

**POLITECNICO di MILANO
FACOLTÀ di INGEGNERIA
del CAMPUS LEONARDO**

**CORSO di LAUREA
in INGEGNERIA ELETTRONICA**

**200+ Esercizi
risolti sui
CIRCUITI
ELETTRICI**

APRILE 2000

per il corso di

ELETTROTECNICA

Docente: Amedeo Premoli

Anno Accademico 1999/2000 , Secondo Semestre

alle allieve e agli allievi

Queste pagine contengono 200+ esercizi sui *CIRCUITI ELETTRICI* adatti per il Corso di Elettrotecnica svolto dal sottoscritto per gli Allievi Elettronici presso la Facoltà di Ingegneria del Campus Leonardo, Politecnico di Milano. In particolare essi contengono gli esercizi proposti nelle prove scritte degli esami di profitto negli A.A. 1995-96, 1996-97, 1997-98.

Mi ero ripromesso di inserire anche gli esercizi oggetto delle prove scritte dell'A.A. 1998-99, ma altri impegni me lo hanno impedito. Mi sono limitato a correggere gli errori che mi sono stati segnalati o che ho riscontrato di persona. Colgo l'occasione per ringraziare i numerosi studenti che hanno segnalato questi errori. Nella convinzione che vi siano ancora errori, invito *le studentesse e gli studenti* del corso a segnalarmi gli errori durante le apposite ore di ricevimento.

Comunque l'insieme degli esercizi riportati non copre ancora adeguatamente tutti gli argomenti trattati nel corso e descritti negli appunti intitolati "*Fondamenti di CIRCUITI ELETTRICI (FCE)*" in distribuzione dal corrente mese di marzo.

Gli esercizi sono sviluppati nei minimi dettagli per mettere in evidenza gli agganci con la teoria. Per questo motivo, l'esecuzione di alcuni di questi esercizi da parte di allieve e allievi di altri Corsi di Laurea e Diploma, può risultare indigesta dal momento che essi non sono tipici di tutti i Corsi. Le figure sono state realizzate mediante macro-istruzioni operanti in ambiente PSTricks e costruite dal Prof. Ivan Maio del Politecnico di Torino, a cui va la mia più sincera gratitudine. Inoltre ringrazio l'Ing. Daniele De Matteis, laureatosi presso codesto Politecnico, che ha realizzato una buona parte di queste figure mediante queste macro-istruzioni. Infine ringrazio l'Ing. Claudio Santacesaria per la collaborazione nello svolgimento delle esercitazioni per gli anni passati e l'Ing. Paolo Maffezzoni per il presente anno accademico.

Colgo l'occasione per augurare agli studenti un "*in bocca al lupo*" per i prossimi esami di profitto.

*Dipartimento di Elettronica e Informazione,
Campus Leonardo, Politecnico di Milano :*

Milano, aprile 2000

Amedeo Premoli

Principali notazioni e definizioni usate nel testo

0.0.1 Notazioni e definizioni riguardanti la topologia

1. *Maglia* : sottoinsieme dei rami di un grafo (ovvero un circuito) formanti un percorso chiuso senza alcuna ripetizione di nodi e rami. (Cap. 3-FCE)
2. *Taglio* : sottoinsieme di rami di un grafo (ovvero un circuito) tali da essere necessari e sufficienti per separare il grafo in due sottografi sconnessi. (Cap. 3-FCE)
3. *Taglio nodale* : è un taglio che separa un un'unico nodo da tutti gli altri. (Cap. 3-FCE)
4. *Nodo cruciale* : un nodo è detto cruciale quando il sottoinsieme dei rami incidenti ad esso forma due o più tagli. (Cap. 3-FCE)

0.0.2 Notazioni e definizioni riguardanti aggregazioni di componenti

1. *Componente composito* : componente composto da altri componenti. (CCap. 1,6,13-FCE) .
I terminali accessibili dei componenti composti sono distinti da piccole circonferenze nere (interno bianco) $\text{---}\bigcirc\text{---}$ mentre i nodi interni degli stessi sono distinti da pallini neri $\text{---}\bullet\text{---}$
2. Connessione serie “ $\ddagger$ ” e connessione parallelo “ $\parallel$ ”.
3. Connessione a stella e a triangolo di tre bipoli.
4. Connessione trasversale di un bipolo e un DBT
5. Connessione di un bipolo in serie al terminale comune di un DBT

0.0.3 Notazioni e definizioni riguardanti le relazioni costitutive

1. *Dominio costitutivo* : è l'insieme di tutte i valori dei vettori delle tensioni e correnti di ramo che verificano le relazioni costitutive di un componente. (Cap. 5-FCE)
2. *Rappresentazione* $(y_1, y_2, y_3, \dots) \leftarrow (x_1, x_2, x_3, \dots)$: Indica la rappresentazione esplicita di un componente in cui $y_1, y_2, y_3, \dots$ costituiscono le grandezze dipendenti e $x_1, x_2, x_3, \dots$ quelle indipendenti.
3. *Componenti adinamici* : componenti nelle cui relazioni costitutive non compare alcuna derivata e alcun integrale delle tensioni e correnti. In caso contrario si chiamano *componenti dinamici*. (Cap. 5,7-10-FCE)
4. *Componenti tempo-invarianti* : componenti nelle cui relazioni costitutive non compare esplicitamente il tempo t . In caso contrario si chiamano *componenti tempo-varianti*. (Cap. 5,14-FCE)
5. *Componenti lineari*: sono i componenti il cui dominio costitutivo costituisce uno *spazio affine*. (Cap. 5,7-10-FCE)
6. *Componenti lineari e omogenei*: sono i componenti il cui dominio costitutivo costituisce uno *spazio lineare*. (Cap. 5,7-10-FCE)
7. *Componente omogeneo associato* : ottenuto da quello originario sostituendo $\hat{\mathcal{V}} \rightarrow \text{c.c.}$ e $\hat{\mathcal{I}} \rightarrow \text{c.a.}$. La definizione vale sia per i componenti adinamici sia per i componenti dinamici. (CCap. 7,8,15-FCE)
8. DB $\rightarrow$ generico doppio bipolo ; DBT $\rightarrow$ doppio bipolo tripolare
DBP $\rightarrow$ doppio bipolo proprio ; DBI $\rightarrow$ doppio bipolo improprio

0.0.4 Notazioni e definizioni riguardanti i bipoli adinamici e lineari

1. c.c. $\rightarrow$ corto circuito, c.a. $\rightarrow$ circuito aperto.
2. $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$ indica il resistore di resistenza r_1 , mentre $\mathcal{R}\langle 100 \Omega \rangle$ indica il resistore di resistenza 100Ω .
3. *Sorgenti impresse*: sono i bipoli lineari la cui tensione assume un valore fisso (eventualmente dipendente dal tempo) e la cui corrente è nonvincolata (sorgente impressiva di tensione ($\hat{\mathcal{V}}$)) o viceversa (sorgente impressiva di corrente ($\hat{\mathcal{I}}$)). Sono comunemente chiamate anche *sorgenti ideali*. (CCap. 5,7-FCE).
 “Disattivare una $\hat{\mathcal{V}}$ ovvero una $\hat{\mathcal{I}}$ ” significa sostituire la sorgente impressiva col rispettivo bipolo omogeneo associato.
 “ $\hat{\mathcal{V}} \rightarrow$ c.c.” significa “sostituzione di una $\hat{\mathcal{V}}$ con un c.c.”.
 “ $\hat{\mathcal{I}} \rightarrow$ c.a.” significa “sostituzione di una $\hat{\mathcal{I}}$ con un c.a.”.
Tensioni e correnti impresse: sono, rispettivamente, le tensioni ai capi delle $\hat{\mathcal{V}}$ e le correnti fluenti nelle $\hat{\mathcal{I}}$. Esse possono essere costanti o tempo-varianti.
 $\hat{\mathcal{V}}\langle 10 \text{ V} \rangle$ indica la sorgente di tensione impressiva con tensione impressa 10 V .
 $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_1 \rangle$ indica la sorgente di tensione impressiva con tensione impressa $\hat{v}_1$.
 $\hat{\mathcal{I}}\langle 5 \text{ mA} \rangle$ indica la sorgente di corrente impressiva con corrente impressa 5 mA .
 $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_1 \rangle$ indica la sorgente di corrente impressiva con corrente impressa $\hat{i}_1$.
4. int.id. $\rightarrow$ interruttore ideale
5. *Maglia- $\hat{\mathcal{V}}$* : maglia di un circuito formata esclusivamente da $\hat{\mathcal{V}}$. (Cap. 11-FCE)
6. *Taglio- $\hat{\mathcal{I}}$* : taglio di un circuito formato esclusivamente da $\hat{\mathcal{I}}$. (Cap. 11-FCE)
7. *Maglia- $\hat{\mathcal{I}}$ uniforme*: maglia di un circuito formata esclusivamente da $\hat{\mathcal{I}}$ con la stessa corrente impressa. (Cap. 11-FCE)
8. *Taglio- $\hat{\mathcal{V}}$ uniforme*: taglio di un circuito formato esclusivamente da $\hat{\mathcal{V}}$ con la stessa tensione impressa. (Cap. 11-FCE)

0.0.5 Notazioni e definizioni riguardanti i doppi bipoli adinamici e lineari

1. *Sorgenti pilotate*: sono doppi bipoli unidirezionali in cui la tensione o corrente della porta pilotata risulta proporzionale alla tensione o corrente della porta pilotante. Ve ne sono quattro tipi: $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ e $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$. (Cap. 10-FCE).
 $\mathcal{V}_{\mathcal{I}} \rightarrow$ generica sorgente di tensione pilotata in corrente.
 $\mathcal{I}_{\mathcal{V}} \rightarrow$ generica sorgente di corrente pilotata in tensione.
 $\mathcal{I}_{\mathcal{I}} \rightarrow$ generica sorgente di corrente pilotata in corrente.
 $\mathcal{V}_{\mathcal{V}} \rightarrow$ generica sorgente di tensione pilotata in tensione.
 $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}\langle r_m i_2 \rangle$ indica la sorgente di tensione pilotata in corrente con tensione pilotata $r_m i_2$.
 $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}\langle g_m v_3 \rangle$ indica la sorgente di corrente pilotata in tensione con corrente pilotata $g_m v_3$.
 $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}\langle \beta i_4 \rangle$ indica la sorgente di corrente pilotata in corrente con corrente pilotata βi_4 .
 $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}\langle \alpha v_5 \rangle$ indica la sorgente di tensione pilotata in tensione con tensione pilotata αv_5 .
2. *Nullore*: è il doppio bipolo che costituisce il modello, idealizzato al massimo, dell’amplificatore operativo. (Cap. 10-FCE)
3. tr.id. $\rightarrow$ trasformatore ideale

0.0.6 Notazioni e definizioni riguardanti i componenti dinamici e lineari

1. *Componenti conservativi* : sono quelli in cui la potenza assorbita/erogata contribuisce esclusivamente alla variazione dell'energia immagazzinata. (Cap. 15,16-FCE)
2. $\mathcal{C}\langle C_1 \rangle$ indica il condensatore di capacità C_1 , mentre $\mathcal{C}\langle 10 \mu\text{F} \rangle$ indica il condensatore di capacità $10 \mu\text{F}$
3. $\mathcal{L}\langle L_1 \rangle$ indica l'induttore di induttanza L_1 , mentre $\mathcal{L}\langle 10 \text{mH} \rangle$ indica l'induttore di induttanza 10mH
4. *Candidate (di stato)* : sono, per definizione, le tensioni ai capi dei condensatori e le correnti fluenti negli induttori, comprese quelle fluenti negli induttori accoppiati. Qualora esse non siano vincolate algebricamente, diventano le *variabili di stato* del circuito. (Cap. 17-FCE).
Anticandidate (di stato) : sono, per definizione, le correnti fluenti nei condensatori e le tensioni ai capi degli induttori.
5. *Equazione di stato* : è l'equazione che consente di esprimere le derivate delle variabili di stato in funzione delle variabili di stato stesse ed, eventualmente, degli ingressi. (Cap. 19-FCE)
6. *Matrice di stato* : è la matrice che compare nell'equazione di stato e che premoltiplica il vettore delle variabili di stato per i circuiti dinamici lineari. (Cap. 19-FCE)
7. *Modi naturali* : Sono i termini in cui è scomposta la soluzione libera di un circuito dinamico : in genere ciascuno di essi coincide con un vettore di cisoidi della stessa pulsazione complessa (pulsazione naturale). (Cap. 19-FCE)
8. *Pulsazioni (complesse) naturali* : sono gli autovalori della matrice di stato e costituiscono le pulsazioni complesse dei modi naturali. (Cap. 19-FCE)

0.0.7 Notazioni e definizioni riguardanti il regime sinusoidale e lo pseudoregime cisoidale

1. *Cisoidi* : una generica cisoida è una sinusoida con inviluppo esponenziale. Essa è caratterizzata dalla *pulsazione complessa* e dal *fasore*. Sono particolari cisoidi gli esponenziali (pulsazione complessa puramente reali), le sinusoidi (pulsazione complessa puramente immaginaria) e le funzioni costanti (pulsazione complessa nulla e fasore puramente reale). (Cap. 18-FCE)
2. *Pseudoregime cisoidale* : si ha qualora le grandezze impresse delle $\hat{\mathbf{V}}$ e $\hat{\mathbf{I}}$ sono cisoidi isofrequenziali e il transitorio è assente (Cap. 20-FCE). In questo caso tutte le tensioni e correnti sono cisoidi isofrequenziali.
3. *Regime sinusoidale* : le grandezze impresse delle $\hat{\mathbf{V}}$ e $\hat{\mathbf{I}}$ sono sinusoidi isofrequenziali e il transitorio è assente (Cap. 20-FCE).
4. *Fasori* : sono numeri complessi in corrispondenza biunivoca con le cisoidi (comprese le sinusoidi e gli esponenziali) di cui sia nota la pulsazione complessa. (Cap. 18-FCE)

1 COMPONENTI E CIRCUITI ADINAMICI

Gli esercizi sviluppati nel presente capitolo riguardano l'analisi dei circuiti adinamici, tempo-invarianti e lineari cioè quelli costituiti dai seguenti componenti :

Sorgenti impulsive di tensione ($\hat{\mathcal{V}}$) e di corrente ($\hat{\mathcal{I}}$) costanti (tempo-invarianti), resistori ($\mathcal{R}$), c.c. e c.a. , le quattro sorgenti pilotate ($\mathcal{V}_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ e $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$), Nullore ($\mathcal{N}$, amplificatore operativo ideale), Trasformatore ideale ($\mathcal{T}$, tr.id.) e Giratore ($\mathcal{G}$).

La teoria necessaria per risolvere questi esercizi è trattata nei CCap. 7-13-FCE :

1 Circuiti e bipoli composti semplici : Analisi dei circuiti e bipoli composti adinamici semplici, cioè costituiti esclusivamente da bipoli connessi con strutture elementari.

Sez. 2 Problemi inversi semplici sui circuiti : Problemi semplici in cui qualche parametro del circuito non è noto, e occorre calcolarlo dalla conoscenza di qualche tensione o corrente.

Sez. 3 Problemi semplici sulla potenza nei bipoli e doppi bipoli : Problemi semplici riguardanti la potenza dei bipoli e doppi bipoli adinamici.

Sez. 4 Bipoli composti contenenti un DB : Analisi di bipoli composti al cui interno vi sia uno o più doppi bipoli.

Sez. 5 Doppi bipoli contenenti esclusivamente bipoli : Analisi di doppi bipoli composti costituiti esclusivamente da bipoli adinamici.

Sez. 6 Doppi bipoli composti contenenti nullori : Analisi di componenti composti comprendenti uno due nullori oltre a bipoli.

Sez. 7 Esercizi semplici sui doppi bipoli contenenti una sorgente pilotata : Analisi di doppi bipoli composti semplici contenenti una sorgente pilotata.

Sez. 8 Esercizi non-semplificati sui doppi bipoli contenenti una sorgente pilotata : Analisi di doppi bipoli composti non-semplificati contenenti una sorgente pilotata.

Sez. 9 Doppi bipoli composti contenenti tr.id. : Analisi di doppi bipoli composti contenenti un tr.id. .

Sez. 10 Doppi bipoli composti contenenti un giratore : Analisi di doppi bipoli composti contenenti un giratore.

Sez. 11 Circuiti e componenti composti patologici : Analisi di circuiti e/o componenti composti patologici, cioè i circuiti la cui soluzione non esiste o non risulta unica. Essi hanno un'importanza concettuale importante per comprendere se il modello-circuito è sufficientemente adeguato al circuito fisico. **Cap. 11-FCE.**

Sez. 12 Metodo dei nodi, puro e modificato : Analisi dei circuiti adinamici col metodo dei nodi modificato. **Cap. 12-FCE.**

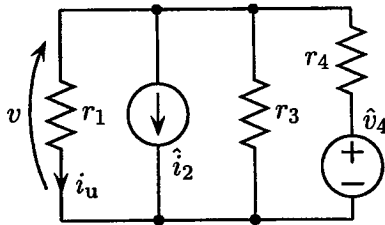
Sez. 13 Metodo delle maglie/anelli puro e modificato : Analisi dei circuiti adinamici col metodo delle maglie/anelli puro/modificato. **Cap. 12-FCE.**

Sez. 14 Metodi aggrega&rimpiazza : Analisi dei circuiti con i metodi aggrega&rimpiazza, che comporta l'aggregazione dei componenti in componenti composti e la semplificazione del circuito originario. **Cap. 13-FCE.**

Sez. 15 Altri problemi non classificati sui circuiti e componenti adinamici : La sezione considera problemi non classificabili nelle sezioni precedenti.

0.1 CIRCUITI E BIPOLI COMPOSITI SEMPLICI, CAP. 7-FCE

0.1.1 Esercizio E1/30/01/97 : Primo teorema di Millmann



Il circuito adinamico lineare e nonomogeneo in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\hat{\mathcal{I}}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare, in forma letterale, la corrente i_u funzione delle grandezze impresse e resistenze del circuito.

• Il circuito è costituito da quattro bipoli in parallelo : due $\mathcal{R}$, una $\hat{\mathcal{I}}$ e il bipolo $\hat{\mathcal{V}} \nmid \mathcal{R}$, soggetti alla tensione v .

• Il primo teorema di Millmann ci consente di calcolare la tensione v . Il segno “-” che precede la corrente impressa $\hat{i}_2$ è dovuto all’orientamento della stessa.

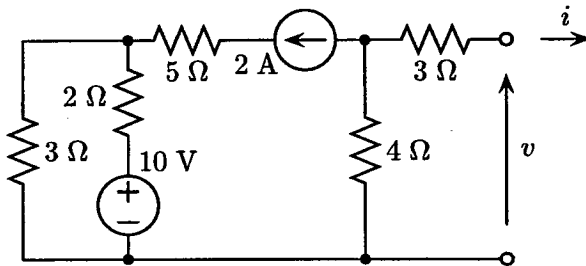
$$v = \frac{\hat{v}_4/r_4 - \hat{i}_2}{1/r_1 + 1/r_3 + 1/r_4}$$

• Dalla relazione costitutiva del $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$, viene ottenuta la corrente $i_u = v/r_1$.

Risultato : Sostituendo la tensione v , otteniamo l’espressione letterale richiesta della corrente :

$$i_u = \frac{v}{r_1} \Rightarrow i_u = \frac{1}{r_1} \frac{\hat{v}_4/r_4 - \hat{i}_2}{1/r_1 + 1/r_3 + 1/r_4} = \frac{\hat{v}_4/r_4 - \hat{i}_2}{1 + r_1/r_3 + r_1/r_4} = \frac{\hat{v}_4 r_3 - \hat{i}_2 r_3 r_4}{r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_3 r_4}$$

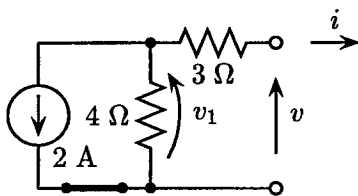
0.1.2 Esercizio E1/13/01/98 : Bipolo composito con resistori, sVi e sIi



Il bipolo composito in figura è adinamico tempo-invariante lineare e omogeneo.

Quesito : Calcolare il modello di Thévenin del bipolo composito.

• In serie alla $\hat{\mathcal{I}}\langle 2 \text{ A} \rangle$ vi è un bipolo costituito dai $\mathcal{R}\langle 5 \Omega \rangle$, $\mathcal{R}\langle 3 \Omega \rangle$, $\mathcal{R}\langle 2 \Omega \rangle$ e dalla $\hat{\mathcal{V}}\langle 10 \text{ V} \rangle$ che viene sostituito da un c.c. .

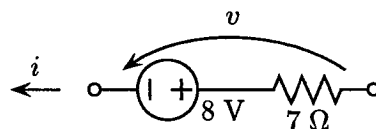


• Il bipolo composito omogeneo associato, ottenuto sostituendo $\hat{\mathcal{I}} \rightarrow \text{c.a.}$, è costituito dal $\mathcal{R}\langle 3 \Omega \rangle \nmid \mathcal{R}\langle 4 \Omega \rangle$: la resistenza del modello di Thévenin è $r_{eq} = 3 + 4 = 7 \Omega$.

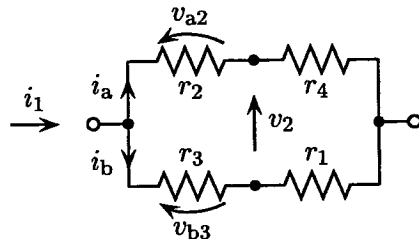
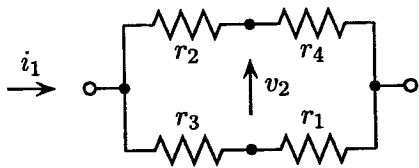
• La tensione impressa $\hat{v}_{eq}$ del modello di Thévenin coincide con la tensione a vuoto ai capi del bipolo composito, che a sua volta coincide con la tensione v_1 ai capi del $\mathcal{R}\langle 4 \Omega \rangle$ percorso dalla corrente della $\hat{\mathcal{I}}\langle 2 \text{ A} \rangle$: $\hat{v}_{eq} = -2 \times 4 = -8 \text{ V}$.

Risultato : Il modello di Thévenin risulta :

$$v = \hat{v}_{eq} - r_{eq} i = -8 - 7 i$$



0.1.3 Esercizio E1/17/06/97 : Bipolo composto con resistori



Il bipolo composto lineare e omogeneo in figura è costituito da quattro $\mathcal{R}$. Esso è percorso dalla corrente incognita i_1 .

Quesito : Calcolare il rapporto v_2/i_1 in forma letterale.

• La corrente i_1 viene suddivisa nelle correnti i_a e i_b fluenti nei due bipoli composti in parallelo, come indicato nella figura sottostante.

• La regola del partitore di corrente (nella forma del rapporto di resistenze (vedere Cap. 7-FCE) ci consente di esprimere i_a e i_b in funzione di i_1 :

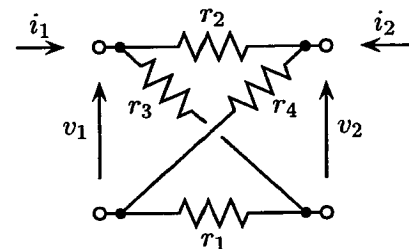
$$i_a = \frac{(r_3 + r_1) i_1}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}, \quad i_b = \frac{(r_2 + r_4) i_1}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}$$

Risultato : La tensione v_2 può essere espressa come differenza delle tensioni v_{b3} e v_{a2} ai capi dei $\mathcal{R}(r_3)$ e $\mathcal{R}(r_2)$: $v_2 = v_{b3} - v_{a2} = r_3 i_b - r_2 i_a$. Sostituendo le precedenti espressioni di i_a e i_b , otteniamo il rapporto v_2/i_1 :

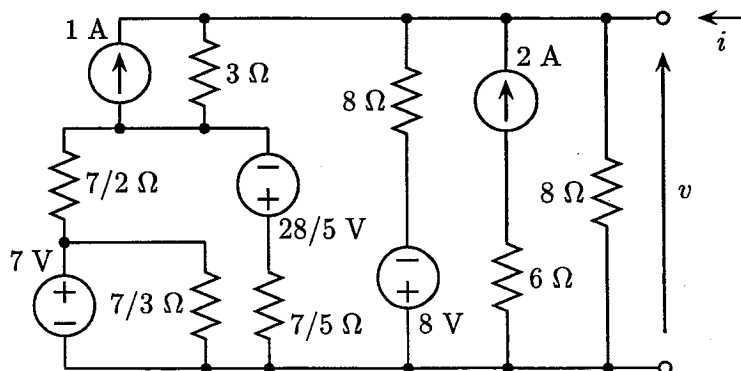
$$v_2 = \frac{r_3(r_2 + r_4) i_1}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} - \frac{r_2(r_3 + r_1) i_1}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} \Rightarrow \frac{v_2}{i_1} = \frac{r_3 r_4 - r_2 r_1}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}$$

Commento : Il circuito in figura può essere visto come un ponte resistivo alimentato dalla corrente i_1 alla prima porta e con la seconda porta, la cui tensione è v_2 , a vuoto. Conseguentemente il rapporto v_2/i_1 coincide con la transresistenza r_{21} della matrice $\mathbf{R}$ del DBI a ponte (vedere Cap. 9-FCE) :

$$v_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \Rightarrow r_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2 = 0}$$



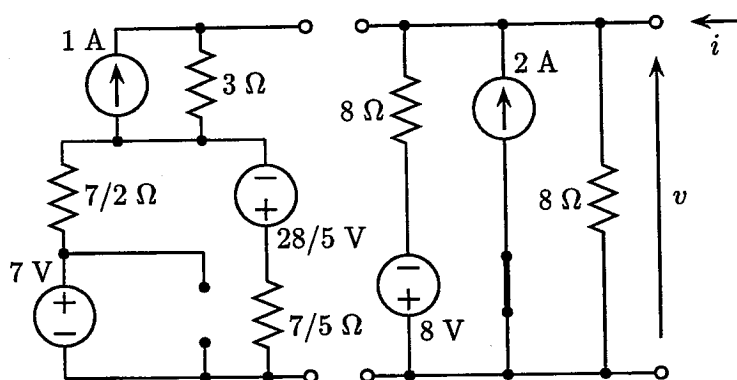
0.1.4 Esercizio AP1/20/12/96 : Bipolo composto con resistori, sVi e sIi



Il bipolo composto adinamico in figura è costituito da tre $\hat{\mathcal{V}}$ costanti, due $\hat{\mathcal{I}}$ costanti e sette $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare un modello equivalente del bipolo composto.

• Il $\mathcal{R}(7/3 \Omega) \parallel \hat{\mathcal{V}}(7 \text{ V})$ è sostituito dalla $\hat{\mathcal{V}}(7 \text{ V})$, mentre il $\mathcal{R}(6 \Omega) \parallel \hat{\mathcal{I}}(2 \text{ A})$ è sostituito dalla $\hat{\mathcal{I}}(2 \text{ A})$.



• Il bipolo composto è costituito da ripetute connessioni serie e parallelo, tra loro alternate, di bipoli più semplici in genere nonomogenei. Per eseguire i calcoli conviene usare il modello di Thévenin per ciascuna connessione serie e il modello di Norton per ciascuna connessione parallelo.

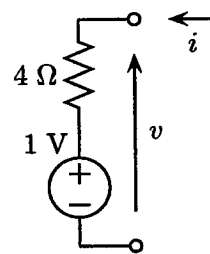
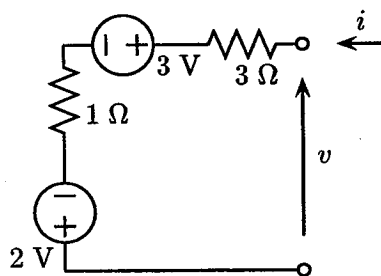
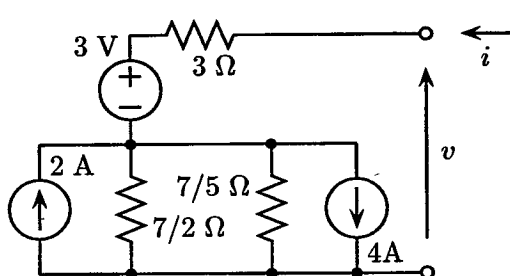
• All'interno del bipolo composto complessivo consideriamo il bipolo composto C^a contenente i $\mathcal{R}(7/2 \Omega)$, $\mathcal{R}(7/5 \Omega)$ e $\mathcal{R}(3 \Omega)$ e le $\hat{\mathcal{V}}(7 \text{ V})$, $\hat{\mathcal{V}}(28/5 \text{ V})$ e $\hat{\mathcal{I}}(1 \text{ A})$. Il bipolo C^a è a sua volta costituito da tre bipoli nonimpressivi e nonomogenei, due rappresentati dal modello di Thévenin e uno dal modello di Norton. Trasformiamo ciascuno di questi modelli nel modello duale:

$$\text{primo bipolo : } \hat{\mathcal{V}}(7 \text{ V}) \parallel \mathcal{R}(7/2 \Omega) \Rightarrow \hat{\mathcal{I}}(2 \text{ A}) \parallel \mathcal{R}(7/2 \Omega)$$

$$\text{secondo bipolo : } \hat{\mathcal{V}}(28/5 \text{ V}) \parallel \mathcal{R}(7/5 \Omega) \Rightarrow \hat{\mathcal{I}}(4 \text{ A}) \parallel \mathcal{R}(7/5 \Omega)$$

$$\text{terzo bipolo : } \hat{\mathcal{I}}(1 \text{ A}) \parallel \mathcal{R}(3 \Omega) \Rightarrow \hat{\mathcal{V}}(3 \text{ V}) \parallel \mathcal{R}(3 \Omega)$$

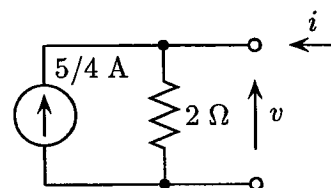
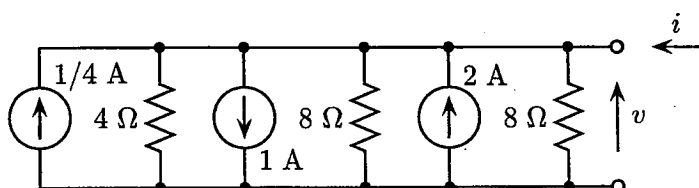
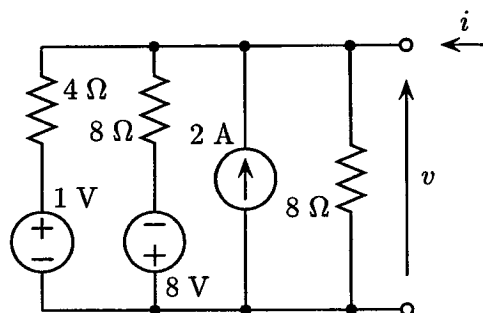
e otteniamo il modello di Thévenin del bipolo C^a :



• Inseriamo il modello di Thévenin di C^a nel bipolo composto complessivo: nel circuito compaiono due bipoli nonimpressivi e nonomogenei rappresentati dal modello di Thévenin. Ciascuno di essi è sostituito dal rispettivo modello di Norton:

$$\hat{\mathcal{V}}(1 \text{ V}) \parallel \mathcal{R}(4 \Omega) \rightarrow \hat{\mathcal{I}}(1/4 \text{ A}) \parallel \mathcal{R}(4 \Omega)$$

$$\hat{\mathcal{V}}(8 \text{ V}) \parallel \mathcal{R}(8 \Omega) \rightarrow \hat{\mathcal{I}}(1 \text{ A}) \parallel \mathcal{R}(8 \Omega)$$



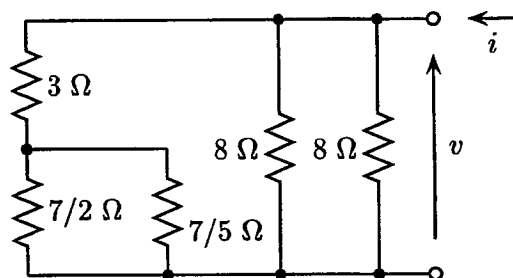
Risultato: il modello di Norton del bipolo composto originario viene ottenuto sommando le correnti impresse delle tre $\hat{\mathcal{I}}$ e le conduttanze dei tre $\mathcal{R}$: $\mathcal{I}(5/4 \text{ A}) \parallel \mathcal{R}(2 \Omega)$.

Se richiesto anche il modello equivalente di Thévenin può essere ottenuto: $\mathcal{V}(5/2 \text{ V}) \parallel \mathcal{R}(2 \Omega)$.

Commento: Questo esercizio è stato risolto affrontando alcune ripetute trasformazioni tra il modello di Thévenin (controllato in corrente) e il modello di Norton (controllato in tensione) di

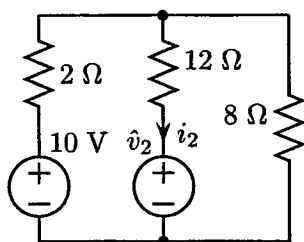
bipoli adinamici lineari e nonomogenei. Le ben note regole stabilite dai teoremi di Thévenin e Norton (Cap. 11-FCE) non sono state usate. Comunque il problema può essere risolto usando uno di questi teoremi.

Per esempio la resistenza interna del bipolo composito, che è risultata di $2\ \Omega$, coincide con quella del bipolo omogeneo associato: la verifica può essere eseguita immediatamente eseguendo le sostituzioni $\hat{\mathcal{V}} \rightarrow \text{c.c.}$ e $\hat{\mathcal{I}} \rightarrow \text{c.a.}$ nel bipolo composito originario.



0.2 PROBLEMI INVERSI SEMPLICI SUI CIRCUITI

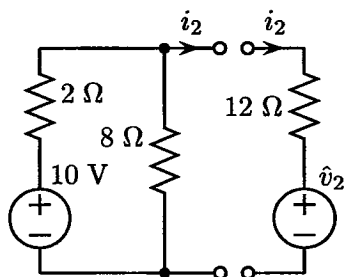
0.2.1 Esercizio E1/17/02/98 : Problema adinamico inverso



Il circuito adinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_1 = 10\text{ V})$, una $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_2)$, un $\mathcal{R}(2\ \Omega)$, un $\mathcal{R}(12\ \Omega)$ e un $\mathcal{R}(8\ \Omega)$.

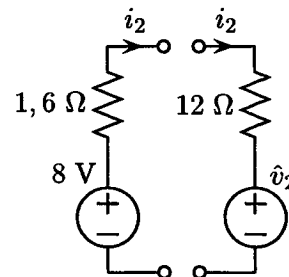
Quesito : Calcolare la tensione impressa incognita $\hat{v}_2$ sapendo che la corrente i_2 è nulla.

• Suddividiamo il circuito in due bipoli compositi : il bipolo $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_2) \nmid \mathcal{R}(12\ \Omega)$ e quello complementare $[\hat{\mathcal{V}}(10\text{ V}) \nmid \mathcal{R}(2\ \Omega)] \parallel \mathcal{R}(8\ \Omega)$.



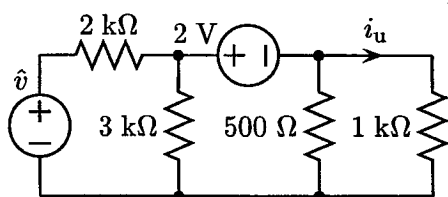
• La corrente comune ai due bipoli complementari è proprio la corrente i_2 . Sostituiamo il bipolo $[\hat{\mathcal{V}}(10\text{ V}) \nmid \mathcal{R}(2\ \Omega)] \parallel \mathcal{R}(8\ \Omega)$ col rispettivo modello di Thévenin :

$\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_{eq} = 8\text{ V}) \nmid \mathcal{R}(r_{eq} = 1,6\ \Omega)$.



Risultato : Siccome la corrente i_2 , comune ai due bipoli, è nulla la tensione impressa incognita $\hat{v}_2$ coincide necessariamente con quella del bipolo complementare : $\hat{v}_2 = 8\text{ V}$.

0.2.2 Esercizio E1/02/02/99 : problema inverso in circuito adinamico

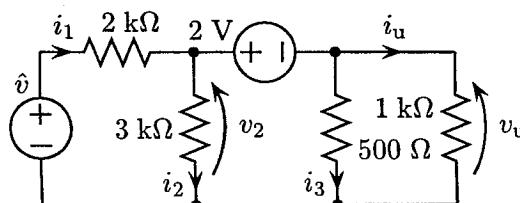


Il circuito adinamico in figura è costituito da due $\hat{\mathcal{V}}$ e quattro $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la tensione impressa $\hat{v}$ della $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v})$ sapendo che la corrente i_u vale 7 mA .

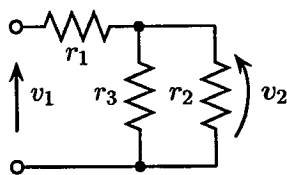
• Cominciando dalla corrente i_u e andando verso sinistra, possiamo scrivere le seguenti equazioni dovute alle due leggi di Kirchhoff :

- Tensione $v_u = 1000\ i_u = 7\text{ V}$.
- Corrente $i_3 = v_u/500 = 14\text{ mA}$.
- Tensione $v_2 = v_u + 2 = 9\text{ V}$.
- Corrente $i_2 = v_2/3000 = 3\text{ mA}$.
- Corrente $i_1 = i_u + i_2 + i_3 = 24\text{ mA}$.
- Tensione $\hat{v} = v_2 + 2000 \times i_1 = 57\text{ V}$.



Commento : Il metodo usato è il metodo della falsa posizione (vedere Cap. 7-FCE) per le reti a scala : in questo caso all'interno della rete vi è un bipolo impressivo e non omogeneo : la $\hat{V}$ (2 V) .

0.2.3 Esercizio E1/09/01/99 : problema inverso in bipolo adinamico



Il circuito in figura è un partitore resistivo comprendente i $\mathcal{R}\langle r_1 = 40 \Omega \rangle$, $\mathcal{R}\langle r_2 = 120 \Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$.

Quesito : Calcolare la resistenza incognita r_3 , sapendo che il rapporto v_2/v_1 è uguale a 0,60 .

• Indichiamo con r_p la resistenza del parallelo dei $\mathcal{R}\langle r_2 = 120 \Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$.

• La regola del partitore di tensione ci dice che : $\frac{r_p}{r_1 + r_p} = 0,60 \Rightarrow r_p = r_1 / (1/0,60 - 1) = 40 \times 0,6/0,4 = 60 \Omega$

Risultato : Poichè $r_p = 60 \Omega$ e $r_2 = 120 \Omega$ si ha : $r_3 = 120 \Omega$.

0.2.4 Esercizio E1/28/07/98 : problema inverso sulla potenza in DB adinamico

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1600 & r_m \\ r_m & 2500 \end{bmatrix}$$

Sia data la matrice resistenza di un doppio bipolo adinamico e reciproco, di cui non è noto i valori delle transresistenze $r_m = r_{12} = r_{21}$.

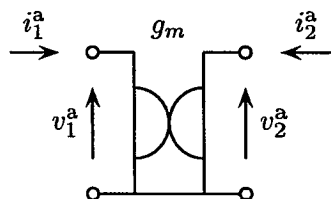
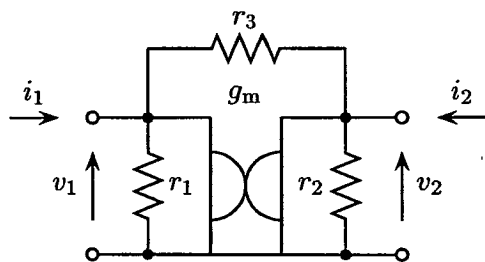
Quesito : Calcolare il valore massimo $r_m^{\max}$ di r_m tale che il doppio bipolo sia ancora dissipativo.

• La dissipatività del doppio bipolo richiede che la matrice $\mathbf{R}$ sia (semi)definita positiva. A sua volta la (semi)definitezza positiva di $\mathbf{R}$ richiede che gli elementi sulla diagonale $r_{11} = 1600 \Omega$ e $r_{22} = 2500 \Omega$ e il determinante $\det(\mathbf{R}) = r_{11} r_{22} - r_m^2$ siano positivi o nulli.

Risultato La non-negatività del determinante si ha per $-\sqrt{r_{11} r_{22}} \leq r_m \leq \sqrt{r_{11} r_{22}}$. Quindi il valore cercato è $r_m^{\max} = \sqrt{r_{11} r_{22}} = 2000 \Omega$.

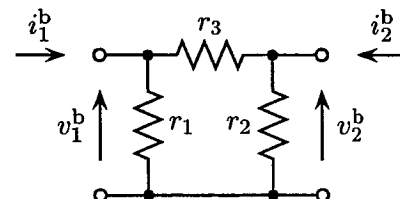
0.3 PROBLEMI SEMPLICI SULLA POTENZA NEI BIPOLI E DOPPI BIPOLI

0.3.1 Esercizio OR6/08/11/96 : Potenza nei DB omogenei



$$i_1 = i_1^a + i_1^b, \quad i_2 = i_2^a + i_2^b$$

$$v_1 = v_1^a = v_1^b, \quad v_2 = v_2^a = v_2^b$$



Il DBT composto adinamico in figura è costituito da un giratore e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Scrivere l'espressione in forma letterale della potenza istantanea assorbita dal DBT composto in funzione delle tensioni alle porte.

Il DBT composto risulta costituito dal parallelo di un giratore e di un triangolo costituito dai $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$, $\mathcal{R}\langle r_2 \rangle$ e $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$.

