $m_0 > 0$ ) o poli ( $m_0 < 0$ ) nell'origine.

- **Amvertenza** : sia l'ampiezza (modulo) sia la fase possono essere calcolati più agevolmente qualora il numeratore e denominatore siano già scomposti in fattori di ordine più basso (se possibile di ordine 1 o 2). Cioè non conviene razionalizzare la funzione di rete eccetto che si desideri calcolarne la parte reale o immaginaria.

- **Attenzione** ai multipli di  $2\pi$  nel calcolo della fase.
- **Attenzione** al segno della parte reale nel valutare la fase mediante l'arctotangente.

21.3.7 Diagrammi polari (di Nyquist)

Ogni funzione di rete  $F(s)$ , lungo l'asse immaginario, si riduce alla funzione complessa  $F(j\omega)$  della variabile immaginaria  $j\omega$  e può essere rappresentata da un curva nel piano complesso. A ogni valore di  $\omega$ , tra 0 e  $+\infty$ , corrisponde il punto di coordinate cartesiane  $\Re[F(j\omega)]$ ,  $\Im[F(j\omega)]$  ovvero di coordinate polari  $|F(j\omega)|$ ,  $\angle F(j\omega)$  nel piano complesso. Al variare di  $\omega$ ,  $F(j\omega)$  descrive una linea chiamata **diagramma polare** (**diagramma di Nyquist** nella letteratura anglosassone), ogni punto della linea può essere graduato dal corrispondente valore di  $\omega$  compreso tra 0 e  $+\infty$ .

Vengono esaminati i diagrammi polari di alcune funzioni di rete elementari (cioè con grado del numeratore e denominatore che non supera due) insieme ai diagrammi della loro ampiezza e fase. Cominciamo con le funzioni di rete il cui numeratore e denominatore non superano il grado 1 :

Quadro dei diagrammi polari delle funzioni di rete semplici

$F(s)$	diagramma polare	orientamento per $0 \rightarrow \omega \rightarrow +\infty$	semipiano inferiore (1)	semipiano superiore (1)
$a$	punto fisso	$F = a$	sull'asse reale	
(2) $a + sb$	semiretta verticale	$a + j0 \rightarrow F \rightarrow a \pm j\infty$	$b < 0$	$b > 0$
(3) $\frac{1}{a + sb}$	semicerchio con centro in $1/(2a) + j0$	$\frac{1}{a} + j0 \rightarrow F \rightarrow 0 + j0$	$b > 0$	$b < 0$
$a + \frac{b}{s}$	semiretta verticale	$a \pm j\infty \rightarrow F \rightarrow a + j0$	$b > 0$	$b < 0$
(3) $\frac{1}{a + b/s}$	semicerchio con centro in $0,5/a + j0$	$0 + j0 \rightarrow F \rightarrow \frac{1}{a} + j0$	$b < 0$	$b > 0$
$\frac{1-s}{1+s}$	semicerchio con centro in $0 + j0$	$h + j0 \rightarrow F \rightarrow -h + j0$	$h > 0$	$h < 0$
(3) $\frac{1+sa}{1+sb}$	semicerchio con centro in $h(a+b)/(2b)$	$h + j0 \rightarrow F \rightarrow h\frac{a}{b} + j0$	$h(a-b) < 0$	$h(a-b) > 0$

WWWWW AGGIUNGERE ANCHE AMPIEZZA, FASE

(1) gli estremi dei semicerchi sono sempre sull'asse reale. Quindi tutti i punti di un semicerchio hanno la parte immaginaria nonnegativa [nonpositiva], cioè sono nel semipiano complesso superiore [inferiore], come specificato nelle ultime due colonne.

(2) Il modulo dei fattori del tipo  $(1 + j a \omega)$  è crescente con  $\omega$ .  
 (3) questa funzione di rete può essere scomposta nella somma di un termine costante e una funzione passatutto :

$$\frac{1+s a}{1+s b} = \underbrace{h_1}_{\text{cost.}} + \underbrace{h_2 \frac{1-s b}{1+s b}}_{\text{passatutto}} \quad \text{dove} \quad \underbrace{h_1 = h \frac{a+b}{2b}}_{\text{ascissa del centro}} \quad \text{e} \quad \underbrace{h_2 = h \frac{b-a}{2b}}_{\text{raggio}}$$

**Commento** : Sono definiti e molto usati i diagrammi polari di funzioni di rete  $F(s)$  con gradi qualsiasi del numeratore e/o denominatore. La forma geometrica del piano complesso è meno semplice e anche lo studio analitico diventa più complicato. In genere conviene studiare il diagramma per  $\omega = 0$  e  $\omega \rightarrow \infty$  e calcolare numericamente alcuni altri punti del diagramma per valori assegnati, abbastanza fitti, di  $\omega$ .

**Esempio** : Consideriamo la seguente funzione di rete e calcoliamo il suo valore (complesso) per alcuni valori di  $\omega$  riportati in tabella :

$$F(j\omega) = \frac{1 + 4j\omega + 2(j\omega)^2}{1 + 3j\omega + 2(j\omega)^2 + (j\omega)^3}$$

$\omega$	$F(j\omega)$
0	1
1/2	$192 + j20$ / $(137)$
$1/\sqrt{2}$	8/5
$\sqrt{3}$	$1 - j12$ / $17$
2	$65/53 - j42/53$



**Avvertenza :** I diagrammi di NYQUIST verranno ripresi in corsi successivi al presente. ■  
**Commento :** Nel Cap. 23, nello studio dei risonatori quasi-conservativi esamineremo analiticamente il diagramma polare delle funzioni di rete del tipo  $1/(sa + b + c/s)$  con  $a > 0, b > 0$  e  $c > 0$ . ■

### 21.4 NORMALIZZAZIONE

Quando analizziamo un circuito fisico, noi dobbiamo introdurre i valori numerici delle grandezze elettriche e dei parametri. In pratica, molte di queste grandezze e parametri hanno valori molto molto dispersi, cioè molto più piccoli o, alternativamente, molto più grandi dell'unità di misura, dando origine a inconvenienti di natura numerica. Qui viene introdotta la normalizzazione di questi parametri e grandezze del circuito per rimediare agli inconvenienti conseguenti alla elevata dispersione dei valori numerici.

#### 21.4.1 Normalizzazione per i circuiti dinamici

L'analisi di un circuito o di un componente composito sia nel dominio del tempo sia nel dominio dei fasori (nello pseudoregime cisoidale e nel regime sinusoidale) e l'analisi delle funzioni di rete possono dar luogo a numeri molto grandi e/o molto piccoli. Quindi l'utente si trova davanti a operazioni algebriche e non-algebriche coinvolgenti numeri molto grandi, per esempio 124000, 550000000, ... , e/o molto piccoli, per esempio 0,000003, 0,000000027, ... . Questo provoca un po' di mal di pancia all'utente che lavora con carta&penna e *overflow* e/o *underflow* al computer che esegue i calcoli. Per rimediare a ciò si può procedere a una normalizzazione delle tensioni e correnti e dei parametri (resistenze, capacità, induttanze, ...). Le normalizzazioni eseguite nel Cap. 12 per i circuiti dinamici rimangono valide anche per i circuiti dinamici. Ma per questi circuiti occorre tenere presente che entrano in gioco anche il tempo  $t$ , le pulsazioni complessa  $s$  e reale  $\omega$  e i parametri a esse legati : capacità, induttanze e mutue induttanze. Il seguente quadro riporta la procedura per la normalizzazione delle grandezze e dei parametri di un circuito dinamico :

Quadro delle regole per la normalizzazione dei circuiti dinamici

grandezze di riferimento : $v_0, i_0, \omega_0$ e $\tau_0 = v_0/i_0, f_0 = \omega_0/(2\pi)$				
circuito originario	circuito normalizzato	circuito originario	circuito normalizzato	
tensioni di ramo	$\tilde{v} = v/v_0$	correnti di ramo	$\tilde{i} = i/i_0$	
tensioni impresse (trans)-	$\tilde{v} = v/v_0$	correnti impresse (trans)-	$\tilde{i} = i/i_0$	
rapporti di tensione	$\alpha = z/z_0$	rapporti di corrente	$\beta = y/y_0$	
pulsazioni complesse	$s = s/\omega_0$	pulsazioni reali	$\omega = \omega/\omega_0$	
frequenze	$f = f/f_0 = \Omega$	tempo	$t = t f_0$	
capacità	$C = C \omega_0 \tau_0$	induttanze	$L = L \omega_0/\tau_0$	
mutue induttanze	$M = M \omega_0/\tau_0$			

#### 21.4.2 Esempio

Nei circuiti più propriamente elettronici (per il trattamento dell'informazione) le correnti in gioco possono essere dell'ordine di un mA o di un  $\mu A$ , mentre le tensioni possono essere dell'ordine di un V o di un mV. Le frequenze possono essere dell'ordine di un kHz, MHz, GHz.

Nei circuiti di potenza (per il trattamento dell'energia) le correnti possono essere dell'ordine di un A o di un kA, mentre le tensioni possono essere dell'ordine di un kV. Le frequenze sono dell'ordine di un Hz o di un kHz.

Consideriamo il bipolo composito dinamico costituito da due resistori di resistenza  $r_1 = 2000 \Omega$  e  $r_2 = 5000 \Omega$ , dal condensatore di capacità  $C = 10^{-9}$  nF e dall'induttore di induttanza  $L = 0.01$  H. L'impedenza  $z(s)$  risulta uguale a

$$z(s) = \frac{r_2 z_1(s)}{r_2 + z_1(s)} \quad \text{dove } z_1(s) = sL + \frac{r_1/(sC)}{r_1 + 1/(sC)}$$

Sostituendo i valori numerici dei parametri otteniamo

$$z_1(s) = s \cdot 0.01 + \frac{2000/(s \cdot 10^{-9})}{2000 + 1/(s \cdot 10^{-9})} = 2000 \frac{s^2 \cdot 10^{-12} + s \cdot 5 \cdot 10^{-6} + 1}{s \cdot 2 \cdot 10^{-6} + 1}$$

$$z(s) = 10^3 \frac{s^2 \cdot 10^{-10} + s \cdot 5 \cdot 10^{-5} + 10}{s^2 \cdot 20 \cdot 10^{-12} + s \cdot 20 \cdot 10^{-6} + 7}$$

Rifacciamo gli stessi calcoli dopo aver normalizzato i parametri dei componenti rispetto a  $r_0 = 1000 \Omega$  e  $\omega_0 = 1000000$  rad/s.

$$r_1 = 2000 \Omega \rightarrow r_1^{nor} = r_1/r_0 = 2, \quad r_2 = 5000 \Omega \rightarrow r_2^{nor} = r_2/r_0 = 5$$

$$L = 0.01 \text{ H} \rightarrow L^{nor} = L \omega_0/\tau_0 = 10, \quad C = 1 \text{ nF} \rightarrow C^{nor} = C \tau_0 \omega_0 = 1$$

L'impedenza normalizzata del bipolo composto diventa :

$$z_1^{\text{nor}}(s^{\text{nor}}) = s^{\text{nor}} 10 + \frac{2/(s^{\text{nor}} 1)}{2 + 1/(s^{\text{nor}} 1)} = \frac{(s^{\text{nor}})^2 20 + s^{\text{nor}} 10 + 2}{s^{\text{nor}} 2 + 1}$$

$$z^{\text{nor}}(s^{\text{nor}}) = \frac{(s^{\text{nor}})^2 100 + s^{\text{nor}} 50 + 10}{(s^{\text{nor}})^2 20 + s^{\text{nor}} 20 + 7}$$

In questo caso i valori numerici dei coefficienti numeri del numeratore e del denominatore sono più moderati rispetto al caso senza normalizzazione. Si può risalire dall'impedenza normalizzata  $z^{\text{nor}}(s^{\text{nor}})$  a quella originale  $z(s)$  moltiplicandola per  $\tau_0 = 1000 \Omega$  e sostituendo  $s^{\text{nor}} \rightarrow s/10^6$ .

## 21.5 GRANDEZZE LOGARITMICHE

Molto spesso la ampiezza e la fase di una funzione di rete sono poco appropriate per tracciare diagrammi o per eseguire calcoli. Quindi si preferisce introdurre delle grandezze logaritmiche. Esse consentono di raggiungere tre vantaggi : rendere più leggibili i diagrammi dell'ampiezza e della fase, rendere più amichevoli i valori numerici delle grandezze in gioco che altrimenti potrebbero essere molto piccoli e/o molto grandi e, infine, di permettere la scomposizione in addendi semplici dell'ampiezza.

### 21.5.1 Scala logaritmica della pulsazione $\omega$

Nel trattare funzioni di rete di circuiti di interesse pratico si incontrano molto spesso i seguenti inconvenienti :

- i diagrammi del modulo e/o fase sono soggetti a :  
La rappresentazione grafica delle funzioni di rete, cioè i diagrammi dell'ampiezza e della fase, è molto spesso richiesta per valori molto diversi della pulsazione  $\omega$  ovvero della frequenza  $f$  : per esempio :  $f = 10, 1000, 100000, 10000000, \dots$ , Hz.

- se si usasse una scala lineare della  $\omega$ , le precedenti situazioni darebbero origine a diagrammi della ampiezza e della fase difficilmente leggibili : essi possono essere troppo compressi (in senso orizzontale) per valori di  $\omega$  molto piccoli e inutilmente espansi per valori elevati di  $\omega$ .

Per esempio, i due valori della frequenza  $f_1 = 100$  Hz e  $f_2 = 200$  Hz sono molto diversi tra loro da un punto di vista pratico ma sono indistinguibili in un diagramma, il cui asse delle ascisse riportasse le frequenze comprese tra 0 Hz e 1000000 Hz con scala lineare. Al contrario, i due valori di frequenza  $f_1 = 100$  Hz e  $f_2 = 200$  Hz sono molto diversi tra loro da un punto di vista pratico ma sono indistinguibili in un diagramma, il cui asse delle ascisse riportasse le frequenze comprese tra 0 Hz e 1000000 Hz con scala lineare ???FIGURA???. Al contrario, i due valori di frequenza  $f_1 = 900000$  Hz e  $f_2 = 910000$  Hz sono molto vicini tra loro da un punto di vista pratico e inutilmente distinguibili nello stesso diagramma con scala lineare.

Per rimediare ai suddetti inconvenienti si opera una trasformazione nonlineare dell'asse delle ascisse :

- Normalizzare la pulsazione  $\omega$  rispetto a  $\omega_0 = 2 \pi f_0$  e rimpiazziamola con logaritmo in base 10 :

$$\omega \rightarrow \log(\omega/\omega_0) = \log(f/f_0)$$

- Viene chiamata *decade* un intervallo dell'ascissa di lunghezza 1 in scala logaritmica in cui cioè  $\omega$  ovvero  $f$  varia di un fattore 10. Analogamente, viene chiamata *ottava* un intervallo dell'ascissa di lunghezza 0,302 in scala logaritmica, in cui cioè  $\omega$  ovvero  $f$  varia di un fattore 2.

### 21.5.2 Scala logaritmica dell'ampiezza

Nel trattare funzioni di rete di circuiti di interesse pratico si incontrano molto spesso i seguenti inconvenienti :

- Frequentemente in uno stesso diagramma l'ampiezza (modulo)  $|F(j\omega)|$  può assumere valori molto diversi al variare di  $\omega$  spaziando di alcune decadi, per esempio :  $|F(j\omega)| = 10, 0, 1, 0, 01, 0, 001, \dots$ . Gli stessi inconvenienti avrebbero se rappresentassimo sull'asse delle ordinate il quadrato dell'ampiezza  $M^F(\omega^2) = |F(j\omega)|^2$ .

- se si usa una scala lineare dell'ampiezza, le precedenti situazioni danno origine a diagrammi della funzione di rete scarsamente leggibili : essi possono essere troppo compressi (in senso verticale) per valori di  $|F(j\omega)|$  molto piccoli e esageratamente espansi per valori elevati di  $|F(j\omega)|$ . Per esempio, i valori dell'ampiezza  $|F(j\omega)| = 0,001$  e  $|F(j\omega)| = 0,003$  sono significativamente diversi tra loro da un punto di vista pratico e sono indistinguibili, mentre i valori  $|F(j\omega)| = 10,0$  e  $|F(j\omega)| = 10,1$  non sono significativamente diversi e sono inutilmente distinguibili nel diagramma.

Quindi sia dal punto di vista grafico, sia da quello computazionale, conviene molto spesso introdurre una nuova grandezza : si opera una trasformazione dell'asse delle ordinate :

- L'ampiezza della funzione di rete  $|F(j\omega)| = \sqrt{M^F(\omega^2)}$ , precedentemente normalizzata se si tratta di una (trans)impedenza o di una (trans)ammettenza, viene rimpiazzata dalla cosiddetta *attenzione* :  $|F(j\omega)| \rightarrow \alpha^F(\omega)$ . In questo caso l'unità di misura viene misurata in "decibel" (abbreviato in dB) :

$$\alpha^F(\omega) = 10 \log(1/M^F(\omega^2)) \quad , \quad \alpha^F(\omega) = -10 \log(M^F(\omega^2))$$

$$\alpha^F(\omega) = 20 \log(1/\sqrt{M^F(\omega^2)}) \quad , \quad \alpha^F(\omega) = -20 \log(\sqrt{M^F(\omega^2)})$$

- Qualche volta si preferisce usare il logaritmo naturale dell'ampiezza :

$$\alpha^F(\omega) = -\ln(\sqrt{M^F(\omega^2)}) = -\frac{1}{2} \ln(M^F(\omega^2))$$

In questo caso l'unità di misura è il "neper" (abbreviato in Np); l'equivalenza tra un decibel e un Neper è :

$$1 \text{ neper} = 20 \log(e) \text{ decibel} = 8,685890 \text{ decibel}$$

**Commento:** Spesso invece dell'attenuazione in dB si preferisce usare il cosiddetto *guadagno* in dB che coincide con l'attenuazione cambiata di segno. Il guadagno risulta uguale al logaritmo in base 10 dell'ampiezza.

Le tre grandezze  $|F(j\omega)|$ ,  $|F(j\omega)|^2$  e  $\alpha^F(\omega)$  sono strettamente interdipendenti e impiegate indifferentemente. La seguente tabellina mette in risalto la corrispondenza dei loro valori con cui il lettore dovrà prendere confidenza per il loro uso diffusissimo:

$ F(j\omega) $	0	0,001	0,01	0,1	1/2	1/√2	0,9	0,9441	0,9772	0,9885	1
$M^F(\omega^2)$	0	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-4</sup>	0,01	1/4	1/2	0,81	0,8912	0,9550	0,9772	1
$\alpha^F(\omega)$ [dB]	+∞	60	40	20	6,04	3,02	0,9151	0,5	0,2	0,1	0

**Diagrammi di Bode per l'attenuazione e la fase:** Il diagramma dell'ampiezza ottenuto riportando l'attenuazione (ovvero il guadagno in dB)  $\alpha^F(\omega)$  sull'asse delle ordinate e  $\log(\omega)$  sull'asse delle ascisse prende il nome di *diagramma di Bode dell'ampiezza (modulo)*. Viene usato anche il *diagramma di Bode della fase* ottenuto riportando la fase sull'asse delle ordinate con l'usuale scala lineare e  $\log(\omega)$  sull'asse delle ascisse.