• Siccome le tensioni alle porte sono scelte come grandezze indipendenti, conviene calcolare la matrice $\mathbf{G}$ del DBT composto come somma della matrice $\mathbf{G}^a$ del giratore e della matrice $\mathbf{G}^b$ del DBT a triangolo :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^a + \mathbf{G}^b = \begin{bmatrix} 0 & g_m \\ -g_m & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/r_1 + 1/r_3 & -1/r_3 \\ -1/r_3 & 1/r_2 + 1/r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/r_1 + 1/r_3 & -1/r_3 + g_m \\ -1/r_3 - g_m & 1/r_2 + 1/r_3 \end{bmatrix}$$

- L'espressione della potenza istantanea $p(t)$ in funzione delle tensioni $v_1(t)$ e $v_2(t)$ alle porte è

$$p(t) = [v_1(t) \quad v_2(t)] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = g_{11} v_1(t)^2 + (g_{12} + g_{21}) v_1(t) v_2(t) + g_{22} v_2(t)^2$$

Risultato : Sostituendo le espressioni delle (trans)conduttanze si ottiene :

$$p(t) = (1/r_1 + 1/r_3) v_1(t)^2 + (-2/r_3 + g_m - g_m) v_1(t) v_2(t) + (1/r_2 + 1/r_3) v_2(t)^2$$

$$p(t) = (1/r_1 + 1/r_3) v_1(t)^2 - 2/r_3 v_1(t) v_2(t) + (1/r_2 + 1/r_3) v_2(t)^2$$

Commento : La precedente espressione ci dice che la potenza istantanea assorbita dal DBT composto coincide con quella assorbita dal DBT a triangolo. Questo risultato era prevedibile : infatti la potenza assorbita da un doppio bipolo adinamico omogeneo, di cui sia nota una matrice cardinale, coincide con la forma quadratica omogenea associata a questa matrice cardinale. Dall'algebra noi sappiamo che qualsiasi matrice quadrata A può essere scomposta nella somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica :

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}[A + A^T]}_{\text{simmetrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}[A - A^T]}_{\text{antisimmetrica}} = A^{\text{sm}} + A^{\text{as}}$$

Inoltre la forma quadratica omogenea $x^T A x$ di una matrice quadrata qualsiasi A coincide con quella della componente simmetrica della matrice stessa :

$$x^T A x = x^T A^{\text{sm}} x + x^T A^{\text{as}} x = x^T A^{\text{sm}} x$$

Infatti la forma quadratica di qualsiasi matrice antisimmetrica è identicamente nulla. La matrice G del giratore è proprio di questo tipo.

0.3.2 Esercizio E1/09/09/97 : Potenza nei DB reciproci

Il DBT adinamico lineare e omogeneo in figura è costituito da tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare l'espressione analitica della potenza assorbita dal DBT in funzione delle tensioni v_1 e v_2 delle due porte.

- La potenza p assorbita dal DBT coincide con la somma delle potenze p_a , p_b e p_c assorbite dai tre $\mathcal{R}$: $p = p_a + p_b + p_c$.

- La potenza assorbita da ciascuno dei tre $\mathcal{R}$ viene calcolata facilmente in funzione della tensione ai capi del $\mathcal{R}$. Si ha

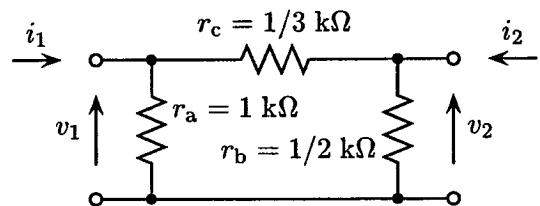
$$p_a = v_1^2/r_a = v_1^2/1000 \quad , \quad p_b = v_2^2/r_b = 2 v_2^2/1000 \quad , \quad p_c = (v_1 - v_2)^2/r_c = 3 (v_1 - v_2)^2/1000$$

Risultato : Sommando le tre potenze p_a , p_b e p_c si ottiene la forma quadratica della p :

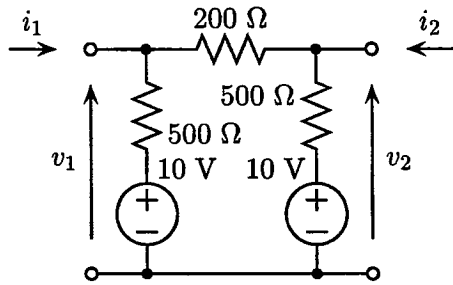
$$p = (v_1^2 + 2 v_2^2 + 3 (v_1 - v_2)^2)/1000 = 4 v_1^2 + 5 v_2^2 - 6 v_1 v_2 \text{ mW}$$

Commento : Alternativamente, l'espressione della potenza p può essere calcolata mediante la forma quadratica omogenea associata alla matrice delle conduttanze G (vedere Cap. 8-FCE)

$$P = [v_1 \quad v_2] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = [v_1 \quad v_2] \begin{bmatrix} 4/1000 & -3/1000 \\ -3/1000 & 5/1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$



0.3.3 Esercizio AP5/23/07/97 : Potenza massima in un DB

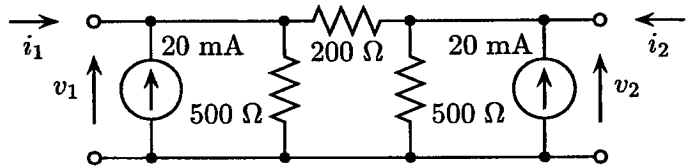


Il DBT adinamico lineare e nonomogeneo in figura è costituito da un triangolo di due bipoli nonomogenei (ciascuno costituito dal $\hat{\mathcal{V}}(10 \text{ V}) \uparrow \mathcal{R}(500 \Omega)$) e un $\mathcal{R}(200 \Omega)$.

Quesito : Calcolare la potenza massima che il doppio bipolo è in grado di generare.

La struttura a triangolo del DBT ci suggerisce di calcolare la rappresentazione controllata in tensione.

- Conviene sostituire i due bipoli nonomogenei, identici tra loro, col modello di Norton : $\hat{\mathcal{I}}(20 \text{ mA}) \parallel \mathcal{R}(500 \Omega)$.



L'analisi del circuito in figura ci consente di calcolare direttamente la rappresentazione controllata in tensione :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 10^{-3} & -5 \cdot 10^{-3} \\ -5 \cdot 10^{-3} & 7 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.02 \end{bmatrix}$$

- La potenza p erogata dal DBT

$$p = -i_1 v_1 - i_2 v_2 = -g_{11} v_1^2 - g_{22} v_2^2 - (g_{12} + g_{21}) v_1 v_2 - \hat{i}_1 v_1 - \hat{i}_2 v_2$$

- Deriviamo la potenza p rispetto alla due tensioni v_1 e v_2 del DBT

$$\frac{\partial p}{\partial v_1} = -14 \cdot 10^{-3} v_1 + 10^{-2} v_2 + 0.02, \quad \frac{\partial p}{\partial v_2} = -14 \cdot 10^{-3} v_2 + 10^{-2} v_1 + 0.02$$

Annullando entrambe le derivate parziali, otteniamo il sistema algebrico

$$\left. \begin{aligned} -14 \cdot 10^{-3} v_1 + 10^{-2} v_2 + 0.02 &= 0 \\ -14 \cdot 10^{-3} v_2 + 10^{-2} v_1 + 0.02 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 14 \cdot 10^{-3} & -10^{-2} \\ -10^{-2} & 14 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

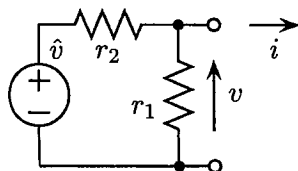
la cui soluzione risulta

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \cdot 10^{-3} & -10^{-2} \\ -10^{-2} & 14 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.02 \end{bmatrix} = \frac{31250}{3} \begin{bmatrix} 14 \cdot 10^{-3} & 10^{-2} \\ 10^{-2} & 14 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ V}$$

Risultato : L'unico valore del vettore $[v_1 \ v_2]^T$ in cui si annullano le due derivate prime non può che essere un massimo della potenza erogata. Infatti la matrice $\mathbf{G}$ è definita positiva.

0.3.4 Esercizio E1/23/02/99 : potenza in bipolo adinamico

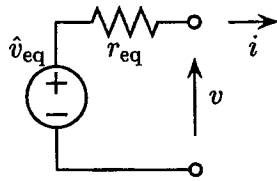
Il bipolo composito in figura opera in regime costante. Le resistenze r_1 e r_2 sono positive ma ignote come la tensione impressa $\hat{v}$.



Quesito : Calcolare, in forma letterale, la potenza massima $P^{\max}$ erogabile dal bipolo composito.

- La potenza massima erogabile, nota anche come potenza disponibile, dipende esclusivamente dai parametri del modello di THÉVENIN ovvero NORTON del bipolo esaminato. Nel nostro caso abbiamo

$$\hat{v}_{\text{eq}} = \hat{v} r_1 / (r_1 + r_2) \quad \text{e} \quad r_{\text{eq}} = (r_1 r_2) / (r_1 + r_2)$$



Risultato : La formula della potenza disponibile ci dice che

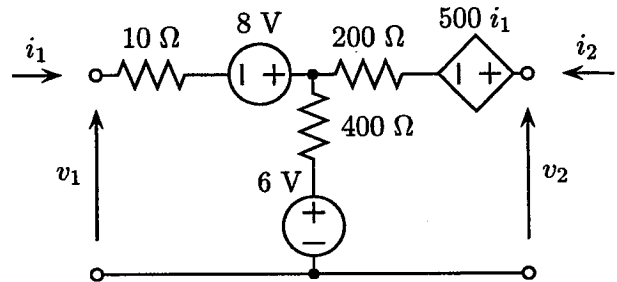
$$P_{\text{disp}} = \frac{(\hat{v}_{\text{eq}})^2}{4 r_{\text{eq}}} = \frac{(\hat{v} r_1)^2 / (r_1 + r_2)^2}{4 (r_1 r_2) / (r_1 + r_2)} = \frac{\hat{v}^2 r_1}{4 r_2 (r_1 + r_2)}$$

0.3.5 Esercizio E1/09/07/98 : potenza in DB adinamico composito

Il doppio bipolo adinamico in figura opera in regime costante.

Quesito : Calcolare la potenza massima P_{max} erogabile dalla seconda porta, qualora la prima porta sia a vuoto.

• Calcoliamo il modello di Thévenin della seconda porta, qualora la prima porta sia a vuoto ($i_1 = 0$) : la $\mathcal{V}_I \langle 500 i_1 \rangle$ viene sostituita da un c.c. e la seconda porta è costituita dal $\hat{\mathcal{V}} \langle 6 \text{ V} \rangle \parallel \mathcal{R} \langle 400 + 200 = 600 \Omega \rangle$.

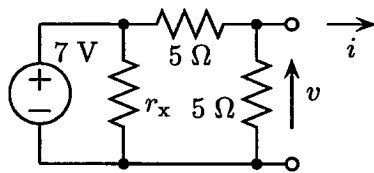
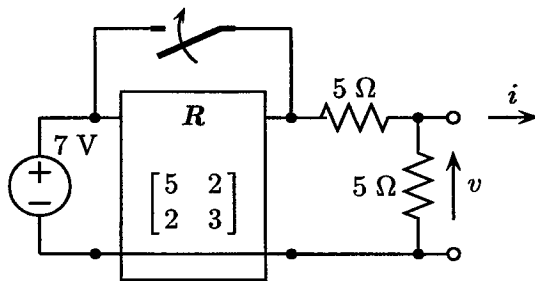


Risultato : Il ben noto teorema sulla potenza massima erogabile da una sorgente nonideale tempo-invariante (vedere Cap. 7-FCE) ci consente di scrivere il risultato :

$$P_{\text{max}} = \frac{\hat{v}^2}{4 r_s} = \frac{36}{2400} = 15 \text{ mW}$$

0.4 BIPOLI COMPOSITI CONTENENTI UN DB

0.4.1 Esercizio E3/20/02/97 : bipolo composto da DB generico, sVi e resistori



Il bipolo composto adinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, un DBT di cui è nota la matrice $\mathcal{R}$ un int.id. e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare il modello di Thévenin del bipolo composto, qualora l'int.id. sia chiuso.

• Con l'int.id. chiuso il DBT di cui è nota la matrice $\mathcal{R}$ equivale a al $\mathcal{R} \langle r_x \rangle$ in parallelo alla $\hat{\mathcal{V}} \langle 7 \text{ V} \rangle$, in cui il valore di r_x non è di interesse perché $\mathcal{R} \langle r_x \rangle$ è influente.

• La resistenza r_{eq} del modello di Thévenin, calcolata sostituendo la $\hat{\mathcal{V}} \langle 7 \text{ V} \rangle$ con un c.c., risulta uguale a quella di due $\mathcal{R} \langle 5 \Omega \rangle$ in parallelo : $r_{\text{eq}} = 2,5 \Omega$. La tensione impressa $\hat{v}_{\text{eq}}$ del modello di Thévenin coincide con la tensione v , quando $i = 0$ (tensione a vuoto). Applicando la regola del partitore si ha :

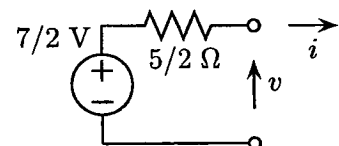
$$\hat{v}_{\text{eq}} = 7 \times 5 / (5 + 5) = 3,5 \text{ V}.$$

Risultato : Il modello di Thévenin del bipolo composto risulta :

$$v = \hat{v}_{\text{eq}} - r_{\text{eq}} i = 7/2 - 5/2 i.$$

Commento : Per soddisfare il lettore curioso, diamo anche il "valore inutile" della resistenza $r_x = 11/4 \Omega$.

Commento : Il $\mathcal{R} \langle r_x \rangle$ è ottenuto dal DBT adinamico connettendo in parallelo le sue porte. Il calcolo di r_x consiste nel calcolare la matrice conduttanza $\mathcal{G} = \mathcal{R}^{-1}$ e nel sommare i suoi quattro elementi : l'inverso di questa somma coincide con r_x :



$$r_x = \frac{1}{g_{11} + g_{12} + g_{21} + g_{22}}$$

0.5 DOPPI BIPOLI COMPOSITI CONTENENTI ESCLUSIVAMENTE BIPOLI

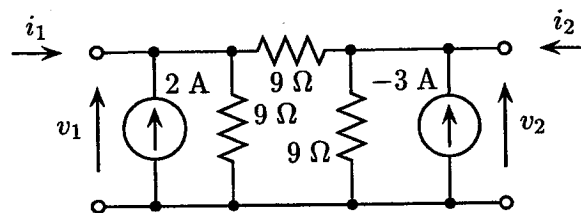
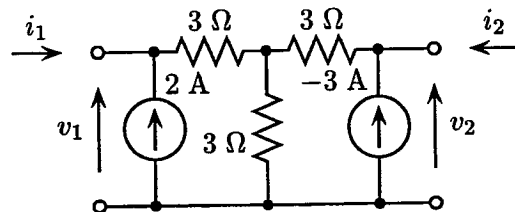
0.5.1 Esercizio E1/13/09/96 : DB composti da resistori, sIi e sIi

Il DBT composito adinamico in figura è costituito da due $\hat{\mathcal{I}}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la rappresentazione controllata in tensione del DBT composito.

- La rappresentazione controllata in tensione è del tipo $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$.
- All'interno del DBT composito vi sono due $\hat{\mathcal{I}}$ costanti, ciascuna in parallelo ad una porta.

- Il DBT omogeneo associato è equilibrato essendo costituito da una stella di tre $\mathcal{R} \langle 3 \Omega \rangle$. Sostituiamo il DBT equilibrato a stella con il DBT a triangolo equivalente costituito da tre $\mathcal{R} \langle 3 \times 3 = 9 \Omega \rangle$:

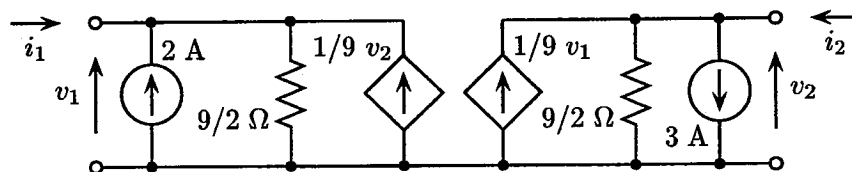


Risultato : Ricordando l'espressione della matrice $\mathbf{G}$ di un DBT formato da un triangolo di $\mathcal{R} \langle 9 \Omega \rangle$, la rappresentazione $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$ del modello equivalente può essere scritta direttamente :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/9 & -1/9 \\ -1/9 & 2/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Commento : La matrice $\mathbf{G}$ è simmetrica dal momento che il doppio bipolo omogeneo associato è reciproco, essendo composto esclusivamente da componenti reciproci.

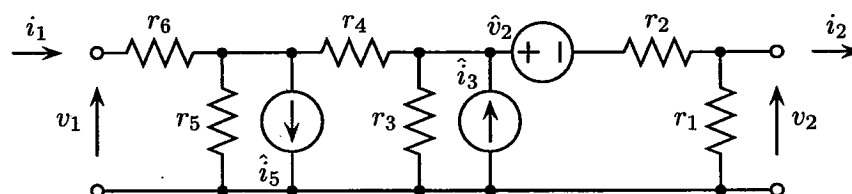
Commento : Dalla rappresentazione controllata in tensione costruiamo il corrispondente modello del DBT :



0.5.2 Esercizio AP3/20/12/96 : DB composto da resistori, sVi e sIi

Il DBT composito adinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ costante, due $\hat{\mathcal{I}}$ costanti, e sei $\mathcal{R}$. Il DBT composito può essere visto come una rete a scala. I valori numerici delle resistenze e delle grandezze impresse sono :

$$\begin{aligned} r_1 &= 4 \Omega, & r_2 &= 3 \Omega \\ r_3 &= 2 \Omega, & r_4 &= 1 \Omega \\ r_5 &= 1/2 \Omega, & r_6 &= 5 \Omega \\ \hat{v}_2 &= 2 \text{ V}, & \hat{i}_3 &= 2 \text{ A} \\ \hat{i}_5 &= 3 \text{ A} \end{aligned}$$



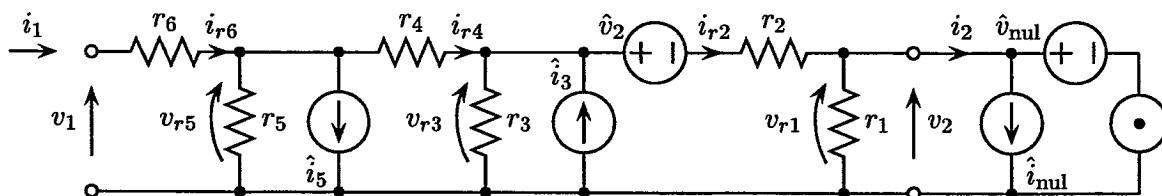
Quesito : Calcolare la rappresentazione di trasmissione diretta del DBT composito.

- Avendo scelto la convenzione nonnormale per i_2 , la rappresentazione di trasmissione diretta ha la forma :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{i}_1 \end{bmatrix}$$

- Chiudiamo la prima porta (definita dalle grandezze dipendenti) del DBT composito su un noratore e la seconda porta (definita dalle grandezze indipendenti) su un "bipolo patologico" tale che fissi sia la tensione v_2 sia la corrente i_2 . Questo bipolo è un parente stretto del nullatore nel senso che esso ha una coppia di relazioni costitutive $v_2 = \hat{v}_{\text{nul}}$ e $i_2 = \hat{i}_{\text{nul}}$, cioè esso è simultaneamente una $\hat{\mathcal{V}}$ e una $\hat{\mathcal{I}}$ come un nullatore è nello stesso tempo un c.c. e un c.a. . Il doppio vincolo alla seconda porta può essere accettato dal momento che la prima porta è priva di vincoli (noratore).

- Un modello del bipolo patologico connesso alla seconda porta è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}_{\text{nul}}\rangle$ con corrente impressa in parallelo alla serie di una $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_{\text{nul}}\rangle$ e un nullatore :



- L'analisi del DBT composito può essere sviluppata partendo dalla tensione $v_2 = \hat{v}_{\text{nul}}$ e corrente $i_2 = \hat{i}_{\text{nul}}$ e risalendo di ramo in ramo ai valori della tensione v_1 e della corrente i_1 della prima porta. In questa analisi le grandezze impresse $\hat{v}_{\text{nul}}$ e $\hat{i}_{\text{nul}}$ rimangono variabili (incognite) del problema :

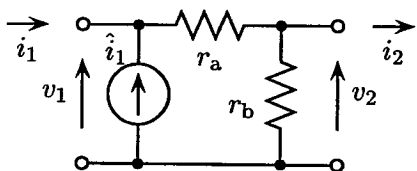
$$\begin{aligned}
 v_{r1} = \hat{v}_{\text{nul}} &\Rightarrow i_{r2} = i_{r1} + \hat{i}_{\text{nul}} = \hat{v}_{\text{nul}}/4 + \hat{i}_{\text{nul}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow v_{r3} = v_{r1} + i_{r2} r_2 + \hat{v}_2 = \hat{v}_{\text{nul}} 7/4 + \hat{i}_{\text{nul}} 3 + 2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow i_{r4} = v_{r3}/r_3 + i_{r2} - \hat{i}_3 = \hat{v}_{\text{nul}} 9/8 + \hat{i}_{\text{nul}} 5/2 - 1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow v_{r5} = v_{r3} + i_{r4} r_4 = \hat{v}_{\text{nul}} 23/8 + \hat{i}_{\text{nul}} 11/2 + 1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow i_1 = i_{r6} = v_{r5}/r_5 + i_{r4} + \hat{i}_5 = \hat{v}_{\text{nul}} 55/8 + \hat{i}_{\text{nul}} 27/2 + 4 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow v_1 = v_{r5} + i_{r6} r_6 = \hat{v}_{\text{nul}} 149/4 + \hat{i}_{\text{nul}} 73 + 21
 \end{aligned}$$

Risultato : Le due ultime equazioni della sequenza del punto precedente sono proprio le due relazioni costitutive della rappresentazione di trasmissione diretta :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 149/4 & 73 \\ 55/8 & 27/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Commento : Il metodo usato in questo esercizio può essere visto come una modifica del metodo della falsa posizione. La modifica consiste nel fatto che entrambe le grandezze alla seconda porta sono supposte assegnate. In un certo senso questo metodo equivale a scomporre la rete a scala nella cascata di DBT : questi DBT sono alternativamente costituiti da bipoli a quattro terminali e da coppie trasversali di bipoli e c.c. . Per esercizio si può risolvere il problema in questo secondo modo.

0.5.3 Esercizio E1/11/09/98 : analisi di DBT adinamico composito con resistori e sli



IL DBT adinamico composito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la rappresentazione di trasmissione diretta.

- Siccome la rappresentazione è del tipo $(v_1, i_1) \leftarrow (v_2, i_2)$ scriviamo v_1 e i_1 in funzione di v_2 e i_2 :

Dalla legge di Kirchhoff delle tensioni otteniamo : $v_1 = v_2 + r_a(i_1 + \hat{i}_1)$.

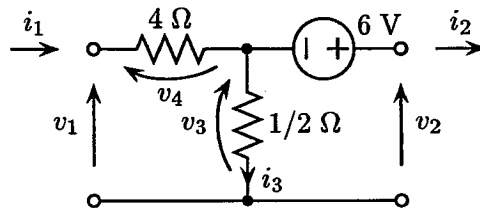
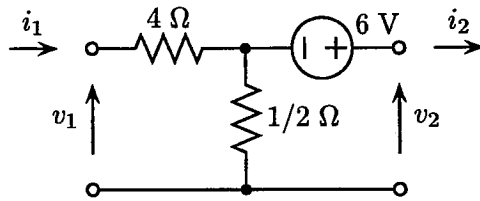
Dalla legge di Kirchhoff delle correnti otteniamo : $i_1 = -\hat{i}_1 + i_2 + v_2/r_b$.

- Essendo la corrente i_1 una grandezza dipendente, la sostituiamo nella prima equazione con l'aiuto della seconda : $v_1 = v_2 + r_a(i_2 + v_2/r_b) + r_a(\hat{i}_1 - \hat{i}_1) = (1 + r_a/r_b) v_2 + r_a i_2$.

Risultato : Dall'esame di queste equazioni otteniamo la rappresentazione di trasmissione diretta :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + r_a/r_b & r_a \\ 1/r_b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{i}_1 \end{bmatrix}$$

0.5.4 Esercizio E1/01/07/97 : DB composto da resistori e sVi



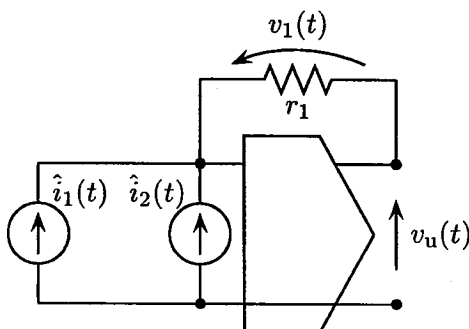
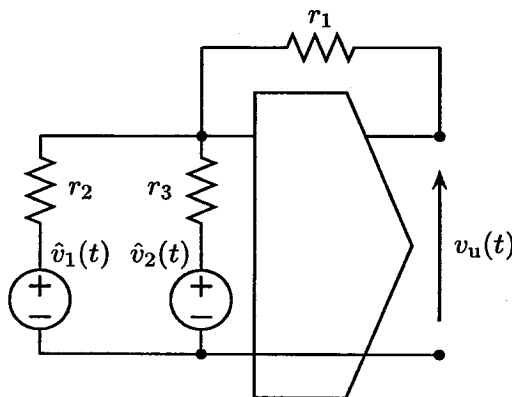
$$v_1 = v_4 + v_3 = 4 i_1 + v_3 = 4 (2 v_2 + i_2 - 12) + v_2 - 6 = 9 v_2 + 4 i_2 - 54 \text{ V}$$

Risultato : Dalle due precedenti equazioni scalari otteniamo la rappresentazione in forma matriciale :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{T'} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -54 \\ -12 \end{bmatrix}$$

0.6 DOPPI BIPOLI COMPOSITI CONTENENTI NULLORI

0.6.1 Esercizio E1/25/06/98 : funzioni di rete adinamiche con nullore



Il circuito adinamico in figura è costituito da un nullore tripolare, due $\hat{\mathcal{V}}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare l'espressione letterale della tensione $v_u(t)$ in funzione delle tensioni impresse $\hat{v}_1(t)$ e $\hat{v}_2(t)$.

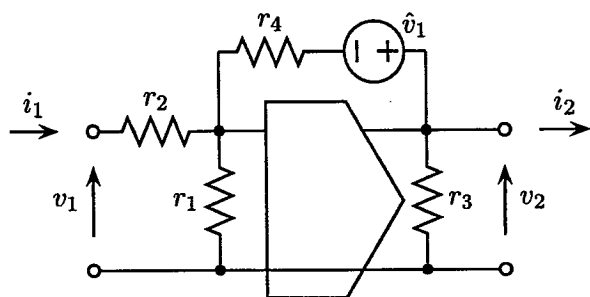
• Ciascuno dei due bipoli nonomogenei connessi in parallelo all'ingresso del nullore sono rimpiazzati dal rispettivo modello di Norton. A loro volta i $\mathcal{R}$ dei due modelli di Norton sono sostituiti da due c.a. poiché sono in parallelo al nullatore.

• La corrente fluente nel $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$ coincide con la somma delle correnti impresse $\hat{i}_1(t) = \hat{v}_1(t)/r_2$ e $\hat{i}_2(t) = \hat{v}_2(t)/r_3$.

Risultato : Siccome la tensione all'ingresso del nullore è nulla, la tensione $v_u(t)$ coincide, a parte il segno, con la tensione $v_1(t)$ ai capi del $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$:

$$v_u(t) = -v_1(t) = -r_1 [\hat{i}_1(t) + \hat{i}_2(t)] = -\frac{r_1}{r_2} \hat{v}_1(t) - \frac{r_1}{r_3} \hat{v}_2(t)$$

0.6.2 Esercizio E1/16/01/97 : DB composito con resistori, sVi e nullo



• Inoltre dal momento che noi siamo interessati solamente alla matrice T' , ci limitiamo a considerare il DBT composito omogeneo associato sostituendo la $\hat{V}\langle\hat{v}_1\rangle \rightarrow \text{c.c.}$.

• Siccome la matrice T' ha come grandezze indipendenti v_2 e i_2 e come grandezze dipendenti v_1 e i_1 , dobbiamo cercare di esprimere v_1 e i_1 in funzione di v_2 e i_2 .

• La corrente i_1 fluisce sia nel $\mathcal{R}\langle r_2 \rangle$ sia nel $\mathcal{R}\langle r_4 \rangle$ (cioè $i_4 = i_1$), dal momento che la corrente entrante nella porta d'ingresso (il nullatore) del nullo è nulla. Dal momento che anche la tensione della porta d'ingresso del nullo è nulla, si hanno le seguenti relazioni per le tensioni v_1 e v_2 del DBT composito omogeneo associato : $v_1 = r_2 i_1$ e $v_2 = -v_4 = -r_4 i_1$.

• Dalla seconda delle suddette equazioni si ottiene la seconda equazione della rappresentazione di trasmissione diretta : $i_1 = -1/r_4 v_2$. Facendo il rapporto delle due equazioni, i_1 viene eliminata e otteniamo la prima equazione della suddetta rappresentazione : $v_1 = -r_2/r_4 v_2$.

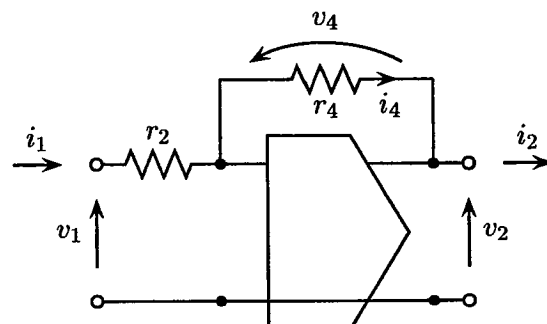
Risultato : Raccogliendo in forma matriciale le due equazioni, si ottiene la rappresentazione di trasmissione diretta, la cui matrice è la matrice T' cercata :

Commento : Siccome il determinante di T' è nullo, il DBT composito è unidirezionale. Inoltre i_2 risulta nonvincolata dal momento che gli elementi t'_{12} e t'_{22} sono nulli. Il DBT risulta equivalente alla sorgente pilotata nonideale in figura.

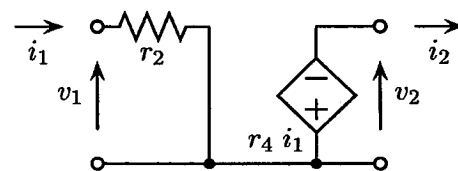
Il DBT composito adinamico in figura è costituito da una $\hat{V}$ costante, un nullo tripolare e quattro $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la matrice di trasmissione diretta T' del DBT composito.

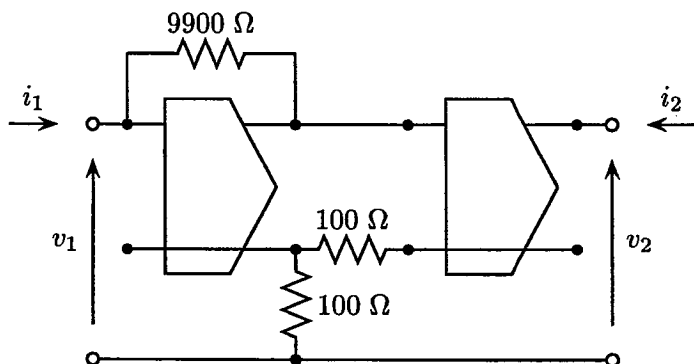
• Possiamo sostituire i $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$ e $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$ con due c.a. essendo essi in parallelo alle due porte del nullo.



$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_2/r_4 & 0 \\ -1/r_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$



0.6.3 Esercizio EA/09/07/98 : Analisi di DBT adinamico composito con due nullori



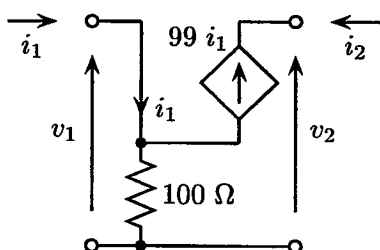
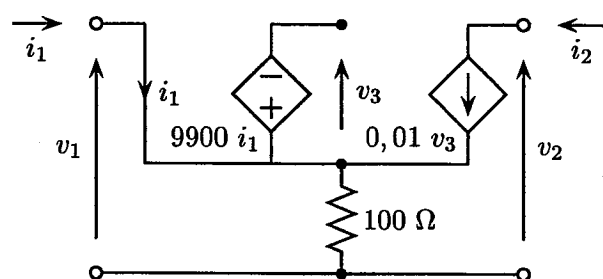
Il DBT adinamico composito in figura è costituito da due nullori tripolari e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la prima matrice ibrida del DBT composito.

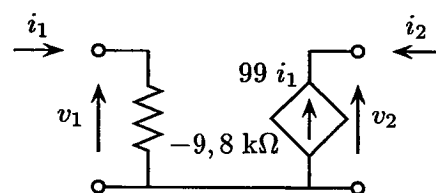
• All'interno del DBT adinamico possiamo individuare due DBT ciascuno composto da un nullore e un $\mathcal{R}$:

• **primo DBT** : Nullore tripolare di sinistra con il $\mathcal{R}$ (9900 Ω) connesso trasversalmente. Esso è equivalente a una $\mathcal{I}_V$ (9900 i_1) .

• **secondo DBT** : Nullore tripolare di destra con il $\mathcal{R}$ (100 Ω) in serie al terminale comune. Esso è equivalente a una $\mathcal{I}_V$ (0,01 v_3) .



• Siamo in presenza di una $\mathcal{I}_I$ tripolare con un $\mathcal{R}$ in serie al terminale comune. Per mezzo del secondo teorema di Miller, troviamo il DBT equivalente in figura.



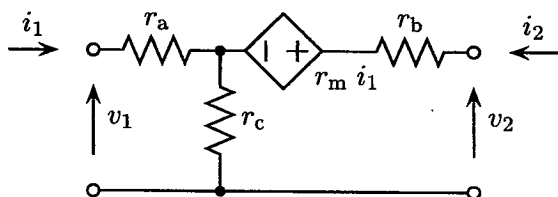
Risultato : Le relazioni costitutive del DBT in figura sono $v_1 = -9800 i_1$ e $i_2 = -99 i_1$, da cui si ottiene immediatamente la prima matrice ibrida :

$$H' = \begin{bmatrix} -9800 & 0 \\ -99 & 0 \end{bmatrix}$$

Commento : la resistenza della prima porta è negativa indipendentemente dalla corrente i_2 .

0.7 DOPPI BIPOLI COMPOSITI SEMPLICI CONTENENTI UNA SORGENTE PILOTATA

0.7.1 Esercizio E1/27/01/98 : DB composto da resistori e sVpI



Il DBT adinamico composito in figura è costituito da una $\mathcal{V}_I$ e da tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la matrice $\mathcal{R}$ del doppio bipolo in forma letterale.

• Siccome i_1 e i_2 sono le grandezze indipendenti della rappresentazione richiesta, occorre calcolare v_1 e v_2 in funzione di i_1 e i_2 .

• Applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni alle due porte, abbiamo :

$$\text{porta 1 : } v_1 = r_a i_1 + r_c (i_1 + i_2) \quad , \quad \text{porta 2 : } v_2 = r_b i_2 + r_m i_1 + r_c (i_1 + i_2)$$

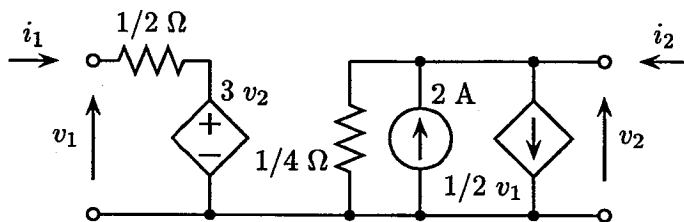
Risultato : Le due suddette equazioni possono essere riscritte in forma compatta : otteniamo la rappresentazione controllata in corrente del DBT, la cui matrice è proprio la matrice resistenza $\mathbf{R}$.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_a + r_c & r_c \\ r_m + r_c & r_b + r_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

0.7.2 Esercizio E1/08/11/96 : DB composto da resistori, sli, sVpV e sIpV

Il DBT composto adinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}$ costante, una $\mathcal{V}_V$, una $\mathcal{I}_V$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la rappresentazione $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$.



• Dall'esame della prima porta, composta dalla serie del $\mathcal{R}\langle 1/2 \Omega \rangle$ e della porta pilotata della $\mathcal{V}_V\langle 3 v_2 \rangle$, otteniamo l'equazione $v_1 = 1/2 i_1 + 3 v_2$. Esplicitando la corrente i_1 , otteniamo la prima delle equazioni scalari della rappresentazione $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$: $i_1 = 2 v_1 - 6 v_2$.

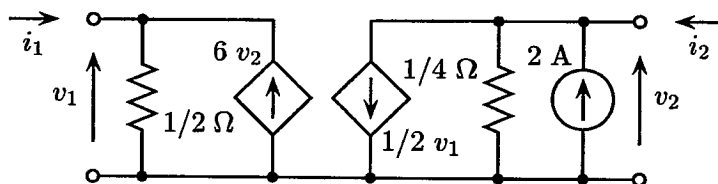
• Dall'esame della seconda porta, costituita dal parallelo del $\mathcal{R}\langle 1/4 \Omega \rangle$, dalla porta pilotata della $\mathcal{I}_V\langle 1/2 v_1 \rangle$ e dalla $\hat{\mathcal{I}}\langle 2 \text{ A} \rangle$, otteniamo la seconda delle equazioni scalari della rappresentazione $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$: $i_2 = 1/2 v_1 + 4 v_2 - 2$.

Risultato : Raccogliendo le due equazioni, otteniamo la rappresentazione $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1/2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Commento : La matrice della rappresentazione è la matrice conduttanza $\mathbf{G}$ i cui quattro elementi risultano nonnulli : il DBT composto è bidirezionale e nonreciproco. Questo risultato poteva essere previsto dalla presenza di due sorgenti pilotate all'interno del DBT composto.

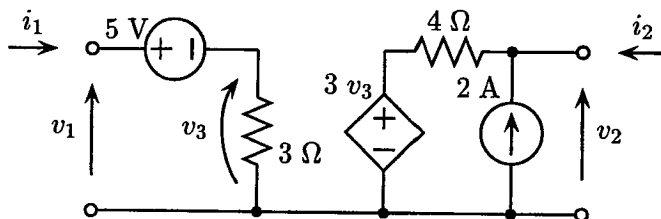
Commento : Dalla rappresentazione controllata in tensione, costruiamo il corrispondente modello del DBT composto :



0.7.3 Esercizio E1/23/07/96 : DB composti da resistori, sVi, sli e sVpV

Il DBT composto adinamico lineare nonomogeneo in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ costante, una $\hat{\mathcal{I}}$ costante, una $\mathcal{V}_V$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la rappresentazione $(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$ (prima rappresentazione ibrida).



• Dall'analisi del $\mathcal{R}\langle 3 \Omega \rangle \dagger \hat{\mathcal{V}}\langle 5 \text{ V} \rangle$ (prima porta), otteniamo l'equazione : $v_1 = v_3 + 5 = 3 i_1 + 5$. Questa è proprio la prima delle equazioni scalari costituenti la rappresentazione $(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$.

• Dall'analisi della seconda porta, in cui è presente la serie del $\mathcal{R}\langle 4 \Omega \rangle$ e della $\mathcal{V}_V\langle 3 v_3 \rangle$ a loro volta in parallelo alla $\hat{\mathcal{I}}\langle 2 \text{ A} \rangle$, otteniamo l'equazione : $i_2 = -2 + (v_2 - 3 v_3)/4$. Sostituendo $v_3 \rightarrow 3 i_1$, otteniamo la seconda delle equazioni scalari costituenti la rappresentazione $(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$: $i_2 = -9/4 i_1 + 1/4 v_2 - 2$.

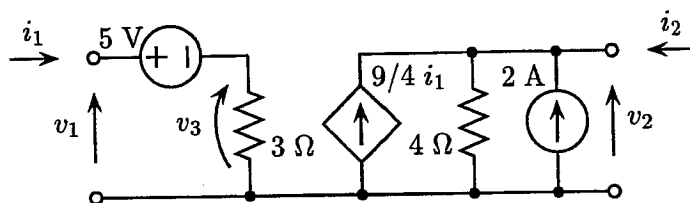
Risultato : Raccogliendo le due equazioni scalari, otteniamo la rappresentazione $(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$ in forma compatta :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Commento : La matrice $\mathbf{H}'$ è triangolare : infatti il DBT composto è unidirezionale $1 \rightarrow 2$.

Questo risultato è dovuto alla presenza della $\mathcal{V}_V\langle 3 v_3 \rangle$.

Commento : La conoscenza della prima rappresentazione ibrida ci consente di costruire il primo modello ibrido del DBT composito :

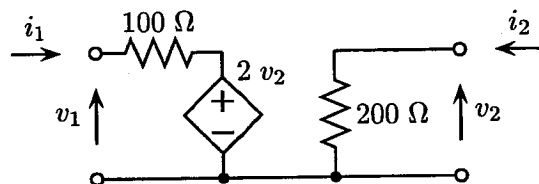


0.7.4 Esercizio E1/17/06/96 : DB composto da sVpV e resistori

Il DBT composito adinamico in figura è costituito da due $\mathcal{R}$ e una $\mathcal{V}_V$.