**21.5.3 Scomposizione dell'attenuazione / guadagno e della fase in addendi**

Dalla teoria dei numeri complessi noi sappiamo che il modulo del prodotto di più numeri complessi è uguale al prodotto dei rispettivi moduli, mentre il modulo del rapporto di due numeri complessi è uguale al rapporto dei rispettivi moduli. Conseguentemente, la scomposizione di una funzione di rete  $F(s)$  nel prodotto/rapporto di fattori di primo e secondo grado (vedere Par. 21.2.2) vale anche per l'ampiezza  $|F(j\omega)|$  della funzione stessa.

Se consideriamo l'attenuazione / guadagno di  $|F(j\omega)|$ , introducendo il logaritmo di  $|F(j\omega)|$  e di  $\omega$ , noi abbiamo:

- la scomposizione dell'ampiezza di una funzione di rete nel prodotto/rapporto di fattori semplici si traduce in una più comoda scomposizione additiva dei rispettivi logaritmi (cioè attenuazione / guadagno).
- quindi l'attenuazione / guadagno di una funzione di rete anche di ordine elevato può essere ottenuta per sovrapposizione dei corrispondenti diagrammi logaritmici di fattori semplici.

Per l'attenuazione si ha:

$$\alpha^F(\omega) = -10 \log[M^F(\omega^2)] = -10 \log(h^2) - u_0 10 \log(\omega^2) - 10 \sum_{\nu=1}^{K_{pr}} \log[1 + (\omega/\sigma_{\nu})^2] - 10 \sum_{\nu=1}^{K_{sc}} \log[1 - (\omega/\omega_{\nu})^2]^2 + (\omega/(q_{\nu}\omega_{\nu}))^2] + 10 \sum_{\nu=1}^{K_{pr}} \log[1 + (\omega/\sigma_{\nu})^2] + 10 \sum_{\nu=1}^{K_{sc}} \log[(1 - (\omega/\omega_{\nu})^2)^2 + (\omega/(q_{\nu}\omega_{\nu}))^2]$$

ove l'intero  $u_0$  denota il numero di poli nell'origine (per  $u_0 < 0$ ) o di zeri (per  $u_0 > 0$ ). I diagrammi di un singolo fattore di primo/secondo grado, sia del numeratore sia del

denominatore, sono chiamati *diagrammi elementari di Bode*. Mediante una composizione grafica, si può ottenere il diagramma di Bode dell'attenuazione di qualsiasi funzione di rete. Siccome la fase del prodotto di più numeri complessi è uguale alla somma delle rispettive fasi, mentre la fase del rapporto di due numeri complessi è uguale alla differenza delle rispettive fasi, non è necessario ricorrere a una grandezza logaritmica, come nel caso dell'ampiezza, per scomporre la fase in addendi. Se scomponiamo una funzione di rete  $F(s)$  nel prodotto/rapporto di fattori di primo e secondo grado, si ha la seguente **Proprietà:** la fase  $\angle F(j\omega)$  di una funzione di rete coincide con la somma (per i fattori al numeratore) e/o la sottrazione (per i fattori al denominatore) della fasi dei fattori di primo e secondo grado:

$$\beta^F(\omega) = \angle F(j\omega) = u_0\pi/2 + \sum_{\nu=1}^{K_{pr}} \angle(1 + j\omega/\sigma_{\nu}) + \sum_{\nu=1}^{K_{sc}} \angle[1 - (\omega/\omega_{\nu})^2 + j\omega/(q_{\nu}\omega_{\nu})] - \sum_{\nu=1}^{K_{pr}} \angle(1 + j\omega/\sigma_{\nu}) - \sum_{\nu=1}^{K_{sc}} \angle[1 - (\omega/\omega_{\nu})^2 + j\omega/(q_{\nu}\omega_{\nu})]$$

Alla suddetta espressione, deve essere aggiunto il contributo costante  $\pm\pi$ , qualora la costante moltiplicativa  $h$  sia negativa e l'addendo multiplo intero di 2  $\pi$ . La fase dei diversi fattori è riportata nel seguente quadro:

fattore di $F(s)$	fase del fattore
$s$	$\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ costante
$1 + \frac{s}{\sigma_0}$	$\pm \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma_0}\right) + 2k\pi$
$1 + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2$	$\begin{cases} 2k\pi, \forall \omega < \omega_0 \\ \pm\pi + 2k\pi, \forall \omega > \omega_0 \end{cases}$ discontinuità in $\omega = \omega_0$
$1 + \frac{s}{q\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2$	$\begin{cases} \pm \arctan\left[\frac{\omega}{q\omega_0(1 - (\omega/\omega_0)^2)}\right] + 2k\pi & \forall \omega < \omega_0 \\ \pm\pi \pm \arctan\left[\frac{\omega}{q\omega_0(1 - (\omega/\omega_0)^2)}\right] + 2k\pi & \forall \omega > \omega_0 \end{cases}$

in presenza del duplice segno "±" vale il segno "+" ovvero "-" se il fattore fa parte, rispettivamente, del numeratore ovvero del denominatore.

$k$  è un numero intero arbitrario (eventualmente anche negativo)

**Commento:** Il diagramma della fase di Bode può essere ottenuto per composizione grafica dei diagrammi elementari delle fasi dei fattori di primo e secondo grado presenti nel numeratore e nel denominatore.

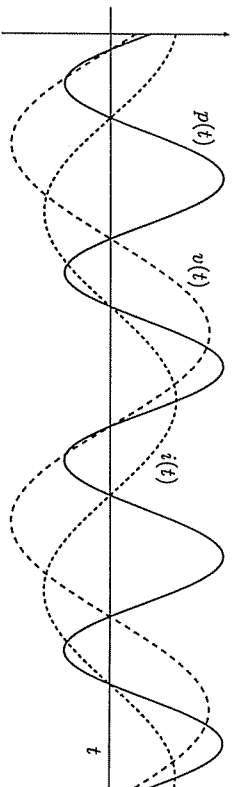
## 22 POTENZA in REGIME SINUSOIDALE

### 22.1 POTENZA ISTANTANEA E POTENZA ATTIVA

La valutazione della potenza e/o lavoro che si sviluppano in un circuito dinamico e lineare in regime sinusoidale deve tenere conto della specificità del regime stesso : tutte le tensioni e correnti in gioco sono sinusoidali, quindi periodiche, diversamente da una generica cisoidale. La periodicità ci suggerisce di introdurre la potenza attiva.

#### 22.1.1 Potenza istantanea nei bipoli e in singole porte di k-porte

Siano  $v(t) = v \cos(\omega t + \phi_v)$  e  $i(t) = i \cos(\omega t + \phi_i)$  la tensione e la corrente ai capi di un generico bipolo (sia semplice sia composto) o della porta di un k-porta operante in regime sinusoidale. In accordo alla Sez. 5.7, il prodotto  $p(t) = v(t) i(t)$  definisce la *potenza (effettiva) istantanea*, cosiddetta per sottolinearne la dipendenza dal tempo.



**Commento :** La potenza istantanea  $p(t)$  si annulla ogniqualvolta sia nulla la tensione  $v(t)$  o la corrente  $i(t)$ .

**Proprietà :** la potenza istantanea  $p(t)$  assorbita in un bipolo (porta) è una sinusoidale con pulsazione  $2\omega$  sovrapposta a una costante :

$$p(t) = v(t) i(t) = v \cos(\omega t + \phi_v) i \cos(\omega t + \phi_i) = \underbrace{\frac{vi}{2} \cos(\phi_v - \phi_i)}_{\text{costante}} + \underbrace{\frac{vi}{2} \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)}_{\text{sinusoidale}}$$

La componente costante  $P^{\text{cost}} = v i \cos(\phi_v - \phi_i)/2$  è minore o uguale in valore assoluto all'ampiezza  $P^{\text{app}} = v i/2$  della componente sinusoidale.

**Definizioni :** In seguito vedremo che la componente  $P^{\text{cost}}$  coincide con la potenza attiva, mentre la componente sinusoidale è chiamata *potenza fluttuante* : la sua ampiezza  $P^{\text{app}} = v i/2$  è chiamata *potenza apparente*.

**Proprietà :** La potenza istantanea  $p(t)$  oscilla periodicamente tra i minimi di valore  $P^{\text{min}}$  e i massimi di valore  $P^{\text{max}}$  :

$$P^{\text{min}} = P^{\text{cost}} - P^{\text{app}} \quad \text{dove} \quad P^{\text{min}} \leq 0 \quad P^{\text{max}} = P^{\text{cost}} + P^{\text{app}} \quad \text{dove} \quad P^{\text{max}} \geq 0$$

$$\text{per } \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) = -1$$

$$\text{per } \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) = 1$$

Si come  $P^{\text{app}} \geq |P^{\text{cost}}|$ , in nessun caso, la potenza minima  $P^{\text{min}}$  può essere positiva e la potenza massima  $P^{\text{max}}$  può essere negativa. Valgono anche le formule inverse :

$$P^{\text{cost}} = (P^{\text{max}} + P^{\text{min}})/2 \quad , \quad P^{\text{app}} = (P^{\text{max}} - P^{\text{min}})/2$$

WWWWWW??? FIGURA EMBLEMA diagramma di molte sinusoidi sfasate ???WWWWWW

Questo capitolo considera i problemi energetici caratteristici del regime sinusoidale, già introdotto nel Cap. 20 come caso particolare dello pseudoregime cisoidale. La periodicità del regime sinusoidale ci consente di sostituire la potenza istantanea con dei parametri più agevoli.

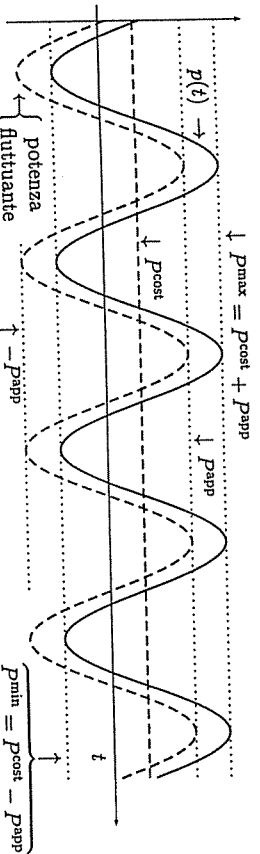
**Sez. 22.1 :** *Potenza istantanea e attiva :* La valutazione della potenza e/o lavoro che si sviluppano in un circuito dinamico e lineare in regime sinusoidale tiene conto della periodicità del regime stesso condivisa da tutte le tensioni, correnti e dalle potenze istantanee. Questo suggerisce l'introduzione della *potenza attiva*, che coincide con la media della potenza istantanea.

**Sez. 22.2 :** *Potenza complessa nei bipoli :* Questa sezione è dedicata allo studio della potenza complessa e di quella reattiva che coincide con la parte immaginaria della precedente. La loro definizione appare poco intuitiva, ma è ampiamente giustificata dalle loro proprietà (Teorema di BOUGHEROT) oltre che dall'importanza nella pratica ingegneristica.

**Sez. 22.3 :** *Potenza complessa nei doppi bipoli :* La potenza complessa e la sua parte immaginaria (potenza reattiva) hanno comportamenti non-intuitivi nei doppi bipoli, che sono ivi discussi.

**Sez. 22.4 :** *Regime multifrequenziale :* Spesso ci si trova di fronte a circuiti dinamici lineari, in cui compaiono più sorgenti impresse sinusoidali con pulsazioni  $\omega$  diverse. Se la soluzione transitoria non è presente, questo circuito opera in *regime multifrequenziale*. Lo studio di questo regime si basa sul principio di sovrapposizione delle soluzioni similari, che vale anche per le potenze attive ma non per le potenze istantanee.

**Sez. 22.5 :** *Potenza attiva disponibile di una sorgente sinusoidale :* Infine viene introdotto un teorema che consente di calcolare la massima potenza attiva erogabile (chiamata *potenza disponibile*) da una sorgente sinusoidale non-ideale (con impedenza interna).



Esaminiamo la potenza istantanea assorbita da specifici bipoli omogenei : in casi particolari la componente costante  $P_{\text{cost}}$  può mancare o coincidere con l'ampiezza della sinusoide  $P_{\text{app}}$  come risulta dal seguente quadro :

**Quadro della potenza istantanea assorbita dai bipoli elementari**

formula di $p(t)$	diagramma di $v(t)$ , $i(t)$ e $p(t)$	valori specifici
$\mathcal{R}(r)$ con $r > 0$ (dissipativo) $\frac{r^2}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\phi_0)]$ sinusoide rialzata		$P_{\text{min}} = 0$ $P_{\text{max}} = r^2/2$ $P_{\text{cost}} = r^2/2$ $P_{\text{app}} = r^2/2$
$\mathcal{R}(r)$ con $r < 0$ (strett. attivo) $\frac{r^2}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\phi_0)]$ sinusoide ribassata		$P_{\text{min}} = r^2$ $P_{\text{max}} = 0$ $P_{\text{cost}} = r^2/2$ $P_{\text{app}} =  r ^2/2$
$\mathcal{C}(C)$ con $C > 0$ (conservativo) $\frac{\omega C v^2}{2} \cos(2\omega t + 2\phi_0 + \pi/2)$ sinusoide pura		$P_{\text{min}} = -\omega C v^2/2$ $P_{\text{max}} = \omega C v^2/2$ $P_{\text{cost}} = 0$ $P_{\text{app}} = \omega C v^2/2$
$\mathcal{L}(L)$ con $L > 0$ (conservativo) $\frac{\omega L i^2}{2} \cos(2\omega t + 2\phi_0 - \pi/2)$ sinusoide pura		$P_{\text{min}} = -\omega L i^2/2$ $P_{\text{max}} = \omega L i^2/2$ $P_{\text{cost}} = 0$ $P_{\text{app}} = \omega L i^2/2$

Le quattro figure del suddetto quadro sono tracciate assumendo nulla la fase  $\phi_0$  della tensione.

**Commenti :** Il fatto che la potenza istantanea in un resistore (con  $r > 0$ ) sia sempre nonnegativa è una conseguenza diretta del fatto che il resistore è adinamico e dissipativo. Il fatto che la potenza istantanea in un induttore e in un condensatore sia una sinusoide pura è una conseguenza diretta del fatto che entrambi sono dinamici e conservativi. Infatti la "conservatività" implica che la potenza media calcolata su un intervallo che tende a infinito tenda a essere nulla.

**Proprietà :** Richiamiamo dal Cap. 6 il Teorema della potenza effettiva : la somma delle potenze istantanee estesa a tutti i  $K$  componenti di un circuito è nulla

$$\sum_{k=1}^K p_k(t) = 0$$

**22.1.2 Potenza attiva**

La potenza istantanea è piuttosto scomoda e non molto significativa nell'analisi usuale di un circuito in regime sinusoidale : nell'uso comune, altri parametri derivati da essa sono preferiti :

**Definizione :** la *potenza attiva*  $P$  è definita come la media della potenza istantanea  $p(t)$  su un intervallo di tempo  $[t_1, t_2]$  sufficientemente lungo rispetto alla dinamica di  $p(t)$  :

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \quad \text{dove } (t_2 - t_1) \rightarrow \infty$$

**Avvertenza :** La suddetta definizione della potenza attiva non vale solamente per il regime sinusoidale : per esempio vale in qualsiasi altro regime periodico (vedere Sez. 22.4). Presso ogni utenza sia domestica sia industriale è installato un contatore, che è lo strumento che misurare la potenza attiva, o meglio il suo integrale (energia).

Nel regime sinusoidale la potenza attiva assume un'espressione molto nota e importante :

**Proprietà :** La potenza attiva  $P$  assorbita da un bipolo  $P = P_{\text{cost}} = \frac{v}{2} i \cos(\phi_0 - \phi_i)$  operante in regime sinusoidale coincide con la componente costante della potenza istantanea (Par. 22.1.1) :

**Commento :** Nel regime sinusoidale l'ampiezza dell'intervallo d'integrazione  $[t_1, t_2]$  può essere non elevata purché sia un multiplo intero di mezzo periodo. Infatti a causa della periodicità il valore medio coincide col  $P_{\text{cost}}$ .

Altre espressioni della potenza attiva in regime sinusoidale sono molto spesso adoperate : la prima è uguale a metà del prodotto dell'ampiezza della tensione  $v$  per la componente  $i_c = i \cos(\phi)$  della corrente  $i$  in fase con  $v$ , mentre la seconda è anche uguale a metà del prodotto dell'ampiezza della corrente  $i$  per la componente  $v_c = v \cos(\phi)$  della tensione  $v$  in fase con  $i$  :

**Terminologia :** Il termine "potenza attiva" è ormai consolidato da lungo tempo, da quando i circuiti in regime sinusoidale sono diventati i preferiti per trasmettere l'energia elettrica a distanza. Attualmente l'aggettivo "attivo" è pure usato per definire i componenti circuitali che possono erogare energia, come visto nei CCap. 7, 8, 9 e 16. Questi due usi del termine "attivo" non hanno niente a che fare uno con l'altro. A parere di chi scrive, sarebbe meglio parlare di potenza efficace, ma l'uso del termine "potenza attiva" è troppo consolidato per poterlo sostituire.

**Teorema della potenza attiva:** Dal teorema della potenza efficace (Sez. 5.7), integrando i due membri dell'equazione che annulla la somma delle potenze istantanee, si ha che la somma delle potenze attive di tutti i  $K$  componenti del circuito è nulla:

$$\sum_{k=1}^K P_k = 0$$

**Corollario della potenza attiva:** Dal corollario della potenza efficace (Sez. 5.7), integrando i due membri dell'equazione che eguaglia la potenza istantanea assorbita da un componente composto alla somma delle potenze istantanee assorbite dai  $K$  componenti aggregati, si ha che la potenza attiva di un componente coincide con la somma delle potenze attive dei  $K$  componenti:

$$P = \sum_{k=1}^K P_k$$

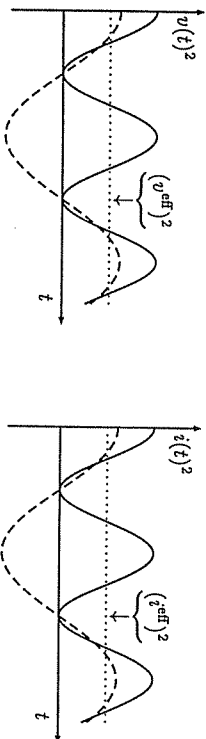
**Proprietà:** anche la potenza fittuante, definita nel Par. 22.1.1, soddisfa al rispettivo teorema e corollario. Infatti essa è la differenza tra la potenza istantanea e quella attiva, che soddisfano per proprio conto allo stesso teorema e corollario.

**22.1.3 Valori efficaci, fattore di potenza e potenza attiva**

Richiamiamo qui di seguito la definizione di valore efficace di una qualsiasi tensione  $v(t)$  ovvero corrente  $i(t)$ :

**Definizione:** il *valore efficace* della tensione e della corrente sono definiti dalla radice quadrata del valore medio del quadrato della funzione stessa. L'intervallo d'integrazione  $[t_1, t_2]$  deve essere molto lungo, cioè  $(t_2 - t_1) \rightarrow \infty$ :

$$v^{eff} = \lim_{(t_2-t_1) \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} [v(t)]^2 dt}, \quad i^{eff} = \lim_{(t_2-t_1) \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} [i(t)]^2 dt}$$



**Proprietà:** Come già detto nel Cap. 18, nel caso di tensioni e correnti sinusoidali la tensione e corrente efficaci assumono un'espressione compatta e ben nota:

$$v^{eff} = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad i^{eff} = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

**Commento:** Come nel caso della potenza attiva il risultato non cambia se l'ampiezza dell'intervallo d'integrazione  $[t_1, t_2]$  coincide con un multiplo intero di mezzo periodo.

**Definizione:** Per un dato bipolo, il fattore  $\cos(\phi) = \cos(\phi_v - \phi_i)$ , presente nell'espressione della potenza attiva in regime sinusoidale, è chiamato *fattore di potenza*, dove  $\phi = \phi_v - \phi_i$  coincide con la fase dell'impedenza del bipolo.

**Proprietà:** Con le precedenti definizioni la potenza attiva è uguale al prodotto dei valori efficaci della tensione e della corrente e del fattore di potenza:

$$P = v^{eff} i^{eff} \cos(\phi)$$

**Commento:** In pratica la potenza attiva è una misura del consumo di energia elettrica in un intervallo di tempo, purchè questo intervallo sia molto più lungo del periodo della sinusoide. Il costo dell'energia consumata da un utente viene determinato dall'integrale della potenza attiva esteso a tutto l'arco di tempo preso in considerazione.

**Commento:** Nelle reti elettriche per la trasmissione e distribuzione di energia elettrica fino agli impianti domestici, che operano in genere in regime sinusoidale, si preferisce parlare di tensioni e correnti efficaci e non delle loro ampiezze. Quindi gli Enti pubblici e privati fornitori di energia elettrica fanno sempre riferimento ai valori efficaci della tensione e della corrente. Analogamente, i dati di targa (tensione e corrente) riportati su un qualsiasi apparecchio elettrico di uso industriale o domestico, che non sia alimentato con batterie, si riferiscono ai valori efficaci della tensione e della corrente.

**22.2 POTENZA COMPLESSA NEI BIPOLI**

Viene introdotta la *potenza complessa* congiuntamente alla sua parte immaginaria che prende il nome di *potenza reattiva*. Sebbene la loro introduzione appaia per il momento poco motivata, essa è ampiamente giustificata dalle loro proprietà che le rendono indispensabili anche nell'uso professionale.

**22.2.1 Potenza complessa**

Introduciamo una definizione, che sarà motivata successivamente, legata al prodotto del fasore della tensione per il coniugato di quello della corrente. A priori, questo prodotto non ha un preciso significato, nel senso che esso non è un'operazione prevista nella teoria dei fasori introdotta nel Cap. 18, ma solo nel dominio dei numeri complessi.

**Definizione:** In un bipolo o porta la *potenza complessa*  $\bar{P}$  è definita come la metà del prodotto del fasore della tensione  $\bar{v}$  e del coniugato del fasore della corrente  $\bar{i}^*$ :

$$\bar{P} = \frac{\bar{v} \bar{i}^*}{2} = \frac{v \bar{i}}{2} \underbrace{\cos(\phi_v - \phi_i)}_{\text{potenza attiva}} + j \frac{v \bar{i}}{2} \underbrace{\sin(\phi_v - \phi_i)}_{\text{senza nome}}$$

**Proprietà:** la parte reale della potenza complessa coincide con la potenza attiva:

$P = \Re(\bar{P})$  come risulta dal confronto con la formula riportata nel Par. 22.1.2.

Introducendo l'impedenza  $z$  o l'ammettenza  $y$  del bipolo si ottengono due espressioni alternative della potenza complessa di larghissimo uso:

$$\bar{P} = \frac{z \bar{i} \bar{i}^*}{2} = P + j \Im[\bar{P}] = \frac{r \bar{i} \bar{i}^*}{2} + j \frac{x \bar{i} \bar{i}^*}{2}, \quad \bar{P} = \frac{v^* \bar{v} \bar{v}^*}{2} = P + j \Im[\bar{P}] = \frac{g v^2}{2} - j \frac{b v^2}{2}$$

**Avertenza:** Nell'esprimere la potenza complessa in funzione della tensione, occorre rammentare che l'ammettenza compare come "coniugata".

**Estensione ai multiporle:** la definizione di potenza complessa viene estesa anche ai  $k$ -porle in modo analogo alla definizione della potenza istantanea:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^k \bar{v}_\mu \bar{i}_\mu^*$$

L'introduzione della potenza complessa appare per il momento come un giochetto matematico senza alcun aggancio con la realtà fisica: le seguenti proprietà giustificano la sua introduzione:

**Teorema della potenza complessa (Boucherot):**  
La somma delle potenze complesse estesa a tutti i  $K$  componenti di un circuito è nulla:

$$\sum_{k=1}^K \bar{P}_k = 0$$

**Prova:** La prova è basata sul fatto che il vettore dei fasori delle tensioni di ramo  $\bar{v}$  e quello delle correnti di ramo  $\bar{i}$  appartengono agli stessi sottospazi tra loro ortogonali  $\Omega^v$  e  $\Omega^i$ , a cui appartengono i rispettivi vettori delle tensioni di ramo  $v(t)$  e delle correnti di ramo  $i(t)$  (vedere Cap. 4):

$$B v(t) = 0_{m-n+1} \implies v(t) \in \Omega^v, \quad A i(t) = 0_{n-1} \implies i(t) \in \Omega^i$$

Stacchiamo in regime sinusoidale, le tensioni e le correnti di ramo sono sinusoidali:  $v(t) = \Re[\exp(j\omega t) \bar{v}]$  e  $i(t) = \Re[\exp(j\omega t) \bar{i}]$  da cui otteniamo:

$$B \Re[\exp(j\omega t) \bar{v}] = 0_{m-n+1}, \quad A \Re[\exp(j\omega t) \bar{i}] = 0_{n-1}$$

Con facili operazioni otteniamo

$$\Re[\exp(j\omega t) B \bar{v}] = 0_{m-n+1}, \quad \Re[\exp(j\omega t) A \bar{i}] = 0_{n-1}$$

$$B \bar{v} = 0_{m-n+1} \implies \bar{v} \in \Omega^v, \quad A \bar{i} = 0_{n-1} \implies \bar{i} \in \Omega^i$$

**Corollario della potenza complessa (Boucherot):** La potenza complessa assorbita da un componente composto da  $K$  componenti è uguale alla somma delle  $K$  potenze complesse assorbite da ciascuno dei componenti.

$$\bar{P} = \sum_{k=1}^K \bar{P}_k$$

**Prova:** Segue dal corollario della potenza effettiva (Sez. 5.7).

**Proprietà:** Il modulo della potenza complessa coincide con la potenza apparente  $P_{app}$  (vedere Par. 22.1.1):

$$|\bar{P}| = \frac{v i}{2} = P_{app}$$

**Avvertenza:** La somma di tutte le potenze apparenti non è in genere nulla: infatti ciascuna di esse è positiva o al più nulla. Inoltre la potenza apparente in un componente composto non coincide con la somma delle potenze apparenti nei componenti aggregati. Infatti la somma dei moduli di numeri complessi non coincide in genere con il modulo della loro somma.

### 22.2.2 Potenza reattiva

Vediamo di dare un nome e un significato fisico anche alla parte immaginaria della potenza complessa introdotta nel precedente paragrafo:

**Definizione:** la parte immaginaria della potenza complessa  $\bar{P}$ , che indichiamo col simbolo  $Q$ , è chiamata *potenza reattiva*:

$$Q = \Im(\bar{P}) = \frac{v i}{2} \sin(\phi_v - \phi_i)$$

**Commento:** Dall'esame del fattore  $\sin(\phi_v - \phi_i)$  si conclude che la potenza reattiva

$Q$  è positiva, qualora la tensione sia in anticipo rispetto alla corrente (bipolo resistivo-induttivo), mentre è negativa, qualora la tensione sia in ritardo rispetto alla corrente (bipolo resistivo-capacitivo). Il segno usato per  $Q$  è una pura convenzione, universalmente accettata e rispettata, conseguente alla definizione della potenza complessa nel Par. 22.2.1. Se la potenza complessa fosse definita come  $(1/2) \bar{v}^* \bar{i}$ , definizione che sarebbe, in linea di principio, altrettanto legittima che la precedente, la sua parte immaginaria, cioè la potenza reattiva, cambierebbe di segno.

**Proprietà:** Dalla definizione di potenza complessa, attiva, reattiva e apparente deriva immediatamente le relazioni:

$$|\bar{P}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = P_{app}$$

Possiamo dare un significato fisico alla potenza reattiva  $Q$  assorbita da un condensatore ovvero un induttore: essa è strettamente legata al valore massimo raggiunto dall'energia immagazzinata istantanea (essa è una sinusoidale rialzata di pulsazione  $2\omega$ ) durante un intero periodo.

**Proprietà:** Tra la potenza reattiva  $Q$  e l'energia massima immagazzinata  $W^{max}$  esiste la relazione:

$$\text{condensatore} \quad Q = -\frac{1}{2} b v^2 = -\frac{1}{2} \omega C v^2$$

$$\text{induttore} \quad Q = \frac{1}{2} x i^2 = \frac{1}{2} \omega L i^2$$

$$W^{max} = \max_t [w^{ene}(t)] = \frac{1}{2} C v^2$$

$$W^{max} = \max_t [w^{ene}(t)] = \frac{1}{2} L i^2$$

$$Q = -\omega W^{max} \quad Q = \omega W^{max}$$

**Avvertenza:** La precedente interpretazione non vale per altri componenti. Per esempio, la potenza reattiva in un resistore è sempre nulla, mentre in una  $sVi$  ovvero sli può essere nonnulla, nonostante che anch'essi siano componenti adinamici. Questo risultato è spiegato dal fatto che una delle grandezze è nonvincolata.

**Teorema della potenza reattiva:**  
La somma delle potenze reattive estesa a tutti i  $K$  componenti di un circuito operante in regime sinusoidale è nulla:

$$\sum_{k=1}^K Q_k = 0$$

**Prova:** La somma di tutte le potenze reattive coincide con la parte immaginaria della somma di tutte le potenze complesse, che è nulla (vedere Par. 22.2.1).

**Corollario della potenza reattiva:** La potenza reattiva assorbita da un componente composto è uguale alla somma delle potenze reattive assorbite dai  $K$  componenti che fanno parte del bipolo composto.

$$Q = \sum_{k=1}^K Q_k$$

**Prova:** Segue immediatamente dal corollario della potenza complessa nel Par. 22.2.1.

### 22.2.3 Potenza attiva e reattiva nei bipoli composti

I corollari sulla potenza attiva e reattiva assorbita da un componente composto ci permettono di raggiungere, per alcune sottoclassi di bipoli composti, le seguenti conclusioni:







$$\bar{P}_{mg} = 1/2 \bar{v}_1 (\bar{i}_1)^* = 1/2 [i'_{11} \bar{v}_2 + i'_{12} \bar{i}_2] [i'_{21} (\bar{v}_2)^* + i'_{22} (\bar{i}_2)^*]$$

$$\bar{P}_{mg} = 1/2 i'_{11} i'_{21} |\bar{v}_2|^2 + 1/2 i'_{12} i'_{22} |\bar{i}_2|^2 + 1/2 i'_{12} i'_{21} (\bar{v}_2)^* \bar{i}_2 + 1/2 i'_{11} i'_{22} \bar{v}_2 (\bar{i}_2)^*$$

Tenendo presente che i primi due dei quattro termini a secondo membro sono reali, uguagliamo le parti immaginarie dei due membri :

$$Q_{mg} = \Im[\bar{P}_{mg}] = -1/2 i'_{12} i'_{21} \Im[\bar{v}_2 (\bar{i}_2)^*] + 1/2 i'_{11} i'_{22} \Im[\bar{v}_2 (\bar{i}_2)^*] = |\mathcal{T}'| Q_u$$

da cui si deduce che il determinante della matrice di trasmissione  $|\mathcal{T}'|$  ha un ruolo fondamentale per esaminare il comportamento del doppio bipolo agli effetti della potenza reattiva assorbita all'ingresso. In base al suo valore si ha :

1.  $|\mathcal{T}'| = 1$  (doppio bipolo reciproco) :  $Q_{mg} = Q_u$ .
2.  $|\mathcal{T}'| > 0$  :  $Q_{mg}$  ha lo stesso segno di  $Q_u$ .
3.  $|\mathcal{T}'| = -1$  (per esempio il giratore) :  $Q_{mg} = -Q_u$ .
4.  $|\mathcal{T}'| < 0$  :  $Q_{mg}$  ha il segno opposto a quello di  $Q_u$ .
5.  $|\mathcal{T}'| = 0$  (doppio bipolo unidirezionale  $1 \rightarrow 2$ ) :  $Q_{mg} = 0$ .

### 22.3.4 Potenza complessa nel giratore

In seguito ai risultati raggiunti nei paragrafi precedenti, la potenza reattiva in un giratore è in genere nonnulla, benché la potenza istantanea assorbita  $p(t)$  sia identicamente nulla. Per comprendere meglio questo risultato, calcoliamo la potenza attiva  $P$  e la potenza reattiva  $Q$  in un giratore, tramite la matrice (puramente reale)  $Z$  :

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + j0 & -r_m + j0 \\ r_m + j0 & 0 + j0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} P = \frac{1}{2} \{ (r_m - r_m) \Re[i_1^* i_2] \} = 0 \\ Q = -r_m \Im[i_1^* i_2] \end{cases}$$

Rivisitiamo questo risultato, esaminando le potenze istantanee  $p_1(t)$  e  $p_2(t)$  assorbite dalle due porte del giratore :

$$p_1(t) = \frac{v_1 i_1}{2} \cos(\phi_{v1} - \phi_{i1}) + \frac{v_1 i_1}{2} \cos(2\omega t + \phi_{v1} + \phi_{i1})$$

$$p_2(t) = \frac{v_2 i_2}{2} \cos(\phi_{v2} - \phi_{i2}) + \frac{v_2 i_2}{2} \cos(2\omega t + \phi_{v2} + \phi_{i2})$$

Siccome il giratore impone le relazioni  $v_1 i_1 = v_2 i_2$ ,  $\phi_{v1} = \phi_{v2}$  e  $\phi_{i1} = \phi_{i2} \pm \pi$  (il termine  $\pm \pi$  è dovuto alla convenzione noncardinale (segno della corrente  $i_2$ ) con cui è definita la matrice  $\mathcal{T}'$  del giratore,  $p_1(t)$  diventa :

$$p_1(t) = \frac{v_2 i_2}{2} \cos(\phi_{v2} - \phi_{i2} \pm \pi) + \frac{v_2 i_2}{2} \cos(2\omega t + \phi_{v2} + \phi_{i2} \pm \pi)$$

Dal confronto con la potenza  $p_2(t)$  calcolata in precedenza si ha che  $p_1(t) = -p_2(t)$ . Riprendiamo in considerazione il precedente confronto tra le potenze istantanee  $p_1(t)$  e  $p_2(t)$  scomponendole nelle rispettive somme delle potenze attive e reattive istantanee :

$$p_1(t) = P_1 [1 + \cos(2\omega t + 2\phi_{v1})] + Q_1 \sin(2\omega t + 2\phi_{v1})$$

$$p_2(t) = P_2 [1 + \cos(2\omega t + 2\phi_{v2})] + Q_2 \sin(2\omega t + 2\phi_{v2})$$

Tenendo di nuovo presente che

$$v_1 i_1 = v_2 i_2, \quad \phi_{v1} = \phi_{v2}, \quad \phi_{i1} = \phi_{i2} \pm \pi, \quad \phi_{v1} - \phi_{i1} = \pm \pi - \phi_{v2} + \phi_{i2}$$

si ha che  $P_1 = -P_2$  e  $Q_1 = Q_2$  la potenza  $p_1(t)$  diventa :

$$p_1(t) = -P_2 [1 + \cos(2\omega t + 2\phi_{v2})] + Q_2 \sin(2\omega t + 2\phi_{v2})$$

**Commento** : Le potenze attive  $P_1$  e  $P_2$  sono uguali e di segno opposto, mentre quelle reattive  $Q_1$  e  $Q_2$  sono uguali anche in segno. Il tutto può essere spiegato in un altro modo : se le tensioni e correnti alle due porte sono definite con la convenzione noncardinale, gli sfasamenti tra la tensione e corrente alle due porte del giratore sono uguali e opposte. Infatti, dal momento che  $v_1(t) = i_2(t)/g_m$  e  $i_1(t) = g_m v_2(t)$ , esiste una inversione di segno ( $\phi_{v1} - \phi_{i1} = -(\phi_{v2} - \phi_{i2})$ ) tra gli sfasamenti alle due porte.

**Commento** : Questo risultato riguardante la potenza reattiva  $Q_{gr}$  in un giratore spiega come mai la prima porta di un giratore chiuso su un condensatore è equivalente a un induttore (vedere Sez. 15.3). Dal corollario della potenza reattiva si ottiene

$$Q_L = Q_{gr} + Q_C \quad \Leftrightarrow \quad Q_{gr} = Q_L - Q_C = Q_L + |Q_C| > 0$$

$$Q_L > 0, \quad Q_C < 0$$

**Proprietà** : Consideriamo un giratore con la seconda porta chiusa su un carico dinamico. La potenza complessa  $\bar{P}_n$  assorbita dalla prima porta del giratore coincide con il coniugato della potenza complessa  $\bar{P}_n$  assorbita dal carico :

$$\bar{P}_1 = (1/2) \bar{v}_1 \bar{i}_1^* = (1/2) [\bar{v}_2/g_m] [g_m \bar{v}_2]^* = [\bar{P}_n]^*$$

**Proprietà** : Consideriamo un triid. con la seconda porta chiusa su un carico dinamico. La potenza complessa  $\bar{P}_1$  assorbita dalla prima porta del triid. coincide con la potenza complessa  $\bar{P}_n$  assorbita dal carico :

$$\bar{P}_1 = (1/2) \bar{v}_1 \bar{i}_1^* = (1/2) n \bar{v}_2 (1/n) \bar{i}_2^* = \bar{P}_n$$

### 22.4 REGIME MULTIFREQUENZIALE

Spesso ci si trova di fronte a circuiti dinamici lineari, le cui sorgenti impulsive sono sinusoidali con pulsazioni  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ , diverse tra loro. Se la soluzione transitoria non è presente, si usa dire che un circuito in questa situazione opera in *regime multifrequenziale*. Lo studio di questo regime si basa sul principio di sovrapposizione delle soluzioni similari dimostrato nel Cap. 19. Diversamente da quanto ci si aspetta, il principio di sovrapposizione vale anche per la potenza attiva, ma non per le potenze istantanee, reattiva e complessa.