Quesito : Calcolare la matrice ibrida $\mathbf{H}''$.

- Il doppio bipolo composito è omogeneo : quindi non occorre costruire il doppio bipolo omogeneo associato.



- Le variabili dipendenti della seconda rappresentazione ibrida $(i_1, v_2) \leftarrow (v_1, i_2)$ sono i_1 e v_2 . La prima porta è composta dalla serie del $\mathcal{R}\langle 100 \Omega \rangle$ e della porta pilotata della $\mathcal{V}_V\langle 2 v_2 \rangle$: otteniamo l'equazione : $v_1 = 100 i_1 + 2 v_2$. La seconda porta è composta da un unico $\mathcal{R}\langle 200 \Omega \rangle$: otteniamo la seconda delle equazioni scalari costituenti la rappresentazione $(i_1, v_2) \leftarrow (v_1, i_2)$: $v_2 = 200 i_2$.

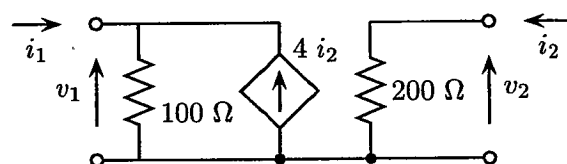
- Esplicitando i_1 dalla equazione $v_1 = 100 i_1 + 2 v_2$, otteniamo $i_1 = 0,01 v_1 - 0,02 v_2$ e, sostituendo la v_2 mediante la $v_2 = 200 i_2$, otteniamo la prima delle equazioni scalari della rappresentazione $(i_1, v_2) \leftarrow (v_1, i_2)$: $i_1 = 0,01 v_1 - 0,02 \times 200 i_2 = 0,01 v_1 - 4 i_2$.

Risultato : Raccogliendo le due equazioni scalari possiamo scrivere la rappresentazione $(i_1, v_2) \leftarrow (v_1, i_2)$, di cui $\mathbf{H}''$ è la matrice :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01 & -4 \\ 0,0 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Commento : Siccome la matrice $\mathbf{H}''$ è triangolare superiore, il doppio bipolo è unidirezionale $2 \rightarrow 1$. Questo risultato è dovuto alla $\mathcal{V}_V\langle 2 v_2 \rangle$ presente nel doppio bipolo composito.

Commento : La conoscenza della seconda rappresentazione ibrida ci consente di costruire il corrispondente modello equivalente del DBT composito :

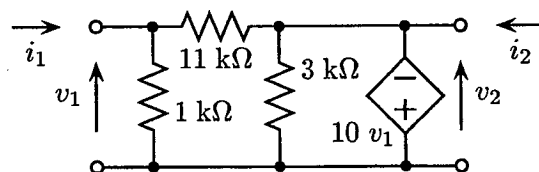


0.7.5 Esercizio E1/20/02/97 : DB composto da resistori e sVpV

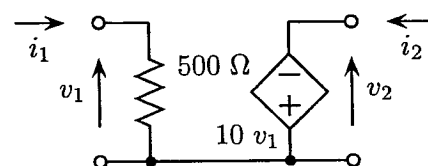
Il DBT composito lineare e nonomogeneo in figura è costituito da una $\mathcal{V}_V$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare il determinante della matrice di trasmissione diretta.

- Il $\mathcal{R}\langle 3 \text{ k}\Omega \rangle$ è in parallelo alla porta pilotata della $\mathcal{V}_V$ e è sostituito da un c.a. .



- Consideriamo la maglia costituita dal $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$, la cui tensione pilota la $\mathcal{V}_V$, dal $\mathcal{R}\langle 11 \text{ k}\Omega \rangle$ e dalla porta pilotata della stessa $\mathcal{V}_V$. In accordo al primo teorema di Miller, il $\mathcal{R}\langle 11 \text{ k}\Omega \rangle$ viene sostituito da un c.a. e in parallelo al $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$ pre-esistente viene connesso un $\mathcal{R}\langle 11/(10+1) = 1 \text{ k}\Omega \rangle$.



Risultato : Il DBT composito è evidentemente unidirezionale $1 \rightarrow 2$. In questo caso la teoria ci dice che il determinante della matrice $\mathbf{T}'$ è nullo.

Commento : Se uno non si fosse ricordato del suddetto risultato teorico, avrebbe potuto notare

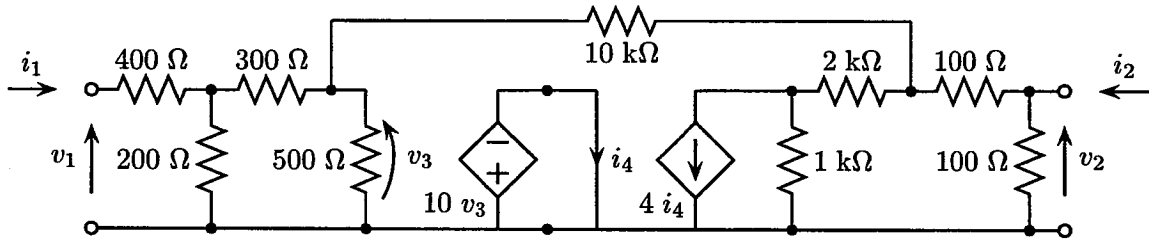
che la corrente i_2 del DBT composito non è coinvolta nelle relazioni costitutive del DBT. Questo risultato corrisponde a dire che gli elementi t'_{12} e t'_{22} di $\mathbf{T}'$ sono nulli e quindi anche $|\mathbf{T}'|$.

0.8 DOPPI BIPOLI COMPOSITI NON-SEMPLICI CONTENENTI SORGENTI PILOTATE

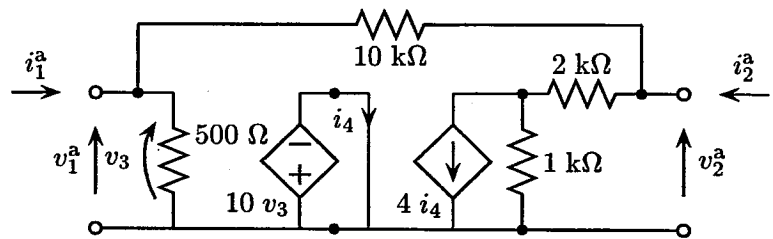
0.8.1 Esercizio EA/25/06/98 : Analisi di DB adinamico composito con sVpV e sIpI

Il DBT adinamico in figura è costituito da una $\mathcal{V}_V$, una $\mathcal{I}_I$, nove $\mathcal{R}$.

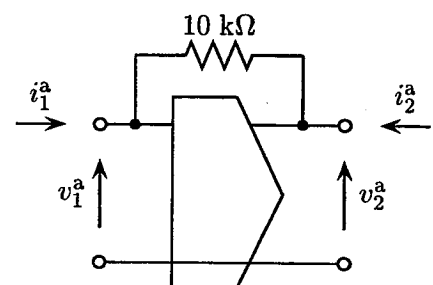
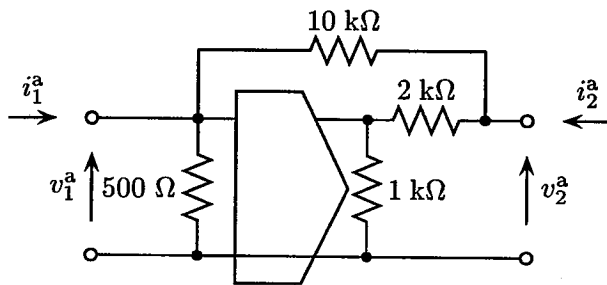
Quesito : Calcolare la matrice resistenza $\mathbf{R}$ del DBT composito.



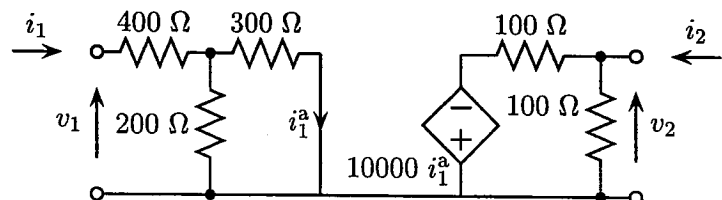
• All'interno del DBT composito adinamico individuiamo un altro DBT composito costituito da una $\mathcal{V}_V\langle 10v_3 \rangle$, una $\mathcal{I}_I\langle 4i_4 \rangle$ e quattro $\mathcal{R}$. Le tensioni e correnti di questo DBT sono indicate con v_1^a , v_2^a , i_1^a e i_2^a .



• La $\mathcal{V}_V\langle 10v_3 \rangle$ e la $\mathcal{I}_I\langle 4i_4 \rangle$ tripolari risultano in cascata per cui sono equivalenti a un unico nullore tripolare, come nella figura di sinistra. Notiamo che i $\mathcal{R}\langle 500\Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 1k\Omega \rangle$ possono essere rimossi (equivalgono a c.a.) poiché sono in parallelo alle porte del nullore, mentre il $\mathcal{R}\langle 2k\Omega \rangle$ è equivalente a un c.c. poiché è in serie alla seconda porta del nullore.



• Le relazioni costitutive del DBT in figura sono $v_1^a = 0$ e $v_2^a = -10000 i_1^a$, che provano che il DBT è una $\mathcal{V}_I\langle 10000 i_1^a \rangle$. Inseriamo questa $\mathcal{V}_I\langle 10000 i_1^a \rangle$ nel DBT originario (vedere prima figura):

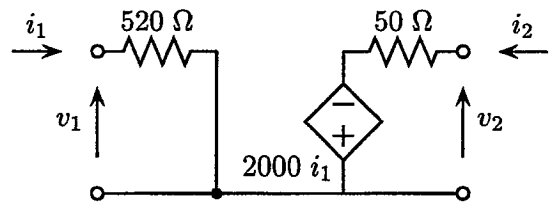


• La regola del partitore di corrente ci dice che esiste la relazione $i_1^a = 0,4 i_1$. Conseguentemente possiamo sostituire la corrente pilotante della $\mathcal{V}_T(10000 i_1^a) \rightarrow \mathcal{V}_T(4000 i_1)$, mentre i $\mathcal{R}(400 \Omega)$, $\mathcal{R}(200 \Omega)$ e $\mathcal{R}(300 \Omega)$ vengono sostituiti dall'unico $\mathcal{R}(520 \Omega)$.

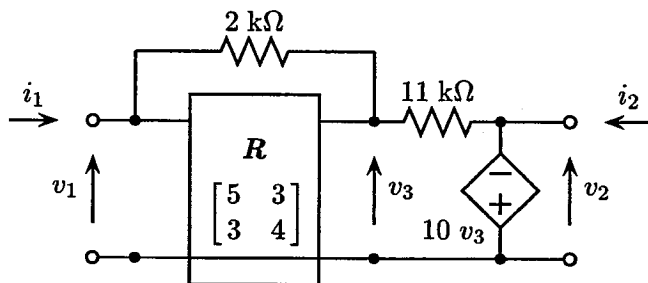
Applichiamo il teorema di Thévenin alla porta pilotata della $\mathcal{V}_T(4000 i_1)$: i due $\mathcal{R}(100 \Omega)$ vengono sostituiti da un'unico $\mathcal{R}(50 \Omega)$, mentre la tensione pilotata $4000 i_1 \rightarrow 2000 i_1$.

Risultato : Il DBT risultante è il modello di una sorgente pilotata nonideale con all'interno una $\mathcal{V}_T(2000 i_1)$ (vedere Cap. 10-FCE). Le relazioni costitutive sono $v_1 = 520 i_1$ e $v_2 = -2000 i_1 + 50 i_2$, da cui si ottiene immediatamente la matrice resistenza $\mathbf{R}$:

$$\begin{bmatrix} 520 & 0 \\ -2000 & 50 \end{bmatrix}$$



0.8.2 Esercizio EA/11/09/98 : Analisi DBT adinamico composito con sVpV



IL DBT composito in figura è costituito da un DBT, di cui è nota la matrice impedenza, una $\mathcal{V}_V$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare una matrice cardinale del DBT composito.

• Il DBT, essendo rappresentato da una $\mathbf{R}$ simmetrica, è reciproco : la sostituiamo con il DBT a stella equivalente.

• Le resistenze r_a , r_b e r_c del DBT a stella sono ottenute direttamente dalla matrice $\mathbf{R}$ (vedere Cap. 9-FCE).

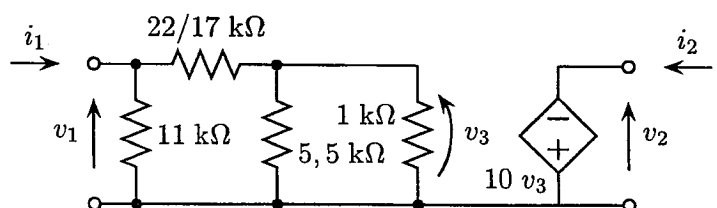
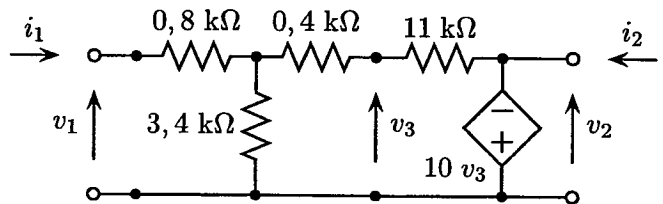
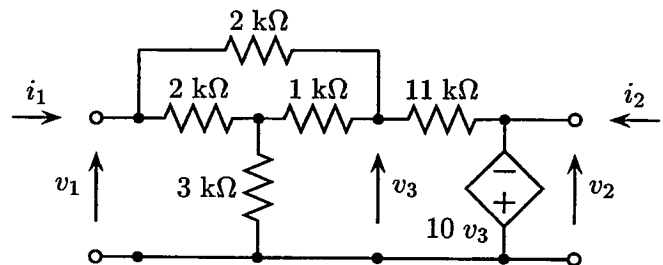
$$\begin{aligned} r_a &= r_{11} - r_{12} = 5 - 3 = 2 \text{ k}\Omega \\ r_b &= r_{22} - r_{12} = 4 - 3 = 1 \text{ k}\Omega \\ r_c &= r_{12} = 3 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

• I $\mathcal{R}(2 \text{ k}\Omega)$, $\mathcal{R}(2 \text{ k}\Omega)$ e $\mathcal{R}(1 \text{ k}\Omega)$, che formano un DBT a triangolo, sono sostituiti dal DBT a stella equivalente costituito dai : $\mathcal{R}(0,8 \text{ k}\Omega)$, $\mathcal{R}(0,4 \text{ k}\Omega)$ e $\mathcal{R}(0,4 \text{ k}\Omega)$. Il $\mathcal{R}(3 \text{ k}\Omega)$ è in serie a uno dei $\mathcal{R}(0,4 \text{ k}\Omega)$: essi sono sostituiti da un'unico $\mathcal{R}(3,4 \text{ k}\Omega)$.

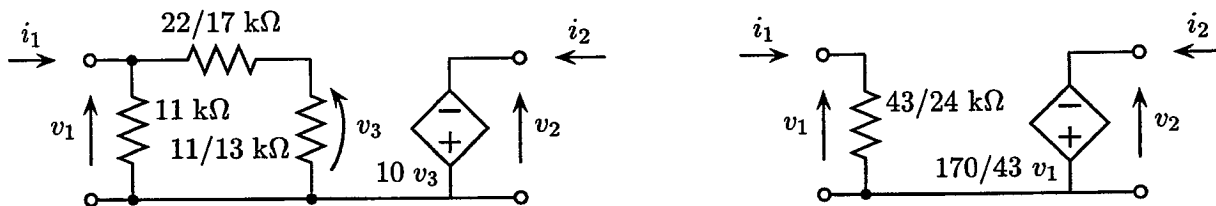
• Sulla destra del circuito in figura vi è una maglia costituita dalla $\mathcal{V}_V(10 v_3)$ dal $\mathcal{R}(11 \text{ k}\Omega)$ e dal c.a. ai cui capi è definita la tensione pilotante v_3 .

• Applicando il primo teorema di Miller sostituiamo il $\mathcal{R}(11 \text{ k}\Omega)$ con un c.a. ed inseriamo in parallelo al c.a. un $\mathcal{R}(11/(10+1) = 1 \text{ k}\Omega)$. Inoltre il DBT a stella costituito dai $\mathcal{R}(0,8 \text{ k}\Omega)$, $\mathcal{R}(0,4 \text{ k}\Omega)$ e $\mathcal{R}(3,4 \text{ k}\Omega)$ viene sostituito dal DBT equivalente a triangolo.

• Sostituiamo il parallelo dei $\mathcal{R}(5,5 \text{ k}\Omega)$ e $\mathcal{R}(1 \text{ k}\Omega)$ con un'unico $\mathcal{R}(11/13 \text{ k}\Omega)$ e, in un secondo



tempo, sostituiamo la tensione pilotante $v_3 \rightarrow v_1$ della $\mathcal{V}_V \langle 10 v_3 \rangle$ poiché la regola del partitore di tensione ci permette di stabilire che $v_3 = 17/43 v_1$. Inoltre sostituiamo i $\mathcal{R} \langle 11 \text{ k}\Omega \rangle$, $\mathcal{R} \langle 22/17 \text{ k}\Omega \rangle$ e $\mathcal{R} \langle 11/13 \text{ k}\Omega \rangle$ con un unico $\mathcal{R} \langle 43/24 \text{ k}\Omega \rangle$.



- Il DBT adinamico è equivalente a una $\mathcal{V}_V \langle 170/43 v_1 \rangle$ con un $\mathcal{R}$ in parallelo alla porta pilotante. Scriviamo le due relazioni costitutive del DBT : $v_1 = 43/24 i_1$ e $v_2 = -170/43 v_1$.

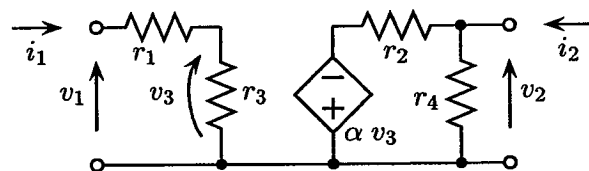
Risultato : Sostituendo la v_1 nella seconda equazione, otteniamo la rappresentazione $(v_1, v_2) \leftarrow (i_1, i_2)$, la cui matrice è la matrice resistenza :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43/24 & 0 \\ -85/12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

0.8.3 Esercizio OR2/08/11/96 : DB composti da resistori e sVpV

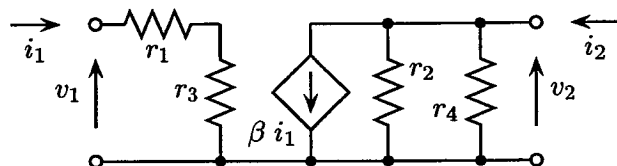
Il DBT composto adinamico in figura è costituito da una $\mathcal{V}_V$ e quattro $\mathcal{R}$:

Quesito : Sostituire la $\mathcal{V}_V$ all'interno del modello del DBT, con una $\mathcal{I}_I$ (unico componente attivo) e riducendo il più possibile il numero di $\mathcal{R}$.



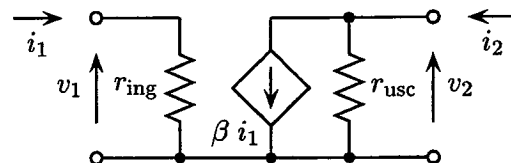
- Sostituiamo la tensione pilotante v_3 della $\mathcal{V}_V \langle \alpha v_3 \rangle$, introducendo come grandezza pilotante la corrente i_1 fluente nella prima porta del DBT $i_1 = v_3/r_3$: La $\mathcal{V}_I \langle \alpha r_3 i_1 \rangle$ sostituisce la $\mathcal{V}_V \langle \alpha v_3 \rangle$.

- Sostituiamo la serie del $\mathcal{R} \langle r_2 \rangle$ e della porta pilotata della $\mathcal{V}_I \langle \alpha r_3 i_1 \rangle$ (modello di Thévenin) col modello equivalente di Norton : la $\mathcal{V}_I \langle \alpha r_3 i_1 \rangle$ viene sostituita dalla $\mathcal{I}_I \langle \beta i_1 \rangle$ come risulta dalla figura, in cui $\beta = \alpha r_3/r_2$.



Risultato : I $\mathcal{R} \langle r_1 \rangle$ e $\mathcal{R} \langle r_3 \rangle$, in serie alla prima porta, sono fusi in un unico $\mathcal{R} \langle r_{\text{ing}} = r_1 + r_3 \rangle$, mentre i $\mathcal{R} \langle r_2 \rangle$ e $\mathcal{R} \langle r_4 \rangle$, in parallelo alla seconda porta, sono fusi in un unico $\mathcal{R} \langle r_{\text{usc}} \rangle$, dove :

$$r_{\text{usc}} = r_2 r_4 / (r_2 + r_4)$$

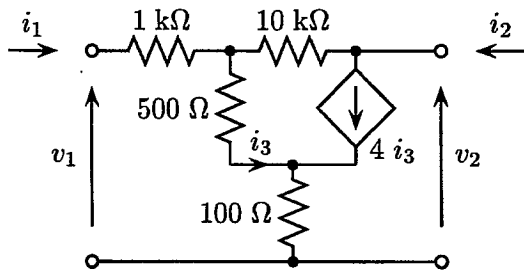


Commento : Il modello risultante del DBT composto è proprio il primo modello ibrido di una sorgente pilotata nonideale.

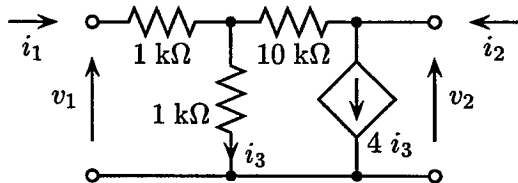
0.8.4 Esercizio OR1/08/11/96 : DB composto da resistori e sIpI

Il DBT composto adinamico in figura è costituito da una $\mathcal{I}_I$ e quattro $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare una rappresentazione cardinale del DBT composto.



• La porta pilotata della $\mathcal{I}_I(4i_3)$ interna al DBT costituisce con il $\mathcal{R}(500\ \Omega)$, in cui scorre la corrente pilotante i_3 , e il $\mathcal{R}(100\ \Omega)$ un taglio nodale. In accordo al secondo teorema di Miller, sostituiamo il $\mathcal{R}(100\ \Omega)$ con un c.c. e inseriamo un $\mathcal{R}(100 \times (4 + 1) = 500\ \Omega)$ in serie al pre-esistente $\mathcal{R}(500\ \Omega)$. A loro volta i due $\mathcal{R}(500\ \Omega)$ sono fusi in un unico $\mathcal{R}(1\ \text{k}\Omega)$.



• Dall'esame della maglia costituita dalla prima porta del DBT composito e dai due $\mathcal{R}(1\ \text{k}\Omega)$, percorsi dalla i_1 e dalla i_3 , possiamo scrivere l'equazione : $v_1 = 1000 i_1 + 1000 i_3$.

• Dall'esame della maglia costituita dalla seconda porta del DBT composito, dal $\mathcal{R}(10\ \text{k}\Omega)$, percorso dalla $(i_1 - i_3)$, e dal $\mathcal{R}(1\ \text{k}\Omega)$, percorso dalla i_3 , possiamo scrivere l'equazione :

$$v_2 = 10000 (i_3 - i_1) + 1000 i_3 \implies v_2 = 11000 i_3 - 10000 i_1$$

• Siamo in presenza di due equazioni in cui però compare l'incognita i_3 che non può comparire nella rappresentazione del DBT composito essendo una grandezza interna allo stesso. Per eliminare i_3 cerchiamo una ulteriore equazione senza aggiungere ulteriori incognite. Consideriamo il taglio costituito dalla porta pilotata della $\mathcal{I}_I(4i_3)$, dal $\mathcal{R}(1\ \text{k}\Omega)$ percorso da i_3 e dalle correnti i_1 e i_2 delle due porte del DBT composito :

$$i_1 + i_2 = 4 i_3 + i_3 \implies i_3 = (i_1 + i_2)/5$$

Sostituendo l'incognita i_3 nelle due equazioni precedenti otteniamo le equazioni :

$$v_1 = 1000 i_1 + 1000 (i_1 + i_2)/5 \implies v_1 = 1200 i_1 + 200 i_2$$

$$v_2 = 11000 (i_1 + i_2)/5 - 10000 i_1 \implies v_2 = -7800 i_1 + 2200 i_2$$

Risultato : Le due equazioni suddette sono proprio quelle che definiscono la rappresentazione controllata in corrente del DBT composito. Con la notazione matriciale essa assume la forma :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1200 & 200 \\ -7800 & 2200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

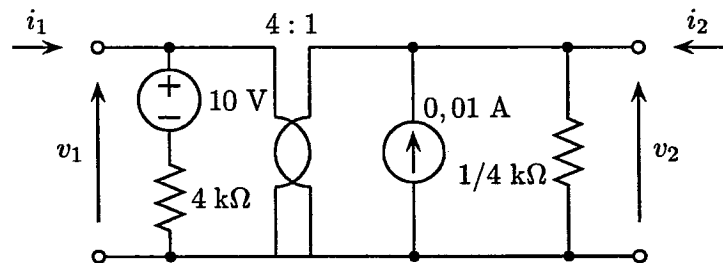
Commento : Nonostante la presenza della $\mathcal{I}_I(4i_3)$ il DBT risulta bidirezionale. La bidirezionalità dovuta al $\mathcal{R}(10\ \text{k}\Omega)$, connesso trasversalmente alla $\mathcal{I}_I(4i_3)$. Comunque siccome le due transresistenze $r_{12} = 200\ \Omega$ e $r_{21} = -7800\ \Omega$ sono molto diverse, l'unidirezionalità $1 \rightarrow 2$ prevale sulla unidirezionalità $2 \rightarrow 1$.

0.9 DOPPI BIPOLI COMPOSITI CONTENENTI tr.id.

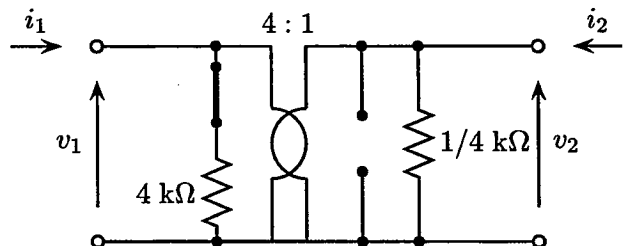
0.9.1 Esercizio E1/05/07/96 : DB composto da tr.id. resistori, sVi e sIi

Il DBT composito adinamico lineare e nonomogeneo in figura è costituito da una $\hat{V}$, una $\hat{I}$, un tr.id. e due $\mathcal{R}$:

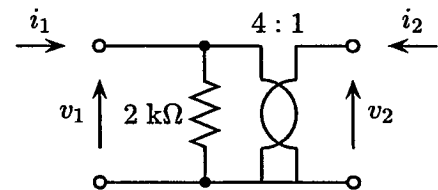
Quesito : Calcolare la matrice resistenza $\mathbf{R}$ del DBT .



- Essendo interessati solamente alla matrice $\mathbf{R}$, conviene introdurre il DBT omogeneo associato, sostituendo $\hat{V}\langle 10\text{ V} \rangle \rightarrow \text{c.c.}$ e $\hat{I}\langle 0,01\text{ A} \rangle \rightarrow \text{c.a.}$.



- Il DBT omogeneo associato è costituito da un tr.id. e dai $\mathcal{R}\langle 4\text{ k}\Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 1/4\text{ k}\Omega \rangle$ connessi in parallelo alle due porte del tr.id. . Il $\mathcal{R}\langle 1/4\text{ k}\Omega \rangle$ in parallelo alla seconda porta può essere trasferito in parallelo alla prima porta avendo moltiplicato per 4^2 la sua resistenza. Fondendo i due $\mathcal{R}\langle 4\text{ k}\Omega \rangle$ in un unico $\mathcal{R}\langle 2\text{ k}\Omega \rangle$, si ottiene un circuito costituito da questo $\mathcal{R}\langle 2\text{ k}\Omega \rangle$ e dal tr.id. :



Risultato : Dall'esame del suddetto modello del DBT, i quattro elementi della matrice delle resistenze $\mathbf{R}$ possono essere calcolati per mezzo della loro definizione :

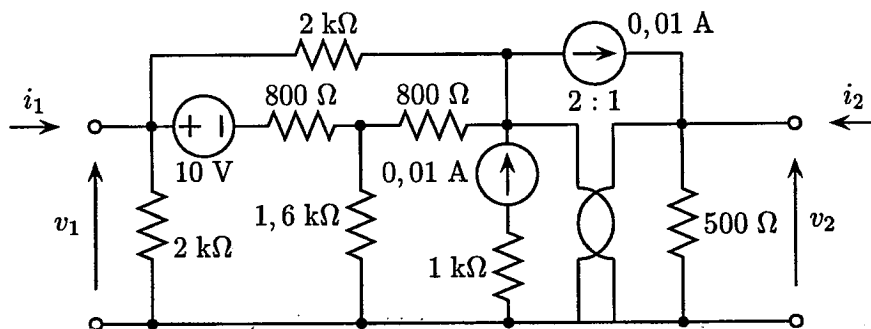
$$r_{11} = \left[\frac{v_1}{i_1} \right]_{i_2=0} = 2\text{ k}\Omega \quad , \quad r_{22} = \left[\frac{v_2}{i_2} \right]_{i_1=0} = \frac{2}{4^2} = \frac{1}{8}\text{ k}\Omega$$

$$r_{12} = \left[\frac{v_1}{i_2} \right]_{i_1=0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\text{ k}\Omega \quad , \quad r_{21} = \left[\frac{v_2}{i_1} \right]_{i_2=0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\text{ k}\Omega$$

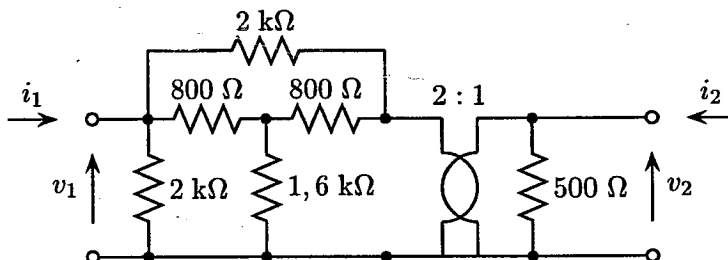
Commento : La coincidenza di r_{12} e r_{21} è dovuta alla reciprocità del DBT : infatti il doppio bipolo omogeneo associato è costituito esclusivamente da componenti reciproci.

0.9.2 Esercizio EA/05/07/96 : DB composto da resistori, sVi, sIi e tr.id.

Il DBT composito adinamico in figura è costituito da una $\hat{V}$ costante, due $\hat{I}$ costanti, un tr.id. tripolare e sette R :
Quesito : Calcolare la matrice G del DBT composito.



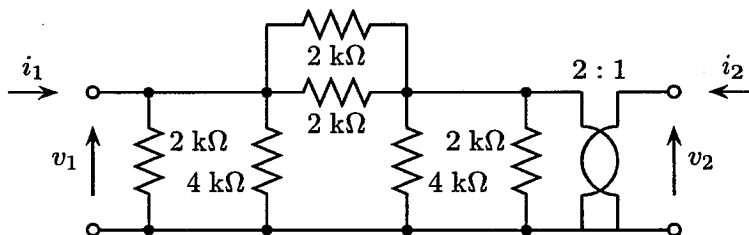
• Siccome la matrice G dipende dal DBT omogeneo associato, conviene eseguire le sostituzioni $\hat{V} \rightarrow \text{c.c.}$ e $\hat{I} \rightarrow \text{c.a.}$ all'interno del DBT composito : il DBT omogeneo associato è in figura :



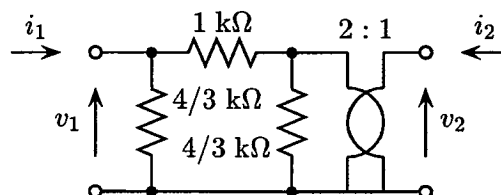
• Il $R(500\Omega)$ in parallelo alla seconda porta del tr.id. può essere trasferito in parallelo alla prima porta del tr.id. : esso diventa un $R(2^2 \times 500 = 2\text{ k}\Omega)$. All'interno del DBT i due $R(800\Omega)$ e il $R(1600\Omega)$ costituiscono una stella : essa può essere sostituita da un DBT equivalente a triangolo, le cui resistenze sono calcolate mediante le note regole di trasformazione (vedere Cap. 9-FCE) :

• La resistenza comune ai due R del triangolo in parallelo alle due porte del DBT è :
 $1600 + 800 + (1600 \times 800)/800 = 4000\Omega$.

La resistenza del R connesso trasversalmente alle due porte del DBT è : $800 + 800 + (800 \times 800)/1600 = 2000\Omega$. Nel DBT composito vi sono sei R e un tr.id. :



• Siccome i sei R sono a due a due in parallelo, conviene fonderli in tre R di $4000/3\Omega$, $4000/3\Omega$ e 1000Ω . Siamo in presenza di un DBT costituito da un DBT a triangolo di R connesso in cascata a un tr.id. tripolare :



• La matrice G^a del triangolo di R viene calcolata direttamente mediante le note regole :

$$G^a = \begin{bmatrix} 3/4000 + 1/1000 & -1/1000 \\ -1/1000 & 3/4000 + 1/1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/4000 & -1/1000 \\ -1/1000 & 7/4000 \end{bmatrix} \text{ S}$$

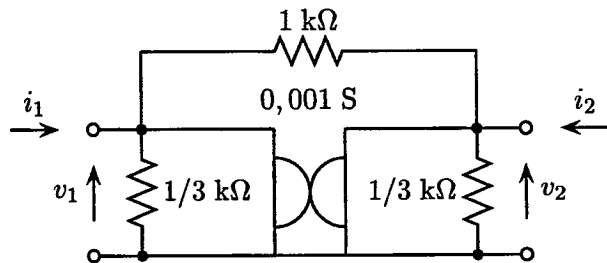
Risultato : Il trasformatore in cascata alla seconda porta non altera la conduttanza g_{11} , mentre moltiplica per $n = 2$ le due transconduttanze e per $n^2 = 4$ la conduttanza g_{22} . Infatti si ha $v_2 = n v'_2$ e $i_2 = 1/n i'_2$ (vedere CCap. 10,13-FCE). Conseguentemente la matrice G del DBT composito risulta :

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/4000 & -2 \times (1/1000) \\ -2 \times (1/1000) & 4 \times (7/4000) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/4000 & -2/1000 \\ -2/1000 & 28/4000 \end{bmatrix} \text{ S}$$

Commento : La matrice G risulta simmetrica come aspettato : infatti il DBT omogeneo associato è costituito esclusivamente da componenti reciproci (un tr.id. e sei R).

0.10 DOPPI BIPOLI COMPOSITI CONTENENTI UN GIRATORE

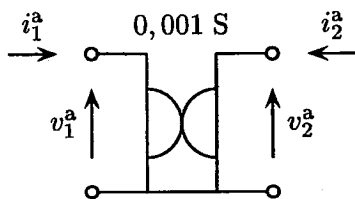
0.10.1 Esercizio OR3/08/11/96 : DB composto da resistori e giratore



Il DBT composto adinamico in figura è costituito da un giratore e tre $\mathcal{R}$.

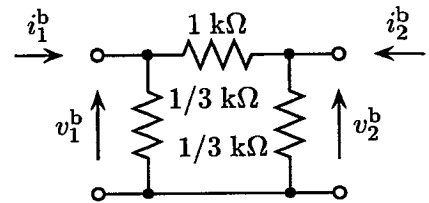
Quesito: Calcolare una rappresentazione cardinale del DBT composto.

• Il DBT composto può essere visto come il parallelo di due DBT : un giratore e un triangolo (Π) di $\mathcal{R}$.



$$i_1 = i_1^a + i_1^b, \quad i_2 = i_2^a + i_2^b$$

$$v_1 = v_1^a = v_1^b, \quad v_2 = v_2^a = v_2^b$$



• Entrambi i DBT ammettono la rappresentazione controllata in tensione : conviene calcolare la matrice conduttanza $\mathbf{G}$ del DBT composto, che risulta uguale alla somma delle matrici conduttanze $\mathbf{G}^a$ del giratore e $\mathbf{G}^b$ del triangolo :

$$\mathbf{G}^a = \begin{bmatrix} 0 & 1/1000 \\ -1/1000 & 0 \end{bmatrix} \text{ S}, \quad \mathbf{G}^b = \begin{bmatrix} 4/1000 & -1/1000 \\ -1/1000 & 4/1000 \end{bmatrix} \text{ S}$$

Risultato: La matrice $\mathbf{G}$ del DBT composto viene ottenuta dalla somma delle due matrici delle conduttanze :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^a + \mathbf{G}^b = \begin{bmatrix} 4/1000 & 0 \\ -2/1000 & 4/1000 \end{bmatrix} \text{ S}$$

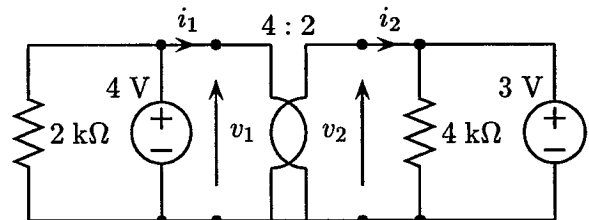
Commento: Il DBT composto risulta unidirezionale $1 \rightarrow 2$. Questo risultato è dovuto al fatto che la transconduttanza del giratore coincide con quella del $\mathcal{R}$ trasversale del triangolo. Quindi la unidirezionalità $1 \rightarrow 2$ è una proprietà parametrica e non strutturale del DBT composto.

0.11 CIRCUITI E COMPONENTI ADINAMICI PATOLOGICI

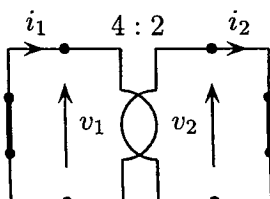
0.11.1 Esercizio PAT1/00/12/96 : circuito patologico con tr.id.

Il circuito adinamico in figura è costituito da un tr.id. tripolare con la prima porta chiusa su un $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_1 = 4 \text{ V}) \parallel \mathcal{R}(2 \text{ k}\Omega)$ e la seconda porta su un $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_2 = 3 \text{ V}) \parallel \mathcal{R}(4 \text{ k}\Omega)$.

Quesito: Discutere l'eventuale patologia del circuito.

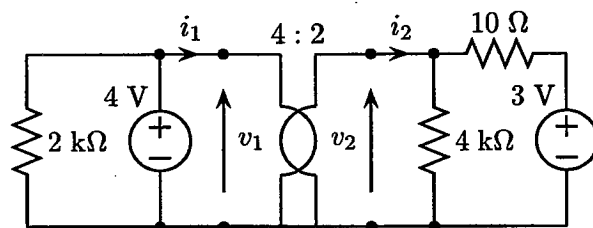


• Per esaminare la possibile patologia del presente circuito consideriamo il circuito omogeneo associato, disattivando le due $\hat{\mathcal{V}}$. Il circuito adinamico omogeneo associato risulta :



• Osserviamo che i due c.c., sostitutivi delle due $\hat{\mathcal{V}}$ costanti, sono in parallelo alle due porte del tr.id. . È immediato intuire che può circolare una corrente ciclica arbitraria che fluisce nel c.c. di sinistra e nella prima porta del tr.id. e un'altra corrente ciclica arbitraria che fluisce nel c.c. di destra e nella seconda porta del tr.id. . Queste due correnti cicliche arbitrarie sono tra loro dipendenti a causa del tr.id. $i_1 = (1/n) i_2$.

- Comunque in questa situazione le due tensioni del tr.id. v_1 e v_2 sono nulle indipendentemente dai valori delle due correnti cicliche arbitrarie. Questa situazione, di natura circuitale, può essere interpretata dal punto di vista algebrico : il sistema di equazioni algebriche è omogeneo e la sua matrice è singolare e quindi vi sono infinite soluzioni.
- Ritorniamo al circuito nonomogeneo originario, ripristinando le due $\hat{\mathcal{V}}$. Le tensioni impresse $\hat{v}_1$ e $\hat{v}_2$ devono soddisfare alla relazione costitutiva del tr.id. $v_1 = n v_2$. Si constata immediatamente che essa non può essere verificata. Questo ci porta alla conclusione che il modello del circuito considerato è incompatibile.
- Riconsideriamo il circuito adinamico nonomogeneo originario : alteriamo la tensione impressa della $\hat{\mathcal{V}}(3\text{ V})$ fissandola al valore $\hat{v}_2 = 2\text{ V}$. L'incompatibilità tra le due $\hat{\mathcal{V}}$ svanisce, ma la matrice rimane invariata e quindi singolare. Il circuito diventa indeterminato dal momento che vi sono due correnti cicliche arbitrarie come nel caso omogeneo.
- In questa situazione noi dobbiamo porci il problema di migliorare il modello.
- La patologia del circuito svanisce se noi consideriamo un modello più accurato del circuito fisico sotto considerazione : potrebbe accadere che l'idealità delle due $\hat{\mathcal{V}}$ non sia adeguata : per esempio, se inseriamo in serie alla $\hat{\mathcal{V}}(3\text{ V})$ un $\mathcal{R}(10\ \Omega)$, la cui resistenza è trascurabile rispetto a quelle già presenti, il circuito non è più patologico.