WWWWWW?? Questa sezione non riguarda solo la potenza in regime multifrequenziale.

22.4.1 Circuiti con sorgenti sinusoidali non-isofrequenziali

In un circuito lineare dinamico possono esserci sorgenti impulsive con grandezze impresse costanti e sinusoidali di frequenze diverse.

La presenza di queste sorgenti impulsive può essere dovuta a motivi diversi :

- Presenza di una o più sorgenti impulsive periodica non-sinusoidale, che venga scomposta nella serie/parallelo di sorgenti impulsive sinusoidali di frequenza una moltiplica intera dell'altra mediante la serie di Fourier (vedere Sez. 18.7).
- Presenza di bipoli fisici modellati da sorgenti impulsive sinusoidali con frequenze diverse.
- Nel caso più generale, possono esserci più sorgenti periodiche non sinusoidali di periodi diversi.

**Regime sinusoidale e regime costante (continuo)** : Come già visto, il regime costante si ha qualora il circuito dinamico sia asintoticamente stabile e tutte le sorgenti impulsive siano tempo-invarianti. Il regime costante può essere visto come un particolare regime sinusoidale caratterizzato dalla pulsazione  $s = j\omega \rightarrow 0$ . In questo caso tutte le impedenze, ammettenze e rapporti di tensione e corrente, che coincidono con funzioni di rete calcolate nell'origine, sono necessariamente reali. ■

22.4.2 Soluzione a regime

La soluzione a regime (similare) viene ottenuta applicando il principio di sovrapposizione per le soluzioni particolari di un circuito dinamico (vedere Cap. 19).

- Costruire dei circuiti ausiliari, tali che in ciascun circuito siano presenti solamente sorgenti impulsive sinusoidali isofrequenziali (eventualmente costanti) e le rimanenti siano sostituite da c.c. (nel caso di sVI) o da c.a. (nel caso di sII).
  - Analizzare ciascuno di questi circuiti (cioè le tensioni e/o correnti di interesse) nel dominio dei fasori (se le sorgenti impulsive sono sinusoidali) oppure con un metodo specifico per i circuiti dinamici (se le sorgenti impulsive sono costanti).
  - Sommare i contributi, nel dominio del tempo, dovuti a ciascun circuito ausiliario, applicando il principio di sovrapposizione per le soluzioni particolari (vedere Cap. 19).
- Supponiamo che in un circuito dinamico stabile vi sia una sorgente impulsiva in cui la grandezza impressa è un'onda quadra periodica.

- La soluzione a regime sarà ancora una forma d'onda periodica con lo stesso periodo, ma in genere non più un'onda quadra, cioè si ha una distorsione del profilo della forma d'onda. Infatti la risposta a un funzione forzante periodica mantiene la forma della funzione forzante stessa solamente qualora questa sia una sinusoidale.
- Il motivo di questo diverso comportamento è una conseguenza del fatto che la sinusoidale è l'unica funzione periodica, la cui derivata è ancora una funzione della stessa forma. Per esempio, la derivata di un'onda quadra o triangolare periodica è a sua volta periodica ma non è affatto un'onda quadra o triangolare.

22.4.3 Potenza attiva

Ricordiamo che la potenza attiva è definita come la media della potenza istantanea  $p(t)$  su un intervallo di tempo molto più lungo del periodo della sinusoidale (vedere Par. 22.xxxx). Vediamo di mettere in relazione la potenza media (attiva) in un regime multifrequenziale e le potenze medie (attive) dei singoli regimi sinusoidali.

Consideriamo il regime multifrequenziale costituito dalla sovrapposizione di  $K$  regimi sinusoidali isofrequenziali, ciascuno originato da una o più sorgenti impulsive sinusoidali caratterizzate da una specifica pulsazione  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ). Consideriamo le potenze istantanee di un bipolo in ciascun regime isofrequenziale :

$$p_k(t) = v_k(t) i_k(t) = v_k \cos(\omega_k t + \phi_{v_k}) i_k \cos(\omega_k t + \phi_{i_k}) \quad k = 1, 2, \dots, K$$

La potenza istantanea  $p(t)$  nello stesso bipolo nel regime multifrequenziale è :

$$p(t) = \underbrace{\left[ \sum_{k=1}^K v_k(t) \right]}_{K \text{ potenze istantanee}} \underbrace{\left[ \sum_{k=1}^K i_k(t) \right]}_{K^2 - K \text{ termini misti}} = \sum_{k=1}^K v_k i_k \cos(\omega_k t + \phi_{v_k}) \cos(\omega_k t + \phi_{i_k}) + \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^K v_\mu i_\nu \cos(\omega_\mu t + \phi_{v_\mu}) \cos(\omega_\nu t + \phi_{i_\nu})$$

Lo sviluppo del prodotto delle due sommatorie presenti in  $p(t)$  da origine alla somma di  $K^2$  termini, ognuno dei quali è il prodotto di due sinusoidi. Più precisamente,  $K$  di questi termini sono uguali al prodotto di due sinusoidi  $\omega_k$  e coincidono con le potenze istantanee dei  $K$  regimi isofrequenziali. I restanti  $K^2 - K$  termini misti sono il prodotto di due sinusoidi con pulsazioni  $\omega_\mu$  e  $\omega_\nu$ , con  $\omega_\mu \neq \omega_\nu$ . Tramite le ben note formule trigonometriche (vedere Par. 18.xxxx), ciascun termine misto diventa la somma di due sinusoidi di pulsazione  $\omega_\mu + \omega_\nu$  e  $\omega_\mu - \omega_\nu$ . La presenza di questi termini misti dimostra che il principio di sovrapposizione non vale per le potenze istantanee.

Calcoliamo il valore medio, su un intervallo di tempo molto più lungo dei periodi di tutte le sinusoidi. Per definizione, il primo membro da origine alla potenza attiva  $P$  del regime multifrequenziale. A secondo membro le  $K$  potenze istantanee danno origine alle potenze attive  $P_1, P_2, \dots, P_K$  proprie di ciascun regime sinusoidale operante separatamente. I  $K^2 - K$  termini misti svaniscono dal momento che hanno un valore medio nullo.

**Proprietà** : La potenza attiva  $P$  in un regime multifrequenziale è uguale alla somma delle potenze attive dei singoli regimi sinusoidali.

$$P = \sum_{k=1}^K P_k$$

**Avvertenza** : Qualora  $\omega_\mu \simeq \omega_\nu$  ma con  $\omega_\mu \neq \omega_\nu$ , il valore medio è nullo solamente per un intervallo di integrazione molto elevato (fenomeno del battimento). Infatti per  $\omega_\mu \rightarrow \omega_\nu$ , il periodo della sinusoidale con pulsazione  $\omega_\mu - \omega_\nu$  tende a  $\infty$ .  
 WWWWWWWW??? vedere potenza reattiva totale (potenza deformante) ???WWWWWW

22.5 POTENZA ATTIVA DISPONIBILE  
 DI UNA SORGENTE SINUSOIDALE

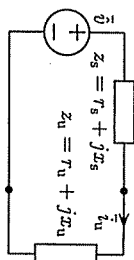
Questa sezione discute una proprietà di natura energetica che si ha quando una sorgente sinusoidale nonideale di tensione ovvero di corrente è chiusa su un carico. Essa costituisce

La naturale estensione al regime sinusoidale di un proprietà delle sorgenti costanti nonideali già vista nel Cap. 7. Una variazione di questa proprietà è infine discussa.

**22.5.1 Teorema classico**

Sia data una sorgente sinusoidale nonideale con tensione impressa  $\tilde{v}$  e con impedenza interna  $z_s = r_s + jx_s$  (dove  $r_s > 0$ ) chiusa su un carico di impedenza  $z_u = r_u + jx_u$  (dove  $r_u > 0$ ). La potenza attiva  $P_u$  erogata dalla sorgente e assorbita dal carico dipende dal valore dell'impedenza  $z_u$  :

$$P_u(z_u) = \frac{r_u |\tilde{i}|^2}{2} = \frac{r_u |\tilde{v}|^2 / 2}{(r_s + r_u)^2 + (x_s + x_u)^2}$$



**Definizione :** la potenza attiva massima che una sorgente nonideale è in grado di erogare viene detta *potenza disponibile* e indicata da  $P_{disp}$

Il seguente teorema è molto importante :  
**Teorema :** Una sorgente nonideale eroga la potenza disponibile  $P_{disp}$  se e solo se  $z_u = z_s^*$  : essa risulta uguale a  $P_{disp} = |\tilde{v}|^2 / (8r_s)$ .

**Prova :** Consideriamo la potenza attiva  $P_u(z_u)$  erogata e cerchiamo i valori di  $r_u$  e  $x_u$  per cui essa diventa massima :

$$P_{disp} = \max_{\langle z_u \rangle} [P_u(z_u)] = \max_{\langle z_u \rangle} \left[ \frac{|\tilde{v}|^2 / 2}{(r_s + r_u)^2 / r_u + (x_s + x_u)^2 / r_u} \right]$$

Si come le variabili  $r_u$  e  $x_u$  compaiono esclusivamente entro il denominatore, il problema è equivalente alla minimizzazione del denominatore stesso :

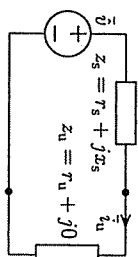
$$\min_{\langle z_u \rangle} \left[ (r_s + r_u)^2 / r_u + (x_s + x_u)^2 / r_u \right]$$

Gli addendi presenti nel denominatore  $(r_s + r_u)^2 / r_u$  e  $(x_s + x_u)^2 / r_u$  non possono essere negativi : il primo dipende solamente da  $r_u$  e il secondo da  $x_u$  e  $r_u$ . Il minimo di  $(x_s + x_u)^2 / r_u$  è uguale a 0 e viene raggiunto per  $x_u = -x_s$  indipendentemente dal valore di  $r_u$  e quello di  $(r_s + r_u)^2 / r_u$  viene raggiunto per  $r_u = r_s$ . Infine, sostituendo  $r_u \rightarrow r_s$  e  $x_u \rightarrow -x_s$  nell'espressione di  $P_u$  si ottiene il valore di  $P_{disp}$ .

**Commento :** Una dimostrazione alternativa alla precedente può essere ottenuta risolvendo un sistema di due equazioni in due incognite : il sistema viene costruito annullando le derivate parziali di  $P_u(r_u + jx_u)$  rispetto alle due incognite  $r_u$  e  $x_u$ .

**22.5.2 Versione modificata del teorema**

Possiamo riconsiderare il precedente Teorema nel caso in cui il carico sia necessariamente resistivo :  $z_u = r_u + j0$ . In questo caso noi abbiamo che la sorgente nonideale eroga la massima potenza attiva, qualora la resistenza  $r_u$  del carico sia coincidente con l'ampiezza  $\sqrt{r_s^2 + x_s^2}$  dell'impedenza interna della sorgente nonideale.



**Prova :** La dimostrazione ripete quella del teorema classico. Cerchiamo il massimo della potenza attiva  $P_u$  assorbita dal carico :

$$\max_{\langle r_u \rangle} [P_u(r_u)] = \max_{\langle r_u \rangle} \left[ \frac{|\tilde{v}|^2 / 2}{(r_s + r_u)^2 / r_u + x_s^2 / r_u} \right]$$

La ricerca del massimo di  $P_u$  equivale alla ricerca del minimo del denominatore :

$$\min_{\langle r_u \rangle} \left[ (r_s + r_u)^2 / r_u + x_s^2 / r_u \right] \implies \min_{\langle r_u \rangle} \left[ (r_s^2 + x_s^2) / r_u + 2 r_s + x_u \right]$$

da cui si verifica che la sorgente nonideale eroga la massima potenza attiva per  $r_u = \sqrt{r_s^2 + x_s^2}$ .

**Commento :** Supponiamo che  $\tilde{v}$  e  $r_u + jx_u$  siano note, mentre  $r_s + jx_s$  siano incognite. La massima potenza attiva assorbita dal carico si ha nel caso in cui  $r_s = 0$  e  $x_s = -x_u$ .

## 23 COMPONENTI COMPOSITI DINAMICI TEMPO-INVARIANTI e LINEARI

WWWWWW??? FIGURA EMBLEMA diagramma di Nyquist risonatori ???WWWWWW

Questo capitolo esamina modelli composti di componenti fisici dinamici e componenti composti di interesse. Questi modelli sono costituiti da condensatori e/o induttori e componenti adinamici elementari : resistori, nullo, sorgenti pilotate, trasformatori ideali e giratori. Essi sono esaminati nello pseudoregime cisoidale e nel regime sinusoidale.

**Sez. 21.1 : Componenti conservativi composti**: Innanzitutto vengono considerati i risonatori serie e parallelo ideali e alcuni doppi bipoli composti conservativi che funzionano da trappole per specifiche frequenze. La connessione in cascata di queste trappole consente la realizzazione dei filtri elettrici.

**Sez. 21.2 : Modelli quasi-conservativi dei condensatori e induttori fisici**: Un modello rigorosamente conservativo di un condensatore ovvero induttore fisico può risultare inadeguato, qualora la dissipazione parassita associata all'immagazzinamento dell'energia non sia trascurabile. I modelli quasi-conservativi più usati del condensatore e dell'induttore fisico, ciascuno caratterizzato da un opportuno *fattore di qualità*, sono discussi.

**Sez. 21.3 : Modelli quasi-conservativi dei risonatori fisici**: Un modello più realistico, chiamato *quasi-conservativo*, tiene conto della (leggera) dissipazione di potenza presente nei risonatori fisici. In questo caso la frequenza di risonanza è associata al valore minimo dell'ampiezza dell'immittenza. Il diagramma di Nyquist e quelli di BODE illustrano l'ampiezza e la fase di questi bipoli.

**Sez. 21.4 : Partitori dinamici**: Vengono presi in considerazione i partitori dinamici, che sono una generalizzazione di quelli resistivi (vedere Cap. 7). Essi sono costituiti da due bipoli dinamici, di cui almeno uno dinamico, che caratterizzano la funzione di rete del partitore. Qui vengono esaminati i partitori dinamici di tensione contenenti un solo condensatore o induttore ed alcuni tra quelli che ne contengono due.

**Sez. 21.5 : Ponti dinamici**: I doppi bipoli impropri a ponte dinamici sono una generalizzazione dei ponti resistivi incontrati nel Cap. 9. Essi sono molto interessanti per le loro proprietà, che ne fanno tra i componenti composti più usati in diversi campi, per esempio negli apparati di misura per molte grandezze e parametri elettrici.

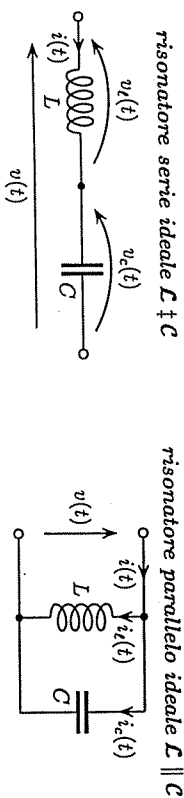
**Sez. 21.6 : Doppi bipoli dinamici composti attivi**: Vengono esaminati alcuni doppi bipoli dinamici, attivi: tra questi un modello dinamico dell'amplificatore operazionale non ideale e due doppi bipoli molto importanti sia nella Teoria dei Sistemi sia nei Controlli Automatici: l'integratore ed il derivatore.

### 23.1 COMPONENTI CONSERVATIVI COMPOSITI

Come già discusso nella Sez. 16.1, esistono molti componenti dinamici di interesse più complessi dei condensatori e induttori. Essi sono modellati dall'aggregazione di condensatori, induttori e/o componenti adinamici. Qui ci limitiamo a considerare i componenti dinamici conservativi di maggior interesse e a esaminarli nel pseudoregime cisoidale e nel regime sinusoidale (funzioni di rete).

#### 23.1.1 Immittenze dei risonatori ideali (conservativi) serie e parallelo

Tra i bipoli dinamici conservativi hanno un ruolo di rilievo i risonatori ideali serie e parallelo: essi sono bipoli composti da un condensatore e un induttore connessi, rispettivamente, in serie ovvero in parallelo. Le loro rappresentazioni, sia nel dominio del tempo sia in quello della pulsazione complessa  $s$ , sono :



Relazione costitutiva nel dominio del tempo

$$v(t) = \underbrace{L \dot{i}(t) - L \dot{i}(t_0)}_{\text{induttore carico}} \delta(t - t_0) + \underbrace{\frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0)}_{\text{condensatore carico}}$$

$$i(t) = \underbrace{C \dot{v}(t) - C v(t_0)}_{\text{condensatore carico}} \delta(t - t_0) + \underbrace{\frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i(t_0)}_{\text{induttore carico}}$$

L'impedenza del risonatore serie è

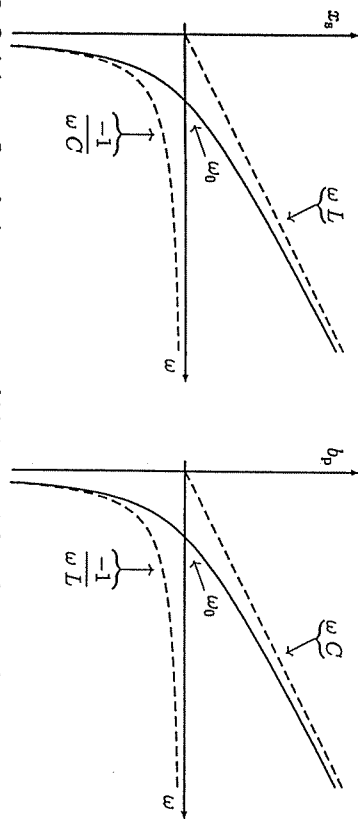
$$z_s(s) = sL + \frac{1}{sC}$$

$$z_s(j\omega) = 0 + j\pi_s(\omega) = j \left[ \omega L - \frac{1}{\omega C} \right] \quad y_p(j\omega) = 0 + j\pi_p(\omega) = j \left[ \omega C - \frac{1}{\omega L} \right]$$

L'ammettenza del risonatore parallelo è

$$y_p(s) = sC + \frac{1}{sL}$$

Siccome sia l'impedenza sia l'ammettenza sono puramente immaginarie lungo l'asse  $j\omega$ , è sufficiente esaminare la reattanza  $\pi_s(\omega)$  e suscettanza  $\pi_p(\omega)$ : entrambe sono monotone crescenti rispetto a  $\omega$ , come illustrato nelle Fig.  $\sphericalangle$   $\sphericalangle$  :



**Definizione:** Introduciamo, per entrambi i risonatori, la *pulsazione di risonanza*  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  ed, analogamente, la *frequenza di risonanza*  $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ .