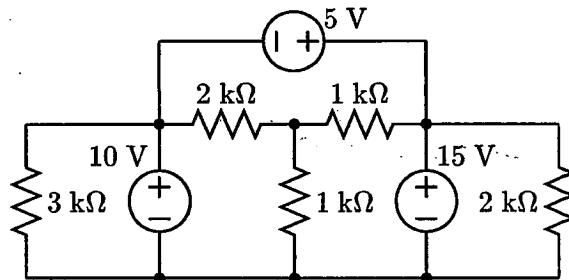


0.11.2 Esercizio PAT2/00/12/96 : Circuito patologico con maglia-sVi

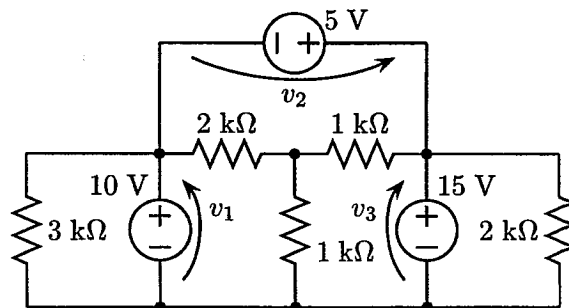
Il circuito adinamico in figura è costituito da tre $\hat{\mathcal{V}}$, e cinque $\mathcal{R}$.

Quesito : Discutere l'eventuale patologia del circuito.

- Le tre $\hat{\mathcal{V}}$ costanti formano una maglia- $\hat{\mathcal{V}}$. Le tre tensioni impresse verificano la legge di Kirchhoff delle tensioni. Nella maglia- $\hat{\mathcal{V}}$ può circolare una corrente ciclica arbitraria, la quale non ha alcuna effetto sulle tensioni e correnti dei restanti rami del circuito.

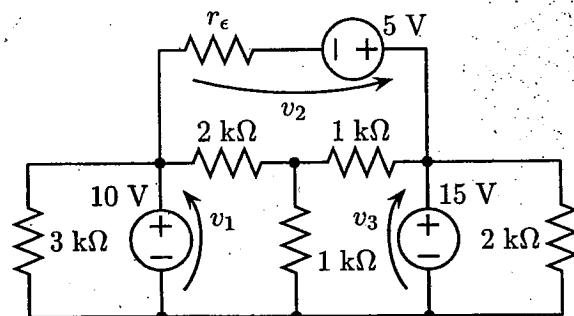


- Le correnti dei rami della maglia sono non-vincolate, essendo i tre rami occupati da tre $\hat{\mathcal{V}}$. Se costruiamo il circuito omogeneo associato mediante le sostituzioni $\hat{\mathcal{V}} \rightarrow \text{c.c.}$ il suddetto circuito conterrebbe una maglia-c.c., in cui fluirebbe ancora una corrente ciclica arbitraria.

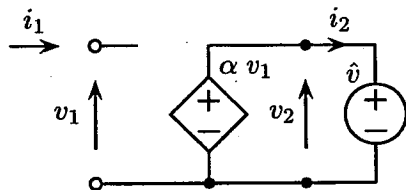


- Le precedenti osservazioni ci assicurano che la matrice del sistema è necessariamente singolare, dal momento che alcune delle incognite possono assumere infiniti valori (cioè non possono essere determinate). Se il nostro scopo è quello di calcolare le tensioni e/o correnti dei cinque $\mathcal{R}$, il precedente modello del circuito è adeguato.

- Se lo scopo è quello di calcolare la corrente di una delle tre $\hat{\mathcal{V}}$, il modello risulta inadeguato. In questo caso occorre migliorare il modello : per esempio, possiamo inserire in serie ad almeno una delle $\hat{\mathcal{V}}$ della maglia- $\hat{\mathcal{V}}$ un $\mathcal{R}\langle r_\epsilon \rangle$ in cui r_ϵ è molto piccola rispetto alle resistenze già presenti nel circuito.



0.11.3 Esercizio PAT3/00/03/98 : Patologia tra sVpV e sVi



Il bipolo dinamico composto in figura è costituito dalla $\mathcal{V}_V\langle \alpha v_1 \rangle$ con la porta pilotata chiusa sulla $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v} \rangle$.

Quesito : Analizzare la caratteristica del bipolo composto definito dalla porta pilotante della $\mathcal{V}_V$.

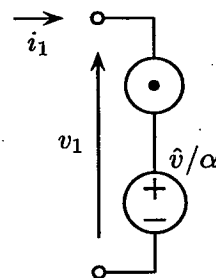
- Scriviamo la relazioni costitutive della $\mathcal{V}_V\langle \alpha v_1 \rangle$ e della $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v} \rangle$, tenendo presente che la tensione v_2 e la corrente i_2 della porta pilotata della $\mathcal{V}_V\langle \alpha v_1 \rangle$ sono condivise dalla $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v} \rangle$:

$$\mathcal{V}_V\langle \alpha v_1 \rangle : i_1 = 0 \quad , \quad v_2 = \alpha v_1 \quad , \quad \hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v} \rangle : v_2 = \hat{v}$$

- La tensione v_1 e la corrente i_1 della porta pilotante coincidono con quelle del bipolo composto. Esse soddisfano alle relazioni : $i_1 = 0 \quad , \quad v_1 = v_2/\alpha = \hat{v}/\alpha$.

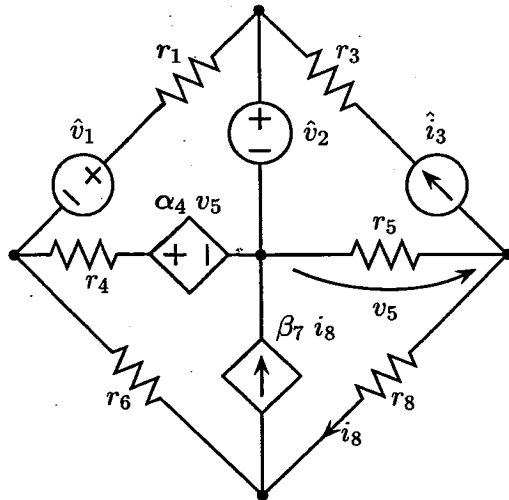
Risultato : Siamo in presenza di un bipolo composto la cui tensione e corrente sono soggette a due equazioni costitutive. Quindi il bipolo composto è patologico : la sua caratteristica è un punto isolato nel piano v_1 - i_1 . Il suo modello è un nullatore in serie a una $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}/\alpha \rangle$.

Commento : La corrente i_2 comune alla porta pilotata della $\mathcal{V}_V\langle \alpha v_1 \rangle$ e alla $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v} \rangle$ e interna al bipolo composto è indeterminata, essendo nonvincolata per entrambi i componenti. Questa indeterminatezza, interna al bipolo composto, è una conseguenza del doppio vincolo del bipolo composto.



0.12 METODO DEI NODI PURO E MODIFICATO

0.12.1 Esercizio EA/16/01/97 : Metodo dei nodi modificato con sVi, sVpV e sIpI



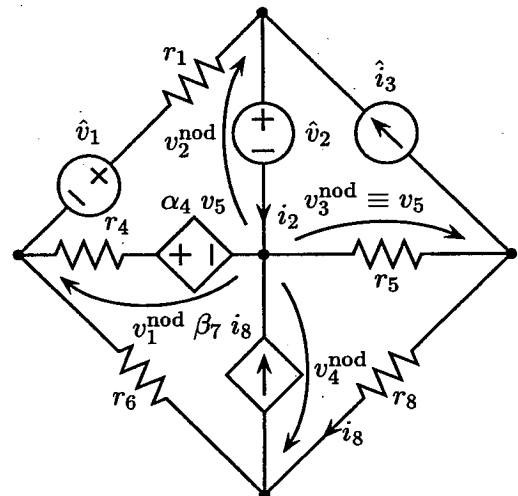
Il circuito adinamico in figura è costituito da due $\hat{\mathcal{V}}$, una $\hat{\mathcal{I}}$, una $\mathcal{V}_V$, una $\mathcal{I}_I$ e sei $\mathcal{R}$: i valori numerici delle resistenze, delle grandezze impresse, di α_4 e β_7 sono noti in forma letterale.

Quesito : Scrivere, in forma letterale, il sistema di equazioni risolutive del circuito col metodo dei nodi.

• Il $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$ è in serie alla $\mathcal{I}\langle i_3 \rangle$. La tensione v_3 ai capi di $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$, se richiesta, può essere calcolata immediatamente $v_3 = i_3 r_3$. Nel caso molto frequente in cui v_3 non sia di nostro interesse, questo conto può essere omissso.

• Possiamo sostituire il $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$ con un c.c., senza alterare le tensioni e correnti dei rimanenti rami del circuito. Siamo in presenza di un circuito adinamico costituito da due $\hat{\mathcal{V}}$ costanti, una $\hat{\mathcal{I}}$ costante, una $\mathcal{V}_V$, una $\mathcal{I}_I$ e cinque $\mathcal{R}$.

• Scegliamo come base di tagli indipendenti quattro dei cinque tagli nodali, scegliendo come nodo di riferimento quello al centro. I quattro nodi indipendenti sono numerati in senso orario partendo da quello di sinistra: la figura a fianco riporta le corrispondenti tensioni nodali v_1^{nod} , v_2^{nod} , v_3^{nod} e v_4^{nod} .



Cominciamo a scrivere le quattro equazioni principali, una per ciascun nodo indipendente :

- **Nodo 1** in cui confluiscono il $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle \nmid \hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_1 \rangle$, il $\mathcal{R}\langle r_4 \rangle \nmid \mathcal{V}_V\langle \alpha_4 v_5 \rangle$, e il $\mathcal{R}\langle r_6 \rangle$.
Annulliamo la somma delle correnti uscenti dal nodo :

$$(v_1^{\text{nod}} - v_2^{\text{nod}} + \hat{v}_1)/r_1 + (v_1^{\text{nod}} - \alpha_4 v_5)/r_4 + (v_1^{\text{nod}} - v_4^{\text{nod}})/r_6 = 0$$

Il termine $\hat{v}_1/r_1$ è un termine noto da spostare a secondo membro. L'incognita v_5 è la grandezza pilotante la $\mathcal{V}_V\langle \alpha_4 v_5 \rangle$: conviene sostituirla con le tensioni di nodo. Essendo $v_5 = v_3^{\text{nod}}$, si ottiene : $(v_1^{\text{nod}} - v_2^{\text{nod}})/r_1 + (v_1^{\text{nod}} - \alpha_4 v_3^{\text{nod}})/r_4 + (v_1^{\text{nod}} - v_4^{\text{nod}})/r_6 = -\hat{v}_1/r_1$.

- **Nodo 2** in cui confluiscono il $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle \nmid \hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_1 \rangle$, la $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_2 \rangle$ e la $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_3 \rangle$. Eguagliamo la somma delle correnti uscenti dal nodo alla somma delle correnti entranti : $(v_2^{\text{nod}} - v_1^{\text{nod}} - \hat{v}_1)/r_1 + i_2 = \hat{i}_3$, dove i_2 è la corrente fluente nella $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_2 \rangle$. Essa è introdotta come incognita ausiliaria dal momento che la $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_2 \rangle$ non è controllabile in tensione.
- **Nodo 3** in cui confluiscono la $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_3 \rangle$, il $\mathcal{R}\langle r_5 \rangle$ e il $\mathcal{R}\langle r_8 \rangle$. Eguagliamo la somma delle correnti uscenti dal nodo alla corrente entrante : $v_3^{\text{nod}}/r_5 + (v_3^{\text{nod}} - v_4^{\text{nod}})/r_8 = -\hat{i}_3$.
- **Nodo 4** in cui confluiscono il $\mathcal{R}\langle r_6 \rangle$, il $\mathcal{R}\langle r_8 \rangle$ e la $\mathcal{I}_I\langle \beta i_8 \rangle$. Annulliamo la somma delle correnti uscenti dal nodo : $(v_4^{\text{nod}} - v_1^{\text{nod}})/r_6 + (v_4^{\text{nod}} - v_3^{\text{nod}})/r_8 + \beta_7 i_8 = 0$. Sostituiamo la corrente pilotante i_8 con le tensioni di nodo : $i_8 = (v_3^{\text{nod}} - v_4^{\text{nod}})/r_8$:
 $(v_4^{\text{nod}} - v_1^{\text{nod}})/r_6 + (v_4^{\text{nod}} - v_3^{\text{nod}})/r_8 + (\beta_7/r_8)(v_3^{\text{nod}} - v_4^{\text{nod}}) = 0$

- Abbiamo costruito quattro equazioni nelle cinque incognite v_1^{nod} , v_2^{nod} , v_3^{nod} , v_4^{nod} e i_2 .

Equazione ausiliaria: L'equazione mancante è ottenuta dalla relazione costitutiva della $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_2\rangle$ responsabile dell'introduzione dell'incognita ausiliaria i_2 : $\hat{v}_2 = v_2^{\text{nod}}$.

Risultato: Il sistema completo di equazioni generato dal metodo dei nodi modificato viene scritto raccogliendo le quattro equazioni scalari dei nodi indipendenti. L'equazione $\hat{v}_2 = v_2^{\text{nod}}$ viene impiegata per eliminare l'incognita v_2^{nod} . Si ottiene un sistema di quattro equazioni in quattro incognite:

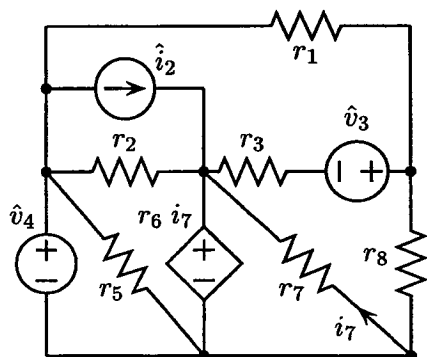
$$\begin{bmatrix} 1/r_1 + 1/r_4 + 1/r_6 & -\alpha_4/r_4 & -1/r_6 & 0 \\ -1/r_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/r_5 + 1/r_8 & -1/r_8 & 0 \\ -1/r_6 & (\beta_7 - 1)/r_8 & 1/r_6 + (1 - \beta_7)/r_8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{\text{nod}} \\ v_3^{\text{nod}} \\ v_4^{\text{nod}} \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{v}_2 - \hat{v}_1)/r_1 \\ (\hat{v}_1 - \hat{v}_2)/r_1 + \hat{i}_3 \\ -\hat{i}_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In questo sistema l'incognita ausiliaria i_2 compare solo nella equazione del secondo nodo. Se noi sopprimiamo questa equazione otteniamo un sistema ridotto di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{bmatrix} 1/r_1 + 1/r_4 + 1/r_6 & -\alpha_4/r_4 & -1/r_6 \\ 0 & 1/r_5 + 1/r_8 & -1/r_8 \\ -1/r_6 & (\beta_7 - 1)/r_8 & 1/r_6 + (1 - \beta_7)/r_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{\text{nod}} \\ v_3^{\text{nod}} \\ v_4^{\text{nod}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{v}_2 - \hat{v}_1)/r_1 \\ -\hat{i}_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che può essere risolto con carta&penna.

0.12.2 Esercizio EA/23/07/97 : Metodo dei nodi modificato sVi, sVpI



Il circuito adinamico in figura opera in regime costante ed è costituito da due $\hat{\mathcal{V}}$, una $\hat{\mathcal{I}}$, una $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}$, e sei $\mathcal{R}$.

Quesito: Scrivere le equazioni risolutive del circuito col metodo dei nodi e calcolare le tensioni di nodo.

- Il $\mathcal{R}\langle r_5 \rangle$ è in parallelo alla $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_4\rangle$ e, assumendo che la sua corrente i_5 non sia di interesse, può essere rimosso. Nel caso che i_5 sia di interesse, si ha immediatamente che $i_5 = \hat{v}_4/r_5$.

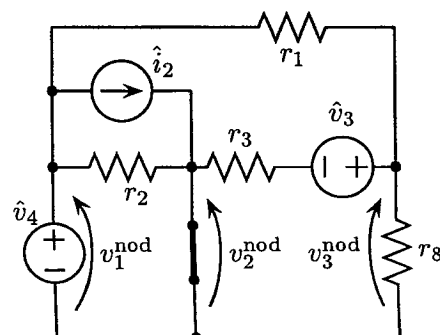
- La porta pilotata della $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}\langle r_6 i_7 \rangle$ risulta in parallelo al $\mathcal{R}\langle r_7 \rangle$ la cui corrente i_7 è proprio la corrente pilotante della $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}\langle r_6 i_7 \rangle$. Quindi la tensione pilotata $r_6 i_7$ coincide con la tensione $v_7 = -r_7 i_7$ ai capi del $\mathcal{R}\langle r_7 \rangle$: $v_7 = -r_7 i_7 = r_6 i_7 \implies (r_6 + r_7) i_7 = 0$.

- Nel caso $r_6 + r_7 = 0$ si ha che la corrente i_7 non risulta nonvincolata. Quindi anche la tensione v_6 non è vincolata e il parallelo della porta pilotata della $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}\langle r_6 i_7 \rangle$ e del $\mathcal{R}\langle r_7 \rangle$ è equivalente a un noratore (vedere Cap.11-FCE). Il circuito risulta patologico, dal momento che non vi è alcun nullatore che compensi la patologia del noratore.

- Nel caso $r_6 + r_7 \neq 0$ si ha $i_7 = 0$ quindi la tensione v_7 è nulla e il parallelo della porta pilotata della $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}\langle r_6 i_7 \rangle$ e del $\mathcal{R}\langle r_7 \rangle$ è equivalente a un c.c.

Sostituendo un c.c. al posto del parallelo della porta pilotata della $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}\langle r_6 i_7 \rangle$ e del $\mathcal{R}\langle r_7 \rangle$ otteniamo un circuito adinamico costituito da due $\hat{\mathcal{V}}$, una $\hat{\mathcal{I}}$, e quattro $\mathcal{R}$. Scegliamo le tre tensioni di nodo come indicato nella figura. La tensione v_1^{nod} risulta uguale a $\hat{v}_4$, mentre v_2^{nod} risulta nulla.

- Si nota immediatamente che la $\mathcal{V}\langle\hat{v}_4\rangle$ risulta in parallelo alla $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}_2\rangle$ e al $\mathcal{R}\langle r_2 \rangle$, che sono sostituiti da c.a.



• Solamente il nodo in cui confluiscono i $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$, $\mathcal{R}\langle r_8 \rangle$ e il $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_3 \rangle \dagger \mathcal{R}\langle r_3 \rangle$ è di interesse :
Annuliamo la somma delle correnti uscenti dal nodo : si ha un'equazione nell'unica incognita v_3^{nod} che viene risolta immediatamente :

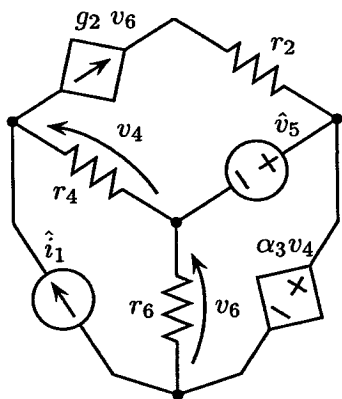
$$\frac{v_3^{\text{nod}} - \hat{v}_4}{r_1} + \frac{v_3^{\text{nod}} - \hat{v}_3}{r_3} + \frac{v_3^{\text{nod}}}{r_8} = 0 \implies v_3^{\text{nod}} = \frac{\hat{v}_4/r_1 + \hat{v}_3/r_3}{1/r_1 + 1/r_3 + 1/r_8}$$

Risultato : Le grandezze incognite oggetto del nostro studio risultano uguali a

$$v_1^{\text{nod}} = \hat{v}_4, \quad v_2^{\text{nod}} = 0, \quad v_3^{\text{nod}} = \frac{\hat{v}_4/r_1 + \hat{v}_3/r_3}{1/r_1 + 1/r_3 + 1/r_8}, \quad i_7 = 0$$

Commento : In questo circuito il sistema risolutivo di quattro equazioni in quattro incognite, costruito col metodo nodale, si è ridotto a quattro equazioni risolvibili banalmente, ciascuna per proprio conto. Il lettore che non si fosse accorto della presenza del c.c. sostitutivo della porta pilotata della $\mathcal{V}\mathcal{I}\langle r_6 \ i_7 \rangle$ e del $\mathcal{R}\langle r_7 \rangle$, avrebbe potuto ugualmente scrivere il sistema risolutivo, ma non avrebbe approfittato della semplificazione conseguente al c.c. tra il nodo 2 e il nodo di riferimento.

0.12.3 Esercizio EA/09/01/99 : Metodo nodale modificato con sIpV, sVpV, e sVi

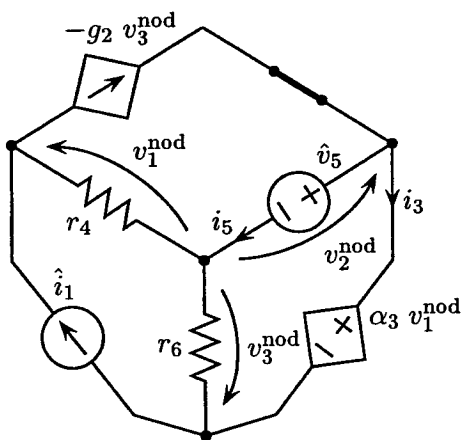


Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\hat{\mathcal{I}}$, una $\mathcal{V}\mathcal{V}$, una $\mathcal{I}\mathcal{V}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Scrivere le equazioni risolutive del circuito mediante il metodo nodale (modificato se necessario). Il nodo al centro sia scelto come nodo di riferimento.

• Il $\mathcal{R}\langle r_2 \rangle$ è sostituito da un c.c., poiché è influente sul resto del circuito.

• Le tensioni di nodo sono indicate numerando i nodi in verso orario. Siccome le due tensioni pilotanti coincidono con tensioni di nodo, le sostituiamo : $v_4 = v_1^{\text{nod}}$ e $v_6 = -v_3^{\text{nod}}$.



Scriviamo le tre equazioni principali, una per ciascun nodo indipendente :

• **Nodo 1 :** in cui confluiscono i rami : $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_1 \rangle$, $\mathcal{R}\langle r_4 \rangle$, e $\mathcal{I}\mathcal{V}\langle -g_2 v_3^{\text{nod}} \rangle$. Eguagliamo la somma delle correnti uscenti dal nodo alla somma di quelle entranti :

$$v_1^{\text{nod}}/r_4 - g_2 v_3^{\text{nod}} = \hat{i}_1$$

• **Nodo 2 :** in cui confluiscono i rami : $\mathcal{I}\mathcal{V}\langle -g_2 v_3^{\text{nod}} \rangle$, $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_5 \rangle$ e $\mathcal{V}\mathcal{V}\langle \alpha_3 v_1^{\text{nod}} \rangle$. Annuliamo la somma delle correnti uscenti dal nodo : $i_3 + i_5 + g_2 v_3^{\text{nod}} = 0$, dove i_3 e i_5 sono le correnti ausiliarie che fluiscono nelle $\mathcal{V}\mathcal{V}\langle \alpha_3 v_1^{\text{nod}} \rangle$ e $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_5 \rangle$ (non controllabili in tensione).

• **Nodo 3 :** in cui confluiscono i rami : $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_1 \rangle$, $\mathcal{R}\langle r_6 \rangle$ e $\mathcal{V}\mathcal{V}\langle \alpha_3 v_1^{\text{nod}} \rangle$. Eguagliamo la somma delle correnti uscenti dal nodo alla somma di quelle entranti : $-i_3 + v_3^{\text{nod}}/r_6 = -\hat{i}_1$.

• Aggiungiamo le equazioni ausiliarie ottenute dalle relazioni costitutive dei componenti non controllabili in corrente :

• **Prima equazione ausiliaria :** Introduciamo l'equazione ausiliaria $v_2^{\text{nod}} - v_3^{\text{nod}} = \alpha_3 v_1^{\text{nod}}$, ottenuta dalla relazione costitutiva della $\mathcal{V}\mathcal{V}\langle \alpha_3 v_1^{\text{nod}} \rangle$, che ci aveva costretto ad introdurre la corrente ausiliaria i_3 nelle equazioni dei nodi 2 e 3.

• **Seconda equazione ausiliaria :** Introduciamo l'equazione ausiliaria $\hat{v}_5 = v_2^{\text{nod}}$, ottenuta dalla

relazione costitutiva della $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_5\rangle$, che ci aveva costretto a introdurre la corrente ausiliaria i_5 nell'equazione del nodo 2.

$$\begin{bmatrix} 1/r_4 & 0 & -g_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/r_6 & -1 & 0 \\ -\alpha_3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{\text{nod}} \\ v_2^{\text{nod}} \\ v_3^{\text{nod}} \\ i_3 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ 0 \\ -\hat{i}_1 \\ 0 \\ \hat{v}_5 \end{bmatrix}$$

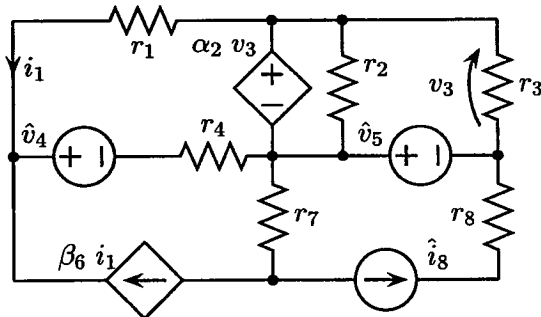
Risultato : Siamo in presenza di cinque equazioni scalari in cinque incognite, che riuniamo in un sistema algebrico lineare.

Commento : L'incognita v_2^{nod} può essere sostituita facilmente essendo da sola presente nella quinta equazione scalare. Otteniamo un sistema di quattro equazioni in quattro incognite di cui successivamente riordiniamo l'ordine delle equazioni :

$$\begin{bmatrix} 1/r_4 & -g_2 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/r_6 & -1 & 0 \\ -\alpha_3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{\text{nod}} \\ v_3^{\text{nod}} \\ i_3 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ 0 \\ -\hat{i}_1 \\ -\hat{v}_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1/r_4 & -g_2 & 0 & 0 \\ -\alpha_3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r_6 & -1 & 0 \\ 0 & g_2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{\text{nod}} \\ v_3^{\text{nod}} \\ i_3 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ -\hat{v}_5 \\ -\hat{i}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Le prime due equazioni costituiscono un sistema di due equazioni nelle incognite v_1^{nod} e v_3^{nod} : risolviamo questo sistema e sostituiamo i valori calcolati di v_1^{nod} e v_3^{nod} nelle due rimanenti equazioni la cui soluzione ci consente di determinare, una alla volta, le rimanenti incognite i_3 e i_5 .

0.12.4 Esercizio EA/28/07/98 : Metodo nodale modificato con sIpI, sVpV e sVi

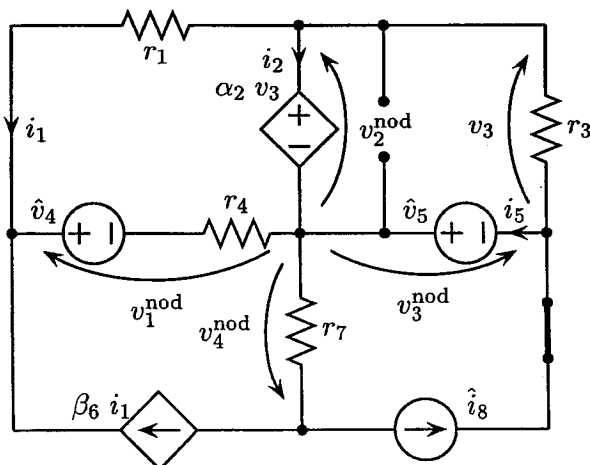


Il circuito adinamico in figura è costituito da due $\hat{\mathcal{V}}$, una $\hat{\mathcal{I}}$, una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$, una $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ e sei $\mathcal{R}$.

Quesito : Scrivere le equazioni risolutive del circuito mediante il metodo dei nodi, scegliendo come nodo di riferimento quello al centro.

- Il $\mathcal{R}\langle r_2 \rangle$ in parallelo alla $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}\langle \alpha_2 v_3 \rangle$ è sostituito da un c.a., mentre il $\mathcal{R}\langle r_8 \rangle$ in serie alla $\hat{\mathcal{I}}\langle i_8 \rangle$ è sostituito da un c.c. .

- Avendo scelto il nodo al centro come nodo di riferimento, introduciamo in figura le quattro tensioni di nodo. Scriviamo le equazioni principali, una per ciascun nodo indipendente :



- Nodo 1** : in cui confluiscono i rami : $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_4\rangle$, $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$, e $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}\langle\beta_6 i_1\rangle$. Annuliamo la somma delle correnti uscenti dal nodo :

$$(v_1^{\text{nod}} - v_2^{\text{nod}})/r_1 - \beta_6 i_1 + (v_1^{\text{nod}} - \hat{v}_4)/r_4 = 0$$

e sostituendo la corrente pilotante i_1 :

$$(1 + \beta_6)(v_1^{\text{nod}} - v_2^{\text{nod}})/r_1 + (v_1^{\text{nod}} - \hat{v}_4)/r_4 = 0 .$$

- Nodo 2** : in cui confluiscono i rami : $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$, $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}\langle \alpha_2 v_3 \rangle$ e $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$. Annuliamo la somma delle correnti uscenti dal nodo :

$$i_2 + (v_2^{\text{nod}} - v_1^{\text{nod}})/r_1 + (v_2^{\text{nod}} - v_3^{\text{nod}})/r_3 = 0 ,$$

dove i_2 è la corrente ausiliaria che fluisce nella $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}\langle \alpha_2 v_3 \rangle$, che non è controllabile in tensione.

- Nodo 3** : in cui confluiscono i rami : $\hat{\mathcal{I}}\langle i_8 \rangle$, $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$ e $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_5\rangle$. Eguagliamo la somma delle correnti uscenti dal nodo alla somma di quelle entranti : $i_5 + (v_3^{\text{nod}} - v_2^{\text{nod}})/r_3 = \hat{i}_8$, dove i_5 è la corrente

ausiliaria che fluisce nella $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_5\rangle$, che non è controllabile in tensione.

- **Nodo 4**: in cui confluiscono i rami: $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}_8\rangle$, $\mathcal{R}\langle r_7\rangle$ e $\mathcal{I}\langle\beta_6 i_1\rangle$. Eguagliamo la somma delle correnti uscenti dal nodo alla somma di quelle entranti: $\beta_6 i_1 + v_4^{\text{nod}}/r_7 = -\hat{i}_8$, dove i_1 è la corrente pilotante. Essendo $i_1 = (v_2^{\text{nod}} - v_1^{\text{nod}})/r_1$ l'equazione diventa $\beta_6 (v_2^{\text{nod}} - v_1^{\text{nod}})/r_1 + v_4^{\text{nod}}/r_7 = -\hat{i}_8$.
- Aggiungiamo le equazioni ausiliarie ottenute dalle relazioni costitutive dei componenti, non controllabili in tensione, che hanno richiesto l'introduzione delle correnti ausiliarie i_2 e i_5 .
- **Prima equazione ausiliaria**: Introduciamo l'equazione ausiliaria $v_2^{\text{nod}} = \alpha_2 v_3$, ottenuta dalla relazione costitutiva della $\mathcal{V}\langle\alpha_2 v_3\rangle$ e, sostituendo la tensione pilotante $v_3 = v_2^{\text{nod}} - v_3^{\text{nod}}$, otteniamo $v_2^{\text{nod}} = \alpha_2 (v_2^{\text{nod}} - v_3^{\text{nod}})$.
- **Seconda equazione ausiliaria**: Introduciamo l'equazione ausiliaria $\hat{v}_5 = -v_3^{\text{nod}}$, ottenuta dalla relazione costitutiva della $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_5\rangle$.

Risultato: Riunendo le (quattro) equazioni principali e le (due) ausiliarie otteniamo il seguente sistema di sei equazioni in sei incognite:

$$\begin{bmatrix} (1 + \beta_6)/r_1 + 1/r_4 & -(\beta_6 + 1)/r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/r_1 & 1/r_1 + 1/r_3 & -1/r_3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/r_3 & 1/r_3 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta_6/r_1 & \beta_6/r_1 & 0 & 1/r_7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_2 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{\text{nod}} \\ v_2^{\text{nod}} \\ v_3^{\text{nod}} \\ v_4^{\text{nod}} \\ i_2 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{v}_4/r_4 \\ 0 \\ \hat{i}_8 \\ -\hat{i}_8 \\ 0 \\ -\hat{v}_5 \end{bmatrix}$$

Commento: La sesta equazione coinvolge solamente l'incognita v_3^{nod} , che risulta $v_3^{\text{nod}} = -\hat{v}_5$ e viene sostituita nelle altre equazioni. La seconda, terza e quarta equazione scalare possono essere eliminate poiché sono le uniche che contengono, rispettivamente, le incognite i_2 , i_5 e v_4^{nod} : si ottiene un sistema di due equazioni nelle incognite v_1^{nod} e v_2^{nod} :

$$\begin{bmatrix} (1 + \beta_6)/r_1 + 1/r_4 & -(\beta_6 + 1)/r_1 \\ 0 & 1 - \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{\text{nod}} \\ v_2^{\text{nod}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{v}_4/r_4 \\ \alpha_2 \hat{v}_5 \end{bmatrix}$$

- Dalla seconda delle suddette equazioni scalari possiamo ottenere l'incognita $v_2^{\text{nod}} = \alpha_2 \hat{v}_5 / (1 - \alpha_2)$ che sostituita nella prima ci consente di calcolare anche l'incognita v_1^{nod} . Sostituendo questi valori nella quarta, seconda e terza equazione scalare del sistema precedente otteniamo, rispettivamente, le rimanenti incognite v_4^{nod} , i_2 e i_5 .

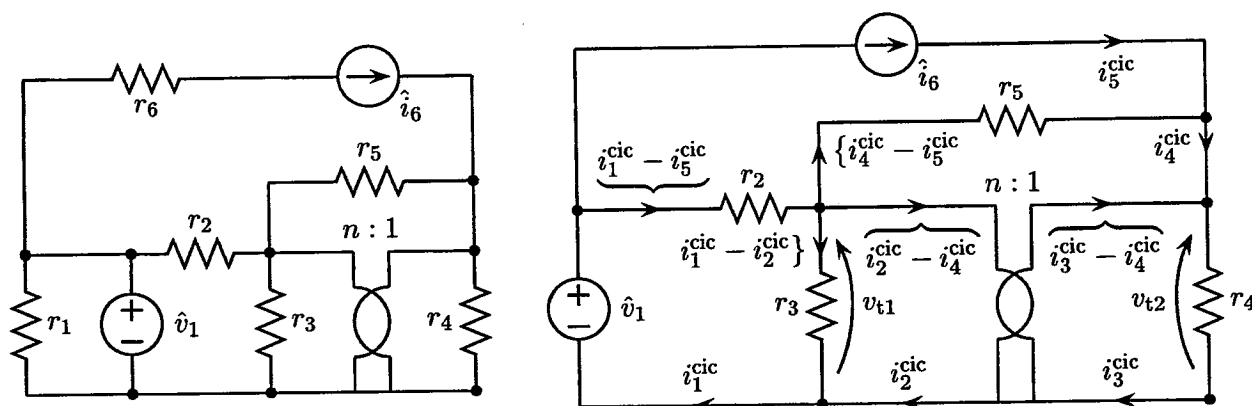
0.13 METODO DELLE MAGLIE/ANELLI PURO E MODIFICATO

0.13.1 Esercizio EA/13/09/96: Metodo degli anelli modificato con sli e tr.id.

Il circuito adinamico nella figura a sinistra è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\hat{\mathcal{I}}$, un tr.id. e sei $\mathcal{R}$.

Quesito: Scrivere il sistema di equazioni risolutive del circuito col metodo delle maglie modificato.

- Osserviamo che il $\mathcal{R}\langle r_1\rangle$ risulta in parallelo alla $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_1\rangle$ e il $\mathcal{R}\langle r_6\rangle$ risulta in serie alla $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}_6\rangle$.
- La corrente i_1 fluente nel $\mathcal{R}\langle r_1\rangle$ e la tensione v_6 ai capi del $\mathcal{R}\langle r_6\rangle$ possono essere calcolate immediatamente: $i_1 = \hat{v}_1/r_1$ e $v_6 = \hat{i}_6 r_6$. Nel caso molto frequente che le grandezze i_1 e v_6 non siano di nostro interesse, questo punto può essere omesso.



• Sostituiamo il $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$ con un c.a. e il $\mathcal{R}\langle r_6 \rangle$ con un c.c., senza alterare le tensioni e correnti dei rimanenti componenti del circuito (figura sulla destra).

• Scegliamo come base di maglie indipendenti i cinque anelli interni. Per ciascuna delle corrispondenti correnti cicliche i_1^{cic} , i_2^{cic} , i_3^{cic} , i_4^{cic} e i_5^{cic} viene scelto il verso orario. Conseguentemente, la corrente fluente in ogni ramo coincide con la differenza di due correnti cicliche, oppure con una singola corrente ciclica, a parte il segno, come mostrato nella figura di destra.

• Scriviamo le cinque equazioni principali, una per ciascuna maglia indipendente :

• **Maglia 1** : è costituita dai $\mathcal{R}\langle r_2 \rangle$, $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$ e $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_1 \rangle$. Eguagliamo la somma delle tensioni concordi con la maglia con la somma di quelle discordi : $r_2(i_1^{\text{cic}} - i_5^{\text{cic}}) + r_3(i_1^{\text{cic}} - i_2^{\text{cic}}) = \hat{v}_1$.

• **Maglia 2** : è costituita dal $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$, e dalla prima porta del tr.id. . Eguagliamo le tensioni dei due rami della maglia : $r_3(i_2^{\text{cic}} - i_1^{\text{cic}}) = -v_{t1}$, dove v_{t1} è la tensione della prima porta del tr.id. . Essa è stata introdotta come incognita ausiliaria dal momento che il tr.id. non può essere controllato in corrente (la matrice $\mathbf{G}$ non è definita).

• **Maglia 3** : è costituita dal $\mathcal{R}\langle r_4 \rangle$ e dalla seconda porta del tr.id. . Eguagliamo le tensioni dei due rami della maglia : $r_4 i_3^{\text{cic}} = v_{t2}$; la tensione v_{t2} della seconda porta del tr.id. è introdotta come incognita ausiliaria analogamente alla v_{t1} .

• **Maglia 4** : è costituita dal $\mathcal{R}\langle r_5 \rangle$ e dalle due porte del tr.id. . Annulliamo la somma delle tensioni dei tre rami : $r_5(i_4^{\text{cic}} - i_5^{\text{cic}}) = v_{t1} - v_{t2}$.

• **Maglia 5** : è costituita dai $\mathcal{R}\langle r_2 \rangle$, $\mathcal{R}\langle r_5 \rangle$ e dalla $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_6 \rangle$. Siccome è presente una $\hat{\mathcal{I}}$, che non è controllabile in corrente, occorrerebbe introdurre come incognita ausiliaria la tensione ai capi della $\hat{\mathcal{I}}$ stessa. Ma in questo caso possiamo semplificare il tutto introducendo la equazione che vincola la corrente ciclica i_5^{cic} della maglia stessa alla corrente impressa della $\hat{\mathcal{I}}$: $i_5^{\text{cic}} = \hat{i}_6$.

• A questo punto abbiamo costruito cinque equazioni nelle sette incognite i_1^{cic} , i_2^{cic} , i_3^{cic} , i_4^{cic} , i_5^{cic} , v_{t1} e v_{t2} .

Equazioni ausiliarie : Le due equazioni mancanti sono ottenute dalle relazioni costitutive del componente responsabile dell'introduzione delle tensioni v_{t1} e v_{t2} tra le incognite ausiliarie : il tr.id. .

La prima relazione costitutiva del tr.id. vincola le due tensioni ausiliarie v_{t1} e v_{t2} : $v_{t1} = n v_{t2}$.

La seconda relazione costitutiva vincola le correnti i_{t1} e i_{t2} delle due porte del tr.id. : esse sono in relazione con le correnti cicliche : $i_{t1} = i_2^{\text{cic}} - i_4^{\text{cic}}$ e $i_{t2} = i_3^{\text{cic}} - i_4^{\text{cic}}$.

La seconda relazione costitutiva del tr.id. diventa : $i_2^{\text{cic}} - i_4^{\text{cic}} = 1/n (i_3^{\text{cic}} - i_4^{\text{cic}})$.

Risultato : Il sistema completo di equazioni generato dal metodo delle maglie (anelli) modificato viene scritto riunendo le cinque equazioni principali dovute alle maglie indipendenti e le due

equazioni ausiliarie dovute al tr.id. :

$$\begin{bmatrix} r_2 + r_3 & -r_3 & 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 \\ -r_3 & +r_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r_4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & r_5 & -r_5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -n \\ 0 & 1 & -1/n & 1/n - 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{\text{cic}} \\ i_2^{\text{cic}} \\ i_3^{\text{cic}} \\ i_4^{\text{cic}} \\ i_5^{\text{cic}} \\ v_{t1} \\ v_{t2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{i}_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Commento : Il suddetto sistema può essere facilmente ridotto dal momento che vi è un'equazione con una sola incognita e due equazioni con due incognite (vedere Cap. 12-FCE). Più precisamente, dalla terza equazione si ha $v_{t2} = r_4 i_3^{\text{cic}}$, dalla quinta si ha $i_5^{\text{cic}} = \hat{i}_6$ e dalla sesta si ha $v_{t1} = n v_{t2}$. Sostituendo v_{t2} , i_5^{cic} e v_{t1} nelle restanti equazioni, si ottiene un sistema di quattro equazioni in quattro incognite, che, dopo aver scambiato la terza e la quarta equazione risulta tridiagonale :

$$\begin{bmatrix} r_2 + r_3 & -r_3 & 0 & 0 \\ -r_3 & +r_3 & n r_4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/n & 1/n - 1 \\ 0 & 0 & (1 - n) r_4 & r_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{\text{cic}} \\ r i_2^{\text{cic}} \\ i_3^{\text{cic}} \\ i_4^{\text{cic}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 \hat{i}_6 + \hat{v}_1 \\ 0 \\ 0 \\ r_5 \hat{i}_6 \end{bmatrix}$$

La sua soluzione carta&penna, qui non sviluppata, risulta facilitata dalla struttura tridiagonale.