**Commento:** Per  $\omega = \omega_0$  le reattanze ovvero le suscettanze del condensatore e dell'induttore sono uguali ma di segno opposto.

Come illustrato nelle Fig.  $\searrow$   $\swarrow$  la reattanza del risonatore serie e la suscettanza del risonatore parallelo si comportano come:

$$x_s(\omega) \begin{cases} \approx -\frac{1}{\omega C} & \forall \omega \ll \omega_0 \\ = 0 & \text{per } \omega = \omega_0 \text{ (c.c.)} \\ \approx \omega L & \forall \omega \gg \omega_0 \end{cases} \quad b_p(\omega) \begin{cases} \approx -\frac{1}{\omega L} & \forall \omega \ll \omega_0 \\ = 0 & \text{per } \omega = \omega_0 \text{ (c.a.)} \\ \approx \omega C & \forall \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

### 23.1.2 Il fenomeno della risonanza

Come visto nel paragrafo precedente, quando  $\omega$  coincide con la pulsazione di risonanza  $\omega_0$  il risonatore è equivalente a un c.c. (risonatore serie) ovvero a un c.a. (risonatore parallelo). Approfondiamo da un punto di vista energetico il fenomeno della risonanza:

I risonatori ideali sono conservativi, dal momento che sono costituiti da due bipoli entrambi a loro volta conservativi (vedere Sez. 16.xx).

La tensione ai capi del risonatore serie  $v(t) = v_c(t) + v_l(t)$  è nulla alla risonanza per cui il risonatore non scambia potenza istantanea (cioè  $p(t) = 0$ ) e quindi neppure potenza attiva e reattiva (cioè  $P = 0$  e  $Q = 0$ ) con il resto del circuito.

La tensione ai capi del condensatore  $v_c(t)$  e quella ai capi dell'induttore  $v_l(t)$  coincidono a meno del segno. Esse hanno in genere un andamento sinusoidale del tipo:

$$v_c(t) = -v_l(t) = v_c \cos(\omega_0 t + \phi_u)$$

La corrente fluente nel risonatore parallelo  $i(t) = i_c(t) + i_l(t)$  è nulla alla risonanza per cui il risonatore non scambia potenza istantanea (cioè  $p(t) = 0$ ) e quindi neppure potenza attiva e reattiva (cioè  $P = 0$  e  $Q = 0$ ) con il resto del circuito.

La corrente fluente nell'induttore  $i_l(t)$  e quella fluente nel condensatore  $i_c(t)$  coincidono a meno del segno. Esse hanno in genere un andamento sinusoidale del tipo:

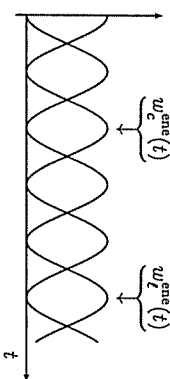
$$i_l(t) = -i_c(t) = i_c \cos(\omega_0 t + \phi_i)$$

Anche la corrente  $i_c(t) = i_c \cos(\omega_0 t + \phi_u + \pi/2)$  è sinusoidale. Anche la tensione  $v_l(t) = v_c \cos(\omega_0 t + \phi_i + \pi/2)$  è sinusoidale.

$$i_c(t) = i_c \cos(\omega_0 t + \phi_u + \pi/2) \quad v_l(t) = v_c \cos(\omega_0 t + \phi_i + \pi/2)$$

La potenza istantanea è nulla perché la somma delle energie immagazzinate nel condensatore e nell'induttore è costante, come può essere verificato facilmente:

$$w_c^{ene}(t) + w_l^{ene}(t) = \cos t \geq 0 \implies \frac{1}{2} C [v_c(t)]^2 + \frac{1}{2} L [i_l(t)]^2 = \cos t \geq 0$$



Lo scambio di energia è limitato all'interno del risonatore, cioè avviene solamente tra l'induttore e il condensatore. Conseguentemente, la potenza reattiva nell'induttore  $Q_l$  e quella nel condensatore  $Q_c$  sono uguali e opposte.

Da un punto di vista fisico, la risonanza ideale significa che l'ammettanza del risonatore serie e l'impedenza del risonatore parallelo hanno una coppia coniugata di poli immaginari puri  $s = \pm j\omega_0$  che corrispondono a una coppia di pulsazioni naturali del circuito, a cui corrisponde una sinusoide pura. Quindi siamo in presenza di un evidente fenomeno semplicemente stabile dal momento che esso può durare all'infinito anche in un circuito privo di sorgenti impulsive.

**Questio:** consideriamo i risonatori ideali, sia serie sia parallelo, e poniamoci la domanda: se conosciamo la  $v(t)$ , ovvero la  $i(t)$ , per  $t \geq t_0$  possiamo determinare la  $i(t)$ , ovvero la  $v(t)$ , nello stesso intervallo?

In altre parole il concetto di candidata di stato, già introdotto per i condensatori e gli induttori (bipoli conservativi del primo ordine) può essere generalizzato ai risonatori ideali (bipoli conservativi del second'ordine) visti come bipoli composti senza conoscere le grandezze elettriche interne?

Ovvero quante candidate di stato debbono essere associate a un risonatore ideale sia serie sia parallelo?

Al lettore la risposta.

### 23.1.3 Bipoli conservativi con risonanze multiple

Bipoli composti (conservativi) costituiti esclusivamente da condensatori e induttori (FARE CENNO alle forme di Foster e Cauer con FIGURA).

### 23.1.4 Doppoli bipoli conservativi: trappole (frequenziali)

I doppi bipoli conservativi sono di estremo interesse: un doppio bipolo conservativo può a certe frequenze diventare zerdirezionale. In questo caso il doppio bipolo agisce da trappola per queste frequenze. La zerdirezionalità viene riconosciuta dal fatto che uno o più elementi della corrispondente matrice di trasmissione  $T$ , come d'altra parte quelli

della matrice  $T''$ , tendono a  $\infty$ . Infatti queste matrici non sono definite per doppi bipoli zerodirezionali. La zerodirezionalità può essere riconosciuta anche dalle quattro matrici cardinali, che in questo caso sono diagonali (vedere Cap. 20).

Tra i doppi bipoli elementari che agiscono da trappola sono di interesse:

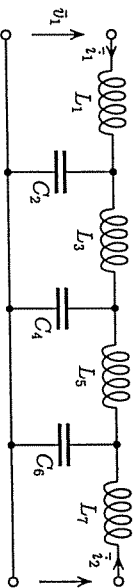
**Quadro delle trappole più semplici**

doppio bipolo	matrice $T'$	doppio bipolo	matrice $T''$
condensatore con quattro terminali	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{bmatrix}$	induttore con quattro terminali	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/(j\omega L) & 1 \end{bmatrix}$
trappola per $\omega \rightarrow \infty$		trappola per $\omega = 0$	
condensatore trasversale con c.c.		induttore trasversale con c.c.	
	$\begin{bmatrix} 1 & 1/(j\omega C) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & j\omega L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
trappola per $\omega = 0$		trappola per $\omega \rightarrow \infty$	
risonatore serie con quattro terminali	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega L + 1/(j\omega C) & 1 \end{bmatrix}$	risonatore parallelo trasversale con c.c.	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j\omega C + 1/(j\omega L) & 1 \end{bmatrix}$
trappola per $\omega = \omega_0$		trappola per $\omega = \omega_0$	

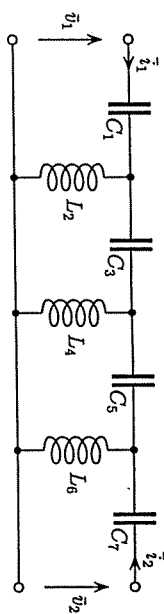
**Doppi bipoli conservativi a scala:** esso è costituito dalla cascata delle trappole discusse qui sopra. Quindi ogni ramo può essere formato da un condensatore o induttore o risonatore serie o risonatore parallelo. Fra essi hanno un ruolo fondamentale i filtri elettrici LC-passivi, che sono costituiti da C e L aggregati in una struttura a scala. Il loro uso è stato fondamentale nello sviluppo delle comunicazioni elettriche.

Alle frequenze a cui uno qualsiasi dei doppi bipoli elementari diventa zerodirezionale, anche il doppio bipolo a scala diventa zerodirezionale (vedere Cap. 13). La matrice di trasmissione  $T'$  del doppio bipolo a scala può essere ottenuta mediante il prodotto di quelle dei doppi bipoli elementari introdotti precedentemente.

La figura 4 riporta, come primo esempio, un doppio bipolo a scala LC di tipo passabasso: infatti ciascuno dei C e ciascuno degli L genera uno zero di trasmissione in  $\omega \rightarrow \infty$ .



La figura 4 riporta, come secondo esempio, un doppio bipolo a scala LC di tipo passabasso: infatti ciascuno dei C e ciascuno degli L realizza uno zero di trasmissione in  $\omega = 0$ .



**23.2 MODELLI QUASI-CONSERVATIVI DEI CONDENSATORI E INDUTTORI FISICI**

In molte situazioni di interesse, un modello dinamico conservativo di un componente fisico dà origine a incompatibilità ovvero indeterminatazza. D'altra parte, molti componenti fisici di largo uso sono conservativi solamente in prima approssimazione, in quanto non sono in grado di restituire tutto il lavoro elettrico assorbito in un dato intervallo di tempo, per la presenza di una limitata dissipazione associata all'immagazzinamento dell'energia. Questa dissipazione (parassita) presente nei componenti fisici di natura elettrica è analoga all'attrito protagonista indesiderato di moltissimi fenomeni meccanici (pensare all'impossibilità del moto perpetuo). Questa sezione esamina i modelli quasi-conservativi dei condensatori e induttori fisici.

**23.2.1 Fattore di qualità**

I condensatori e induttori fisici dissipano energia, seppur in quantità trascurabile. Il modello ideale conservativo non tiene affatto conto di questa dissipazione. Quindi, quando necessario, occorre introdurre i modelli quasi-conservativi, del condensatore e induttore fisico: in genere essi sono costituiti da un condensatore ovvero induttore ideale e da uno o due resistori. Per valutare la qualità dei condensatori e induttori quasi-conservativi è stato introdotto il cosiddetto *fattore di qualità*.

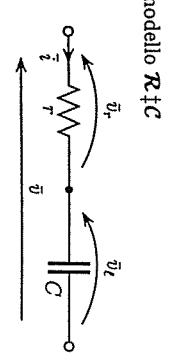
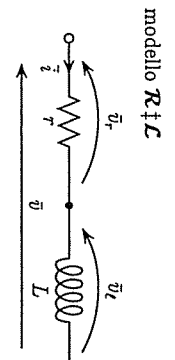
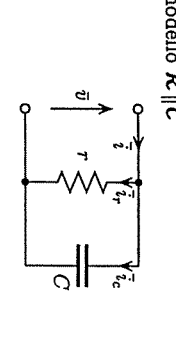
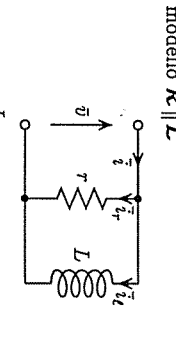
**Definizione:** Il fattore di qualità  $Q(\omega)$  dei condensatori e induttori fisici è definito dal valore assoluto del rapporto "reattanza / resistenza" o equivalentemente da quello del rapporto "susettanza / conduttanza". Esso varia con  $\omega$  con una legge che dipende dal modello.

$$Q(\omega) = \left| \frac{x(\omega)}{r(\omega)} \right| = \left| \frac{b(\omega)}{g(\omega)} \right|$$

**23.2.2 Modelli con un solo resistore**

I modelli quasi-conservativi più semplici, in cui è presente un solo resistore, sono riportati nel seguente quadro:

**Quadro dei modelli quasi-conservativi con un solo resistore**

condensatore quasi-conservativo	induttore quasi-conservativo
<p>modello <math>\mathcal{R} \nmid C</math></p>  <p><math>z_1^e(s) = r + \frac{1}{sC}</math>      <math>Q_1^e(\omega) = \frac{1}{\omega C r}</math></p> <p>andamento di <math>Q_1^e(\omega)</math>: iperbolico decresc.</p>	<p>modello <math>\mathcal{R} \nmid L</math></p>  <p><math>z_1^e(s) = r + sL</math>      <math>Q_1^e(\omega) = \frac{L}{\omega r}</math></p> <p>andamento di <math>Q_1^e(\omega)</math>: lineare crescente</p>
<p>modello <math>\mathcal{R} \parallel C</math></p>  <p><math>z_1^e(s) = \frac{1}{\frac{1}{r} + sC r}</math>      <math>Q_1^e(\omega) = \omega C r</math></p> <p>andamento di <math>Q_1^e(\omega)</math>: lineare crescente</p>	<p>modello <math>\mathcal{R} \parallel L</math></p>  <p><math>z_1^e(s) = \frac{sL r}{r + sL}</math>      <math>Q_1^e(\omega) = \frac{r}{\omega L}</math></p> <p>andamento di <math>Q_1^e(\omega)</math>: iperbolico decresc.</p>

Sia per il condensatore fisico sia per l'induttore fisico esistono due modelli contenenti un solo resistore. L'andamento di  $Q(\omega)$  risulta (linearmente) crescente in un modello e (iperbolicamente) decrescente nell'altro. Quindi essi non sono affatto equivalenti tra loro. Il diagramma polare sia dell'impedenza sia dell'ammettenza dei due modelli consiste in una semiretta ovvero un semicerchio.

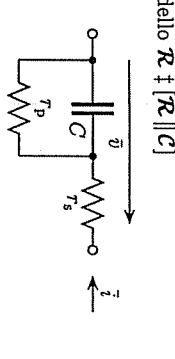
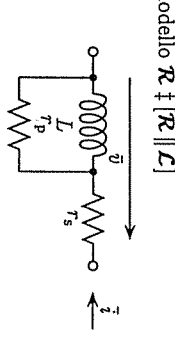
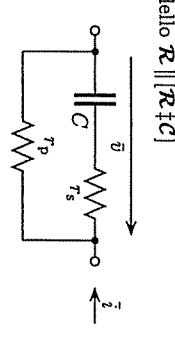
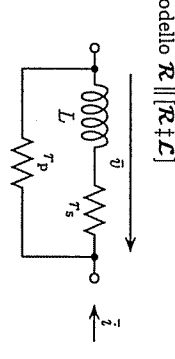
Il resistore presente in questi modelli può essere spiegato da un punto di vista fisico :

1. nel modello  $\mathcal{R} \nmid C$  il resistore tiene conto principalmente della resistenza dei due fili di materiale conduttore (conduttore nonideale) che costituiscono i terminali fisici.
2. nel modello  $\mathcal{R} \nmid L$  il resistore tiene conto principalmente della resistenza del filo di materiale conduttore che costituisce l'avvolgimento.
3. nel modello  $\mathcal{R} \parallel C$  il resistore tiene conto principalmente della resistenza del materiale dielettrico (isolante nonideale) che separa le due armature.
4. nel modello  $\mathcal{R} \parallel L$  il resistore tiene conto principalmente della dissipazione interna al materiale ferromagnetico che costituisce il nucleo dell'induttore fisico.

**23.2.3 Modelli con due resistori**

I fenomeni dissipativi interni ai condensatori e induttori fisici possono essere presenti contemporaneamente senza che alcuno di essi possa essere considerato dominante rispetto all'altro. Questo ci suggerisce di introdurre modelli più accurati in cui sono presenti due resistori :

**Quadro dei modelli quasi-conservativi con due resistori**

condensatore quasi-conservativo	induttore quasi-conservativo
<p>modello <math>\mathcal{R} \nmid [\mathcal{R} \parallel C]</math></p>  <p><math>z_1^{sp}(s) = \frac{r_s + r_p + s C r_s r_p}{1 + s C r_p}</math></p> <p><math>Q_1^{sp}(\omega) = \frac{\omega C (r_p)^2}{r_s + r_p + (\omega C r_p)^2 r_s}</math></p> <p>con andamento a campana, dove :</p> <p><math>\omega_{max} = \frac{\sqrt{r_s + r_p}}{C r_p \sqrt{r_s}}</math>      <math>Q_{max} = \frac{r_p/2}{\sqrt{r_s (r_s + r_p)}}</math></p>	<p>modello <math>\mathcal{R} \nmid [\mathcal{R} \parallel L]</math></p>  <p><math>z_1^{sp}(s) = \frac{r_s r_p + s L (r_s + r_p)}{r_p + s L}</math></p> <p><math>Q_1^{sp}(\omega) = \frac{\omega L (r_p)^2}{r_s (r_p)^2 + (\omega L)^2 (r_s + r_p)}</math></p> <p>con andamento a campana, dove :</p> <p><math>\omega_{max} = \frac{\sqrt{r_s r_p}}{L \sqrt{r_s + r_p}}</math>      <math>Q_{max} = \frac{r_p/2}{\sqrt{r_s (r_s + r_p)}}</math></p>
<p>modello <math>\mathcal{R} \parallel [\mathcal{R} \nmid C]</math></p>  <p><math>z_1^{ps}(s) = \frac{r_s (1 + s C r_p)}{1 + s C (r_s + r_p)}</math></p> <p><math>Q_1^{ps}(\omega) = \frac{\omega C r_s}{1 + (\omega C)^2 (r_s + r_p) r_p}</math></p> <p>con andamento a campana, dove :</p> <p><math>\omega_{max} = \frac{1}{C \sqrt{r_p (r_s + r_p)}}</math>      <math>Q_{max} = \frac{r_s/2}{\sqrt{r_p (r_s + r_p)}}</math></p>	<p>modello <math>\mathcal{R} \parallel [\mathcal{R} \nmid L]</math></p>  <p><math>z_1^{ps}(s) = \frac{r_s (r_p + s L)}{r_s + r_p + s L}</math></p> <p><math>Q_1^{ps}(\omega) = \frac{\omega L r_s}{r_p (r_s + r_p) + (\omega L)^2}</math></p> <p>con andamento a campana, dove :</p> <p><math>\omega_{max} = \frac{\sqrt{r_p (r_s + r_p)}}{L}</math>      <math>Q_{max} = \frac{r_s/2}{\sqrt{r_p (r_s + r_p)}}</math></p>

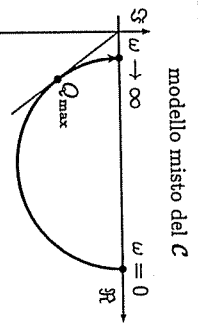
Dal confronto dei diversi modelli quasi-conservativi dei condensatori e induttori fisici, sia con un resistore, sia con due resistori, si può concludere che :

- I modelli quasi-conservativi dei condensatori e induttori fisici, sia con un resistore, sia con due resistori, non sono in genere equivalenti dal momento che le impedenze dei diversi modelli sono funzioni razionali diverse. Solamente i due modelli con

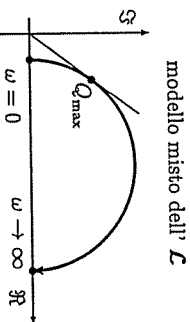


due resistori possono essere tra loro equivalenti. Per esercizio si può tracciare i diagrammi polari delle impedenze ovvero ammettere, che risultano semirette ovvero semicirconferenze. Una equivalenza approssimata tra i modelli non equivalenti può essere stabilita all'interno di un intervallo limitato di  $\omega$ .