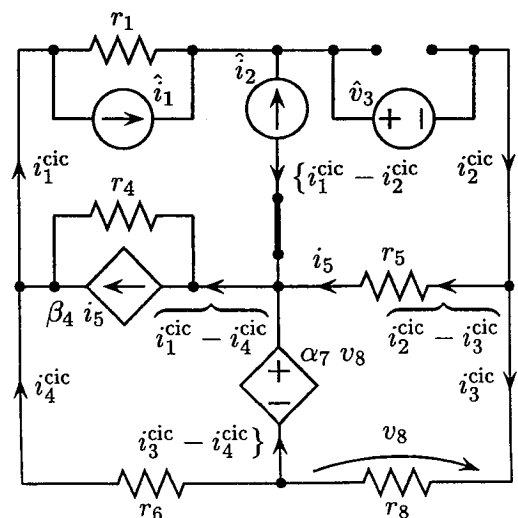
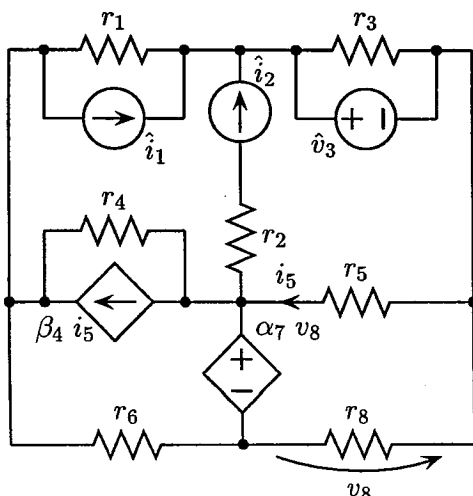
Commento : Se moltiplichiamo per $n r_4$ la terza equazione, la matrice del sistema risulta simmetrica. Infatti tutti i componenti sono reciproci anche se il tr.id. non è controllabile in corrente.

0.13.2 Esercizio EA/20/02/97 : Metodo degli anelli modificato con sIi, sVpV e sIpI

Il circuito adinamico nella figura a sinistra è costituito da una $\mathcal{V}_V$, una $\mathcal{I}_I$, una $\hat{\mathcal{V}}$, due $\hat{\mathcal{I}}$ e sette $\mathcal{R}$.

Quesito : Scrivere le equazioni risolutive del circuito col metodo delle maglie modificato, orientando le maglie (anelli) in verso orario.

• Facciamo alcune modifiche minori sul circuito : il $\mathcal{R}\langle r_2 \rangle \parallel \hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_2 \rangle$ è sostituito dalla $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_2 \rangle$, mentre il $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle \parallel \hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_3 \rangle$ è sostituito dalla $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_3 \rangle$: otteniamo il circuito nella figura di destra, in cui sono riportate anche le correnti cicliche fluenti in ciascun ramo.



• Introduciamo le quattro correnti cicliche orientandole in verso orario : la figura sulla destra

riporta le correnti cicliche che percorrono ciascun ramo. Scriviamo le quattro equazioni principali del circuito, una per ciascun anello indipendente :

- **Anello 1** : è costituito da tre rami : il $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$, il $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_1 \rangle$, il parallelo del $\mathcal{R}\langle r_4 \rangle$ e della porta pilotata della $\mathcal{I}\langle \beta_4 i_5 \rangle$ e la $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_2 \rangle$.

Annuliamo la somma delle tensioni : $r_4 (i_1^{\text{cic}} - i_4^{\text{cic}} - \beta_4 i_5) + r_1 (i_1^{\text{cic}} - \hat{i}_1) + v_2 = 0$.
L'incognita ausiliaria v_2 è la tensione ai capi della $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_2 \rangle$. Essendo la corrente pilotante i_5 uguale alla differenza delle correnti cicliche $i_2^{\text{cic}} - i_3^{\text{cic}}$, si ottiene :

$$r_4 (i_1^{\text{cic}} - i_4^{\text{cic}} - \beta_4 (i_2^{\text{cic}} - i_3^{\text{cic}})) + r_1 (i_1^{\text{cic}} - \hat{i}_1) + v_2 = 0 .$$

- **Anello 2** : è costituito da tre rami : la $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_3 \rangle$, il $\mathcal{R}\langle r_5 \rangle$ e la $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_2 \rangle$.

Annuliamo la somma delle tensioni : $r_5 (i_2^{\text{cic}} - i_3^{\text{cic}}) - v_2 = -\hat{v}_3$.

- **Anello 3** : è costituito da tre rami : i $\mathcal{R}\langle r_5 \rangle$ e $\mathcal{R}\langle r_8 \rangle$ e la porta pilotata della $\mathcal{V}\langle \alpha_7 v_8 \rangle$.

Annuliamo la somma delle tensioni : $r_5 (i_3^{\text{cic}} - i_2^{\text{cic}}) + r_8 i_3^{\text{cic}} - \alpha_7 v_8 = 0$. Rimpiazzando la tensione pilotante v_8 , si ottiene : $r_5 (i_3^{\text{cic}} - i_2^{\text{cic}}) + r_8 i_3^{\text{cic}} - \alpha_7 r_8 i_3^{\text{cic}} = 0$.

- **Anello 4** : è costituito da tre rami : il parallelo del $\mathcal{R}\langle r_4 \rangle$ e della porta pilotata della $\mathcal{I}\langle \beta_4 i_5 \rangle$, il $\mathcal{R}\langle r_6 \rangle$ e la porta pilotata della $\mathcal{V}\langle \alpha_7 v_8 \rangle$.

Annuliamo la somma delle tensioni : $r_6 i_4^{\text{cic}} + r_4 (i_4^{\text{cic}} - i_1^{\text{cic}} + \beta_4 i_5) + \alpha_7 v_8 = 0$. La tensione pilotante v_8 e la corrente pilotante i_5 vengono rimpiazzate dalle correnti cicliche come già fatto per gli anelli 1 e 3 e si ottiene : $r_6 i_4^{\text{cic}} + r_4 (i_4^{\text{cic}} - i_1^{\text{cic}} + \beta_4 (i_2^{\text{cic}} - i_3^{\text{cic}})) + \alpha_7 r_8 i_3^{\text{cic}} = 0$.

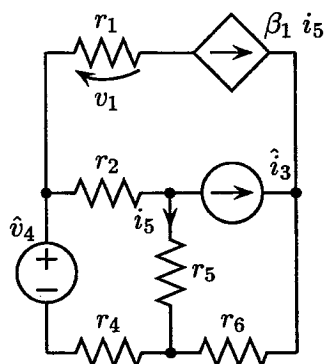
- A questo punto siamo in presenza di quattro equazioni in cinque incognite : le quattro correnti cicliche e la tensione ausiliaria v_2 .

Equazione ausiliaria : L'equazione mancante tiene conto della relazione costitutiva della $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_2 \rangle$, la cui tensione v_2 figura tra le incognite ausiliarie : $\hat{i}_2 = i_2^{\text{cic}} - i_1^{\text{cic}}$.

Risultato : Riunendo le quattro equazioni principali e quella ausiliaria, possiamo costruire un sistema di cinque equazioni in cinque incognite :

$$\begin{bmatrix} r_1 + r_4 & -\beta_4 r_4 & \beta_4 r_4 & -r_4 & 1 \\ 0 & r_5 & -r_5 & 0 & -1 \\ 0 & -r_5 & r_5 + r_8 (1 - \alpha_7) & 0 & 0 \\ -r_4 & \beta_4 r_4 & \alpha_7 r_8 - \beta_4 r_4 & r_4 + r_6 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{\text{cic}} \\ i_2^{\text{cic}} \\ i_3^{\text{cic}} \\ i_4^{\text{cic}} \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \hat{i}_1 \\ -\hat{v}_3 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{i}_2 \end{bmatrix}$$

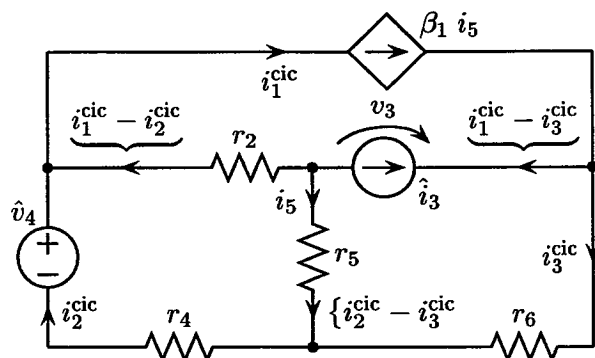
Commento : La soluzione del suddetto sistema algebrico consente di calcolare, tramite le correnti cicliche e la tensione ausiliaria v_2 , ogni altra grandezza del circuito : per esempio, la tensione v_1 ai capi del $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$ risulta uguale a $v_1 = r_1 (i_1^{\text{cic}} - \hat{i}_1)$.

0.13.3 Esercizio EA/09/09/97 : Metodo degli anelli modificato con $s\mathbf{I}$ e $s\mathbf{I}\mathbf{I}$ 

Il circuito adinamico in figura opera in regime costante ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\hat{\mathcal{I}}$, una $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$, e cinque $\mathcal{R}$.

Quesito : Scrivere le equazioni risolutive del circuito col metodo (modificato) delle maglie (anelli).

• Il $\mathcal{R}(r_1)$ risulta in serie alla porta pilotata della $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}(\beta_1 i_5)$ e, assumendo che la tensione v_1 ai suoi capi non sia di interesse, può essere rimosso. Nel caso che v_1 sia di interesse, siccome $v_1 = r_1 \beta_1 i_5$, essa potrà essere calcolata una volta nota la corrente di ramo i_5 .



• Scegliamo come base delle maglie i tre anelli interni, orientando ciascuna corrente ciclica in verso orario. La figura riporta le correnti cicliche che percorrono ciascun ramo del circuito.

Scriviamo le tre equazioni principali, una per ciascun anello interno :

- **Anello 1 :** è costituito da tre rami : la $\hat{\mathcal{I}}(\hat{i}_3)$, il $\mathcal{R}(r_2)$ e la $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}(\beta_1 i_5)$.

La corrente ciclica i_1^{cic} coincide con la corrente pilotata della $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$: $i_1^{\text{cic}} = \beta_1 i_5$.

In questo modo evitiamo l'introduzione della tensione ai capi della porta pilotata della $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ tra le incognite ausiliarie. La corrente i_5 pilotante la $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}(\beta_1 i_5)$ deve essere espressa in funzione della correnti cicliche (incognite principali). Osservando il $\mathcal{R}(r_5)$ si ha : $i_5 = i_2^{\text{cic}} - i_3^{\text{cic}}$.

Quindi si ha l'equazione : $i_1^{\text{cic}} = \beta_1 (i_2^{\text{cic}} - i_3^{\text{cic}})$.

- **Anello 2 :** è costituito da quattro rami : la $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_4)$ e i $\mathcal{R}(r_2)$, $\mathcal{R}(r_4)$ e $\mathcal{R}(r_5)$.

Annuliamo la somma delle tensioni : $r_2 (i_2^{\text{cic}} - i_1^{\text{cic}}) + r_4 i_2^{\text{cic}} + r_5 (i_2^{\text{cic}} - i_3^{\text{cic}}) = \hat{v}_4$.

- **Anello 3 :** è costituito da tre rami : la $\hat{\mathcal{I}}(\hat{i}_3)$, il $\mathcal{R}(r_5)$ e il $\mathcal{R}(r_6)$.

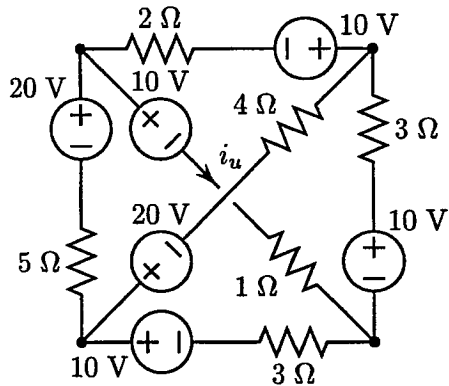
Annuliamo la somma delle tensioni : $r_6 i_3^{\text{cic}} + r_5 (i_3^{\text{cic}} - i_2^{\text{cic}}) - v_3 = 0$, dove v_3 è la tensione ai capi della $\hat{\mathcal{I}}$. Essa è introdotta come incognita ausiliaria dal momento che la $\hat{\mathcal{I}}$ non è controllabile in corrente.

- In questo momento noi abbiamo tre equazioni in quattro incognite : le tre correnti cicliche e la tensione ausiliaria v_3 . Occorre considerare la relazione costitutiva della $\hat{\mathcal{I}}(\hat{i}_3)$ che ci ha costretto ad aggiungere v_3 tra le incognite : $\hat{i}_3 = i_3^{\text{cic}} - i_1^{\text{cic}}$.

Risultato : Siamo in presenza di un sistema di quattro equazioni in quattro incognite. Successivamente, siccome l'incognita v_3 compare solamente nelle terza equazione possiamo sopprimere questa equazione : otteniamo direttamente un sistema equivalente di tre equazioni in tre incognite :

$$\begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 & \beta_1 & 0 \\ -r_2 & r_2 + r_4 + r_5 & -r_5 & 0 \\ 0 & -r_5 & r_5 + r_6 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{\text{cic}} \\ i_2^{\text{cic}} \\ i_3^{\text{cic}} \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_4 \\ 0 \\ \hat{i}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 & \beta_1 \\ -r_2 & r_2 + r_4 + r_5 & -r_5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{\text{cic}} \\ i_2^{\text{cic}} \\ i_3^{\text{cic}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v}_4 \\ \hat{i}_3 \end{bmatrix}$$

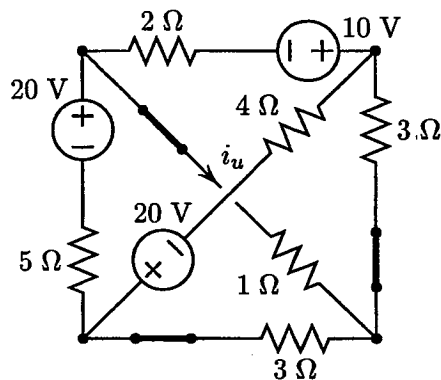
0.13.4 Esercizio EA/13/01/98 : Metodo delle maglie puro



Il circuito adinamico in figura è costituito da sei $\hat{\mathcal{V}}$ e sei $\mathcal{R}$. Il circuito opera in regime costante.

Quesito : Calcolare la corrente i_u , che scorre in uno dei rami diagonali.

• I tre bipoli incidenti il nodo in basso sulla destra sono nonomogenei e nonimpressivi e sono rappresentati dal modello di Thévenin. Essendo le tensioni impresses di ciascuno dei tre bipoli orientate concordemente rispetto al taglio e uguali a 10 V, le tre $\hat{\mathcal{V}}$ costituiscono un taglio- $\hat{\mathcal{V}}$ uniforme e possono essere sostituite da tre c.c. .



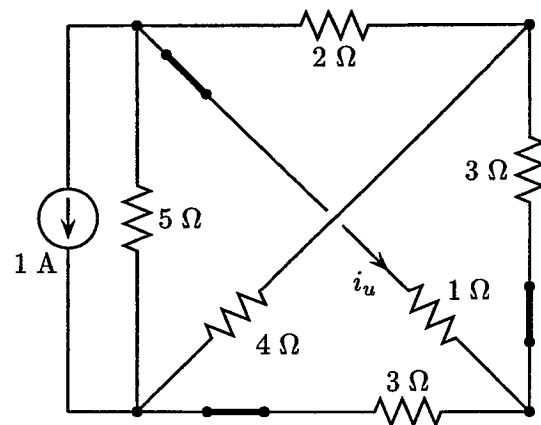
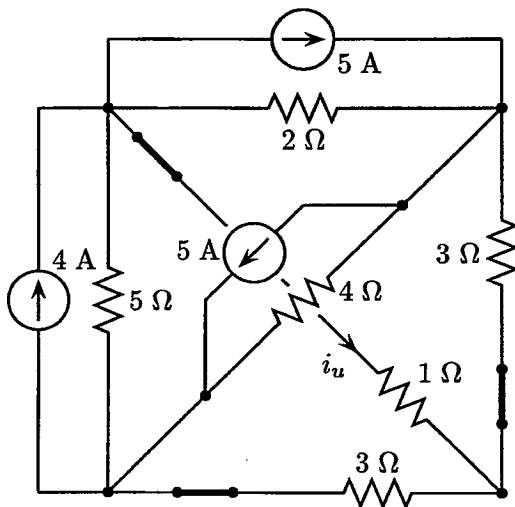
• Consideriamo la maglia costituita dai tre bipoli rappresentati dai sottostanti modelli di Thévenin e sostituiamo ciascuno di essi col modello equivalente di Norton :

$$\hat{\mathcal{V}}(20\text{ V}) \parallel \mathcal{R}(5\ \Omega) \rightarrow \hat{\mathcal{I}}(4\text{ A}) \parallel \mathcal{R}(5\ \Omega)$$

$$\hat{\mathcal{V}}(20\text{ V}) \parallel \mathcal{R}(4\ \Omega) \rightarrow \hat{\mathcal{I}}(5\text{ A}) \parallel \mathcal{R}(4\ \Omega)$$

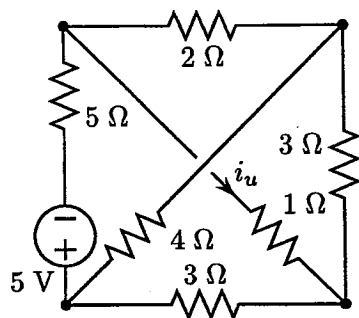
$$\hat{\mathcal{V}}(10\text{ V}) \parallel \mathcal{R}(2\ \Omega) \rightarrow \hat{\mathcal{I}}(5\text{ A}) \parallel \mathcal{R}(2\ \Omega)$$

come indicato nella sottostante figura a sinistra.



• Le tre $\hat{\mathcal{I}}$ costituiscono una maglia. Se aggiungiamo in parallelo ad esse una maglia- $\hat{\mathcal{I}}$ uniforme di 5 A con orientamento discorde, rimane un'unica $\hat{\mathcal{I}}(1\text{ A})$ in parallelo al $\mathcal{R}(5\ \Omega)$. A sua volta il $\hat{\mathcal{I}}(1\text{ A}) \parallel \mathcal{R}(5\ \Omega)$ è sostituito dal modello di Thévenin $\hat{\mathcal{V}}(5\text{ V}) \parallel \mathcal{R}(5\ \Omega)$. Il circuito è costituito da cinque $\mathcal{R}$ e dal $\hat{\mathcal{V}}(5\text{ V}) \parallel \mathcal{R}(5\ \Omega)$.

• Tutti i componenti sono bipoli controllabili in corrente. Quindi possiamo analizzare il circuito col metodo puro delle maglie (anelli). Scegliamo le tre maglie indipendenti e le corrispondenti correnti cicliche con orientamento orario.



- **Maglia 1** : La maglia è costituita dai $\mathcal{R}\langle 2\ \Omega \rangle$, $\mathcal{R}\langle 4\ \Omega \rangle$ $\mathcal{R}\langle 5\ \Omega \rangle$ e dalla $\hat{\mathcal{V}}\langle 5\ \text{V} \rangle$. Annulliamo la somma delle tensioni : $2 i_1^{\text{cic}} + 4 (i_1^{\text{cic}} - i_2^{\text{cic}}) + 5 (i_1^{\text{cic}} + i_3^{\text{cic}}) = -5$.
- **Maglia 2** : La maglia è costituita dai due $\mathcal{R}\langle 3\ \Omega \rangle$ e dal $\mathcal{R}\langle 4\ \Omega \rangle$. Annulliamo la somma delle tensioni : $4 (i_2^{\text{cic}} - i_1^{\text{cic}}) + 3 i_2^{\text{cic}} + 3 (i_2^{\text{cic}} + i_3^{\text{cic}}) = 0$.
- **Maglia 3** : La maglia è costituita dai $\mathcal{R}\langle 1\ \Omega \rangle$, $\mathcal{R}\langle 3\ \Omega \rangle$ $\mathcal{R}\langle 5\ \Omega \rangle$ e dalla $\hat{\mathcal{V}}\langle 5\ \text{V} \rangle$. Annulliamo la somma delle tensioni : $5 (i_3^{\text{cic}} + i_1^{\text{cic}}) + 3 (i_3^{\text{cic}} + i_2^{\text{cic}}) + 1 i_3^{\text{cic}} = -5$.

• Con questa scelta delle correnti cicliche la corrente i_u coincide con la corrente ciclica i_3^{cic} .

• Riscriviamo il sistema di equazioni in forma compatta :

$$\begin{bmatrix} 11 & -4 & 5 \\ -4 & 10 & 3 \\ 5 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{\text{cic}} \\ i_2^{\text{cic}} \\ i_3^{\text{cic}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

• Siccome siamo interessati solamente all'incognita i_3^{cic} , conviene eliminare l'incognita i_2^{cic} moltiplicando la prima equazione per 15, la seconda equazione per -6 e la terza per 20 e sommando alle prime due equazioni la terza equazione. Otteniamo un sistema di due equazioni in due incognite :

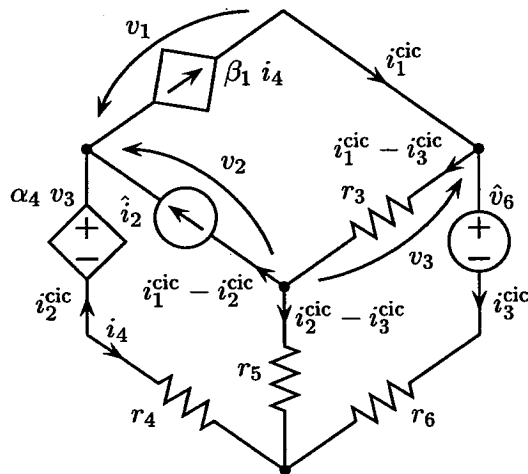
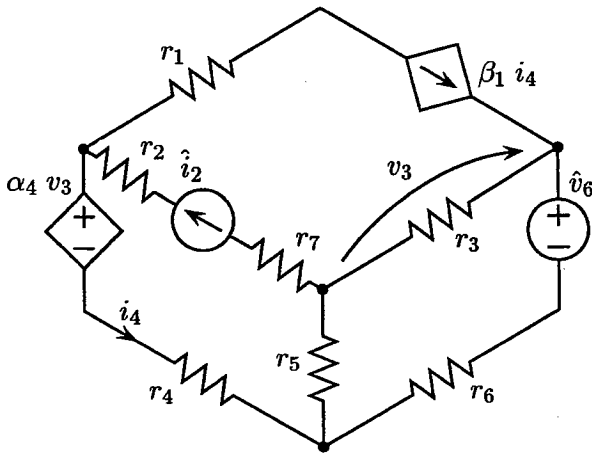
$$\begin{bmatrix} 165 & -60 & 75 \\ 24 & -60 & -18 \\ 100 & 60 & 180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{\text{cic}} \\ i_2^{\text{cic}} \\ i_3^{\text{cic}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 265 & 255 \\ 124 & 162 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{\text{cic}} \\ i_3^{\text{cic}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -175 \\ -100 \end{bmatrix}$$

Risultato : Le due equazioni coinvolgono solamente le incognite i_1^{cic} e i_3^{cic} . Possiamo eliminare l'incognita i_1^{cic} moltiplicando la prima equazione per -124 e la seconda per 265 . Sommandole, si ottiene un'equazione in una sola incognita :

$$[-255 \times 124 + 162 \times 265] i_3^{\text{cic}} = [175 \times 124 - 100 \times 265] \Rightarrow i_u = i_3^{\text{cic}} = -\frac{160}{377} \text{ A}$$

Commento : La riduzione delle sorgenti impulsive poteva essere evitata.

0.13.5 Esercizio EA/23/02/99 : metodo delle maglie modificato con sVpV, sIpI, e sIi



Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\hat{\mathcal{I}}$, una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$, una $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ e sette $\mathcal{R}$.

Quesito : Scrivere le equazioni risolutive del circuito mediante il metodo delle maglie (modificato).

- Il $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$ è in serie alla $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}\langle \beta_1 i_4 \rangle$, mentre i $\mathcal{R}\langle r_2 \rangle$ e $\mathcal{R}\langle r_7 \rangle$ sono in serie alla $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_2 \rangle$: ciascuno di essi è sostituito da un c.c. .

- Scegliamo come maglie indipendenti i tre anelli interni e introduciamo le corrispondenti correnti cicliche i_1^{cic} , i_2^{cic} e i_3^{cic} , in accordo alla figura.

- Scriviamo le tre equazioni principali, una per ciascun anello :

- **Anello 1** : è costituito dai tre rami : $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_2 \rangle$, $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}\langle \beta_1 i_4 \rangle$ e $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$. Annulliamo la somma delle tensioni : $v_1 + r_3 (i_1^{\text{cic}} - i_3^{\text{cic}}) - v_2 = 0$; le tensioni v_1 e v_2 sono incognite ausiliarie, introdotte poiché $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}\langle \beta_1 i_4 \rangle$ e $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_2 \rangle$ non sono controllabili in corrente.

- **Anello 2** : è costituito dai quattro rami : $\mathcal{R}\langle r_4 \rangle$, $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}\langle \alpha_4 v_3 \rangle$, $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_2 \rangle$ e $\mathcal{R}\langle r_5 \rangle$. Annulliamo la somma delle tensioni : $r_4 i_2^{\text{cic}} - \alpha_4 v_3 + v_2 + r_5 (i_2^{\text{cic}} - i_3^{\text{cic}}) = 0$; la tensione v_3 è presente come grandezza pilotante. Dalla relazione costitutiva del $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$ abbiamo $v_3 = r_3 (i_1^{\text{cic}} - i_3^{\text{cic}})$, donde l'equazione diventa :

$$r_4 i_2^{\text{cic}} - \alpha_4 r_3 (i_1^{\text{cic}} - i_3^{\text{cic}}) + v_2 + r_5 (i_2^{\text{cic}} - i_3^{\text{cic}}) = 0 .$$

- **Anello 3** : è costituito dai quattro rami : $\mathcal{R}\langle r_5 \rangle$, $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$, $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_6 \rangle$ e $\mathcal{R}\langle r_6 \rangle$. Eguagliamo la tensione impressa alla somma delle restanti tensioni : $r_3 (i_3^{\text{cic}} - i_1^{\text{cic}}) + r_5 (i_3^{\text{cic}} - i_2^{\text{cic}}) + r_6 i_3^{\text{cic}} = -\hat{v}_6$.

- Le equazioni dei tre anelli coinvolgono cinque incognite : le correnti cicliche i_1^{cic} , i_2^{cic} e i_3^{cic} e le tensioni ausiliarie v_1 e v_2 . Aggiungiamo le equazioni ausiliarie ottenute dalle relazioni costitutive dei componenti che hanno richiesto l'introduzione delle tensioni ausiliarie v_1 e v_2 :

- **Prima equazione ausiliaria** : La relazione costitutiva della $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}\langle \beta_1 i_4 \rangle$ ci consente di scrivere l'equazione $i_1^{\text{cic}} = \beta_1 i_4$ che esprimendo la corrente pilotante i_4 per mezzo delle correnti cicliche diventa : $i_1^{\text{cic}} = -\beta_1 i_2^{\text{cic}}$.

- **Seconda equazione ausiliaria** : La relazione costitutiva della $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_2 \rangle$ ci consente di scrivere l'equazione : $\hat{i}_2 = i_1^{\text{cic}} - i_2^{\text{cic}}$.

Risultato : Riunendo le equazioni principali e ausiliarie, otteniamo il seguente sistema di cinque equazioni in cinque incognite.

Commento : La prima equazione scalare può essere tolta poiché è l'unica che contiene l'incognita v_1 .

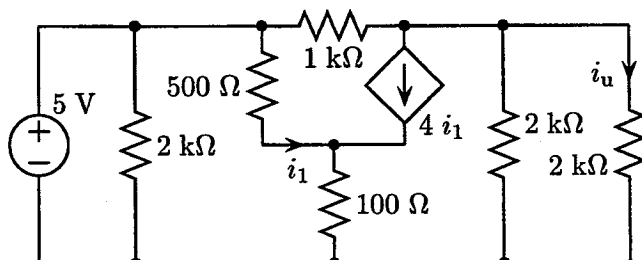
$$\begin{bmatrix} r_3 & 0 & -r_3 & 1 & -1 \\ -\alpha_4 r_3 & r_4 + r_5 & \alpha_4 r_3 - r_5 & 0 & 1 \\ -r_3 & -r_5 & r_3 + r_5 + r_6 & 0 & 0 \\ 1 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{\text{cic}} \\ i_2^{\text{cic}} \\ i_3^{\text{cic}} \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{v}_6 \\ 0 \\ \hat{i}_2 \end{bmatrix}$$

- Le due ultime equazioni costituiscono un sistema di due equazioni nelle due incognite i_1^{cic} e i_2^{cic} : le risolviamo e sostituiamo i valori di i_1^{cic} e i_2^{cic} ottenuti nella terza equazione che ci consente di

calcolare l'incognita i_3^{cic} . Ripetendo la procedura, dalla seconda equazione otteniamo l'incognita v_2 e dalla prima l'incognita v_1 .

0.14 METODI AGGREGA&RIMPIAZZA

0.14.1 Esercizio EA/23/07/96 : Aggrega&rimpiazza con sIpI e Miller2

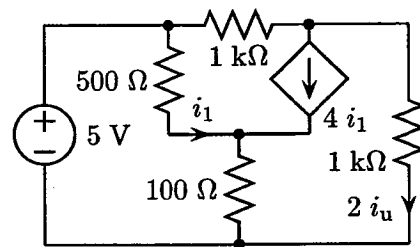


Il circuito adinamico in figura è costituito da una $\hat{V}$, una $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ e sei $\mathcal{R}$.

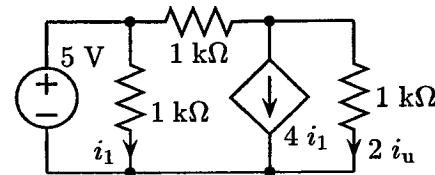
Quesito : Calcolare la corrente i_u che fluisce nel $\mathcal{R}$ (2 kΩ) di destra.

• Il $\mathcal{R}$ (2 kΩ), in parallelo alla $\hat{V}$ (5 V), può essere sostituito da un c.a., poiché la sua corrente non è di interesse.

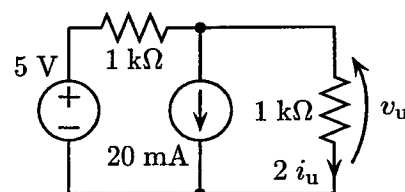
• Vi sono altri due $\mathcal{R}$ (2 kΩ) in parallelo, in uno dei quali scorre proprio la corrente i_u da calcolare. Essi possono essere fusi in un unico $\mathcal{R}$ (1 kΩ) con l'accorgimento di indicare con $2 i_u$ la corrente che vi scorre, avendo applicato all'inverso la formula del partitore di corrente. A questo punto siamo in presenza di un circuito adinamico costituito da una $\hat{V}$, una $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ e quattro $\mathcal{R}$.



• La porta pilotata della $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ ($4 i_1$) forma un taglio con il $\mathcal{R}$ (100 Ω) e il $\mathcal{R}$ (500 Ω), percorso dalla corrente pilotante i_1 . In accordo al secondo teorema di Miller sostituiamo il $\mathcal{R}$ (100 Ω) con un c.c. e inseriamo un $\mathcal{R}$ ($100 \times (4 + 1) = 500 \Omega$) in serie al $\mathcal{R}$ (500 Ω) preesistente. I due $\mathcal{R}$ (500 Ω) in serie sono fusi in un unico $\mathcal{R}$ (1 kΩ).



• La corrente pilotante i_1 è uguale a $i_1 = \hat{v}/1000 = 5/1000 = 5 \text{ mA}$, dal momento che scorre nel $\mathcal{R}$ (1 kΩ) in parallelo alla $\hat{V}$ (5 V). Siccome i_1 è nota, la $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ può essere sostituita da una $\hat{\mathcal{I}}$ ($\hat{i} = 4 \times i_1 = 20 \text{ mA}$), mentre il $\mathcal{R}$ (1000 Ω) può essere sostituito da un c.a., dal momento che la sua corrente non è più pilotante. Il circuito risulta costituito dal parallelo di tre bipoli soggetti alla stessa tensione v_u .

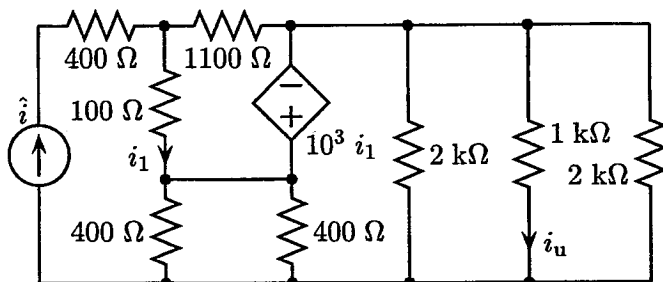


Risultato : Calcolo la tensione v_u mediante la regola del primo teorema di Millman e la divido per il doppio della resistenza di 1000 Ω per ottenere il valore di i_u :

$$v_u = \frac{5/1000 - 20/1000}{1/1000 + 1/1000} = -\frac{15}{2} \text{ V} \implies i_u = \frac{1}{2} \times \frac{v_u}{1000} = \frac{1}{2} \times \frac{-15/2}{1000} = -\frac{3}{800} \text{ A}$$

Commento : Se lo studente non si fosse accorto della possibilità di applicare il secondo Teorema di Miller, poteva continuare l'analisi mediante il metodo delle maglie o dei nodi. I conti numerici sarebbero stati un po' più pesanti.

0.14.2 Esercizio EA/08/11/96 : Aggrega&rimpiazza con sVpI e Miller1

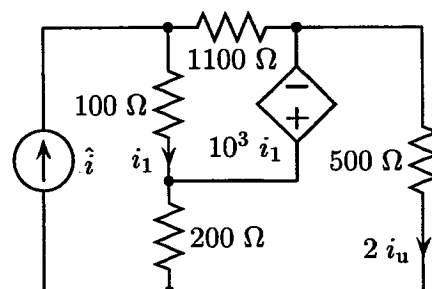


Il circuito adinamico in figura è costituito da una $\hat{I}(\hat{i} = 20 \text{ mA})$, una $V_I(1000 i_1)$ e otto R .

Quesito : Calcolare la corrente i_u .

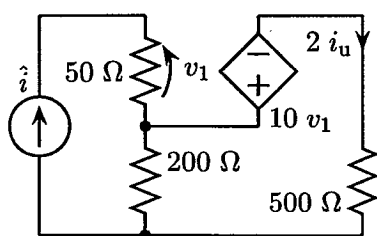
• Il $R(400 \Omega)$ in serie alla $\hat{I}(\hat{i})$ è sostituito da un c.c. poiché la sua tensione non è di interesse. I due $R(400 \Omega)$ in parallelo sono fusi in un unico $R(200 \Omega)$.

• I due $R(2 \text{ k}\Omega)$ in parallelo al $R(1 \text{ k}\Omega)$ percorso dalla corrente i_u sono fusi in un unico $R(1 \text{ k}\Omega)$. Ci troviamo di fronte al parallelo di due $R(1 \text{ k}\Omega)$, in uno dei quali scorre la corrente i_u , che è proprio l'incognita del problema. I due $R(1 \text{ k}\Omega)$ sono fusi in un unico $R(500 \Omega)$. Per ricordarci della corrente i_u occorre indicare con $2 i_u$ la corrente che lo percorre, avendo usato all'inverso la formula del partitore di corrente.

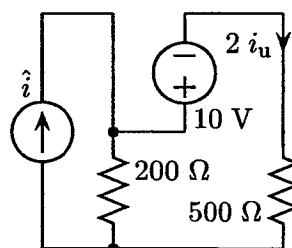


• La porta pilotata della $V_I(1000 i_1)$ forma una maglia con il $R(100 \Omega)$ e il $R(1100 \Omega)$. Per poter applicare in un secondo tempo il primo teorema di Miller, conviene rimpiazzare la $V_I(1000 i_1)$ con una $V_V(10 v_1)$: sostituiamo la grandezza pilotante $i_1 \rightarrow v_1$ in cui v_1 è la tensione ai capi del $R(100 \Omega)$: $v_1 = 100 i_1$ e quindi la tensione pilotata $10 v_1$ della $V_V(10 v_1)$ risulta uguale a $1000 i_1 = 1000 v_1 / 100 = 10 v_1$.

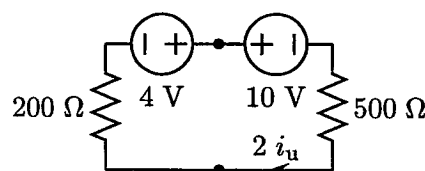
• Applicando il primo teorema di Miller, sostituiamo con un c.a. il $R(1100 \Omega)$ e inseriamo un $R(1100/(10+1) = 100 \Omega)$ in parallelo al $R(100 \Omega)$ ai cui capi è definita la tensione pilotante v_1 . I due $R(100 \Omega)$ in parallelo sono fusi in un unico $R(50 \Omega)$.



• La tensione pilotante v_1 risulta nota $v_1 = 0,02 \times 50 = 1 \text{ V}$: la $V_V(10 v_1)$ è sostituita da una $\hat{V}(10 v_1 = 10 \text{ V})$. Il $R(50 \Omega)$ risulta in serie alla $\hat{I}$ e quindi può essere sostituito da un c.c.



• Sostituiamo il $\hat{I}(\hat{i} = 20 \text{ mA}) \parallel R(200 \Omega)$ col modello di Thévenin: $\hat{V}(4 \text{ V}) \parallel R(200 \Omega)$. Si ottiene un circuito con un'unica maglia.



Risultato : Siccome la tensione impressa totale lungo la maglia è $-10 + 4 = -6 \text{ V}$ e la resistenza totale è $200 + 500 = 700 \Omega$, la corrente i_u risulta :

$$2 i_u = \frac{-6}{700} \Rightarrow i_u = -\frac{30}{7} \text{ mA}$$

Commento : Il lettore poco accorto potrebbe non indovinare l'opportunità della sostituzione $V_I \rightarrow V_V$ e la successiva applicazione del primo teorema di Miller. Comunque il problema poteva comunque essere risolto applicando il metodo delle maglie al circuito.

0.14.3 Esercizio EA/01/07/97 : Aggrega&rimpiazza con giratore e slpI

Il circuito adinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}$, una $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$, un giratore e otto $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la corrente i_3 e la tensione v_u .

- I $\mathcal{R}(20\ \Omega)$ e $\mathcal{R}(180\ \Omega)$, in serie alla porta pilotata della $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$, sono sostituiti da due c.c. .
- I $\mathcal{R}(500\ \Omega)$ e $\mathcal{R}(700\ \Omega)$ costituiscono un taglio : essi sono sostituiti da un $\mathcal{R}(500 + 700 = 1200\ \Omega)$ e da un c.c. , rispettivamente :

- La $\hat{\mathcal{I}}(1\ \text{mA})$ e il $\mathcal{R}(300\ \Omega)$ sono sostituiti dal modello di Thévenin : una $\hat{\mathcal{V}}(0,3\ \text{V})$ in serie a un $\mathcal{R}(300\ \Omega)$. A sua volta il $\mathcal{R}(300\ \Omega)$ è fuso con il $\mathcal{R}(1200\ \Omega)$ in serie in un unico $\mathcal{R}(1500\ \Omega)$.

- Esiste un taglio costituito dal $\mathcal{R}(1500\ \Omega)$ percorso dalla corrente pilotante della $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ i_3 , dalla porta pilotata della $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ e dal $\mathcal{R}(50\ \Omega)$. Possiamo applicare il secondo teorema di Miller.

- Rimpiazziamo il $\mathcal{R}(50\ \Omega)$ con un c.c. e inseriamo in serie al $\mathcal{R}(1500\ \Omega)$ un $\mathcal{R}(50 \times (1 + 9) = 500\ \Omega)$: questi due $\mathcal{R}$ vengono fusi in un unico $\mathcal{R}(2000\ \Omega)$.

- La corrente pilotante i_3 fluisce nel $\mathcal{R}(2000\ \Omega)$ connesso direttamente alla $\hat{\mathcal{V}}$: $i_3 = 0,3/2000 = 0,15\ \text{mA}$: la porta pilotata della $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ può essere rimpiazzata da una $\hat{\mathcal{I}}$ con corrente impressa, diretta verso il basso, di valore $\hat{i}_1 = 9 \times i_3 = 1,35\ \text{mA}$.