- Le curve a campana del fattore  $Q$  di entrambi i modelli con due resistori degli induttori fisici sono giustificate dal fatto che per valori bassi di  $\omega$  prevale il resistore in serie (curva  $Q(\omega)$  ascendente) mentre per valori elevati di  $\omega$  prevale il resistore in parallelo (curva  $Q(\omega)$  discendente). L'andamento a campana del  $Q$  e i valore dell'ascissa  $\omega_{max}$  e ordinata  $Q_{max}$  del massimo possono essere interpretati tracciando la tangente al diagramma polare dell'impedenza passante per l'origine, come mostrato nelle figure  $\checkmark$  e  $\surd$ . Una interpretazione analoga può essere fatta per i modelli misti dei condensatori.



modello misto del  $C$



modello misto dell'  $L$

- I modelli serie/parallelo e parallelo/serie sono equivalenti per opportuni valori delle resistenze e della capacità (induttanza). Comunque, i valori della capacità (induttanza) sono diversi nei due modelli per avere l'equivalenza degli stessi. Il lettore volenteroso può trovare le relazioni tra i parametri dei due modelli per cui si ha l'equivalenza, uguagliando i coefficienti del numeratore e del denominatore delle impedenze ovvero ammettendo dei due modelli.

### 23.2.4 Fattore $Q$ dei condensatori e induttori fisici

Le seguenti considerazioni di tipo fisico devono essere fatte :

- nella realtà la curva  $Q(\omega)$  di un condensatore o induttore fisico, misurata con appositi strumenti, si discosta da quelle previste dai suddetti modelli.
- si può tenere conto di questo fatto assumendo che i valori delle resistenze interne al modello non siano costanti ma dipendano da  $\omega$ .

**Commento :** Per risolvere il suddetto problema in modo più accurato conviene, una volta misurata la curva fattore  $Q$  in dipendenza di  $\omega$ , per ogni tipo di modello calcolare i valori delle resistenze parassite in modo tale che il fattore di qualità del modello approssimi nel modo migliore le misure sperimentali.

**Commenti :** I condensatori e induttori fisici di più larga diffusione approssimano con differenti livelli di accuratezza i modelli ideali (conservativi). In genere il fattore di qualità dei condensatori quasi-conservativi supera di molto quello degli induttori quasi-conservativi. In altra parole, i condensatori fisici sono in genere di buona qualità mentre gli induttori fisici sono raramente di qualità altrettanto buona.

Infatti, sia un condensatore fisico connesso ad un alimentatore (sorgente di tensione) e poi

scnesso (lasciato a vuoto) : esso conserva la carica (tensione) per un certo intervallo di tempo non trascurabile, e l'incanto che ne toccasse i morsetti con due dita di una mano se ne accorgerebbe. Al contrario, sia un induttore fisico alimentato e successivamente chiuso su un corto circuito : la sua corrente iniziale si esaurisce in un tempo brevissimo.

In ultima analisi, il motivo di questo diverso comportamento è dovuto al fatto che esistono materiali isolanti molto buoni (con resistività molto elevata) per separare la armature di un condensatore fisico, mentre non esistono materiali conduttori altrettanto buoni che consentano di realizzare avvolgimenti con resistenza sufficientemente bassa. Solamente i superconduttori, che necessitano comunque di temperature molto basse, sono dei conduttori molto buoni, anzi praticamente perfetti ma molto costosi e di difficile uso nelle usuali tecnologie industriali.

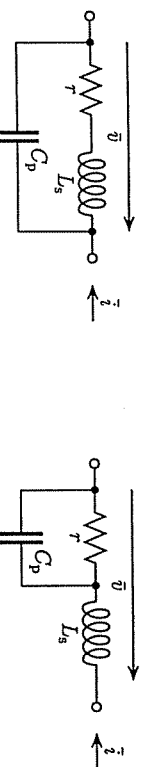
### 23.2.5 Modelli quasi-conservativi degli induttori accoppiati

Anche modelli quasi-conservativi degli induttori accoppiati sono di largo uso. Essi sono essenziali per costruire un circuito equivalente dei trasformatori nonideali. Essi saranno affrontati alla fine del presente corso nell'ambito dello studio della generazione, trasmissione e utilizzazione dell'energia elettrica.

### 23.2.6 Modelli composti dei resistori fisici

In genere il modello dei resistori fisici consiste in un resistore. In realtà, siccome un resistore è percorso da una certa corrente elettrica e tra i suoi terminali vi è una tensione elettrica, la Fisica II ci dice che nello spazio che circonda un resistore fisico è presente sia un campo elettrico sia un campo magnetico. Se la corrente ovvero la tensione sono tempo-varianti, anche l'energia elettrica e quella magnetica associate ai due campi variano col tempo. Queste variazioni implicano che la potenza elettrica assorbita dal resistore fisico sarà uguale alla potenza dissipata dal resistore più la potenza dovuta alle variazioni di queste due energie. Questa potenza è tanto più elevata tanto più rapide sono le variazioni delle due energie.

Queste potenze possono essere tenute in considerazione con una buona approssimazione introducendo un modello composto costituito da un resistore con in parallelo un condensatore (che tiene conto dell'energia del campo elettrico associato alla tensione) e in serie un induttore (che tiene conto dell'energia del campo magnetico associato alla corrente).



MODELLI DINAMICI DI UN RESISTORE FISICO PER FREQUENZE ELEVATE

I valori della capacità (parassita) e dell'induttanza (parassita) dipendono dalla dimensioni geometriche e dalle caratteristiche elettriche e magnetiche dei materiali che costituiscono i resistori fisici. Come regola generale, più piccole sono le dimensioni geometriche del resistore fisico, più piccole sono l'induttanza e la capacità associate a un resistore fisico.

### 23.2.7 WWWWWW Modelli dinamici degli interruptori fisici

### 23.3 MODELLI QUASI-CONSERVATIVI DEI RISONATORI FISICI

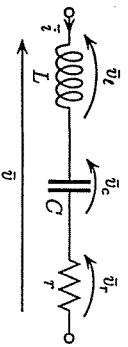
I risonatori quasi-conservativi occupano un posto di rilievo tra i componenti dinamici quasi-conservativi. Siccome alla risonanza il modello del risonatore conservativo è equivalente ad un corto circuito (risonatore serie) o a un circuito aperto (risonatore parallelo), possono insorgere situazioni di incompatibilità che, per essere superate, richiedono un modello più realistico.

Per esempio, se una  $\mathcal{V}$  sinusoidale di pulsazione  $\omega_0$  è chiusa su un risonatore ideale serie con risonanza in  $\omega_0$ , ci troviamo davanti ad un circuito che risulterebbe patologico in regime sinusoidale. La patologia viene facilmente spiegata dal fatto che un circuito di questo tipo non può sopportare un regime sinusoidale: infatti la pulsazione  $\pm j\omega$  delle sorgenti impulsive sinusoidali coincide con una coppia di pulsazioni naturali del circuito. Il regime sinusoidale può essere sopportato dal circuito, se assumiamo che il risonatore non sia ideale, cioè che la sua impedenza sia piccola ma non nulla alla risonanza.

#### 23.3.1 Risonatori quasi-conservativi serie e parallelo

Il modello di un risonatore quasi-conservativo (cioè con perdite) sia serie sia parallelo è caratterizzato dall'aggiunta di un resistore al modello conservativo: il resistore è connesso in serie nel risonatore serie e in parallelo nel risonatore parallelo. Nel primo caso la sua resistenza è piccola mentre nel secondo caso è elevata. In questo modo, per qualsiasi  $\omega$ , il modello quasi-conservativo non può essere equivalente ad un c.c. (modello serie) o ad un c.a. (modello parallelo).

risonatore serie



Ammettenza

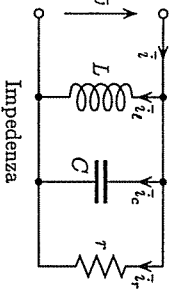
$$y_s(s) = \frac{1}{r + sL + 1/(sC)}$$

$$y_s(j\omega_0) = \frac{1}{r} \quad \text{dove } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$y_s(j\omega) \approx j\omega C \quad \text{per } \omega \ll \omega_0$$

$$y_s(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega L} \quad \text{per } \omega \gg \omega_0$$

risonatore parallelo



Impedenza

$$z_p(s) = \frac{1}{1/r + sC + 1/(sL)}$$

$$z_p(j\omega_0) = r \quad \text{dove } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$z_p(j\omega) \approx j\omega L \quad \text{per } \omega \ll \omega_0$$

$$z_p(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega C} \quad \text{per } \omega \gg \omega_0$$

Queste formule ci dicono che l'effetto della resistenza del modello quasi-conservativo svanisce per valori di  $\omega$  lontani dalla pulsazione di risonanza  $\omega_0$ .

**Risonanza ideale e risonanza nonideale**: La pulsazione di risonanza ha la stessa espressione che nel caso ideale:  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Infatti, come nel modello conservativo essa è la pulsazione che annulla la parte immaginaria dell'impedenza. Comunque il significato fisico è diverso, perché nei modelli quasi-conservativi la parte reale dell'impedenza stessa

non è nulla: il modulo delle impedenze non è più illimitato superiormente ma è limitato da un massimo. In questo senso è meglio parlare di *risonanza nonideale*. Con riferimento alle Fig. 23.1, i due risonatori possono essere visti come partitori:

**Risonatore serie**: Per  $\omega = \omega_0$  le tensioni  $\bar{v}_L$  e  $\bar{v}_C$  sono uguali e opposte:  $\bar{v}_L = -\bar{v}_C$  e conseguentemente la tensione  $\bar{v}_r$  coincide con quella ai capi del risonatore  $\bar{v}$ :  $\bar{v} = \bar{v}_r$ . Mediante la regola del partitore, il rapporto  $\bar{v}_L/\bar{v}$  risulta:

$$\frac{\bar{v}_L}{\bar{v}} = \frac{j\omega_0 L}{r} = j \frac{\sqrt{L/C}}{r} = j \frac{r_0}{r} = j Q^s$$

La resistenza  $r_0 = \sqrt{L/C} = \sqrt{(sL)/(sC)}$  introdotta nelle suddette formule coincide con la radice quadrata del prodotto delle impedenze del condensatore e dell'induttore.

Il parametro  $Q^s$  denota l'amplificazione della tensione  $\bar{v}_L$  rispetto alla tensione  $\bar{v}$  alla risonanza.

**Commento**: Più elevati sono i fattori  $Q^s$  e  $Q^p$ , più il modello quasi-conservativo si avvicina al modello conservativo:

$$Q^s = r_0/r \rightarrow \infty \text{ per } r \rightarrow 0$$

$$Q^p = r/r_0 \rightarrow \infty \text{ per } r \rightarrow \infty$$

Essi, chiamati *fattori di qualità*, denotano la distanza tra il modello quasi-conservativo del risonatore e il modello conservativo.

**Avvertenza**: Non fare confusione tra i fattori di qualità dei condensatori e induttori quasi-conservativi, introdotti nella Sez. 23.1 e indicati col simbolo  $Q$ , e quelli dei risonatori quasi-conservativi. I primi sono delle funzioni di  $\omega$ , mentre i fattori  $Q$  dei risonatori quasi-conservativi, indicati pure col simbolo  $Q$ , sono dei parametri fissi.

La risonanza nonideale corrisponde ad una coppia complessa di pulsazioni naturali stabili  $-\sigma_1 \pm j\omega_1$  in prossimità dell'asse  $j\omega$  cioè con  $\sigma_1 \ll \omega_1$ . La cisoide associata converge  $\rightarrow 0$  dopo molte oscillazioni di ampiezza lentamente decrescente. In condizioni di risonanza nonideale non si ha più un isolamento energetico del risonatore. Comunque se il fattore  $Q$  è elevato lo scambio energetico col resto del circuito avviene lentamente: cioè la potenza istantanea scambiata con l'esterno è di un ordine di grandezza inferiore a quello della potenza istantanea scambiata tra induttore e condensatore.

**Commento**: Ogni risonatore fisico è in genere costituito dalla connessione serie o parallelo di un condensatore fisico e un induttore fisico. Tuttavia, esistono singoli componenti fisici (quarzi) che si comportano come risonatori quasi-conservativi, senza che essi siano fisicamente scomponibili in un condensatore fisico e un induttore fisico. La stabilità della frequenza di risonanza e l'eventissimo valore del fattore  $Q$  li rende adatti a costruire oscillatori di qualità, molto più elevata di quella ottenuta connettendo un condensatore e un induttore fisici convenzionali.

**Divagazione**: Ricordiamo un fenomeno fisico, osservato da numerosissimi studenti universitari, ma negato da tutti i rispettivi professori: il rallentamento della velocità di rotazione delle lancette del loro orologio al quarzo negli ultimi minuti di una lezione uni-

veritaria. I professori negano l'esistenza di questo fenomeno, perché non è stato mai riprodotto e misurato in laboratorio. ■

**23.3.2 Diagramma polare dell'immittenza normalizzata**

Le immittenze dei risonatori quasi-conservativi sono normalizzate rispetto alla resistenza  $r$  del risonatore presente nel risonatore e rispetto alla pulsazione di risonanza  $\omega_0$  :  $\Omega = \omega/\omega_0$ . Introducendo i fattori  $Q^s$  e  $Q^p$  incontrati nel precedente paragrafo, si ha:

$$\begin{aligned} \text{ammittenza normalizzata} & & \text{impedenza normalizzata} \\ j_{\text{or}}^{\text{nor}}(j\Omega) &= \frac{1}{1 + jQ^s(\Omega - 1/\Omega)} & z_{\text{p}}^{\text{nor}}(j\Omega) &= \frac{1}{1 + jQ^p(\Omega - 1/\Omega)} \end{aligned}$$

Dal momento che l'espressione matematica dell'ammittenza normalizzata  $j_{\text{or}}^{\text{nor}}(j\Omega)$  del risonatore serie quasi-conservativo coincide con quella dell'impedenza normalizzata  $z_{\text{p}}^{\text{nor}}(j\Omega)$  del risonatore parallelo quasi-conservativo, possiamo limitarci a studiare l'immittenza normalizzata  $F(j\Omega)$  che risulta comune a entrambi i risonatori quasi-conservativi :

$$F(j\Omega) = j_{\text{or}}^{\text{nor}}(j\Omega) = z_{\text{p}}^{\text{nor}}(j\Omega) = \frac{1}{1 + jQ(\Omega - 1/\Omega)}$$

**Simmetria geometrica** : Consideriamo una coppia qualsiasi di pulsazioni normalizzate  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$  tali che  $\Omega_a \Omega_b = 1$ . I corrispondenti valori di  $F(j\Omega_a)$  e  $F(j\Omega_b)$  sono complessi coniugati :

$$F(j\Omega_a) = F(-j\Omega_b) = [F(j\Omega_b)]^*$$

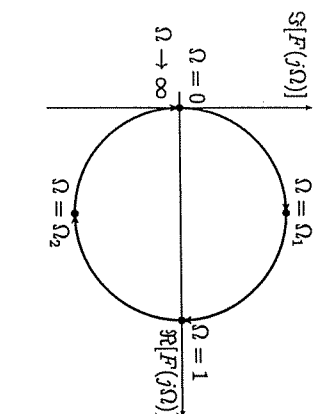
Calcoliamo i valori della funzione  $F(j\Omega_a)$  e  $F(j\Omega_b)$  :

$$F(j\Omega_b) = \frac{1}{1 + jQ(\Omega_b - 1/\Omega_b)} = F(j/\Omega_a) = \frac{1}{1 - jQ(\Omega_a - 1/\Omega_a)} = F(-j\Omega_a)$$

**Commento** : La precedente proprietà implica che l'ampiezza  $|F(j\Omega)|$  è geometricamente simmetrica e che la fase  $\angle F(j\Omega)$  è geometricamente antisimmetrica rispetto al punto  $\Omega = 1$  (risonanza).

**Diagramma polare (Nyquist)** : Per  $\Omega$  crescente da  $0 \rightarrow +\infty$ ,  $F(j\Omega)$  descrive, partendo e terminando nell'origine, una circonferenza completa con diametro unitario e percorsa in verso orario.

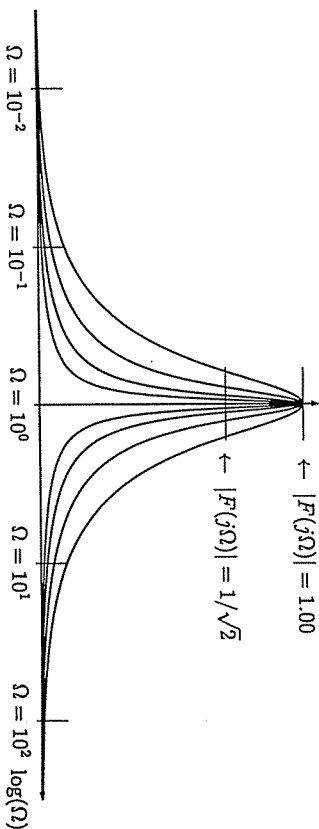
La simmetria geometrica di  $F(j\Omega)$  fa sì che ciascuna coppia di punti  $F(j\Omega_a)$  e  $F(j\Omega_b)$  con  $\Omega_a \Omega_b = 1$  siano disposti simmetricamente rispetto all'asse reale.



**Commento** : Il significato fisico di  $\Omega_1$  ed  $\Omega_2$  sarà ripreso e approfondito nel paragrafo seguente. ■

**23.3.3 Diagrammi di Bode**

**Diagramma di Bode dell'ampiezza** : Con riferimento al diagramma polare in Fig. 23.3.2, l'ampiezza  $|F(j\Omega)|$  è nulla in  $\Omega = 0$ , cresce al crescere di  $\Omega$ , e raggiunge il valore  $1/\sqrt{2}$  per  $\Omega = \Omega_1$  (semicirconferenza superiore) e il valore massimo 1 per  $\Omega = 1$ . Per  $\Omega > 1$  (semicirconferenza inferiore) l'ampiezza decresce fino a raggiungere il valore  $1/\sqrt{2}$  per  $\Omega = \Omega_2$  e ad annullarsi per  $\Omega \rightarrow \infty$ .



Se il diagramma di Bode dell'ampiezza è tracciato con la scala logaritmica sull'asse delle ascisse (vedere Cap. 21), il diagramma risulta rigorosamente simmetrico rispetto all'asse verticale passante per  $\log(\Omega) = 0$  ( $\Omega = 1$ ) a causa della scala logaritmica usata sull'asse delle ascisse. Per valori crescenti del fattore  $Q$  il picco diventa sempre più affilato. Le quattro curve riportate nella figura corrispondono ai valori  $Q = 1, 2, 4, 16$ . La simmetria geometrica (con scala lineare in  $\Omega$ ) tende ad una simmetria aritmetica per i valori di  $\Omega$  vicini a 1.

**Diagramma di Bode della fase** : Con riferimento al diagramma polare, la fase  $\angle F(j\Omega) \rightarrow +\pi/2$  per  $\Omega \rightarrow 0$ . Siccome l'ampiezza è nulla in  $\Omega = 0$ , la fase deve essere valutata mediante un'operazione di limite : il vettore  $F(j\Omega)$  è verticale (tangente alla circonferenza per  $\Omega \rightarrow 0$ ), dal momento che la fase di un numero complesso con modulo nullo è indeterminata. Quindi la fase decresce al crescere di  $\Omega$  fino a raggiungere il valore  $\pi/4$  per  $\Omega = \Omega_1$  (semicirconferenza superiore) e ad annullarsi in  $\Omega = 1$ . Per valori di  $\Omega > 1$  (semicirconferenza inferiore) la fase continua a decrescere fino a raggiungere il valore  $-\pi/4$  per  $\Omega = \Omega_2$  e ad adattarsi sull'asintoto orizzontale  $-\pi/2$  per  $\Omega \rightarrow \infty$ .

Se il diagramma di Bode della fase è tracciato con la scala logaritmica sull'asse delle ascisse (vedere Cap. 21), il diagramma risulta rigorosamente antisimmetrico rispetto all'asse verticale passante per  $\log(\Omega) = 0$  ( $\Omega = 1$ ).

**Definizione** : Una funzione di rete caratterizzata da un'ampiezza a campana è chiamata *passbanda*.

**Pulsazioni di taglio** : Le pulsazioni  $\Omega_1$  ed  $\Omega_2$  introdotte nel diagramma polare sono, per definizione, le uniche pulsazioni per cui si ha  $|F(j\Omega)| = 1/\sqrt{2}$  e  $\angle F(j\Omega) = \pm\pi/4$ . Queste relazioni si verificano quando la parte immaginaria del denominatore di  $F(j\Omega)$  è uguale a

-1 per  $\Omega = \Omega_1$  e a 1 per  $\Omega = \Omega_2$  : possiamo scrivere la prima coppia di equazioni :

$$\begin{cases} \Omega_1 - 1/\Omega_1 = -1/Q & \text{prima coppia} \\ \Omega_2 - 1/\Omega_2 = 1/Q & \text{seconda coppia} \end{cases} \implies \begin{cases} \Omega_2 - 1/\Omega_2 = 1/\Omega_1 - \Omega_1 & \text{terza coppia} \\ \Omega_2 + 1/\Omega_1 - 1/\Omega_2 - \Omega_1 = 2/Q & \text{quarta coppia} \end{cases}$$

dove la seconda coppia di equazioni è ottenuta, sommando e sottraendo i membri delle equazioni della prima coppia, mentre la terza coppia di equazioni è ottenuta dalle rispettive equazioni della seconda coppia.

**Commenti** : il fattore  $Q$  è una misura della selettività dell'ampiezza dell'immittenza dei risonatori quasi-conservativi. Più alto è il fattore  $Q$  più è stretta la banda relativa  $\Omega_2 - \Omega_1$  e più il risonatore si avvicina a quello ideale.

L'ampiezza della funzione di rete ha un andamento a campana.

**Proprietà** : La derivata della fase (pendenza del diagramma della fase) in  $\Omega = 1$  cresce, in valore assoluto, col valore di  $Q$  e  $\rightarrow \infty$  per  $Q \rightarrow \infty$ , come risulta dalla seguente formula :

$$Q = -\frac{1}{2} \left[ \frac{dL F(j\Omega)}{d\Omega} \right]_{\Omega=1}$$

**Prova** : Deriviamo la fase  $L F(j\Omega)$  :

$$\left. \frac{dL F(j\Omega)}{d\Omega} \right|_{\Omega=1} = -\left. \frac{d[\arctg\{Q(\Omega - 1/\Omega)\}]}{d\Omega} \right|_{\Omega=1} = \frac{-2Q}{1 + [Q(\Omega - 1/\Omega)]^2} \Big|_{\Omega=1} = -2Q$$

WWWWWW??? SCRIVERE interpretazione energetica del fattore  $Q$  (Testo CDK).

**Gara di durata di danza** : Questa volta viene organizzata in discoteca una festa per i bipoli, con l'esclusione tassativa dei doppi bipoli. Nel mentre della festa viene indetta una gara di ballo di durata. Alla gara si presentano due coppie formate da un condensatore quasi-conservativo e un induttore conservativo, una coppia formata da un condensatore conservativo e un induttore quasi-conservativo, due coppie formate da un condensatore quasi-conservativo e un induttore quasi-conservativo, tre coppie formate da un condensatore conservativo e un resistore, e infine una coppia formata da un condensatore conservativo e un induttore conservativo. Quale coppia ha vinto la gara ?

**23.4 PARTITORI DINAMICI**

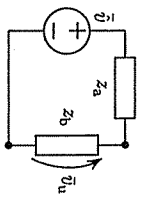
I partitori dinamici sono una naturale generalizzazione dei partitori resistivi, qualora uno o più dei due bipoli sia dinamico (vedere Cap. 7). Essi svolgono un ruolo importante all'interno di molti circuiti di interesse. Qui ci limitiamo ai partitori dinamici di tensione con un solo bipolo conservativo e ad alcuni di quelli con due bipoli conservativi. L'estensione ai partitori di corrente, meno diffusi nella pratica, è lasciata al lettore.

**23.4.1 Partitori dinamici di tensione**

I partitori dinamici di tensione sono costituiti da due bipoli omogenei d'impedenza  $z_a(s) = 1/y_a(s)$  e  $z_b(s) = 1/y_b(s)$  con struttura a "T": il primo è in serie alla porta d'ingresso e il secondo è in parallelo alla porta d'uscita.

Il rapporto delle tensioni  $F(s)$  viene calcolato con una delle formule (equivalenti) della regola del partitore di tensione già introdotte per i partitori resistivi nel Cap. 7 :

$$F(s) = \frac{\bar{v}_u}{\bar{v}_i} = \frac{z_b(s)}{z_a(s) + z_b(s)} = \frac{y_a(s)}{y_a(s) + y_b(s)}$$



La prima espressione contiene le impedenze dei due bipoli ed è più adatta nei casi in cui questi bipoli siano costituiti dalla serie di bipoli elementari, mentre la seconda, che contiene le ammettenze, è più conveniente nei casi in cui essi siano costituiti dal parallelo di bipoli elementari.

**23.4.2 Partitori di primo grado con un resistore**

Vengono esaminati i partitori (di tensione) contenenti un solo condensatore ovvero un solo induttore (percio di primo grado) ed un solo resistore. Le loro funzioni di rete sono state calcolate mediante l'uso di una delle due formule presentate nel paragrafo precedente.

**Partitori di tensione dinamici con un C o L e un R**

$R/C$	$C/R$	$C/R$	$R/L$
$F(s) = \frac{1}{1 + s/\sigma_0}$		$F(s) = \frac{1}{1 + \sigma_0/s}$	
partitore tipo passabasso		partitore tipo passalto	
$\sigma_0 = \frac{1}{r_a C_b}$	$\sigma_0 = \frac{T_b}{L_a}$	$\sigma_0 = \frac{1}{r_b C_a}$	$\sigma_0 = \frac{r_a}{L_b}$
zero : $s = \infty$	pofo : $s = -\sigma_0$	zero : $s = 0$	pofo : $s = -\sigma_0$

**Commento** : In ciascun partitore, il denominatore della funzione di rete è un polinomio

di primo grado in  $s$  (polo reale negativo). Nei partitori passabasso il numeratore è una costante (zero in  $s \rightarrow \infty$ ), mentre nei partitori passalto esso è costituito da un singolo termine di primo grado (zero nell'origine).

**Commento:** Il diagramma polare dei partitori suddetti consiste nella semicirconferenza, di diametro unitario, inferiore (per il tipo passabasso) o superiore (per quello di tipo passalto). Entrambe le semicirconferenze sono percorse in verso orario per  $\omega$  crescente.

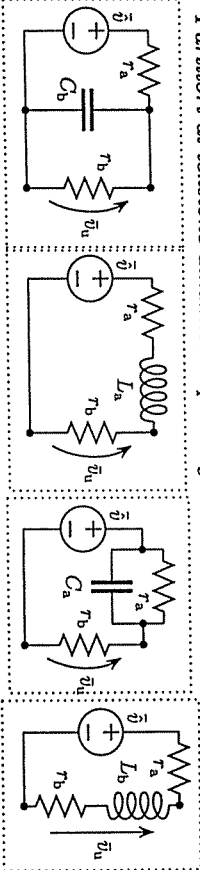
WWWWWW?? Fig. DIAGRAMMI DI BODE D'AMPIEZZA E FASE

**Avvertenza:** La pulsazione  $\omega_1$  per cui l'ampiezza vale  $1/\sqrt{2}$  e la fase  $\pm\pi/4$  coincide, solamente in valore assoluto, con la pulsazione naturale reale  $-\sigma_0$  del circuito. Notare che  $\omega_1$  è la parte immaginaria di una pulsazione complessa sull'asse immaginario, mentre  $-\sigma_0$  è sul semiasse reale negativo.

### 23.4.3 Partitori di primo grado con due resistori

Le seguenti figure e il quadro introducono i più significativi tra i partitori (di tensione) costituiti da un solo  $C$  ovvero  $L$  oltre a due  $R$ . Le loro funzioni di rete sono state calcolate mediante l'uso di una delle due espressioni discusse nel paragrafo precedente:

#### Partitori di tensione dinamici di primo grado con due resistori



partitore	$\mathcal{R}/\ \mathcal{R} \parallel C\ $	$\ L \pm \mathcal{R}\ /\mathcal{R}$	$\ \mathcal{R} \parallel C\ /\mathcal{R}$	$\mathcal{R}/\ \mathcal{R} \pm L\ $
$z_a$	$r_a$	$r_a + sL_a$	$\frac{1}{g_a + sC_a}$	$r_a$
$z_b$	$\frac{1}{g_b + sC_b}$	$r_b$	$r_b$	$r_b + sL_b$
$F(s)$	$\frac{\alpha}{1 + s/\sigma_0}$		$\frac{\alpha + s/\sigma_0}{1 + s/\sigma_0}$	
tipo	passabasso		quasi-passalto (1)	
$\alpha$	$\frac{r_b}{r_a + r_b}$	$\frac{r_b}{r_a + r_b}$	$\frac{r_b}{r_a + r_b}$	$\frac{r_b}{r_a + r_b}$
$\sigma_0$	$\frac{g_a + g_b}{C_b}$	$\frac{r_a + r_b}{L_a}$	$\frac{g_a + g_b}{C_a}$	$\frac{r_a + r_b}{L_b}$
zero	$s = -\sigma_0$		$s = -\alpha\sigma_0$	
polo	$s = -\sigma_0$		$s = -\sigma_0$	

(1) Col termine "quasi-passalto" si intende che per  $s = 0$  la funzione di rete del partitore è piuttosto ridotta ma non nulla:  $F(0) = \alpha < 1$ .

**Commento:** In ciascuno dei suddetti partitori, il denominatore della funzione di rete è sempre un polinomio di primo grado in  $s$  (polo reale negativo). Nei partitori passabasso il numeratore è una costante (zero reale in  $s \rightarrow \infty$ ), mentre nei partitori quasi-passalto il numeratore è costituito da un polinomio di primo grado (zero reale in  $-\alpha\sigma_0$ ).

**Commento:** I diagrammi polari di questi partitori di primo grado con due resistori consistono in semicirconferenze di raggio e/o centro diversi, dal momento che  $F(s)$  è di primo grado (vedere Cap. 21).

### 23.4.4 Partitori di secondo grado conservativi

Come partitori (di tensione) di secondo grado si intendono quelli in cui sono definite due candidate di stato tra loro indipendenti. Il rapporto di tensioni sarà una funzione di rete di secondo grado se non sono presenti modi noncontrollabili e nonosservabili. In questo caso nel partitore saranno presenti solo due componenti dinamici elementari (condensatore o induttori). Se non sono presenti componenti dinamici dissipativi i partitori sono necessariamente conservativi e sono riportati nel sottostante quadro. Notare che questi partitori possono essere visti come la cascata di due trapole:

#### Partitori di secondo grado conservativi

tipo	$z_a$	$z_b$	$F(s)$	$\omega_0$	zeri	poli	comportamento spettrale
$L/C$	$sL$	$\frac{1}{sC}$	$\frac{1}{1 + (s/\omega_0)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	doppio in $s = \infty$	in $s = \pm j\omega_0$	passabasso
$C/L$	$\frac{1}{sC}$	$sL$	$\frac{1}{1 + (s/\omega_0)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	doppio in $s = 0$	in $s = \pm j\omega_0$	passalto

il denominatore della funzione di rete è sempre un polinomio di secondo grado in  $s$  (coppia poli complessi immaginari). Nel partitore passabasso il numeratore è una costante (coppia di zeri per  $s \rightarrow \infty$ ), mentre nei partitori passalto esso è costituito da un singolo termine di secondo grado (coppia di zeri nell'origine).

**23.4.5 Esempi di partitori con due bipoli conservativi e due resistori**

Consideriamo partitori costituiti da due bipoli conservativi elementari e resistori. Ne possono essere definiti un numero elevato: nel seguente quadro ci limitiamo ai partitori in cui siano presenti due bipoli conservativi (condensatori e/o induttori) e due resistori:

*Quadro dei partitori con due condensatori/induttori e due resistori*

partitore	$z_a$	$z_b$	$F(s)$
$\mathcal{R} \uparrow \mathcal{C} / \mathcal{R} \parallel \mathcal{C}$	$\tau_a + s L_a$	$\frac{\tau_b}{1 + s C_b \tau_b}$	$\frac{1}{1 + \tau_a/\tau_b + s(C_b \tau_a + L_a/\tau_b) + s^2 L_a C_b}$
$\mathcal{R} \parallel \mathcal{C} / \mathcal{R} \uparrow \mathcal{L}$	$\frac{\tau_a}{1 + s C_a \tau_a}$	$\tau_b + s L_b$	$\frac{(\tau_b + s L_b)(1/\tau_a + s C_a)}{1 + \tau_b/\tau_a + s(C_a \tau_b + L_b/\tau_a) + s^2 L_b C_a}$
$\mathcal{R} \parallel \mathcal{C} / \mathcal{R} \parallel \mathcal{C}$	$\frac{\tau_a}{1 + s C_a \tau_a}$	$\frac{\tau_b}{1 + s C_b \tau_b}$	$\frac{1/\tau_a + s C_a}{1/\tau_a + 1/\tau_b + s(C_a + C_b)}$
$\mathcal{R} \uparrow \mathcal{C} / \mathcal{R} \uparrow \mathcal{C}$	$\tau_a + \frac{1}{s C_a}$	$\tau_b + \frac{1}{s C_b}$	$\frac{s \tau_b + 1/C_b}{s(\tau_a + \tau_b) + 1/C_a + 1/C_b}$
$\mathcal{R} \parallel \mathcal{C} / \mathcal{R} \parallel \mathcal{L}$	$\frac{s L_a \tau_a}{\tau_a + s L_a}$	$\frac{s L_b \tau_b}{\tau_b + s L_b}$	$\frac{s/\tau_a + 1/L_a}{s(1/\tau_a + 1/\tau_b) + 1/L_a + 1/L_b}$
$\mathcal{R} \uparrow \mathcal{L} / \mathcal{R} \uparrow \mathcal{L}$	$\tau_a + s L_a$	$\tau_b + s L_b$	$\frac{\tau_b + s L_b}{\tau_a + \tau_b + s(L_a + L_b)}$

**Commenti:** Facciamo alcune considerazioni sulle funzioni di rete dei suddetti partitori:

- 1. Partitore  $\mathcal{R} \uparrow \mathcal{C} / \mathcal{R} \parallel \mathcal{C}$ :** La funzione di rete ha grado 0 su 2. I due poli possono essere reali distinti, reali concidenti o complessi coniugati. I due zeri sono all'infinito.
- 2. Partitore  $\mathcal{R} \parallel \mathcal{C} / \mathcal{R} \uparrow \mathcal{L}$ :** La funzione di rete ha grado 2 su 2. I due poli possono essere reali distinti, reali concidenti o complessi coniugati. I due zeri sono reali e, in genere, distinti.
- 3. Partitore  $\mathcal{R} \parallel \mathcal{C} / \mathcal{R} \parallel \mathcal{C}$ :** La funzione di rete ha grado 1 su 1, dal momento che il circuito è degenere a causa della maglia-C-Y. Quindi vi è un polo e uno zero reale. Nel prossimo paragrafo discuteremo più a fondo di questo partitore.
- 4. Partitore  $\mathcal{R} \uparrow \mathcal{L} / \mathcal{R} \uparrow \mathcal{L}$ :** La funzione di rete ha grado 1 su 1. In questo caso le variabili di stato sono due ma vi è la cancellazione del polo e dello zero nell'origine, causata dal taglio-C. Quindi vi è un polo e uno zero reale.

**5. Partitore  $\mathcal{R} \parallel \mathcal{C} / \mathcal{R} \parallel \mathcal{L}$ :** La funzione di rete ha grado 1 su 1. In questo caso le variabili di stato sono due ma vi è la cancellazione del polo nell'origine con lo zero nell'origine, causata dalla maglia-L-Y. Quindi vi è un polo e uno zero reale.

**6. Partitore  $\mathcal{R} \uparrow \mathcal{L} / \mathcal{R} \uparrow \mathcal{L}$ :** La funzione di rete ha grado 1 su 1, dal momento che il circuito è degenere a causa del taglio-L. Quindi vi è un polo e uno zero reale.

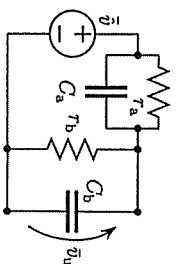
WWWWWWW FARE commenti sui gradi, diagrammi dei partitori passa-basso/alto/butto

**23.4.6 Partitore compensato**

Per la sua importanza il partitore  $\mathcal{R} \parallel \mathcal{C} / \mathcal{R} \parallel \mathcal{C}$  viene discusso in dettaglio. La sua funzione di rete presenta uno zero e un polo entrambi necessariamente reali e negativi. Quindi, nonostante la presenza di due condensatori, questo partitore è di primo grado. Questo risultato è dovuto al fatto che questo partitore qualora sia alimentato da una Y, costituisce un circuito dinamico degenere di prim'ordine per la presenza di una maglia-C-Y.