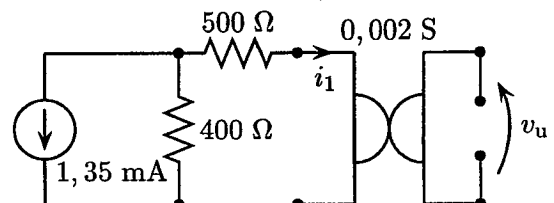
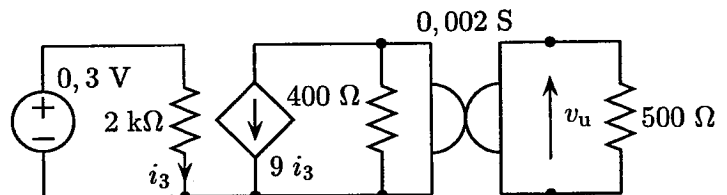
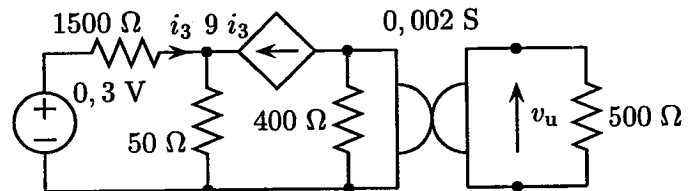
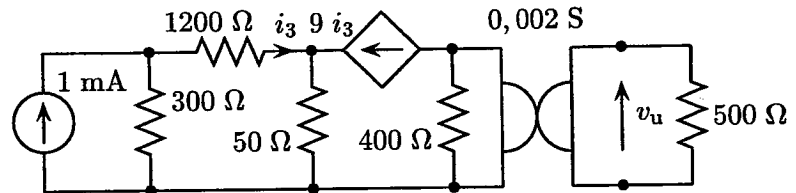
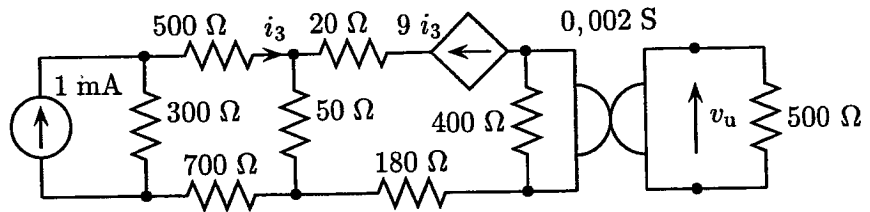
- Il $\mathcal{R}(500\ \Omega)$ connesso alla seconda porta del giratore può essere sostituito da un c.a. mentre in serie alla prima porta inseriamo un $\mathcal{R}$ di resistenza

$$\frac{1}{g_m^2 \times 500} = \frac{1}{0,002^2 \times 500} = 500\ \Omega$$

Risultato : La regola del partitore di corrente (nella forma rapporto di resistenze) ci consente di calcolare la corrente i_1 che fluisce nel $\mathcal{R}(500\ \Omega)$ ed entra nella prima porta del giratore e, conseguentemente, la tensione v_u tramite una delle relazioni costitutive del giratore

$$i_1 = -\hat{i}_1 \frac{400}{400 + 500} = -1,35 \times \frac{4}{9} = -0,6\ \text{mA} \Rightarrow v_u = \frac{i_1}{g_m} = \frac{-0,6 \cdot 10^{-3}}{0,002} = -0,3\ \text{V}$$

Commento : Se il giratore fosse tripolare, il risultato non cambierebbe.



0.15 ALTRI PROBLEMI NON CLASSIFICATI SUI CIRCUITI E COMPONENTI ADINAMICI

0.15.1 ***Esercizio E1/23/07/97 : Cambiamento delle porte di un DBT

SUBSECTION : Cambiamento delle porte di un DBT adinamico.

Il DBT adinamico lineare e nonomogeneo in figura è costituito da una $\mathcal{V}_V$ e un $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la rappresentazione di trasmissione diretta $(v_1, i_1) \leftarrow (v_2, i_2)$, avendo scelto v_1, v_2, i_1 e i_2 come tensioni e correnti del DBT.

• Indichiamo con v_a e i_a le grandezze della porta pilotante e con v_b e i_b le grandezze della porta pilotata della $\mathcal{V}_V$. Con queste grandezze le relazioni costitutive del DBT sono :

$$v_a = r_a i_a, \quad v_b = -\alpha v_a$$

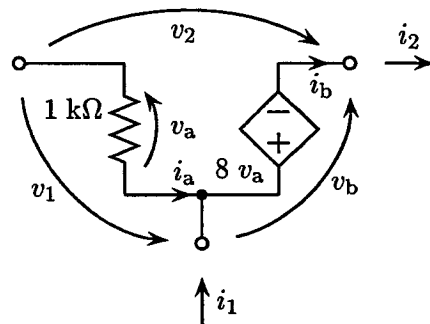
• Una ispezione della figura ci consente di scrivere le relazioni tra la quaterna di grandezze v_a, i_a, v_b e i_b e la nuova quaterna v_1, i_1, v_2 e i_2 : $v_a = -v_1, v_b = v_2 - v_1, i_a = i_2 - i_1, i_b = i_2$.

• Sostituiamo la quaterna v_a, i_a, v_b e i_b nelle relazioni costitutive del DBT ed esplicitiamo a primo membro le grandezze dipendenti della rappresentazione $(v_1, i_1) \leftarrow (v_2, i_2)$:

$$v_1 = r_a (i_1 - i_2) \Rightarrow i_1 = \frac{v_1}{r_a} + i_2 \Rightarrow i_1 = \frac{v_2}{r_a (1 + \alpha)} + i_2, \quad v_1 - v_2 = -\alpha v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{v_2}{1 + \alpha}$$

Risultato : dalle due precedenti equazioni scalari otteniamo la rappresentazione di trasmissione diretta in forma distesa :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/(1 + \alpha) & 0 \\ 1/[r_a (1 + \alpha)] & 1 \end{bmatrix}}_{T'} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$



0.15.2 ***Esercizio E6/13/01/98 : DB impropri e tripolari con resistori

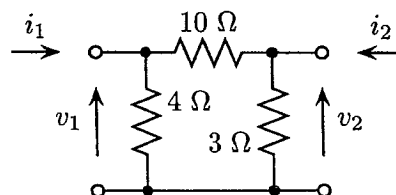
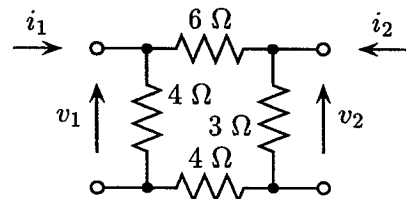
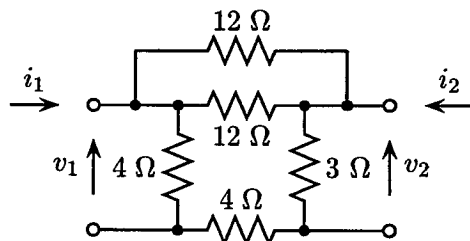
Il quadripolo adinamico in figura è costituito da un $\mathcal{R}(12 \Omega)$ in alto connesso a due terminali di un quadripolo (interno) costituito dal rettangolo costituito dai $\mathcal{R}(12 \Omega)$, $\mathcal{R}(4 \Omega)$, $\mathcal{R}(3 \Omega)$ e $\mathcal{R}(4 \Omega)$.

Quesito : Assumendo che il quadripolo complessivo operi come un DBI in cui (v_1, i_1) e (v_2, i_2) definiscono le due porte, calcolare la sua matrice G .

• Il quadripolo a rettangolo, costituito dai $\mathcal{R}(3 \Omega)$, $\mathcal{R}(4 \Omega)$, $\mathcal{R}(4 \Omega)$ e $\mathcal{R}(12 \Omega)$ in basso, non è in grado di operare come DBI a causa della connessione trasversale col $\mathcal{R}(12 \Omega)$ in alto. Quindi non possiamo usare le formule dei doppi bipoli per analizzare la suddetta connessione.

• Osserviamo che il $\mathcal{R}(12 \Omega)$ in alto è in parallelo al $\mathcal{R}(12 \Omega)$ in basso facente parte del quadripolo interno : essi sono sostituiti da un unico $\mathcal{R}(6 \Omega)$. Ci troviamo davanti a un quadripolo costituito esclusivamente da un rettangolo di $\mathcal{R}$.

• Siccome in questo caso il quadripolo a rettangolo opera come DBI, il $\mathcal{R}(6 \Omega)$ e il $\mathcal{R}(4 \Omega)$ formano un taglio e quindi sono in serie. Perciò sostituiamo il suddetto $\mathcal{R}(4 \Omega)$ con un c.c. e il $\mathcal{R}(6 \Omega)$ con un $\mathcal{R}(6 + 4 = 10 \Omega)$: il rettangolo di $\mathcal{R}$ viene trasformato in un triangolo.



Risultato : La matrice $\mathbf{G}$ del doppio bipolo a triangolo, la stessa del DBI originario, può essere calcolata facilmente tramite le note formule :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1/4 + 1/10 & -1/10 \\ -1/10 & 1/3 + 1/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/20 & -1/10 \\ -1/10 & 13/30 \end{bmatrix} \text{ S}$$

Commento : L'equivalenza tra il DBT finale e il DBI originario vale solamente dal punto di vista delle relazioni costitutive, ma non riguarda la topologia dei due doppi bipoli che rimane diversa.

Metodo alternativo : Questo problema può essere risolto con un diverso metodo : consideriamo la matrice 3×3 $\mathbf{G}$ del quadripolo (rettangolo di quattro $\mathcal{R}$) interno e aggiungere la matrice 2×2 $\mathbf{G}$ del $\mathcal{R}$ trasversale. I calcoli verrebbero più pesanti.

2 CIRCUITI DINAMICI NEL DOMINIO DEL TEMPO

Gli esercizi sviluppati nel presente capitolo riguardano l'analisi dei circuiti dinamici e lineari, nel dominio del tempo, costituiti dai seguenti componenti :

corto circuiti (c.c.) e circuiti aperti (c.a.) , sorgenti impulsive di tensione ($\hat{\mathcal{V}}$) e corrente ($\hat{\mathcal{I}}$), sia tempo-invarianti sia tempo-varianti, resistori ($\mathcal{R}$), le quattro sorgenti pilotate ($\mathcal{V}_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ e $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$), nullo ($\mathcal{N}$, amplificatore operazionale idealizzato), trasformatori ideali ($\mathcal{T}$, tr.id.), giratori ($\mathcal{G}$), interruttori ideali (int.id.), condensatori ($\mathcal{C}$), induttori ($\mathcal{L}$) e induttori accoppiati ($\mathcal{LL}$).

La teoria necessaria per risolvere questi esercizi è trattata nei CCap. 14-19-FCE :

Sez. 1 : Soluzione di circuiti di ordine 1 o riducibile a 1 : Analisi dei circuiti di ordine 1, con un solo condensatore o induttore, ovvero con più condensatori e induttori, ma con ordine riducibile a 1.

Sez. 2 : Soluzione di circuiti a regime costante : Analisi dei circuiti dinamici che abbiano raggiunto un regime (costante).

Sez. 3 : Soluzione di circuiti senza soluzione similare costante : Sono analizzati circuiti con sorgenti impulsive costanti senza la soluzione similare.

Sez. 4 : Problemi inversi semplici sui circuiti dinamici : Essi consentono di risalire a qualche parametro del circuito osservando il suo comportamento.

Sez. 5 : Soluzione di circuiti dinamici con interruttori : Riguarda circuiti dinamici, in genere semplici, contenenti int.id. . In essi viene evidenziata la discontinuità delle tensioni e correnti in seguito all'azionamento di un int.id. , con eccezione delle variabili di stato.

Sez. 6 : Individuazione di vincoli algebrici tra candidate di stato : Analisi del ordine di un circuito dinamico dalla semplice ispezione dei vincoli di natura algebrica tra le variabili di stato.

Sez. 7 : Equazioni di stato e uscita di circuiti di ordine 2 : Considera la formulazione delle equazioni di stato, ed eventualmente di uscita, dei circuiti dinamici di ordine 2, senza arrivare alla soluzione.

Sez. 8 : Matrici di stato : riguarda la formulazione della matrice di stato, ed eventualmente le pulsazioni (modi) naturali (modi) e la stabilità del circuito.

Sez. 9 : Pulsazioni naturali : riguarda il calcolo delle pulsazioni, modi naturali e la stabilità di un circuito.

Sez. 10 : Soluzione di circuiti dinamici di ordine 2 : Riguarda la soluzione di circuiti dinamici di second'ordine a partire dalle equazioni differenziali.

Sez. 11 : Soluzione di circuiti di ordine due semplicemente stabili : Sono analizzati circuiti omogenei di ordine due con una delle pulsazioni naturali nell'origine.

Sez. 12 : Soluzione di circuiti con sorgenti impulsive miste : Analisi di circuiti in cui le sorgenti impulsive hanno forme d'onda di tipo diverso, per esempio, sono costanti e sinusoidali.

Sez. 13 : Altri problemi non classificati sui circuiti dinamici :

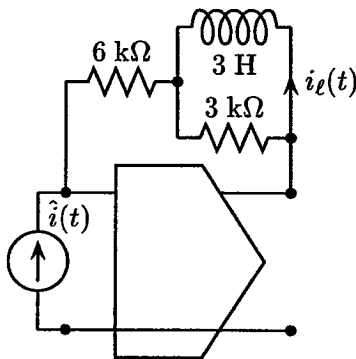
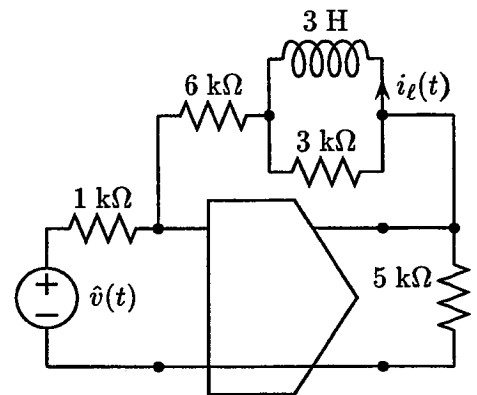
2.1 SOLUZIONE DI CIRCUITI DI ORDINE 1 O RIDUCIBILE A 1

2.1.1 Esercizio OR5/08/11/96 : Soluz. di un circuito di ordine 1 con nullo

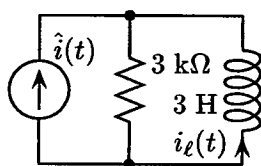
Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}(t))$, dove $\hat{v}(t) = 5 \cos(1000 t) \text{ V}$, un nullo, un $\mathcal{L}$ e quattro $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la corrente $i_{\ell}(t)$ fluente nell' $\mathcal{L}$ (3 H), sapendo che $i_{\ell}(0) = 0$.

• Il $\mathcal{R}$ (5 k Ω) in parallelo alla porta d'uscita del nullo può essere sostituito da un c.a., dal momento che la tensione e la corrente di questa porta non sono vincolate. La $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}(t))$ e il $\mathcal{R}$ (1 k Ω) in serie possono essere rimpiazzati dal modello di Norton : una $\hat{\mathcal{I}}(\hat{i}(t) = 5/1000 \cos(1000 t))$ in parallelo al $\mathcal{R}$ (1 k Ω). Questo $\mathcal{R}$ è sostituito da un c.a. dal momento che è in parallelo alla porta d'ingresso del nullo.



• Il circuito è costituito dalla $\hat{\mathcal{I}}(\hat{i}(t))$, dal nullo, un $\mathcal{L}$ e due $\mathcal{R}$. La corrente impressa $\hat{i}(t)$ percorre anche il bipolo composto, costituito dal $\mathcal{L}$ (3 H) e dai $\mathcal{R}$ (3 k Ω) e $\mathcal{R}$ (6 k Ω), e connesso trasversalmente al nullo : infatti la corrente d'ingresso del nullo è nulla. Siccome noi siamo interessati solamente alla corrente $i_{\ell}(t)$ nell' $\mathcal{L}$, il precedente circuito può essere semplificato, chiudendo la $\hat{\mathcal{I}}(\hat{i}(t))$ sul bipolo composto e sopprimendo il nullo. Inoltre, il $\mathcal{R}$ (6 k Ω), in serie alla $\hat{\mathcal{I}}(\hat{i}(t))$, è sostituito da un c.c. .



• Il circuito, costituito dal parallelo di $\hat{\mathcal{I}}(\hat{i}(t))$, $\mathcal{L}$ (3 H) e $\mathcal{R}$ (3 k Ω), è di ordine uno : $i_{\ell}(t)$ è l'unica variabile di stato. Dalla teoria sappiamo che $i_{\ell}(t)$ ha la forma : $i_{\ell}(t) = [i_{\ell}(0) - i_{\ell}^{\text{sim}}(0)] \exp(-t/\tau_1) + i_{\ell}^{\text{sim}}(t)$. Il valore iniziale $i_{\ell}(0) = 0 \text{ A}$ è un dato del problema.

La costante di tempo vale $\tau = L/r_{\text{eq}} = 3/3000 = 1/1000 = 1 \text{ ms}$.

• La soluzione similare $i_{\ell}^{\text{sim}}(t)$ è una sinusoide : il suo fasore è calcolato con la regola del partitore di corrente :

$$\bar{i}_{\ell} = \frac{-\bar{i} r}{r + j\omega L} = \frac{-5/1000 \times 3000}{3000 + j1000 \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{400} \exp(j 3 \pi/4)$$

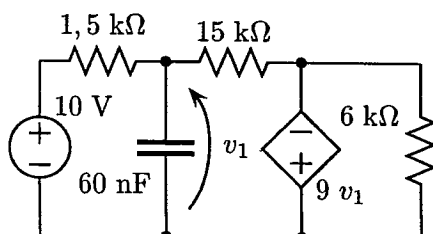
Ritornando nel dominio del tempo si ha $i_{\ell}^{\text{sim}}(t)$:

$$i_{\ell}^{\text{sim}}(t) = \frac{\sqrt{2}}{400} \cos(1000 t + \pi 3/4) \Rightarrow i_{\ell}^{\text{sim}}(0) = -\frac{1}{400}$$

Risultato : Raccogliendo i risultati precedenti otteniamo :

$$i_{\ell}(t) = \frac{1}{400} \exp(-t 1000) + \frac{\sqrt{2}}{400} \cos(1000 t + \pi 3/4)$$

2.1.2 Esercizio E6/28/07/98 : Soluz. di un circuito di ordine 1 con una sVpV



Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}(10 \text{ V})$, una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la tensione $v_1(t)$ ai capi del $\mathcal{C}$ sapendo che $v_1(0) = 3 \text{ V}$.

• Siamo in presenza di un circuito dinamico di ordine uno in cui $v_1(t)$ è l'unica variabile di stato. Conviene trovare il modello di Thévenin o di Norton del bipolo adinamico complementare al $\mathcal{C}$ (60 nF).

• Applicando il primo teorema di Miller alla maglia costituita dalle due porte della $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$ e dal

$\mathcal{R}\langle 15\text{ k}\Omega \rangle$ si ha che il bipolo adinamico complementare è costituito dalla serie di una $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_{eq} = 5\text{ V} \rangle$ e un $\mathcal{R}\langle r_{eq} = 750\text{ }\Omega \rangle$ (modello di Thévenin).

- Siamo in grado di scrivere la soluzione del circuito di ordine uno :

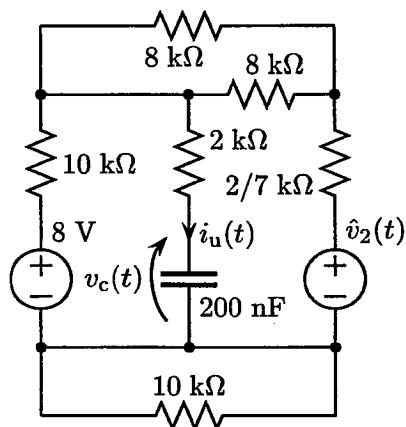
$$v_1(t) = [v_1(0) - v_1^{\text{sim}}(0)] \exp[-t/\tau] + v_1^{\text{sim}}(t)$$

in cui la costante di tempo vale $\tau = r_{eq} C = 750 \times 60 \cdot 10^{-9} = 0,45\text{ }\mu\text{s}$ e $v_1^{\text{sim}}(t) = \hat{v}_{eq} = 5\text{ V}$.

Risultato : Sostituendo i valori numerici si ha :

$$v_1(t) = [3-5] \exp(-t/\tau) + 5\text{ V} \Rightarrow v_1(t) = -2 \exp(-t/\tau) + 5\text{ V}$$

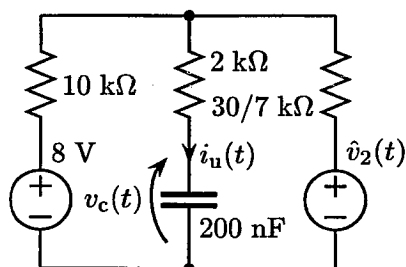
2.1.3 Esercizio EB/09/01/99 : Soluz. di circuito di ordine 1 con sorgenti miste



Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_1 = 8\text{ V} \rangle$, una $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_2(t) = 4 \cos(1000 t + \pi/3)\text{ V} \rangle$, un $\mathcal{C}$ e sei $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la corrente $i_u(t)$, sapendo che la tensione $v_c(t)$ vale 2 V in $t = 0$.

- Il $\mathcal{R}\langle 10\text{ k}\Omega \rangle$ in basso viene sostituito da un c.a. poiché è in parallelo a un c.c., mentre i due $\mathcal{R}\langle 8\text{ k}\Omega \rangle$, in parallelo, sono sostituiti da un'unico $\mathcal{R}\langle 4\text{ k}\Omega \rangle$. Inoltre in serie alla $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_2(t) \rangle$ vi sono i $\mathcal{R}\langle 4\text{ k}\Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 2/7\text{ k}\Omega \rangle$ che sono fusi in un'unico $\mathcal{R}\langle 30/7\text{ k}\Omega \rangle$.

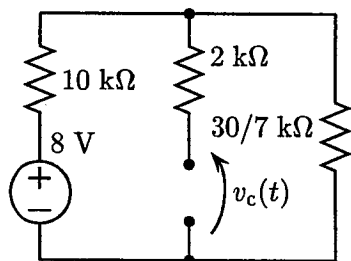


- Il circuito dinamico è di ordine uno ed è alimentato dalle $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_1 = 8\text{ V} \rangle$ e $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_2(t) \rangle$. Scriviamo l'espressione dell'unica variabile di stato $v_c(t)$ per mezzo della formula risolutiva dei circuiti dinamici di ordine uno (vedere Cap. 15-FCE) :

$$v_c(t) = [v_c(0) - v_c^{\text{sim}}(0)] \exp(-t/\tau) + v_c^{\text{sim}}(t)$$

in cui la soluzione similare $v_c^{\text{sim}}(t)$ è uguale alla somma delle due singole soluzioni similari $v_c^{\text{sim}1}$ (costante) e $v_c^{\text{sim}2}(t)$ (sinusoidale) associate a ciascuna $\hat{\mathcal{V}}$.

- Il calcolo delle soluzioni similari $v_c^{\text{sim}1}$ e $v_c^{\text{sim}2}(t)$ viene eseguito mediante il principio di sovrapposizione visto nel Cap. 15-FCE : consideriamo i due circuiti ottenuti da quello originario cortocircuitando la $\hat{\mathcal{V}}$ che non interessa.

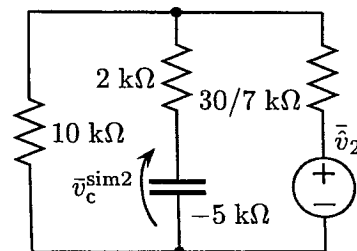


- La figura riporta il circuito ottenuto sostituendo la $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_2(t) \rangle$ con un c.c. : siccome rimane solo la sorgente costante $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_1 = 8\text{ V} \rangle$, il $\mathcal{C}$ è sostituito da un c.a.

Applicando la regola del partitore di tensione otteniamo la componente costante della soluzione similare $v_c^{\text{sim}}(t)$:

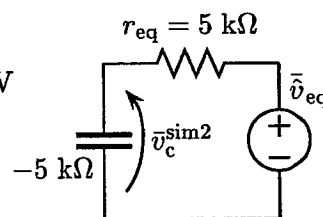
$$v_c^{\text{sim}1} = 8 \frac{(30/7)(10 + 30/7)}{10 + 30/7} = 12/5\text{ V}$$

- La figura riporta il circuito ottenuto da quello originario sostituendo la $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_1 = 8\text{ V} \rangle$ con un c.c. : rimane solo la $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_2 \rangle$. La componente sinusoidale della soluzione similare $v_c^{\text{sim}2}(t)$ viene calcolata nel dominio dei fasori (vedere la figura accanto).



- Costruiamo il modello di $\bar{v}_{eq} = \bar{v}_2 \frac{10}{10 + 30/7} = 2,8 \exp(j \pi/3) \text{ V}$
THÉVENIN del bipolo adinamico
composito complementare al $\mathcal{C}$:

$$r_{eq} = 2 + \frac{10 \times 30/7}{10 + 30/7} = 5 \text{ k}\Omega$$



- Con la regola del partitore di tensione calcoliamo il fasore $\bar{v}_c^{sim2}$ della tensione $v_c(t)$:

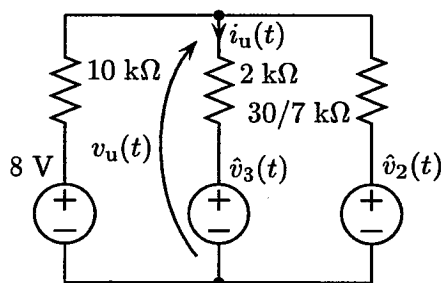
$$\bar{v}_c^{sim2} = \bar{v}_{eq} \frac{-j 5}{5 - j 5} = 2,8 \exp(j \pi/3) (1/2 - j/2) = \sqrt{2} \times 1,4 \exp(j \pi/12) \text{ V}$$

Ritornando nel dominio del tempo, abbiamo : $v_c^{sim2}(t) = \sqrt{2} 1,4 \cos(1000 t + \pi/12) \text{ V}$

- Introduciamo la soluzione simile composta nella formula risolutiva dei circuiti dinamici di ordine uno

$$\begin{aligned} v_c(t) &= [v_c(0) - v_c^{sim1} - v_c^{sim2}(0)] \exp(-t/\tau) + v_c^{sim1} + v_c^{sim2}(t) \\ v_c(t) &= [2 - 12/5 - \sqrt{2} 1,4 \cos(\pi/12)] \exp(-t/\tau) + 12/5 + \sqrt{2} 1,4 \cos(1000 t + \pi/12) \\ v_c(t) &= -[2/5 + \sqrt{2} 1,4 \cos(\pi/12)] \exp(-t/\tau) + 12/5 + \sqrt{2} 1,4 \cos(1000 t + \pi/12) \end{aligned}$$

in cui la costante di tempo vale : $\tau = r_{eq} C = 5000 \times 200 \cdot 10^{-9} = 0,001 \text{ s}$



- Per calcolare la corrente $i_u(t)$ sostituiamo il $\mathcal{C}$ (200 nF) con una $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_3(t))$ in cui

$$\hat{v}_3(t) = -[2/5 + \sqrt{2} 1,4 \cos(\pi/12)] \exp(-t/\tau) + 12/5 + \sqrt{2} 1,4 \cos(1000 t + \pi/12) \text{ V}$$

- Siamo in presenza di un circuito adinamico utile per calcolare tensioni e correnti che non sono variabili di stato : applicando il primo teorema di Millmann calcoliamo la tensione $v_u(t)$ comune ai tre rami in parallelo.

$$v_u(t) = \frac{8/10000 + \hat{v}_3/2000 + \hat{v}_2(t) 7/30000}{1/10000 + 1/2000 + 7/30000} = 24/25 + 3/5 \hat{v}_3 + 7/25 \hat{v}_2(t) \text{ V}$$

Sostituendo le espressioni di $\hat{v}_2(t)$ e $\hat{v}_3(t)$, otteniamo :

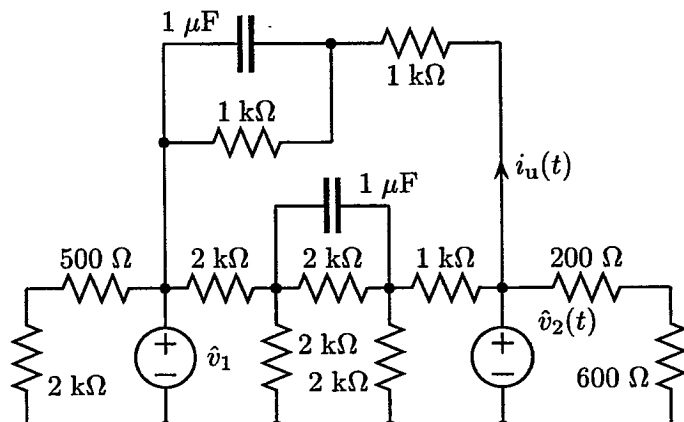
$$v_u(t) = 12/5 - [6/25 + \sqrt{2} 0,84 \cos(\pi/12)] \exp(-t/\tau) + \sqrt{2} 0,84 \cos(1000 t + \pi/12) + 28/25 \cos(1000 t + \pi/3) \text{ V}$$

- La corrente $i_u(t) = (v_u(t) - \hat{v}_3(t))/2000$ risulta uguale a :

$$i_u(t) = [2/25 + \sqrt{2} 0,28 \cos(\pi/12)] \exp(-t/\tau) - \sqrt{2} 0,28 \cos(1000 t + \pi/12) + 14/25 \cos(1000 t + \pi/3) \text{ mA}$$

Commento : Alternativamente, la corrente $i_u(t)$ può essere calcolata dalla rappresentazione differenziale del $\mathcal{C}$ $i_u(t) = C \dot{v}_c(t)$, derivando analiticamente la variabile di stato $v_c(t)$. Nel precedente calcolo noi abbiamo seguito il metodo discusso nel Cap. 15-FCE che richiede solamente calcoli algebrici per calcolare una generica grandezza del circuito.

2.1.4 Esercizio EB/11/09/98 : Soluz. di circuito di ordine due riducibile a ordine 1



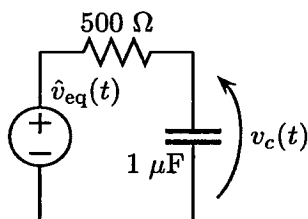
Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ ($\hat{v}_1 = 6 \text{ V}$), una $\hat{\mathcal{V}}$ ($\hat{v}_2(t) = 4 \cos(1000 t) \text{ V}$), due $\mathcal{C}$ e undici $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la corrente $i_u(t)$ per $t \geq 0$, sapendo che i due $\mathcal{C}$ sono scarichi in $t = 0$.

• Il ramo percorso dalla corrente i_u è costituito da due $\mathcal{R}$ ($1 \text{ k}\Omega$) e un $\mathcal{C}$ ($2 \mu\text{F}$). A sua volta questo ramo fa parte di una maglia completata dalle due $\hat{\mathcal{V}}$.

- La tensione ai capi del suddetto ramo coincide con la differenza delle due tensioni impresse e non dipende da tutti gli altri componenti del circuito, che possono essere rimossi. Siamo in presenza di un circuito composto da due $\hat{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{C}$ e due $\mathcal{R}$.
- Calcoliamo il teorema di THÉVENIN al bipolo adinamico complementare al $\mathcal{C}$:

$$\hat{v}_{eq}(t) = 0,5 [\hat{v}_1 - \hat{v}_2(t)] = 3 - 2 \cos(1000 t) \text{ V} , \quad r_{eq} = 500 \Omega$$



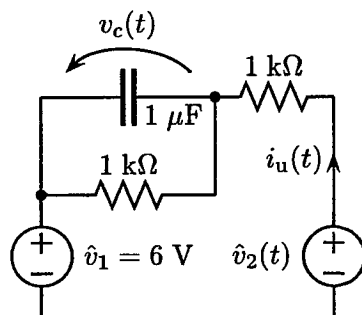
- Notare che la corrente $i_u(t)$ è rimasta nascosta all'interno del modello di Thévenin e non può essere segnata sul disegno del circuito. Comunque per ora vogliamo calcolare la variabile di stato $v_c(t)$. La formula risolutiva è $v_c(t) = [v_c(0) - v_c^{\text{sim}}(0)] \exp(-t/\tau) + v_c^{\text{sim}}(t)$ dove : $v_c^{\text{sim}}(t) = 3 - \sqrt{2} \cos(1000 t - \pi/4) \text{ V}$ dove : $\tau = r_{eq} C = 500 \times 10^{-6} = 0,5 \text{ ms}$.

Introducendo i valori numerici si ottiene :

$$v_c(t) = -2 \exp(-2000 t) + 3 - \cos(1000 t) - \sin(1000 t)$$

Risultato : La corrente $i_u(t)$ viene calcolata cercando una espressione algebrica in cui essa dipende dalle grandezze impresse e dalla variabile di stato. Esaminando la maglia costituita dalle due $\hat{\mathcal{V}}$, dal $\mathcal{C}$ e dal $\mathcal{R}$ ($1 \text{ k}\Omega$) in cui scorre $i_u(t)$, si ha : $i_u(t) = [\hat{v}_2(t) - \hat{v}_1 + v_c(t)]/1000$

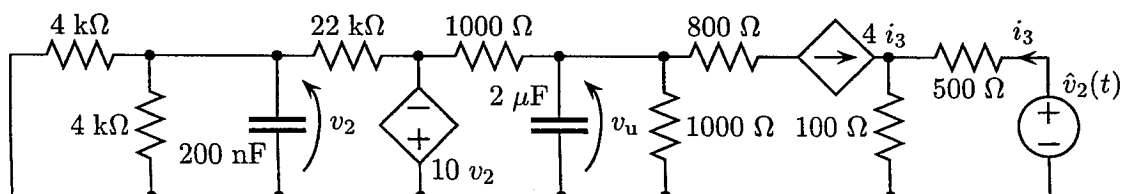
$$i_u(t) = -3 - 2 \exp(-2000 t) + 3 \cos(1000 t) - \sin(1000 t) \text{ mA}$$



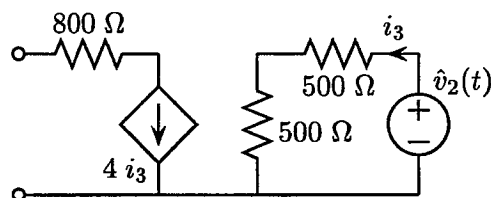
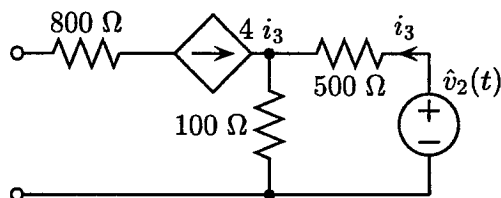
2.1.5 Esercizio EB/17/02/98 : Soluz. di circuito ordine 2 riducibile a 1

Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ ($\hat{v}_2(t) = 5 \cos(1000 t) \text{ V}$), una $\mathcal{V}$, una $\mathcal{I}$, due $\mathcal{C}$ e otto $\mathcal{R}$.

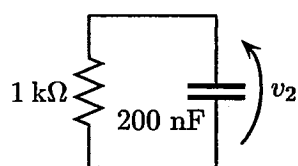
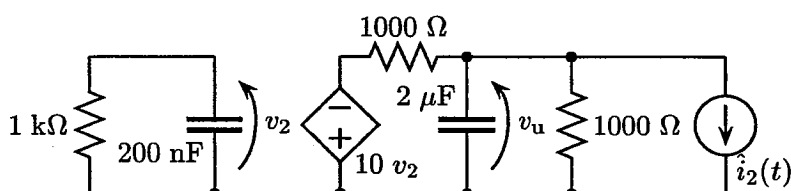
Quesito : Calcolare la tensione $v_u(t)$, sapendo che $v_2(0) = 3 \text{ V}$ e $v_u(0) = 2 \text{ V}$



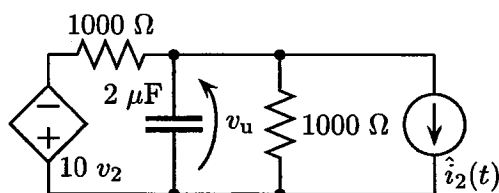
- Nella parte di destra del circuito possiamo individuare un bipolo adinamico composto dalla $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_2(t)\rangle$, dalla $\mathcal{I}\mathcal{I}\langle 4 i_3 \rangle$ e da tre $\mathcal{R}$. Nella parte destra del circuito individuiamo un bipolo adinamico contenente al suo interno la $\hat{\mathcal{V}}$, la $\mathcal{I}\mathcal{I}$ e tre $\mathcal{R}$.



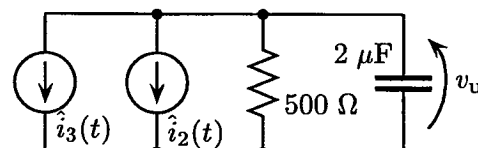
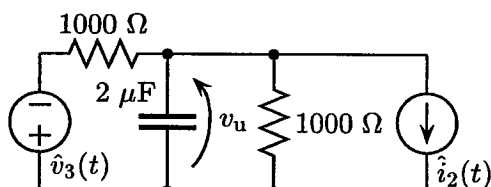
- Siccome la sua corrente coincide con la corrente pilotata $4 i_3$ della $\mathcal{I}\mathcal{I}$, esso è equivalente a una $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}_2(t)\rangle$, in cui $\hat{i}_2(t) = 0,004 \hat{v}_2(t) = 20 \cos(1000 t)$ mA. I due $\mathcal{R}\langle 4 \text{ k}\Omega \rangle$ in parallelo sono fusi in un unico $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$. Facciamo semplificazione dovuta al primo teorema di Miller



- Il circuito dinamico è separato in due circuiti di ordine uno, uno a monte e l'altro a valle della $\mathcal{V}\mathcal{V}$. Le variabili di stato sono $v_2(t)$ per il primo e $v_u(t)$ per il secondo.



- Dal circuito a monte, abbiamo $v_2(t) = 3 \exp(-t 5000)$ V. Siccome la tensione pilotante è nota, Possiamo sostituire la $\mathcal{V}\mathcal{V}\langle 10 v_2 \rangle$ nel circuito a valle con la $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_3(t) = 30 \exp(-t 5000)$ V. Infine sostituiamo il bipolo adinamico complementare al $\mathcal{C}$ con il modello di Norton in cui $\hat{i}_3(t) = \hat{v}_3/1000 = 30 \exp(-t 5000)$ mA.



- L'equazione di stato (scalare) del circuito a valle risulta :

$$C \dot{v}_u(t) = -v_u(t)/r_{eq} - \hat{i}_2(t) - \hat{i}_3(t)$$

$$2 \cdot 10^{-6} \dot{v}_u(t) = -v_u(t)/500 - \hat{i}_2(t) - 0,030 \exp(-t 5000)$$

- La formula risolutiva del circuito di ordine uno a valle ci dice che

$$v_u(t) = [v_u(0) - v_u^{\text{sim1}}(0) - v_u^{\text{sim2}}(0)] \exp(-t/\tau) + v_u^{\text{sim1}}(t) + v_u^{\text{sim2}}(t)$$

- La costante di tempo τ vale $r_{eq} C = 500 \times 2 \cdot 10^{-6} = 1$ ms.
- La soluzione similare $v_u^{\text{sim1}}(t)$ è associata alla $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}_2(t)\rangle$, mentre la soluzione similare $v_u^{\text{sim2}}(t)$ è associata alla $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}_3(t)\rangle$.
- Per il calcolo di entrambe le soluzioni similari $v_u^{\text{sim1}}(t)$ e $v_u^{\text{sim2}}(t)$, che devono essere introdotte nell'equazione precedente, occorre passare nel dominio dei fasori :

$$\bar{v}_u^{\text{sim1}} = 5 - j 5 \text{ V} \quad , \quad \bar{v}_u^{\text{sim2}} = -3,75 \exp(-5000 t)$$

Ritornando nel dominio del tempo si ha

$$v_u^{\text{sim1}}(t) = \sqrt{2} 5 \cos(1000 t - \pi/4) \text{ V} \quad , \quad v_u^{\text{sim2}}(t) = -3,75 \exp(-5000 t) \text{ V}$$

Risultato : Sostituendo le soluzioni similari nella formula risolutiva dei circuiti di ordine uno, otteniamo :

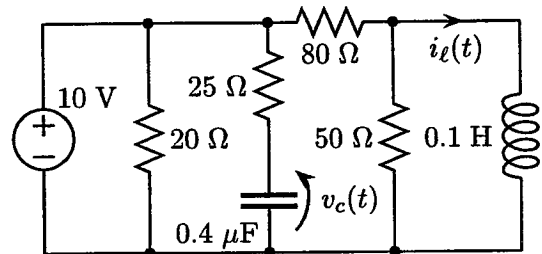
$$v_u(t) = 0,75 \exp(-1000 t) + \sqrt{2} 5 \cos(1000 t - \pi/4) - 3,75 \exp(-5000 t)$$

2.1.6 Esercizio E6/25/06/98 : Soluz. di circuito di ordine 2 riducibile a 1

Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ costante, un $\mathcal{C}$ e un $\mathcal{L}$ e quattro $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la tensione $v_c(t)$ per $t \geq 0$, sapendo che $v_c(0) = 2 \text{ V}$ e $i_\ell(0) = 3 \text{ mA}$.

- Il bipolo composto dalla serie del $\mathcal{R}(25 \Omega)$ e del $\mathcal{C}(0,4 \mu\text{F})$ risulta direttamente connesso (in parallelo) alla $\hat{\mathcal{V}}(10 \text{ V})$. Quindi gli altri componenti del circuito sono ininfluenti sulla tensione $v_c(t)$ ai capi del $\mathcal{C}$.