Il partitore  $\mathcal{R} \parallel \mathcal{C} / \mathcal{R} \parallel \mathcal{C}$  è compensato qualora sia verificata la condizione  $\tau_a = \tau_a C_a = \tau_b = \tau_b C_b$ : in questo caso la funzione di rete non dipende da  $s$ .

$$F(j\omega) = \frac{\tau_b}{\tau_a + \tau_b} = \frac{C_a}{C_a + C_b}$$



**Commento:** In caso di compensazione il partitore di tensione dovuto ai soli resistori (che prevale alle frequenze basse) e quello dovuto ai soli condensatori (che prevale alle frequenze alte) danno origine allo stesso rapporto di tensione.

**Commento:** Nonostante che il circuito del partitore sia dinamico, la sua funzione di rete è costante come se fosse un circuito adinamico. In altre parole, il condensatore di capacità  $C_a$  compensa la presenza del condensatore di capacità  $C_b$ . Ma quando codesti quattro valori verificano la relazione suddetta, si ha la cancellazione dell'unico zero con l'unico polo.

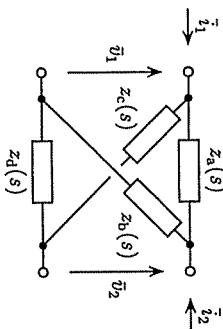
**Sonda dell'oscilloscopio:** L'impedenza dello stadio d'ingresso di un oscilloscopio è equivalente al parallelo di un resistore di resistenza  $\tau_b$  e di un condensatore di capacità  $C_b$ , che tiene conto degli effetti dinamici parassiti dello stadio stesso. D'altra parte questo stadio non è in grado di operare correttamente se riceve tensioni troppo elevate (esso opererebbe fuori dalla zona di linearità ovvero potrebbe essere danneggiato in maniera irreversibile). In questo caso occorre ridurre la tensione da misurare inserendo un resistore di resistenza  $\tau_a$  in serie alla stadio d'ingresso, creando un partitore di tensione. Questo partitore si comporta da passabasso per la presenza del condensatore di capacità  $C_b$  attenuando e ritardando maggiormente le componenti a frequenza elevata eventualmente contenute nel segnale da misurare nei confronti di quelle a frequenza bassa, deformando la forma d'onda complessiva (per esempio i fronti ripidi del segnale verrebbero addolciti). Questo inconveniente viene superato inserendo un condensatore di capacità  $C_a$  in parallelo al resistore di resistenza  $\tau_a$ : il valore di  $C_a$  deve essere tale che il partitore sia compensato. Il partitore compensato lascia inalterata qualsiasi forma d'onda a meno di un fattore moltiplicativo che la attenua senza distorcerla. Il resistore di resistenza  $\tau_a$  e il condensatore di capacità  $C_a$  in parallelo costituiscono la sonda dell'oscilloscopio.

### 23.5 PONTI DINAMICI

I quadripoli dinamici composti a ponte sono una generalizzazione di quelli resistivi incontrati nel Cap. 9, in cui almeno uno dei quattro bipoli è dinamico. Noi li esaminiamo in pseudoregime cisdale o, in alcuni casi, in regime sinusoidale. Essi sono molto interessanti per le loro proprietà: per esempio, essi raggiungono l'equilibrio solo per specifici valori di  $\omega$ , e sono molto usati negli apparati per misurare diverse grandezze e parametri elettrici.

#### 23.5.1 Matrice impedenza e ammettenza

Assumiamo che il quadripolo a ponte operi come un doppio bipolo dotato di due porte proprie, evidenziate nella Fig. 9. Le espressioni degli elementi della matrice impedenza e della matrice ammettenza sono ricopiate banalmente da quelle dei ponti resistivi nel Cap. 9 e riportate qui sotto:

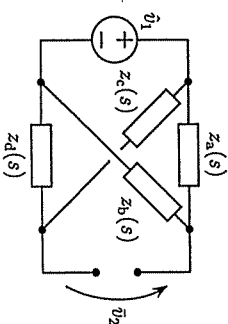


$$\text{Matrice impedenza} : Z(s) = \begin{bmatrix} \frac{(z_a(s) + z_b(s))(z_c(s) + z_d(s))}{z_a(s) + z_b(s) + z_c(s) + z_d(s)} & \frac{z_b(s)z_c(s) - z_a(s)z_d(s)}{z_a(s) + z_b(s) + z_c(s) + z_d(s)} \\ \frac{z_b(s)z_c(s) - z_a(s)z_d(s)}{z_a(s) + z_b(s) + z_c(s) + z_d(s)} & \frac{z_a(s)z_c(s) + z_b(s)z_d(s)}{z_a(s) + z_b(s) + z_c(s) + z_d(s)} \end{bmatrix}$$

$$\text{Matrice ammettenza} : Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{(y_a(s) + y_c(s))(y_b(s) + y_d(s))}{y_a(s) + y_b(s) + y_c(s) + y_d(s)} & \frac{y_b(s)y_c(s) - y_a(s)y_d(s)}{y_a(s) + y_b(s) + y_c(s) + y_d(s)} \\ \frac{y_b(s)y_c(s) - y_a(s)y_d(s)}{y_a(s) + y_b(s) + y_c(s) + y_d(s)} & \frac{(y_a(s) + y_b(s))(y_c(s) + y_d(s))}{y_a(s) + y_b(s) + y_c(s) + y_d(s)} \end{bmatrix}$$

**Rapporto di tensione a vuoto:** Quando la prima porta è alimentata da una  $\bar{V}$  e la seconda porta è a vuoto, un ponte può essere visto come il parallelo di due partitori dinamici di tensione. La loro funzione di rete  $F(s)$  può essere ricavata facendo la differenza tra i rapporti di tensione dei due partitori, cioè:

$$F(s) = \frac{z_b(s)}{z_a(s) + z_b(s)} - \frac{z_d(s)}{z_c(s) + z_d(s)} = \frac{z_b(s)z_c(s) - z_a(s)z_d(s)}{[z_a(s) + z_b(s)]z_c(s) + z_d(s)}$$



#### 23.5.2 Equilibrio del ponte

Quando la pulsazione complessa  $s$  è tale che la funzione di rete del ponte  $F(s)$  è nulla, si dice che il ponte è *in equilibrio*:

$$F(s) = 0 \implies z_a(s)z_d(s) = z_b(s)z_c(s) \implies \begin{cases} z_{12}(s) = z_{21}(s) = 0 \text{ nella } Z(s) \\ y_{12}(s) = y_{21}(s) = 0 \text{ nella } Y(s) \end{cases}$$

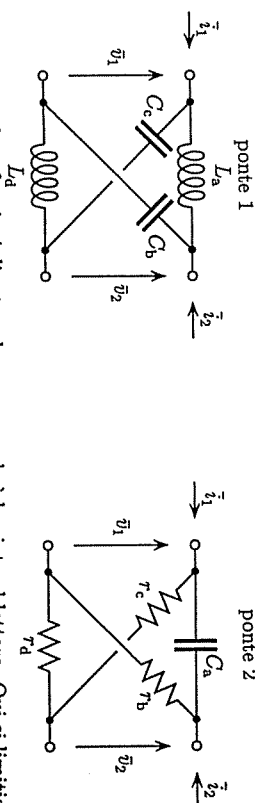
In altre parole, un ponte in equilibrio è un doppio bipolo zerodirezionale (vedere Cap. 9). Questa regola viene in genere ricordata:

*l'equilibrio del ponte viene raggiunto quando i due prodotti delle impedenze dei bipoli opposti del ponte sono uguali*

In genere questa uguaglianza si ha per singoli valori di  $s$ . Nella pratica i valori della pulsazione complessa  $s$  per cui il ponte è in equilibrio sono di estremo interesse qualora essi siano immaginari puri cioè  $s = j\omega$ . In qualche caso l'uguaglianza si ha per qualsiasi valore di  $s$ . L'equilibrio del ponte significa che il doppio bipolo che ne descrive il funzionamento è zerodirezionale, come per i ponti resistivi (vedere Cap. 9).

#### 23.5.3 Ponti di interesse

Le figure 1 e 2 riportano due ponti dinamici:



Il calcolo delle loro funzioni di rete nel caso generale è lasciato al lettore. Qui ci limitiamo a calcolarle in due casi particolari ma di molto interesse:

**Ponte 1:** Se le due capacità  $C_b = C_c = C_{bc}$  e le due induttanze  $L_a = L_d = L_{ad}$  coincidono, la funzione di rete risulta:

$$F(s) = \frac{1/(sC_{bc})^2 - (sL_{ad})^2}{[sL_{ad} + 1/(sC_{bc})]^2} = \frac{1/(sC_{bc}) - sL_{ad}}{sL_{ad} + 1/(sC_{bc})}$$

non esiste l'equilibrio per alcun valore immaginario di  $s = j\omega$ , cioè in regime sinusoidale. Se la seconda porta di questo ponte venisse chiusa su una resistenza  $r_n = \sqrt{L_a/C_b}$ , l'impedenza equivalente alla prima porta sarebbe puramente reale (costante) e coincidente con  $r_n$ .

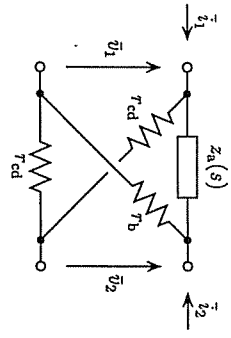
**Ponte 2:** se le due resistenze  $r_c = r_d = r_{cd}$  coincidono, la funzione di rete del ponte 2 risulta:

$$F(s) = \frac{r_{cd}[r_b - 1/(sC_a)]}{2r_{cd}[r_b + 1/(sC_a)]} = \frac{1}{2} \frac{r_b - 1/(sC_a)}{r_b + 1/(sC_a)}$$

non esiste l'equilibrio per alcun valore immaginario di  $s = j\omega$ .

Siccome a meno di un fattore, il numeratore è il coniugato del denominatore, questi due ponti si comportano come un doppio bipolo passatutto e sfasatore.

**Commento :** Consideriamo un ponte in cui tre bipoli sono adinamici :  $z_b = r_b$ ,  $z_c = z_d = r_{cd}$ , e il quarto bipolo (in genere composto) è conservativo :  $z_a(s)$ . La sua funzione di rete è del tipo passatutto. La dimostrazione è lasciata al lettore.



Il seguente quadro riporta altri ponti di interesse : il lettore può cimentarsi nel calcolare la funzione di rete.

ponte	schema del ponte	$z_a$	$z_b$	$z_c$	$z_d$
Wien		$\frac{1}{g_a + sC_a}$	$\frac{1}{g_b + sC_b}$	$r_c$	$r_d$
Shering		$\frac{1}{g_a + sC_a}$	$r_b$	$\frac{1}{sC_c}$	$r_d + \frac{1}{sC_d}$
Maxwell-Wien		$\frac{1}{g_a + sC_a}$	$r_b$	$r_c$	$r_d + sL_d$

Alcuni di questi ponti sono di notevole interesse per le misure elettriche di buona precisione.

### 23.6 DOPPI BIPOLI DINAMICI COMPOSITI ATTIVI

Questa sezione prende in considerazione alcuni doppi bipoli dinamici, attivi : tra questi un modello dinamico dell'amplificatore operazionale nonideale e due doppi bipoli molto importanti sia nella Teoria dei Sistemi sia nei Controlli Automatici : l'integratore ed il derivatore.

#### 23.6.1 Modelli dinamici di un amplificatore operazionale

Introdurre un modello semplice classico dinamico del nullore (amplificatore operazionale). Per esempio quello con un polo reale. Quindi in base alla funzione di trasferimento del nullore dinamico, vedere la questione della stabilità del circuito in cui il nullore è inserito. Il segno del guadagno ha la sua estrema importanza. Il modello dinamico di un amplificatore operazionale può essere realizzato da un doppio bipolo composto costituito (WWWWWW vedere CDK) da un :

1. Doppio bipolo tripolare composto da un nullore tripolare e da un bipolo costituito dal parallelo di un resistore e un condensatore connesso trasversalmente.
2. Resistore di resistenza elevata in serie alla porta d'ingresso del doppio bipolo precedente.

3. Resistore di resistenza bassa in serie alla porta d'uscita dello stesso doppio bipolo.

WWWWWW?? Fig. MODELLO NONIDEALE DI UN'AMPLIFICATORE OPERAZIONALE

#### 23.6.2 Doppio bipolo derivatore

Il derivatore è un doppio bipolo dinamico nonconservativo unidirezionale molto usato per realizzare circuiti di controllo. Esso è definito dalle relazioni costitutive :

$$i_1(t) = 0 \quad , \quad v_2(t) = r_0 v_1(t) \quad , \quad i_2(t) \text{ nonvincolata}$$

Il derivatore può essere visto come una  $\mathcal{V}_y$  dinamica dove l'operatore derivata è presente nel vincolo che lega la grandezza pilotata a quella pilotante. La costante moltiplicativa  $r_0$  ha la dimensione fisica di un tempo (vedere Cap. 19).

Il derivatore può essere sintetizzato mediante un condensatore o un induttore, un resistore, un nullore e una  $\mathcal{V}_y$ . Notare che la tensione ai capi del condensatore ovvero la corrente fiucnte nell'induttore non è variabile di stato, qualora la prima porta sia connessa ad una  $\mathcal{V}$ .

WWWWWW?? Fig. MODELLO DI UN DOPPIO BIPOLO DINAMICO DERIVATORE

#### 23.6.3 Doppio bipolo integratore

L'integratore è un doppio bipolo dinamico nonconservativo unidirezionale molto usato per realizzare circuiti di controllo. Esso è definito dalle relazioni costitutive :

$$i_1(t) = 0 \quad , \quad v_2(t) = \frac{1}{r_0} \int_{t_0}^t v_1(\tau) d\tau + v_2(t_0^-) \quad , \quad i_2(t) \text{ nonvincolata}$$

L'integratore può essere visto come una  $\mathcal{V}_y$  dinamica dove nel pilotaggio interviene l'operatore integrale. La costante moltiplicativa  $1/r_0$  ha la dimensione fisica inversa del tempo. L'integratore può essere sintetizzato mediante un condensatore o un induttore un resistore un nullore e una  $\mathcal{V}_y$ . Notare che la tensione ai capi del condensatore ovvero la corrente fiucnte nell'induttore è una variabile di stato, qualora la prima porta sia connessa a una  $\mathcal{V}$ .

WWWWWW?? Fig. MODELLO DI UN DOPPIO BIPOLO DINAMICO INTEGRATORE



## CONCLUSIONI

Un distinto signore cammina con passo manageriale per una via del centro e... la sua attenzione è attratta da un'insegna "TURTO PER LA RIFORMA DELL'UNIVERSITÀ" che compare al di sopra di quella che sembra un'agenzia aperta di recente. Decide di entrare e scopre con sorpresa che il locale è pieno di pappagalli in bella mostra su lucenti trespoli. Dopo una rapida occhiata si rivolge al gestore e si informa sui pregi e prezzi dei pappagalli esposti.

"Questo pappagallo col petto giallo quanto costa?"

"Costa cinquecento Euro."

"Un po' caruccio..."

"Ma esso conosce già i nomi dei componenti del Senato Accademico ed inoltre è capace di cambiare una lampadina fulminata in qualsiasi ufficio. Sa con gli elettricisti che non arrivano mai..."

"E questo tutto verde?"

"Questo costa seicento Euro ed è capace di accendere un 'monitor' oltre che di richiamare i professori usi ad arrivare in ritardo ai Consigli di Facoltà."

"E questo giallo con macchie rosse?"

"Costa ottocento Euro ed è anche capace di aggiustare un 'personal computer' e sostituire il 'toner' di una stampante 'laser'. Siamo in trattativa per cederlo in affitto, come tecnico, ad un importante Dipartimento."

"E questo a strisce rosse e gialle?"

"Questo costa molto di più, duemila Euro, perché è capace di programmare in C++; non parla mai ma in compenso è molto abile nel comunicare via 'e-mail' con tutto il mondo. Alcuni professori dell'Università sono interessati a comprarlo, con i propri fondi di ricerca, per sopperire alla mancanza di personale ausiliario di ruolo."

"E quello col dorso giallo e il petto bianco?"

"Questo ha già lavorato in un centro di calcolo e quindi costa tremila Euro. Il suo prezzo è cresciuto recentemente perché il ministro sta studiando un provvedimento per poter inserire, con un contratto simile a quello per gli assegnisti, i pappagalli istruiti all'interno delle Facoltà di Ingegneria. Sa, con i tempi che corrono, pochi giovani ingegneri scelgono la carriera accademica." "Impressionante, non pensavo che vi fossero pappagalli così istruiti! Qui ne vedo uno diverso dagli altri sembra più vecchio, le piume che ricoprono il capo sono grigie e arruffate e il becco un po' storto. Forse il suo prezzo è più abbordabile?"

"Questo è il più caro di tutti; costa diecimila Euro."

"Impossibile! Ma cosa mai sarà capace di fare se costa così caro?"

"A dire il vero non lo ho mai visto fare qualcosa. Non è neppure capace di accendere un 'personal computer' e leggere e spedire messaggi via 'e-mail'. Pare che vada spesso soggetto ad improvvisi attacchi di panico informatico' e che per questo non metta mai becco in un centro di calcolo."

"Ma non capisco il perché di un prezzo così alto!"

"Beh! Quando parla, parla per tre quarti d'ora filati e nessun altro pappagallo ha il coraggio di interromperlo."

"Ma di che cosa parla?"

"Per ora nessuno lo ha capito. Si racconta che vi siano degli appunti scritti di sua zampa riguardanti gli argomenti trattati, ma non so dove siano reperibili: ho qui solo una fotocopia un po' sguaiata della pagina 567, la cui lettura non aiuta certo a capire."

"Beh, a parte questo pappagallo ormai sorpassato dai tempi, tutti gli altri mi sembrano molto preparati; mi può dare dei 'depliant' per poter proporre ai miei collaboratori il loro acquisto?"

Ora che la/il lettrice/tore si sta avvicinando al fatidico esame, voglio incoraggiarla/lo confidando/ghi che lo stralcio della lettera riportato nella prima pagina è firmata da uno studente di nome Galileo Ferraris. A. SILVESTRINI (A CURA DI), "GALILEO FERRARIS E L'AEI", ATTI DEL CONVEGNO E CATALOGO DELLA MOSTRA (MILANO, LIVORNO FERRARIS, MARZO-APRILE 1998), P. 18.

fine dei Fondamenti di CIRCUITI ELETTRICI di A. Premoli