- La tensione $v_c(t)$ è data dalla formula risolutiva di un circuito dinamico di ordine uno $v_c(t) = [v_c(0) - v_c^{\text{sim}}(0)] \exp(-t/\tau) + v_c^{\text{sim}}(t)$ dove la costante di tempo $\tau = r C = 25 \times 0,4 \cdot 10^{-6} = 10 \mu\text{s}$ e la soluzione similare (costante) $v_c^{\text{sim}}(t)$ coincide con la tensione $v_c(t)$ a regime $v_c^{\text{sim}}(t) = 10 \text{ V}$.

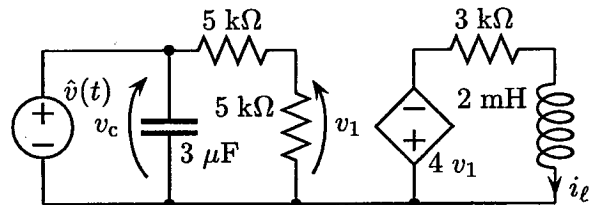
Risultato : Quindi la soluzione per $t \geq 0$ è : $v_c(t) = -8 \exp(-t/10^{-5}) + 10 \text{ V}$

2.1.7 Esercizio E6/23/07/96 : Equazione di stato (degenere) di ordine 1

Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\mathcal{V}_\mathcal{V}$, un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e tre $\mathcal{R}$.

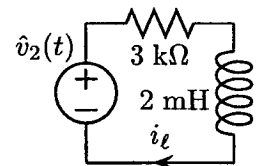
Quesito : Scrivere l'equazione di stato del circuito.

- Nel circuito compaiono un $\mathcal{C}$ e un $\mathcal{L}$: le candidate di stato sono due.



- Poiché il $\mathcal{C}$ risulta in parallelo alla $\hat{\mathcal{V}}$, la tensione $v_c(t)$ non può diventare variabile di stato. Inoltre lo stesso $\mathcal{C}$ può venire rimosso dal circuito stesso, perché ininfluente sul resto del circuito. La corrente $i_\ell(t)$ dell' $\mathcal{L}$ non appare vincolata algebricamente ad alcuna grandezza impressa : essa è l'unica variabile di stato del circuito.

- La regola del partitore di tensione stabilisce che la tensione v_1 è la metà della tensione impressa $\hat{v}(t)$: $v_1 = \hat{v}/2$. Quindi la $\mathcal{V}_\mathcal{V}(4 v_1)$ è sostituita da una $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_2)$ in cui $\hat{v}_2(t) = -4 v_1(t) = -2 \hat{v}(t)$. Il circuito è costituito da un'unica maglia contenente la $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_2(t))$, il $\mathcal{R}(3 \text{ k}\Omega)$ e l' $\mathcal{L}(2 \text{ mH})$:



Risultato : Annullando la somma delle tensioni lungo l'unica maglia, possiamo scrivere l'equazione di sinistra, da cui esplicitando $\dot{i}_\ell(t)$, otteniamo l'equazione di stato di ordine uno :

$$\hat{v}_2(t) = 3000 i_\ell(t) + 1/500 \dot{i}_\ell(t) \implies \dot{i}_\ell(t) = -(3/2 \cdot 10^6) i_\ell(t) - 1000 \hat{v}(t)$$

Commento : Il circuito è asintoticamente stabile poiché l'unica pulsazione naturale, di valore $-3/2 \cdot 10^6 \text{ s}$, risulta reale negativa : l'unico modo naturale è un esponenziale decrescente.

2.1.8 Esercizio E6/01/07/97 : Equazione di stato (degenerare) di ordine 1

Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}(t)\rangle$, da un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Scrivere l'equazione di stato del circuito.

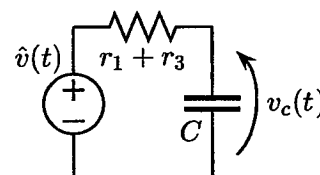
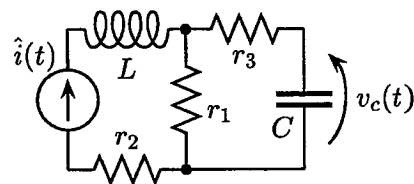
• L' $\mathcal{L}\langle L \rangle$ e il $\mathcal{R}\langle r_2 \rangle$ sono sostituiti da un c.c. dal momento che sono in serie alla $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}(t)\rangle$. D'altra parte la corrente fluente nell' $\mathcal{L}\langle L \rangle$ non può diventare una variabile di stato, poiché coincide con la corrente impressa $\hat{i}(t)$.

• Il parallelo della $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}(t)\rangle$ e del $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$ è sostituito dal modello di Thévenin : $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}(t) = r_1 \hat{i}(t)\rangle$ in serie al $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$. I $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$ e $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$ risultano a loro volta in serie e sono sostituiti da un unico $\mathcal{R}\langle r_1 + r_3 \rangle$.

Risultato : Annullando la somma delle tensioni lungo l'unica maglia del circuito, otteniamo l'equazione di stato :

$$(r_1 + r_3) C \dot{v}_c(t) + v_c(t) = r_1 \hat{i}(t) \Rightarrow \underbrace{\dot{v}_c(t)}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{-\frac{1}{C(r_1 + r_3)}}_A \underbrace{v_c(t)}_{x(t)} + \underbrace{\frac{r_1}{C(r_1 + r_3)}}_B \underbrace{\hat{i}(t)}_{\hat{u}(t)}$$

Commento : Sia i vettori sia le matrici che compaiono in una equazione di stato di ordine due, tre, ... si riducono a semplici scalari, essendo il circuito di ordine uno.

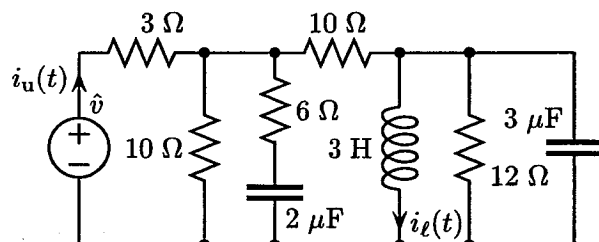


2.2 SOLUZIONE DI CIRCUITI A REGIME COSTANTE

2.2.1 Esercizio E4/27/01/98 : Circuito di ordine 3 in regime costante

Il circuito in figura opera a regime ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ costante, due $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e cinque $\mathcal{R}$. La tensione $\hat{v}$ è costante ma di valore ignoto.

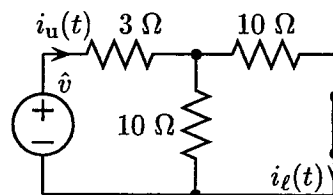
Quesito : Calcolare la corrente $i_u(t)$, sapendo che la corrente $i_\ell(t)$ vale 2 mA.



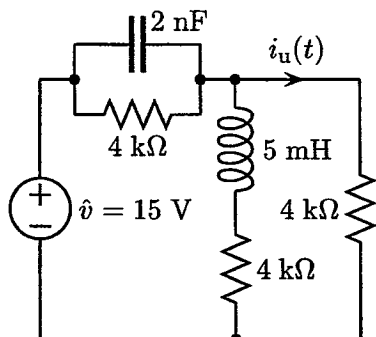
• Siccome il regime è costante, i due $\mathcal{C}$ sono sostituiti da due c.a. e l' $\mathcal{L}$ da un c.c. : il $\mathcal{R}\langle 12 \Omega \rangle$, in parallelo a un c.c., e il $\mathcal{R}\langle 6 \Omega \rangle$, in serie a un c.c., sono ininfluenti. Il circuito risulta costituito dalla $\hat{\mathcal{V}}$ e da tre $\mathcal{R}$.

Risultato : Nel circuito è presente un partitore di corrente in cui vi sono due $\mathcal{R}\langle 10 \Omega \rangle$ in parallelo : la corrente $i_u(t)$ è doppia della corrente $i_\ell(t)$: $i_u(t) = 4 \text{ mA}$.

Commento : questo circuito è asintoticamente stabile.



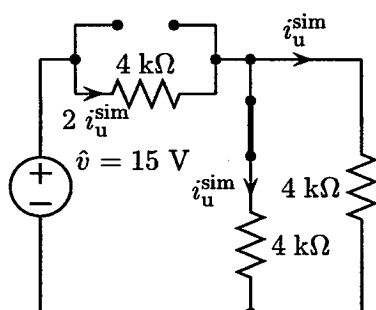
2.2.2 Esercizio E5/30/01/97 : Circuito di ordine 2 in regime costante



Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ costante, un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la corrente $i_u(t)$ per $t \rightarrow \infty$.

• Il circuito è asintoticamente stabile poiché il circuito dinamico omogeneo associato è costituito da due bipoli conservativi ($\mathcal{C}$ e $\mathcal{L}$) e da tre bipoli dissipativi (i tre $\mathcal{R}$). La stabilità asintotica del circuito insieme al fatto che l'unica sorgente impressiva sia costante ci suggerisce di cercare la soluzione a regime che viene ottenuta analizzando il circuito adinamico ausiliario ottenuto sostituendo il $\mathcal{C} \rightarrow \text{c.a.}$ e l' $\mathcal{L} \rightarrow \text{c.c.}$



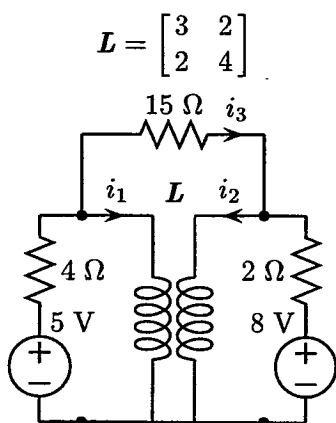
Risultato : La corrente erogata dalla $\hat{\mathcal{V}}$ costante è doppia della corrente i_u : infatti nel circuito adinamico ausiliario vi è un partitore equilibrato di corrente :

$$2 i_u^{\text{sim}} = \frac{\hat{v}}{r_{\text{eq}}} = \frac{15}{6000} \Rightarrow i_u^{\text{sim}}(\infty) = \frac{5}{4} \text{ mA}$$

dove $r_{\text{eq}} = 6000 \Omega$ è la resistenza del bipolo complementare della $\hat{\mathcal{V}}$ ($\hat{v} = 15 \text{ V}$) :

$$r_{\text{eq}} = 4000 + \frac{4000 \times 4000}{4000 + 4000} = 6000 \Omega$$

2.2.3 Esercizio E6/09/07/98 : Circuito a regime costante con indut. accop.

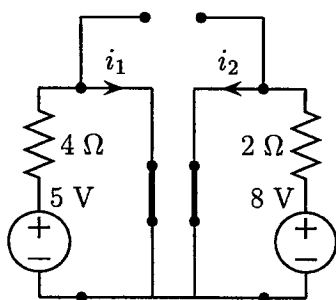


Il circuito in figura opera a regime; il regime risulta costante dal momento che vi sono due sole sorgenti impressive entrambe tempo-invarianti. Inoltre nel circuito sono presenti tre $\mathcal{R}$ e un DBT costituito da $\mathcal{LL}$.

Quesito : Calcolare le tre correnti i_1 , i_2 e i_3 .

• In regime costante gli $\mathcal{LL}$ sono equivalenti a due c.c. uno per ciascuna porta. Conseguentemente, le tensioni alle due porte degli stessi sono nulle e anche la tensione ai capi del $\mathcal{R}$ (15Ω) e la corrente i_3 .

• Il $\mathcal{R}$ (15Ω) è rimpiazzato da un c.a., poiché non è percorso da corrente. Quindi il circuito si separa in due sottocircuiti ciascuno dei quali è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ chiusa su un $\mathcal{R}$.



Risultato : Da un rapido sguardo ai due sottocircuiti si ha che

$$i_1 = 5/4 = 1,25 \text{ A} \quad \text{e} \quad i_2 = 8/2 = 4,00 \text{ A}$$

Commento : WWWWWWWWWWWWW??? scrivere

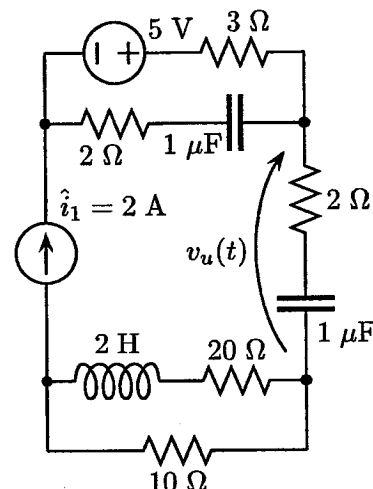
2.3 SOLUZIONE DI CIRCUITI SENZA SOLUZIONE SIMILARE COSTANTE

2.3.1 Esercizio E4/13/09/96 : Circuito ordine 1 senza soluz. similare costante

Il circuito dinamico in figura è costituito da cinque $\mathcal{R}$, due $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$, una $\hat{\mathcal{I}}\langle 2\text{ A}\rangle$ e una $\hat{\mathcal{V}}\langle 5\text{ V}\rangle$.

Quesito : Calcolare la tensione $v_u(t)$ ai capi del bipolo composto costituito dalla serie del $\mathcal{C}\langle C_u = 1\text{ }\mu\text{F}\rangle$ e del $\mathcal{R}\langle r_u = 2\text{ }\Omega\rangle$, conoscendo che all'istante $t_0 = 0\text{ s}$ l'energia immagazzinata in ciascun componente conservativo è nulla.

• Il bipolo composto di cui vogliamo conoscere la tensione $v_u(t)$ forma insieme alla $\hat{\mathcal{I}}\langle 2\text{ A}\rangle$ un taglio del circuito. Quindi la corrente che scorre nel suddetto bipolo coincide con la corrente impressa $\hat{i}_1 = 2\text{ A}$. I restanti componenti presenti nel circuito sono ininfluenti nel calcolo della tensione $v_u(t)$. D'altra parte i componenti ininfluenti costituiscono due bipoli composti, entrambi in serie alla $\hat{\mathcal{I}}\langle 2\text{ A}\rangle$.



Risultato : Dalle relazioni costitutive del $\mathcal{R}\langle r_u = 2\text{ }\Omega\rangle$ e del $\mathcal{C}\langle C_u = 1\text{ }\mu\text{F}\rangle$ otteniamo le rispettive tensioni : $v_r(t) = r_u \times \hat{i} = 4\text{ V}$ e $v_c(t) = \hat{i}t/C_u = 2 \times 10^6 t\text{ V}$, la cui somma è

$$v_u(t) = v_r(t) + v_c(t) = 4 + 2 \cdot 10^6 t\text{ V}.$$

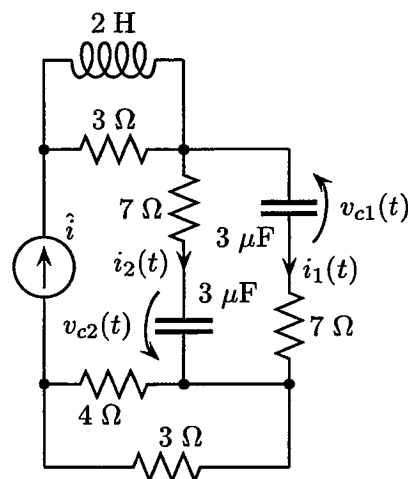
Commento : Questo circuito non ammette una soluzione similare costante associata alla $\hat{\mathcal{I}}\langle 2\text{ A}\rangle$. Infatti a regime la tensione ai capi del $\mathcal{C}$ dovrebbe essere costante e la sua corrente nulla. Ma essa è in contraddizione con la corrente impressa della $\hat{\mathcal{I}}\langle 2\text{ A}\rangle$.

2.3.2 Esercizio E5/17/06/97 : Circuito di ordine 2 senza soluz. similare costante

Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}\langle 2\text{ A}\rangle$, un $\mathcal{L}\langle 3\text{ H}\rangle$, due $\mathcal{C}\langle 3\text{ }\mu\text{F}\rangle$ e cinque $\mathcal{R}$. I due $\mathcal{C}$ sono scarichi in $t = 0$.

Quesito : Calcolare i limiti, per $t \rightarrow \infty$, delle tensioni $v_{c1}(t)$ e $v_{c2}(t)$.

• Nel circuito compare un taglio costituito dalla $\hat{\mathcal{I}}$ e da due bipoli, ciascuno formato dalla serie di un $\mathcal{C}\langle 3\text{ }\mu\text{F}\rangle$ e un $\mathcal{R}\langle 7\text{ }\Omega\rangle$. Dal momento che entrambi i $\mathcal{C}$ sono scarichi in $t = 0$, i due bipoli in parallelo sono percorsi da due correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ uguali ad ogni istante t . La loro somma $i_1(t) + i_2(t)$ coincide con la corrente impressa della $\hat{\mathcal{I}}$. Quindi si ha che $i_1(t) = i_2(t) = 1\text{ A}$.



Risultato : Essendo i due $\mathcal{C}$ soggetti a una corrente costante, la loro carica cresce indefinitamente e quindi anche la loro tensione per cui si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} v_{c1}(t) = +\infty$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} v_{c2}(t) = -\infty$; i diversi segni dei suddetti limiti sono dovuti alla convenzione adottata per le due tensioni.

Commento : Il circuito non ammette una soluzione similare costante associata alla $\hat{\mathcal{I}}$ costante, dal momento che una delle pulsazioni naturali è nulla.

2.3.3 Esercizio E6/17/02/98 : Circuito di ordine 1 senza soluz. similare costante

Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}(8 \text{ V})$ e a un $\mathcal{L}(L)$ in cui L è ignota.

Quesito : Calcolare la corrente $i_{\ell}(t)$ in $t = 0 \text{ ms}$, sapendo che la stessa vale 8 mA in $t = 3 \text{ ms}$ e 12 mA in $t = 6 \text{ ms}$, e l'induttanza L .

• Siccome la tensione $v_{\ell}(t)$ è costante, la corrente $i_{\ell}(t)$ ha un andamento a rampa, essendo proporzionale all'integrale di $v_{\ell}(t)$: $i_{\ell}(t) = a t + b$ dove a e b sono da determinare.

• Noi conosciamo due punti di questa retta nel piano $t-i$: possiamo determinare i parametri a e b :

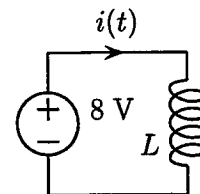
$$\begin{cases} (3 \cdot 10^{-3} \text{ s}, 8 \text{ mA}) \\ (6 \cdot 10^{-3} \text{ s}, 12 \text{ mA}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 \cdot 10^{-3} = a \cdot 3 \cdot 10^{-3} + b \\ 12 \cdot 10^{-3} = a \cdot 6 \cdot 10^{-3} + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4/3 \text{ As}^{-1} \\ b = 4 \text{ mA} \end{cases}$$

Risultato 1 : In $t = 0 \text{ ms}$ la corrente $i_{\ell}(t)$ risulta : $i_{\ell}(0) = b = 4 \text{ mA}$

Risultato 2 : Dalla rappresentazione differenziale dell' $\mathcal{L}$ otteniamo il valore di L :

$$v_{\ell}(t) = L \dot{i}_{\ell}(t) \Rightarrow \hat{v} = L \frac{i_{\ell}(t_2) - i_{\ell}(t_1)}{t_2 - t_1} \Rightarrow L = \frac{\hat{v}(t_2 - t_1)}{i_{\ell}(t_2) - i_{\ell}(t_1)} = \frac{8 \times (6 - 3) \cdot 10^{-3}}{(12 - 8) \cdot 10^{-3}} = 6 \text{ H}$$

Commento : L'unica pulsazione naturale è nell'origine : quindi esso non ammette la soluzione similare essendo la sorgente impressiva costante.



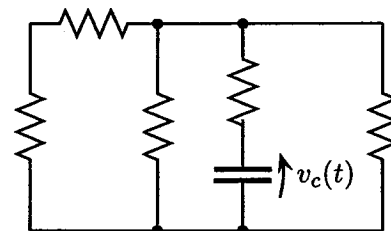
2.4 PROBLEMI INVERSI SEMPLICI SUI CIRCUITI DINAMICI

2.4.1 Esercizio E5/23/07/96 : Problema inverso per circuito di ordine 1

Il circuito in figura è costituito da un $\mathcal{C}$ e cinque $\mathcal{R}$. I valori della capacità e delle resistenze sono ignoti, comunque essi sono positivi.

Quesito : Calcolare il valore assoluto della tensione $v_c(t)$ all'istante $t_0 = 0 \text{ ms}$, conoscendo che $v_c(t_1) = 4 \text{ V}$ e $v_c(t_2) = 2 \text{ V}$ dove $t_1 = 6 \text{ ms}$ e $t_2 = 9 \text{ ms}$.

• La tensione $v_c(t)$ è l'unica candidata e diventa variabile di stato, non essendo soggetta ad alcun vincolo algebrico.



• Il circuito dinamico omogeneo è nondegenere e di ordine uno : esso è asintoticamente stabile, dal momento che è costituito da un $\mathcal{C}$ e da $\mathcal{R}$ (dissipativi).

• La soluzione nel dominio del tempo è formata da un esponenziale decrescente : $v_c(t) = v_c(t_0) \exp(\sigma t)$, dove σ è la pulsazione naturale (negativa). In questo caso sia $v_c(t_0)$ sia σ non rientrano tra i dati del problema. Conseguentemente noi sappiamo che $v_c(t_1) = v_c(t_0) \exp(\sigma t_1) = 4$ dove $t_1 = 6 \text{ ms}$ e $v_c(t_2) = v_c(t_0) \exp(\sigma t_2) = 2$ dove $t_2 = 9 \text{ ms}$. Otteniamo l'equazione

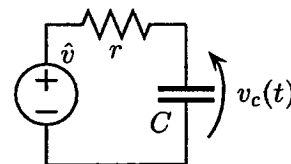
$$\frac{v_c(t_1)}{v_c(t_2)} = \frac{v_c(t_0) \exp(\sigma t_1)}{v_c(t_0) \exp(\sigma t_2)} = \exp[\sigma(t_1 - t_2)] = \frac{4}{2} = 2$$

e possiamo concludere che la tensione $v_c(t)$ si dimezza in ogni intervallo di tempo di ampiezza 3 ms .

Risultato : Quindi in $t = t_0$ la tensione $v_c(t)$ è necessariamente 2×2 volte più elevata che in $t = t_1$, dal momento che l'ampiezza dell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, uguale a 6 ms , è doppia di quella dell'intervallo $[t_1, t_2]$, uguale a 3 ms . Quindi si ha $v_c(t_0) = 4 v_c(t_1) = 4 \times 4 = 16 \text{ V}$.

2.4.2 Esercizio E6/09/09/97 : Problema inverso per circuito di ordine 1

Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}\rangle$, in cui $\hat{v}$ è costante ma ignota, un $\mathcal{C}\langle C \rangle$ e un $\mathcal{R}\langle r \rangle$; C e r sono positive ma ignote. Inoltre conosciamo i valori della tensione $v_c(t)$ ai capi del $\mathcal{C}$ per $t_1 = 4$ ms, $t_2 = 7$ ms e $t_3 = 10$ ms, cioè $v_c(t_1) = 4$ V, $v_c(t_2) = 10$ V e $v_c(t_3) = 13$ V.



Quesito : Calcolare il valore della tensione impressa $\hat{v}$.

• Scriviamo la formula analitica risolutiva dei circuiti dinamici del primo ordine, sapendo che la sorgente impressiva è costante (vedere Cap. 15-FCE).

$$v_c(t) = \hat{v} + \exp\left(-\frac{t-t_1}{rC}\right) (v_c(t_1) - \hat{v})$$

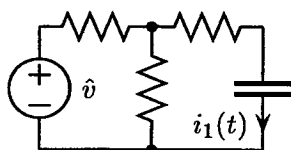
Risultato : I valori di $v_c(t)$ in t_1 , t_2 e t_3 ci dicono che l'esponenziale che compare in $v_c(t)$ si riduce di un fattore 2 in ogni intervallo di ampiezza 3 ms, dal momento che $v_c(t_1) - v_c(t_2) = 2(v_c(t_2) - v_c(t_3))$. L'esponenziale sarà svanito per $t \rightarrow \infty$ per cui $v_c(t \rightarrow \infty) = \hat{v}$. D'altra parte se nell'intervallo $[t_1, t_2]$ l'esponenziale si riduce di 6 V, nel successivo intervallo $[t_2, +\infty)$ si riduce di altri 6 V :

$$\hat{v} = v_c(t \rightarrow \infty) = v_c(t_1) + 2(v_c(t_2) - v_c(t_1)) = 4 + 2(10 - 4) = 16 \text{ V}$$

Commento : Se richiesto, saremmo in grado di calcolare la costante di tempo $\tau = rC$: comunque non saremmo in grado di calcolare i valori della resistenza e della capacità.

WWWWW??? FARE FIGURA DI ESPONENZIALE ???WWWWW

2.4.3 Esercizio E5/11/09/98 : Problema inverso per circuito di ordine 1



Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ costante, un $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$. La capacità e le resistenze sono positive ma ignote.

Quesito : Calcolare la costante di tempo τ del circuito, sapendo che $i_1(0) = 10$ mA e $i_1(t_1) = 5$ mA dove $t_1 = 2$ ms.

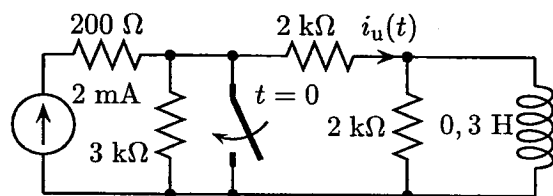
• la corrente $i_1(t)$ è destinata a svanire per $t \rightarrow +\infty$ dal momento che a regime il $\mathcal{C}$ è equivalente a un c.a. . Quindi $i_1(t)$ coincide con un esponenziale $i_1(t) = \bar{i}_1 \exp(-t/\tau)$. Possiamo scrivere due equazioni nelle due incognite : $\bar{i}_1$ e τ : $0,01 = \bar{i}_1$ e $0,005 = \bar{i}_1 \exp(0,002/\tau)$.

Risultato : Sostituendo il valore di $\bar{i}_1$ nella seconda equazione otteniamo

$$\exp(-0,002/\tau) = 0,005/0,01 = 0,5 \implies 0,002/\tau = \ln(2) \implies \tau = \frac{0,002}{\ln(2)} \text{ s}$$

2.5 SOLUZIONE DI CIRCUITI DINAMICI CON INTERRUITORI

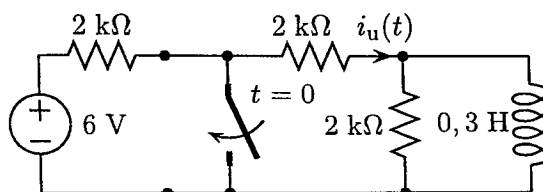
2.5.1 Esercizio E5/02/02/99 : Soluz. di circuiti di ordine 1 con int.id.



Il circuito in figura opera in regime costante ed è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}$ costante, un $\mathcal{L}$, un int.id. e quattro $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la corrente $i_u(t)$ appena prima (istante $t = 0^-$) e appena dopo (istante $t = 0^+$) la chiusura dell'int.id. in $t = 0$ s.

• Introduciamo il modello di Thévenin del bipolo composto dalla $\hat{\mathcal{I}}\langle 2 \text{ mA} \rangle$, dai $\mathcal{R}\langle 200 \Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 3 \text{ k}\Omega \rangle$: esso risulta costituito dal $\hat{\mathcal{V}}\langle 6 \text{ V} \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 3 \text{ k}\Omega \rangle$.



- Appena prima della chiusura dell'int.id., il circuito è opera in regime costante : la corrente $i_u(t)$ in $t = 0^-$ coincide con la corrente percorrente l'unica maglia costituita dalla $\hat{\mathcal{V}}\langle 6 \text{ V} \rangle$ dall' $\mathcal{L}$ e dai $\mathcal{R}\langle 3 \text{ k}\Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$.

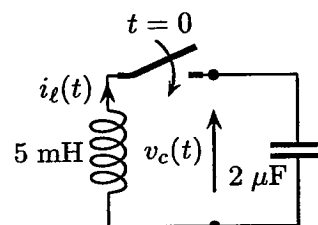
$$i_u(0^-) = \frac{6}{2000 + 3000} = 1,2 \text{ mA}$$

Risultato : Appena dopo la chiusura dell'int.id., possiamo sostituire l'int.id. stesso con un c.c. e l' $\mathcal{L}$ con una $\hat{\mathcal{I}}\langle 1,2 \text{ mA} \rangle$ poiché l' $\mathcal{L}$ era percorso dalla corrente $i_u(0^-)$. In seguito alla sostituzione dell'int.id. con un c.c., la $\hat{\mathcal{I}}\langle 1,2 \text{ mA} \rangle$ risulta in parallelo a due $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$. Per la regola del partitore di corrente, la corrente che scorre in ciascuno dei $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$ risulta $i_u(0^+) = i_u(0^-)/2 = 0,6 \text{ mA}$.

2.5.2 Esercizio E5/05/07/96 : Soluzione di circuito di ordine 2 con int.id.

Il circuito in figura è costituito da un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e un int.id. .

Quesito : Calcolare il valore assoluto della tensione $v_c(t)$ ai capi del $\mathcal{C}$ appena prima della chiusura dell'int.id. (all'istante $t_0 = 0 \text{ s}$), conoscendo che all'istante $t_1 = 20 \text{ s}$ $v_c(t_1) = 4 \text{ V}$ e la corrente nell' $\mathcal{L}$ $i_\ell(t_1) = 0 \text{ A}$.



- Il circuito in figura è conservativo, poiché tutti i suoi tre componenti sono conservativi o inerti.

- L'energia totale $w^{\text{tot}}(t)$ immagazzinata nei componenti conservativi non varia col tempo, neppure nel momento della chiusura dell'int.id. :

$$w^{\text{tot}}(t) = \frac{1}{2} C [v_c(t)]^2 + \frac{1}{2} L [i_\ell(t)]^2 = \text{costante}$$

- L'energia totale all'istante $t_1 = 20 \text{ s}$ è immagazzinata esclusivamente nel $\mathcal{C}$ dal momento che la corrente nell' $\mathcal{L}$ $i_\ell(t)$ è nulla. Anche all'istante t_0^- (immediatamente prima della chiusura dell'int.id. l'energia totale è immagazzinata esclusivamente nel $\mathcal{C}$ dal momento che la corrente nell' $\mathcal{L}$ $i_\ell(t_0^-) = 0 \text{ A}$, essendo l'int.id. aperto. La uguaglianza dell'energia totale nei due suddetti istanti t_0^- e t_1 ci consente di scrivere che

$$w^{\text{tot}}(t_0^-) = \frac{1}{2} C [v_c(t_0^-)]^2 = w^{\text{tot}}(t_1) = \frac{1}{2} C [v_c(t_1)]^2$$

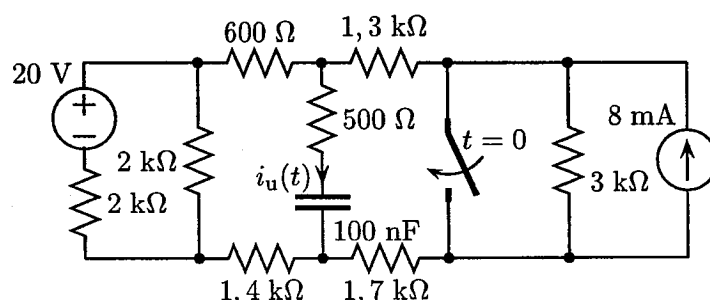
Risultato : La soluzione è $|v_c(t_0^-)| = |v_c(t_1)| = 4$, cioè $v_c(t_0^-) = \pm 4$.

Commento : La soluzione del problema non dipende dai valori della capacità C , dell'induttanza L e dell'istante t_1 .

2.5.3 Esercizio EB/05/07/96 : Soluz. di circuito ordine 1 con int.id.

Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ e una $\hat{\mathcal{I}}$ costanti, un $\mathcal{C}$, un int.id. e otto $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la corrente $i_u(t)$, sapendo che prima della chiusura dell'int.id. in $t = 0$ il circuito era a regime.

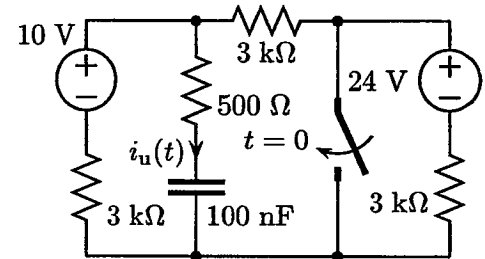


- Il circuito può essere convenientemente semplificato con lo scopo di ridurre il numero di $\mathcal{R}$. Osserviamo che vi sono due tagli, ciascuno costituito da due $\mathcal{R}$, che risultano in serie.

Nel primo taglio compaiono i $\mathcal{R}\langle 0,6 \text{ k}\Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 1,4 \text{ k}\Omega \rangle$ che vengono sostituiti, rispettivamente, da un $\mathcal{R}\langle 0,6 + 1,4 = 2 \text{ k}\Omega \rangle$ e da un c.c. . Nel secondo taglio compaiono i $\mathcal{R}\langle 1,3 \text{ k}\Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 1,7 \text{ k}\Omega \rangle$ che vengono sostituiti, rispettivamente, da un $\mathcal{R}\langle 1,3 + 1,7 = 3 \text{ k}\Omega \rangle$ e da un c.c. .

• Sulla sinistra del circuito compare un bipolo composito costituito dalla $\hat{\mathcal{V}}(20\text{ V})$ e da due $\mathcal{R}(2\text{ k}\Omega)$. Sostituiamo questo bipolo composito col modello equivalente di Thévenin : serie di una $\hat{\mathcal{V}}(10\text{ V})$ e un $\mathcal{R}(1\text{ k}\Omega)$. Il $\mathcal{R}(1\text{ k}\Omega)$ interno al modello risulta in serie con il $\mathcal{R}(2\text{ k}\Omega)$ e fuso con questo, dando origine a un unico $\mathcal{R}(2 + 1 = 3\text{ k}\Omega)$.

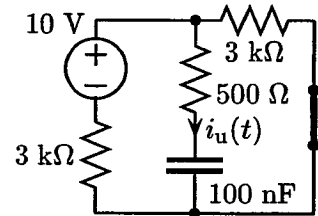
• Sulla destra del circuito compare un bipolo costituito dal parallelo della $\hat{\mathcal{I}}(8\text{ mA})$ e del $\mathcal{R}(3\text{ k}\Omega)$. Sostituiamolo col modello di Thévenin : serie di una $\hat{\mathcal{V}}(24\text{ V})$ e un $\mathcal{R}(3\text{ k}\Omega)$. Il circuito è costituito da due $\hat{\mathcal{V}}$ costanti, un $\mathcal{C}$, un int.id. e quattro $\mathcal{R}$:



• Analizziamo il circuito prima della chiusura dell'int.id. . Siccome esso è a regime per ipotesi e le sorgenti impulsive sono costanti, il $\mathcal{C}$ può essere sostituito da un c.a. . Il circuito si riduce al parallelo di due bipoli, ciascuno costituito da un $\hat{\mathcal{V}}$ in serie a un $\mathcal{R}$. La tensione $v_c(t)$ ai capi del c.a. sostitutivo del $\mathcal{C}$ può essere calcolata mediante il teorema di Millman :

$$v_c(t) = \frac{10/3000 + 24/6000}{1/3000 + 1/6000} = \frac{44}{3} \text{ V} \quad \forall t \leq 0$$

• Consideriamo il circuito con l'int.id. chiuso : la serie della $\hat{\mathcal{V}}(24\text{ V})$ e del $\mathcal{R}(3\text{ k}\Omega)$ viene soppressa. Il circuito è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}(10\text{ V})$, un $\mathcal{C}(100\text{ nF})$, due $\mathcal{R}(3000\text{ }\Omega)$ e un $\mathcal{R}(500\text{ }\Omega)$:



• Il circuito è di ordine uno e la tensione $v_c(t)$ è l'unica variabile di stato e quindi è analiticamente continua. La tensione $v_c(t)$ ha la nota forma : $v_c(t) = [v_c(0) - v_c^{\text{sim}}(0)] \exp(-t/\tau) + v_c^{\text{sim}}(t)$.

• Il valore iniziale $v_c(0) = 44/3\text{ V}$ è stato calcolato in precedenza. mentre la costante di tempo $\tau = C r_{\text{eq}} = 10^{-7} \times 2000 = 200\text{ }\mu\text{s}$, dove r_{eq} è ottenuto dalla

$$r_{\text{eq}} = 0,5 + \frac{3 \times 3}{3 + 3} = 2\text{ k}\Omega$$

• Sostituiamo il $\mathcal{C}(100\text{ nF})$ con un c.a. : la soluzione similare $v_c^{\text{sim}}(t)$ risulta : $v_c^{\text{sim}}(t) = 10/2 = 5\text{ V}$.
Risultato : Dai risultati precedenti otteniamo la tensione $v_c(t)$:

$$v_c(t) = \left[\frac{44}{3} - 5 \right] \exp(-t/5000) + 5 = \frac{29}{3} \exp(-t/5000) + 5\text{ V}$$

L'oggetto del quesito era la corrente $i_u(t)$ è calcolata ricordando la rappresentazione differenziale del $\mathcal{C}$

$$i_u(t) = C \dot{v}_c(t) = -10^{-7} \times 5000 \times \frac{29}{3} \exp(-t/5000) = -\frac{29}{6000} \exp(-t/5000) \text{ A}$$

o, alternativamente, mediante l'equazione algebrica :

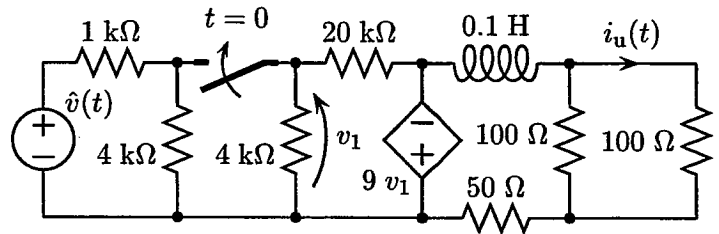
$$i_u(t) = \frac{\hat{v}(t) - v_c(t)}{r_{\text{eq}}} = (1/2000) \times 5 - (1/2000) \times \frac{29}{3} \exp(-t/5000) - (1/2000) \times 5 = -\frac{29}{6000} \exp(-t/5000) \text{ A}$$

che coincide con la precedente.

2.5.4 Esercizio EB/17/06/96 : Soluz. di circuito ordine 1 con int.id.

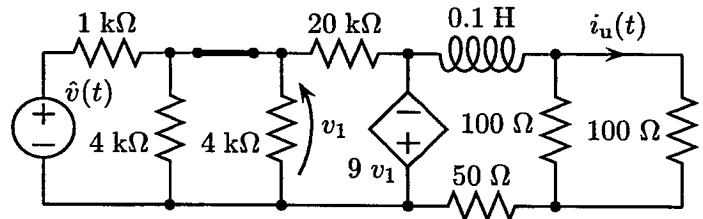
Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ con $\hat{v}(t) = 4 \sin(1000 t)$ V, una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{L}$, un int.id. e sette $\mathcal{R}$:

Quesito : Calcolare la corrente $i_u(u)$, sapendo che prima della chiusura dell'int.id. in $t = 0$ ms il circuito era a regime.



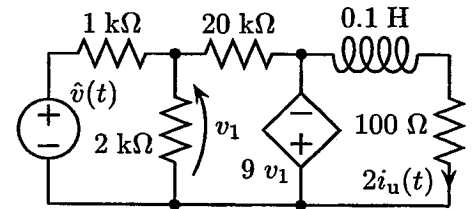
• Prima della chiusura dell'int.id. il circuito era scomposto in due sottocircuiti separati : Infatti il nodo a cui sono incidenti la $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}(t)\rangle$, la $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}\langle 9 v_1 \rangle$ e i due $\mathcal{R}\langle 4 \text{ k}\Omega \rangle$ è un nodo cruciale, poiché l'int.id. è un c.a. . Il sottocircuito di destra è privo di sorgenti impresse, quindi tutte le tensioni e correnti, sono nulle a regime. In particolare la corrente $i_\ell(t)$ nell' $\mathcal{L}$, l'unica candidata, è nulla : $i_\ell(0-) = 0$.

• Appena dopo la chiusura dell'int.id. in $t = 0$ la separazione del circuito viene meno dal momento che l'int.id. diventa un c.c. . Il circuito è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale, una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{L}$ e sette $\mathcal{R}$:



• I due $\mathcal{R}\langle 4 \text{ k}\Omega \rangle$ in parallelo sono fusi in un unico $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$.

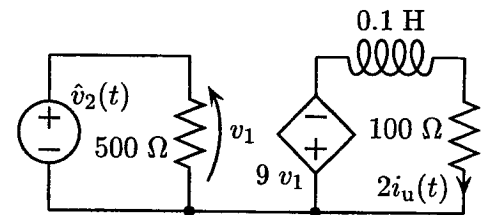
• I due $\mathcal{R}\langle 100 \Omega \rangle$ in parallelo, in uno dei quali scorre la corrente i_u , sono fusi in un unico $\mathcal{R}\langle 50 \Omega \rangle$, che risulta percorso dalla corrente $2 i_u$. A loro volta i due $\mathcal{R}\langle 50 \Omega \rangle$ in serie e percorsi dalla corrente $2 i_u$ sono fusi in un unico $\mathcal{R}\langle 100 \Omega \rangle$. Il circuito è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale, una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{L}$ e quattro $\mathcal{R}$:



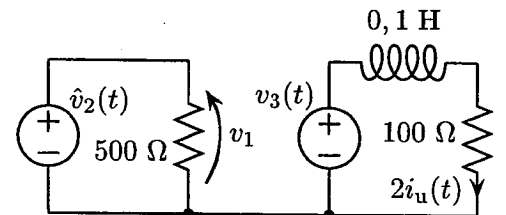
• La $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$ forma una maglia assieme al $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$, ai cui capi è definita la tensione pilotante v_1 , e al $\mathcal{R}\langle 20 \text{ k}\Omega \rangle$. In accordo al primo teorema di Miller, sostituiamo il $\mathcal{R}\langle 20 \text{ k}\Omega \rangle$ con un c.a. e inseriamo un $\mathcal{R}\langle 20/(9+1) = 2 \text{ k}\Omega \rangle$ in parallelo al $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$ pre-esistente. A loro volta questi due $\mathcal{R}$ sono fusi in un unico $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$.

• Il bipolo composto costituito dalla $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}(t)\rangle$ e dai due $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$ è sostituito dal modello di Thévenin applicando l'omonimo teorema : serie di un $\mathcal{R}\langle 500 \Omega \rangle$ e di una $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_2(t)\rangle$ in cui $\hat{v}_2(t) = 1/2 \hat{v}(t) = 2 \sin(1000 t)$ V .

• Il circuito è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_2(t)\rangle$, una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{L}$ e due $\mathcal{R}$:



• Siccome la tensione pilotante v_1 della $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}\langle 9 v_1 \rangle$ coincide con la tensione impressa $\hat{v}_2(t)$, la $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}\langle 9 v_1 \rangle$ è sostituita da una $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_3(t)\rangle$ in cui $\hat{v}_3(t) = -9 \hat{v}_2(t) = -18 \sin(1000 t)$ V . Il circuito è costituito dalla $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_3(t)\rangle$, dall' $\mathcal{L}\langle 0,1 \text{ H} \rangle$ e dal $\mathcal{R}\langle 100 \Omega \rangle$:



• Il circuito dinamico è di ordine uno : la corrente $i_\ell(t) = 2 i_u(t)$ è l'unica variabile di stato. La calcoliamo per mezzo dell'equazione risolutiva dei circuiti di ordine uno :

$$i_\ell(t) = [i_\ell(0) - i_\ell^{\text{sim}}(0)] \exp(-t/\tau) + i_\ell^{\text{sim}}(t)$$

• La costante di tempo vale $\tau = L/r_{\text{eq}} = 0.1/100 = 1 \text{ ms}$.

• Siccome l'unica sorgente impressiva presente è una $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale la corrente similare $i_\ell^{\text{sim}}(t)$ è una senoide : conviene calcolarla nel dominio dei fasori.

$$\bar{i}_\ell^{\text{sim}} = \frac{\bar{v}_3}{r + j\omega L} = \frac{18 \exp(j\pi/2)}{100 + j100} = \frac{9\sqrt{2}}{100} \exp(j\pi/4) \text{ A}$$

Ritornando nel dominio del tempo, si ha : $i_\ell^{\text{sim}}(t) = 0,09\sqrt{2} \cos(1000t + \pi/4) \text{ A}$.

Risultato : La formula risolutiva, inserendo il valore di $i_\ell(0)$ in $t = 0$, della costante di tempo e l'espressione della soluzione similare, diventa :

$$i_\ell(t) = -\frac{9}{100} \exp(-t/1000) + \frac{9\sqrt{2}}{100} \cos(1000t + \pi/4) \text{ A}$$

La corrente $i_u(t)$ essendo la metà di $i_\ell(t)$ è

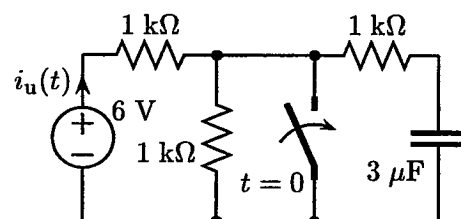
$$i_u(t) = \frac{i_\ell(t)}{2} = -\frac{9}{200} \exp(-t/1000) + \frac{9\sqrt{2}}{200} \cos(1000t + \pi/4) \text{ A}$$

2.5.5 Esercizio E5/20/02/97 : Soluz. di circuito di ordine 1 con int.id.

Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{C}$, un int.id. e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la differenza tra i valori che la corrente $i_u(t)$ assume in $t = 0+$ e in $t = 0-$, supponendo che l'int.id. si chiuda in $t = 0$.

• Il circuito, con l'int.id. sia aperto sia chiuso, è asintoticamente stabile poiché il circuito omogeneo associato è costituito da due o tre $\mathcal{R}$ (dissipativi) e da un $\mathcal{C}$ (conservativo).



• In particolare in $t = 0-$ (appena prima della chiusura dell'int.id.), esso è a regime; la $\hat{\mathcal{V}}$ costante vede la serie di due $\mathcal{R}$ di $1\text{ k}\Omega$ percorsi dalla corrente :

$$i_u(0-) = \frac{\hat{v}}{1000 + 1000} = 3 \text{ mA}$$

• Nello stesso istante la tensione $v_c(0-)$ ai capi del $\mathcal{C}$, che a regime è equivalente a un c.a., risulta di 3 V . All'istante $t = 0+$ il $\mathcal{R}$ di $1\text{ k}\Omega$ in cui scorre la corrente $i_u(t)$ si ritrova in parallelo alla $\hat{\mathcal{V}}$ in seguito alla chiusura dell'int.id. . Quindi si ha

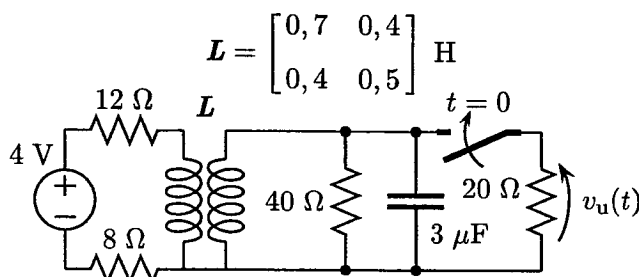
$$i_u(0+) = \frac{\hat{v}}{1000} = 6 \text{ mA}$$

Risultato : La differenza tra i valori assunti dalla corrente $i_u(t)$ appena dopo e appena prima della chiusura dell'int.id. risulta : $i_u(0+) - i_u(0-) = 6 - 3 = 3 \text{ mA}$.

2.5.6 Esercizio E5/23/07/97 : Soluz. di circuito di ordine 3 con int.id.

Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{C}$, un doppio bipolo di " $\mathcal{LL}$ ", quattro $\mathcal{R}$ e un int.id. . Prima della chiusura dell'int.id. in $t = 0$ il circuito era a regime.

Quesito : Calcolare la tensione $v_u(t)$.



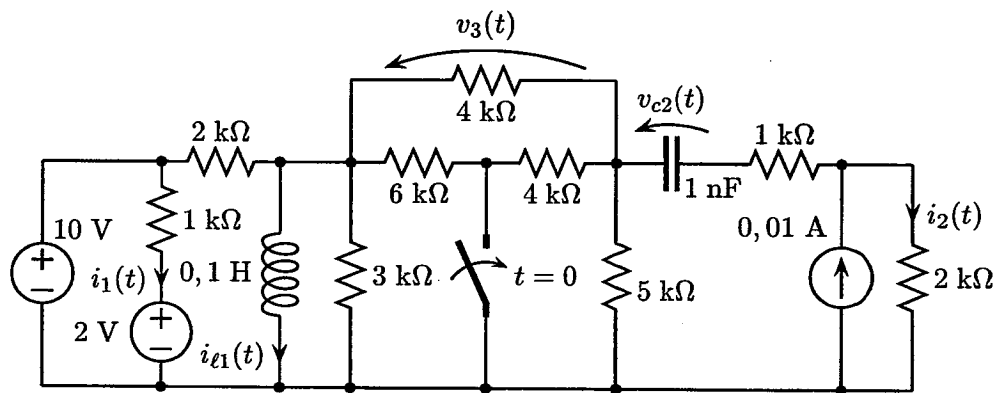
• Durante il regime precedente la chiusura dell'int.id., gli $\mathcal{LL}$ sono equivalenti a una coppia di c.c. e quindi costituiscono un doppio bipolo zerodirezionale : la zerodirezionalità annulla l'effetto dell'unica sorgente impressiva sul bipolo composito connesso alla seconda porta degli $\mathcal{LL}$.

Risultato : Conseguentemente, tutte le tensioni e correnti dei componenti interni al bipolo composto connesso al secondario degli $\mathcal{L}$ sono nulle; tra queste la tensione ai capi del $\mathcal{C}$. Siccome la tensione $v_u(t)$ era nulla prima della chiusura dell'int.id. e questa chiusura non ha alterato il regime costante del circuito, essa rimane nulla anche in seguito : $v_u(t) = 0 \text{ V}$.

2.5.7 Esercizio EB/23/07/97 : Soluz. di circuito ordine 2 con int.id.

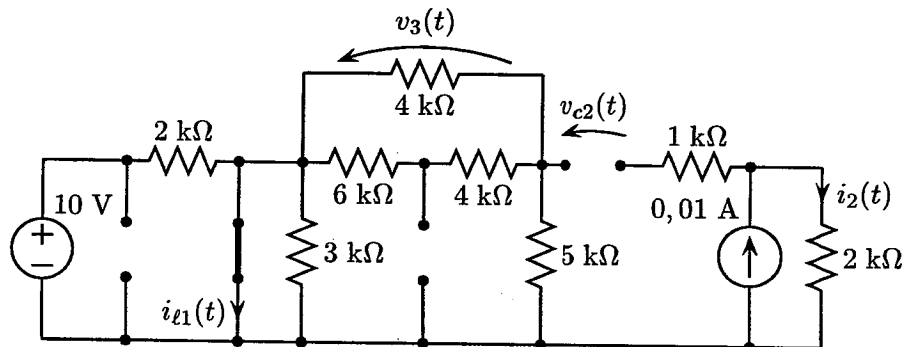
Il circuito dinamico in figura è costituito da due $\hat{\mathcal{V}}$ costanti di 10 V e 2 V, una $\hat{\mathcal{I}}$ costante di 0,01 A, un $\mathcal{L}$ (0,1 H), un $\mathcal{C}$ (1 nF), un int.id. e nove $\mathcal{R}$. Prima della chiusura dell'int.id. in $t = 0$, il circuito era a regime.

Quesito : Dopo la chiusura dell'int.id., calcolare la corrente $i_1(t)$ fluente nella $\hat{\mathcal{V}}$ (2 V), la corrente $i_2(t)$ fluente nel $\mathcal{R}$ (2 k Ω) in parallelo alla $\hat{\mathcal{I}}$ (0,01 A), la corrente $i_{\mathcal{L}}(t)$ fluente nell' $\mathcal{L}$, la tensione $v_{\mathcal{C}}(t)$ ai capi del $\mathcal{C}$ (1 nF) e la tensione $v_3(t)$ ai capi del $\mathcal{R}$ (4 k Ω) trasversale.



Risultato 1 : La corrente $i_1(t)$ può essere calcolata immediatamente, tenendo presente che il $\mathcal{R}$ (1 k Ω) percorso da $i_1(t)$ costituisce una maglia assieme alle $\hat{\mathcal{V}}$ (10 V) e $\hat{\mathcal{V}}$ (2 V). Quindi $i_1(t) = 8 \text{ mA}$.

- Il ramo costituito dalla serie del $\mathcal{R}$ (1 k Ω) e della $\hat{\mathcal{V}}$ (2 V) può essere sostituito da un c.a. dal momento che è in parallelo alla $\hat{\mathcal{V}}$ (10 V) e la sua corrente è stata calcolata in precedenza.
- Esaminiamo il regime costante con l'int.id. aperto. L' $\mathcal{L}$ è equivalente a un c.c. e il $\mathcal{C}$ è equivalente a un c.a..



- Nella parte centrale del circuito possiamo individuare un DBT adinamico costituito da cinque $\mathcal{R}$ e dal c.a. che rappresenta l'int.id.. La tensione v_1 alla prima porta del DBT coincide con quella ai capi dell' $\mathcal{L}$ (c.c.) e quindi è nulla. La corrente i_2 alla seconda porta del DBT coincide con quella fluente nel $\mathcal{C}$ (c.a.) e quindi è nulla.

- Essendo il DBT adinamico omogeneo ed essendo nulle v_1 e i_2 , anche le rimanenti due grandezze alle porte del DBT adinamico e omogeneo sono nulle. Per convincersene considerare la rappresentazione $(i_1, v_2) \leftarrow (v_1, i_2)$. Conseguentemente, anche tutte le tensioni e correnti interne al DBT sono nulle. In particolare la tensione ai capi dell'int.id. aperto è nulla. Quindi la chiusura dell'int.id. non cambia niente dal momento che la tensione ai suoi capi era già nulla. Conseguentemente la chiusura

dell'int.id. non crea alcun transitorio e il regime costante prosegue immutato.

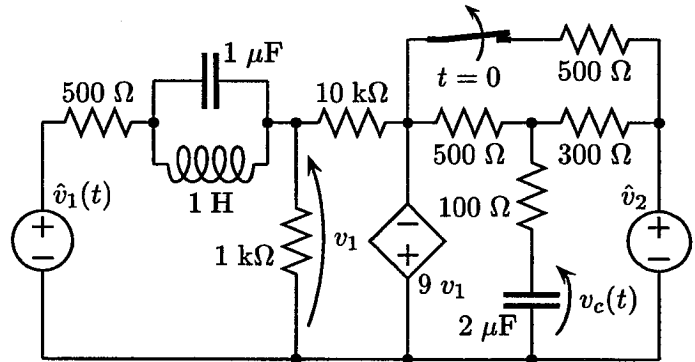
Risultato 2 : A questo punto possiamo calcolare le grandezze desiderate, come se ci trovassimo di fronte a un circuito adinamico. Se consideriamo la maglia costituita dalla $\hat{\mathcal{I}}$ e dal $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$, abbiamo $i_2(t) = \hat{i}_2 = 10 \text{ mA}$. Se consideriamo la maglia costituita dalla $\hat{\mathcal{V}}$ di 10 V , dal $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$ e dall' $\mathcal{L}$, abbiamo $i_{\ell 1}(t) = 10/2000 = 5 \text{ mA}$. Se consideriamo la maglia costituita dal $\mathcal{C}$, dai $\mathcal{R}\langle 5 \text{ k}\Omega \rangle$, $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$, abbiamo $v_c(t) = 0 + 1000 \times 0 - 2000 \times 0,01 = -2 \text{ V}$. La tensione $v_3(t)$ risulta nulla poiché è ai capi di un $\mathcal{R}$ interno al DBT adinamico omogeneo.

2.5.8 Esercizio EB/16/01/97 : Soluz. di circuito ordine3 riducibile con int.id.

Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_2 = 8 \text{ V} \rangle$, una $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_1(t) = 5 \cos(1000 t) \text{ V} \rangle$, una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$, due $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$, sette $\mathcal{R}$ e un int.id. :

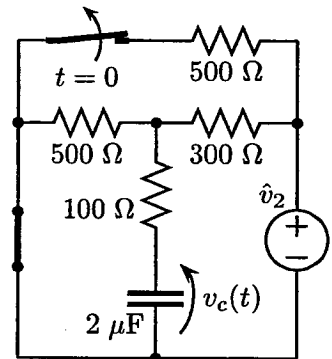
Quesito : Calcolare la tensione $v_c(t)$, sapendo che l'int.id. si apre per $t = 0$:

- Esaminiamo il circuito prima dell'apertura dell'int.id. : assumendo che esso abbia raggiunto il regime (misto sinusoidale e costante).

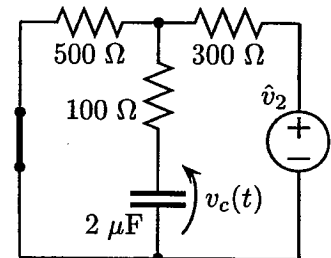


- La porta pilotata della $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$ può essere vista come un bipolo composto costituito dalla $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale, un risonatore ideale parallelo (formato dal $\mathcal{C}\langle 1 \mu\text{F} \rangle$ e dall' $\mathcal{L}\langle 1 \text{ H} \rangle$), la $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$ stessa e i tre $\mathcal{R}\langle 500 \Omega \rangle$, $\mathcal{R}\langle 1000 \Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 10 \text{ k}\Omega \rangle$.

- Cerchiamo il modello equivalente di Thévenin del suddetto bipolo composto. La resistenza equivalente è nulla dal momento che la corrente della porta pilotata della $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$ è nonvincolata. La tensione impressa equivalente $\hat{v}_{eq}(t)$ è pure nulla. Infatti per $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ il risonatore ideale parallelo è in risonanza e quindi può essere sostituito da un c.a. e quindi la $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$ rimane isolata dalla $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale.
- Poiché la porta pilotata della $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$ è equivalente a un c.c., il circuito risulta costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ costante, un $\mathcal{C}$, quattro $\mathcal{R}$ e un int.id. :



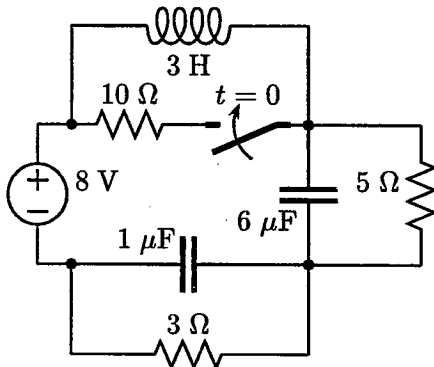
- Il bipolo costituito dalla serie del $\mathcal{R}\langle 500 \Omega \rangle$ e dell'int.id. risulta in parallelo alla $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_2 \rangle$: esso è ininfluente sul resto del circuito indipendentemente dalla configurazione dell'int.id. e può essere sostituito da un c.a. . Il circuito è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ costante, un $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$: esso è di ordine uno e si trova da tempo infinito in un regime costante senza la presenza di un transitorio, poiché l'int.id. è ininfluente.



Risultato : Sostituendo il $\mathcal{C}$ con un c.a., la tensione costante v_c viene calcolata con la regola del partitore di tensione.

$$v_c = \hat{v}_2 \frac{500}{500 + 300} = 8 \frac{500}{500 + 300} = 5 \text{ V}$$

2.5.9 Esercizio E4/17/06/97 : Soluz. di circuito dinamico a regime costante con int.id.



Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, due $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$, tre $\mathcal{R}$ e un int.id. .

Quesito : Calcolare le energie $w_{c1}(t)$ e $w_{\ell}(t)$ immagazzinate nel $\mathcal{C}\langle C_1 \rangle$ e nell' $\mathcal{L}$ a regime (cioè per $t \rightarrow \infty$) .

• Per $t \rightarrow \infty$ il circuito raggiunge la soluzione a regime, che è costante come la $\hat{\mathcal{V}}$. A regime il circuito è costituito da un'unica maglia dal momento che l' $\mathcal{L}$ si comporta come un c.c. e i due $\mathcal{C}$ come due c.a. .

Risultato 1 : La corrente $i_1(\infty)$ di quest'unica maglia fluisce nell' $\mathcal{L}$ e nei due $\mathcal{R}\langle 5\Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 3\Omega \rangle$. Conseguentemente possiamo calcolare la corrente $i_1(\infty)$ e l'energia $w_{\ell}(\infty)$ nell' $\mathcal{L}$

$$i_1(\infty) = \frac{8}{5+3} = 1 \text{ A} \implies w_{\ell}(\infty) = \frac{1}{2} L i_1(\infty)^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 1^2 = \frac{3}{2} \text{ J}$$

Risultato 2 : Essendo il $\mathcal{C}\langle C_1 \rangle$ in parallelo al $\mathcal{R}\langle 5\Omega \rangle$, la tensione a regime $v_{c1}(\infty)$ ai capi del $\mathcal{C}$ e l'energia $w_{c1}(\infty)$ nel $\mathcal{C}$ stesso possono essere calcolate

$$v_{c1}(\infty) = 5 \text{ V} \implies w_{c1}(\infty) = \frac{1}{2} C_1 v_{c1}(\infty)^2 = \frac{1}{2} \times 6 \cdot 10^{-6} \times 5^2 = 75 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

2.5.10 Esercizio E4/13/01/98 : Soluz. di circuito ordine 2 simplic. stabile con int.id.

Il circuito in figura è costituito da un tr.id., due $\mathcal{C}$, un int.id. e due $\mathcal{R}$. Prima di aprire l'int.id. in $t = 0$ le tensioni ai capi dei due $\mathcal{C}$ sono $v_{c1}(0-) = 600 \text{ V}$ e $v_{c2}(0-) = 1000 \text{ V}$.

Quesito : Calcolare le energie $w_{c1}(t)$ e $w_{c2}(t)$ immagazzinate nei due $\mathcal{C}$ per $t \rightarrow \infty$.

• L'apertura dell'int.id. in $t = 0$ fa sì che la corrente $i_{c1}(t)$ fluente nel $\mathcal{C}\langle 3\mu\text{F} \rangle$ sia nulla per $t > 0$. Anche la corrente $i_{c2}(t)$ fluente nel $\mathcal{C}\langle 2\mu\text{F} \rangle$ è nulla per $t > 0$ poiché le due correnti sono legate dalla relazione $i_{c1}(t) = 1/3 i_{c2}(t)$ dovuta al tr.id. .

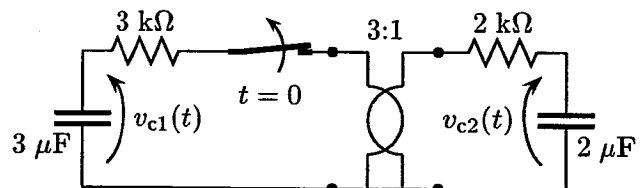
Risultato : la carica immagazzinata nei due $\mathcal{C}$ dopo l'apertura dell'int.id. rimane invariata poiché $i_{c1}(t) = i_{c2}(t)$. Quindi anche le energie immagazzinate rimangono invariate :

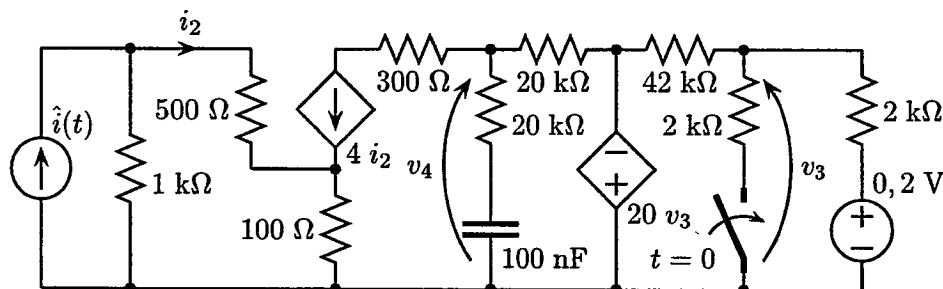
$$w_{c1}(\infty) = \frac{1}{2} C_1 v_{c1}(0)^2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 10^{-6} 600^2 = 0,54 \text{ J} , \quad w_{c2}(\infty) = \frac{1}{2} C_2 v_{c2}(0)^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 10^{-6} 1000^2 = 1 \text{ J}$$

2.5.11 Esercizio EC/28/07/98 : Soluz. di circuito di ordine 1 con int.id.

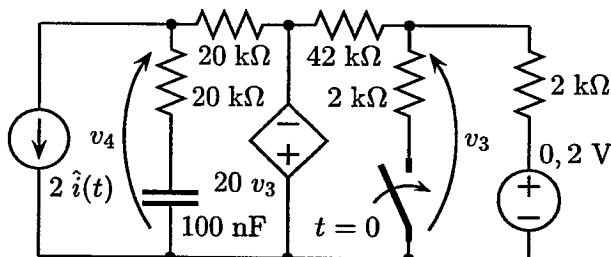
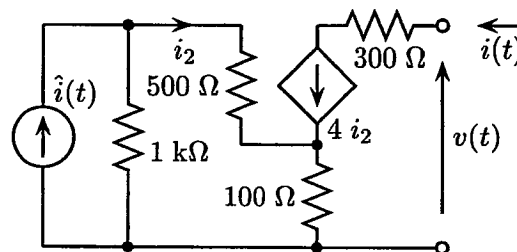
Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}\langle 0,2 \text{ V} \rangle$, una $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}(t) = 2 \cos(1000 t) \text{ mA} \rangle$, una $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$, una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{C}$, un interruttore ideale e nove $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la tensione $v_4(t)$ per $t \geq 0$, sapendo che il circuito dinamico era a regime per $t \leq 0$ e che l'interruttore si chiude in $t = 0$.

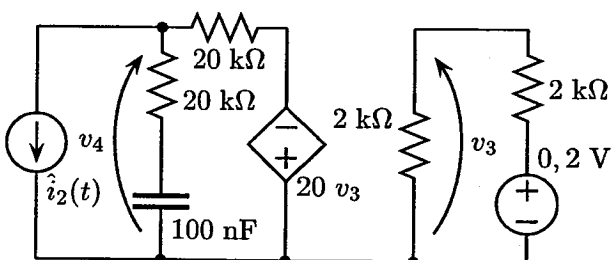




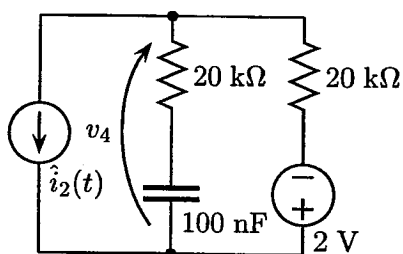
- Nella parte di sinistra del circuito individuiamo un bipolo composto costituito dalla $\hat{\mathcal{I}}$, dalla $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$, e da tre $\mathcal{R}$, come indicato nella figura.
- Il suddetto bipolo composto risulta equivalente a una $\hat{\mathcal{I}}$ con corrente impressa $\hat{i}_2(t) = 2 \hat{i}(t) = 4 \cos(1000 t) \text{ mA}$. Il calcolo può essere eseguito facendo ricorso al secondo teorema di Miller.



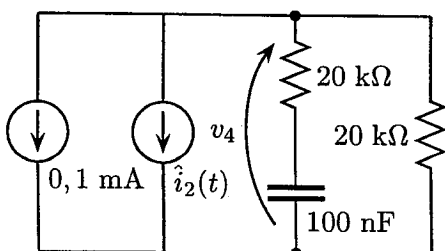
- Studiamo il regime con l'interruttore aperto ridisegniamo il circuito. Applicando il primo teorema di Miller alla maglia costituita dalla porta pilotata e dalla porta pilotante della $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$ e dal $\mathcal{R}(42 \text{ k}\Omega)$, otteniamo :



- La regola del partitore di tensione stabilisce che la tensione pilotante $v_3 = 0,5 \times 0,2 = 0,1 \text{ V}$ quindi la $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}(20 v_3)$ è sostituita dalla $\hat{\mathcal{V}}(2 \text{ V})$.



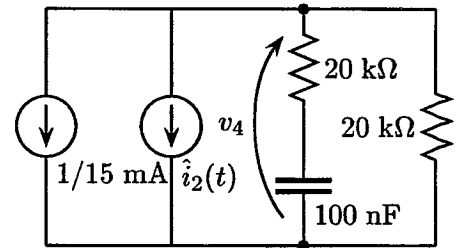
- La soluzione a regime può venire calcolata col principio di sovrapposizione per le soluzioni similari (vedere Cap. 15-FCE). Introduciamo il modello di Norton della $\hat{\mathcal{V}}(2 \text{ V})$ in serie al $\mathcal{R}(20 \text{ k}\Omega)$.



Essendoci una $\hat{\mathcal{V}}$ costante e una $\hat{\mathcal{I}}$ sinusoidale, nella soluzione a regime (coincidente con quella similare) sono presenti una componente costante e una sinusoidale del tipo è costituita da due componenti :

$v_c^{\text{sim}}(t) = v_c^{\text{sim}1} + v_c^{\text{sim}2} \cos(1000 t + \phi_c)$. Essa risulta $v_c^{\text{sim}}(t) = 2 + 8/\sqrt{17} \cos(1000 t + \pi/2 + \arctg(0,25)) \text{ V}$. Mettendo $t = 0$ nella suddetta espressione noi conosciamo il valore della tensione ai capi del $\mathcal{C}$ al momento in cui l'int.id. si chiude.

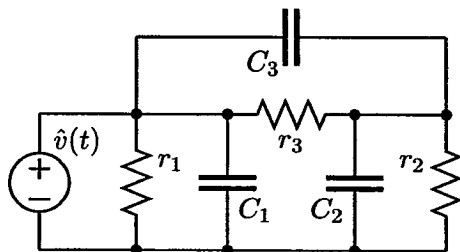
- Per proseguire l'esercizio occorre calcolare la soluzione con l'interruttore chiuso : il modello equivalente del circuito è uguale a quello con int.id. aperto salvo una variazione del valore della corrente impressa costante, che viene alterato $\hat{I}(1/10 \text{ mA}) \rightarrow \hat{I}(1/15 \text{ mA})$.



WWWWWWWWWW????? ESERCIZIO NON TERMINATO ?????WWWWWWWWWWWWWW

2.6 INDIVIDUAZIONE DI VINCOLI ALGEBRICI TRA CANDIDATE DI STATO

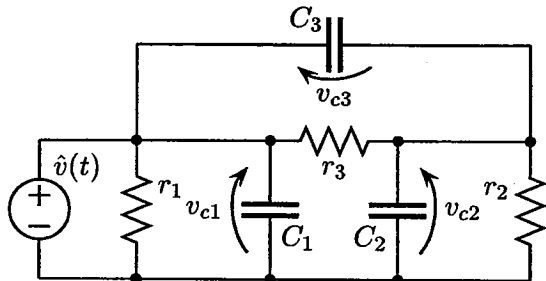
2.6.1 Esercizio E4/17/06/96 : Variabili di stato in un circuito con tre cond.



Il circuito dinamico in figura è costituito da tre $\mathcal{R}$, tre $\mathcal{C}$ e una $\hat{\mathcal{V}}$. La tensione impressa, le resistenze e le capacità sono ignote (comunque le resistenze e la capacità sono positive).

Quesito : Calcolare l'ordine (numero di variabili di stato) del circuito.

- Le candidate di stato sono $v_{c1}(t)$, $v_{c2}(t)$ e $v_{c3}(t)$, poiché vi sono tre $\mathcal{C}$ e nessun $\mathcal{L}$.



- I $\mathcal{C}\langle C_1 \rangle$, $\mathcal{C}\langle C_2 \rangle$ e $\mathcal{C}\langle C_3 \rangle$ formano una maglia- $\mathcal{C}$: la Legge di Kirchhoff delle tensioni impone che : $v_{c1}(t) - v_{c2}(t) - v_{c3}(t) = 0$. Il $\mathcal{C}\langle C_1 \rangle$ forma un'altra maglia con la $\hat{\mathcal{V}}$: la tensione $v_{c1}(t)$ coincide con la tensione impressa : $v_{c1}(t) = \hat{v}(t)$. Siccome le due maglie considerate sono tra loro indipendenti, vi sono 2 vincoli algebrici tra le tre candidate.

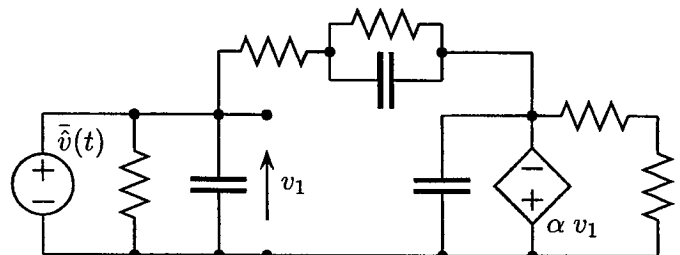
Risultato : Vi è una sola variabile di stato. Il circuito dinamico risulta degenerare e di primo ordine : come unica variabile di stato può essere scelta la tensione $v_{c2}(t)$ o la tensione $v_{c3}(t)$.

Commento : La tensione impressa della $\hat{\mathcal{V}}$ non ha alcuna influenza sull'ordine del circuito. In particolare, se fosse sostituita da un c.c. nulla cambierebbe. Infatti l'ordine del circuito dinamico dipende esclusivamente dal circuito dinamico omogeneo associato.

2.6.2 Esercizio E5/27/01/98 : Variabili di stato in un circuito con tre cond.

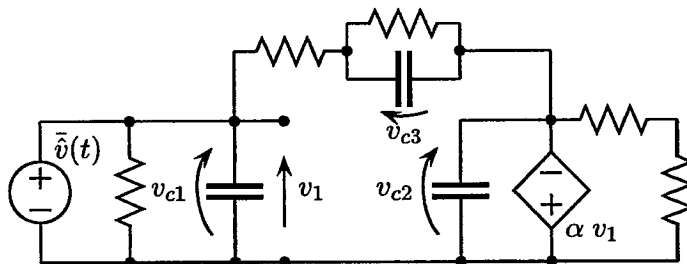
Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}(t) \rangle$, dove $\hat{v}(t)$ è ignota, una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$ tripolare, tre $\mathcal{C}$ e cinque $\mathcal{R}$. I valori delle tre capacità, delle cinque resistenze e di α non sono noti a parte il fatto che sono positivi.

Quesito : Calcolare il numero di variabili di stato del circuito.



- Le candidate di stato sono : le tensioni $v_{c1}(t)$, $v_{c2}(t)$ e $v_{c3}(t)$ ai capi dei $\mathcal{C}$.

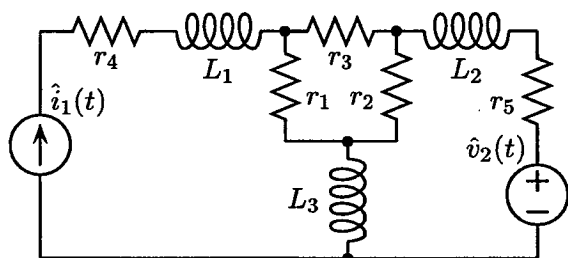
- Uno dei $\mathcal{C}$ è in parallelo alla $\hat{\mathcal{V}}$ quindi la sua tensione non può diventare variabile di stato perché la tensione $v_{c1}(t) = \hat{v}(t)$. Un secondo $\mathcal{C}$ si trova in parallelo alla porta pilotata della $\mathcal{V}_V$ e di ha l'equazione $v_{c2}(t) = -\alpha v_{c1}(t)$.



- Rimane la tensione ai capi del $\mathcal{C}$ che fa parte del bipolo composito $\mathcal{R} \ddagger [\mathcal{R} \parallel \mathcal{C}]$ connesso trasversalmente alla $\mathcal{V}_V$ tripolare. La tensione di questo bipolo composito è vincolata alla tensione impressa (pensare al primo teorema di Miller) ma la presenza del $\mathcal{R}$ in serie consente alla tensione $v_{c3}(t)$ di sfuggire a vincoli algebrici tra candidate.

Risultato : Dall'esame dei vincoli algebrici coinvolgenti le tre candidate risulta che $v_{c3}(t)$ è l'unica variabile di stato.

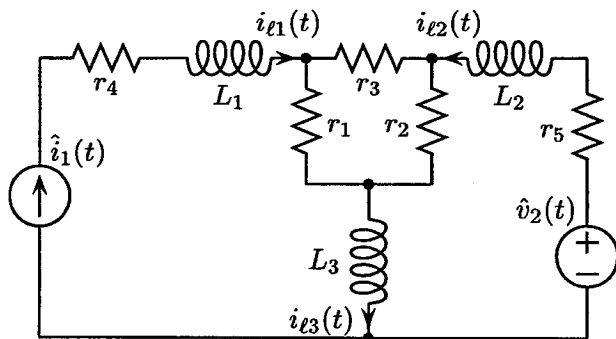
2.6.3 Esercizio E4/05/07/96 : Variabili di stato in un circuito con tre indut.



Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\hat{\mathcal{I}}$, tre $\mathcal{L}$ e cinque $\mathcal{R}$. Le resistenze e induttanze sono ignote (comunque sono tutte positive).

Quesito : Calcolare l'ordine (numero di variabili di stato) del circuito.

- Le correnti fluenti nei tre $\mathcal{L}$ sono le tre candidate di stato.

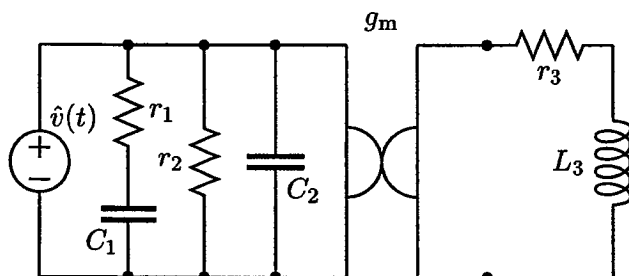


- I tre $\mathcal{L}$ formano una taglio- $\mathcal{L}$: le loro correnti sono vincolate dalla Legge di Kirchhoff delle correnti per il suddetto taglio : $i_{L1}(t) + i_{L2}(t) - i_{L3}(t) = 0$. $\mathcal{L}\langle L_1 \rangle$ forma un altro taglio con la $\hat{\mathcal{I}}$: la stessa legge impone il vincolo : $i_{L1}(t) = \hat{i}(t)$. È immediato constatare che i due suddetti vincoli sono tra loro indipendenti.

Risultato : Essendoci tre candidate soggette a due vincoli algebrici, vi è una sola variabile di stato.

Commento : Il circuito risulta degenerare e di primo ordine : come unica variabile di stato può essere scelta la corrente fluente in $\mathcal{L}\langle L_2 \rangle$ ovvero quella in $\mathcal{L}\langle L_3 \rangle$. La grandezze impresse della $\hat{\mathcal{V}}$ e della $\hat{\mathcal{I}}$ non hanno alcuna influenza sull'ordine del circuito : infatti l'ordine dipende esclusivamente dal circuito dinamico omogeneo associato.

2.6.4 Esercizio E5/16/01/97 : Variabili di stato in un circuito con due cond. e un indutt.

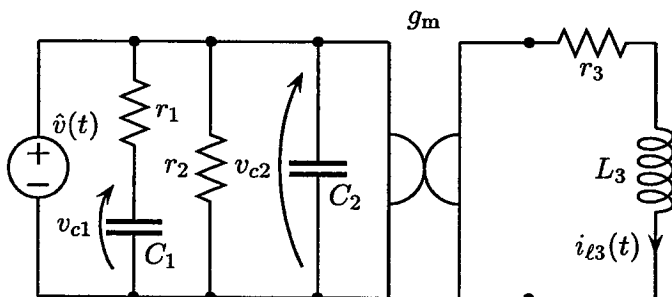


Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, un giratore, due $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e tre $\mathcal{R}$.

Le resistenze, capacità, induttanza e transconduttanza del giratore sono ignote (comunque sono positive). Anche la tensione impressa non è nota.

Quesito : Calcolare l'ordine (numero di variabili di stato) del circuito.

- La presenza di due $\mathcal{C}$ e un $\mathcal{L}$ determina le tre candidate di stato. Il $\mathcal{C}\langle C_2 \rangle$ è in parallelo alla prima porta del giratore e alla $\hat{\mathcal{V}}$. Quindi la sua tensione non è una variabile di stato. La corrente $i_{L3}(t)$ fluisce anche nella seconda porta del giratore e quindi è vincolata algebricamente alla tensione della prima porta del giratore stesso che coincide con la tensione impressa $\hat{v}(t)$. Quindi anche $i_{L3}(t)$ non è variabile di stato.



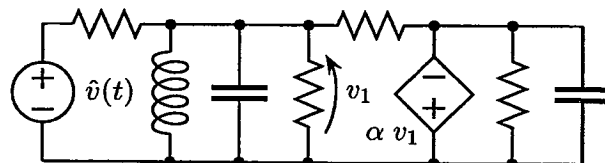
Risultato : La tensione $v_{c1}(t)$ ai capi del $\mathcal{C}\langle C_1 \rangle$ è l'unica variabile di stato : il circuito è degenere e di ordine uno.

Commento : L'equazione di stato può essere scritta direttamente dall'ispezione della maglia costituita dalla $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}(t) \rangle$, dal $\mathcal{C}\langle C_1 \rangle$ e dal $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$.

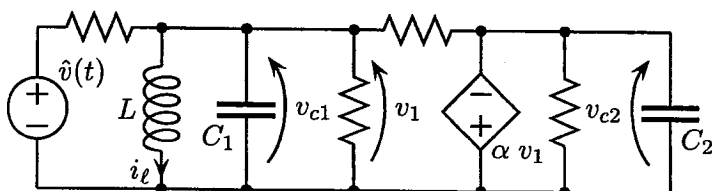
2.6.5 Esercizio E4/23/07/97 : Variabili di stato in un circuito con due cond. e un indut.

Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$, una $\hat{\mathcal{V}}$, due $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e quattro $\mathcal{R}$. Le capacità, l'induttanza, le resistenze e α sono positive ma incognite.

Quesito : Calcolare il numero delle variabili di stato.



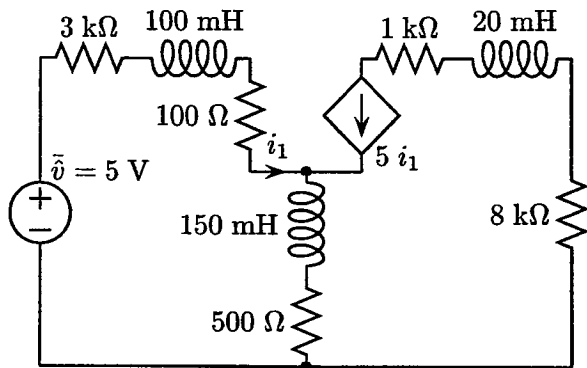
- La presenza di due $\mathcal{C}$ e un $\mathcal{L}$ ci dice che vi sono tre candidate : $v_{c1}(t)$, $i_L(t)$ e $v_{c2}(t)$. Il $\mathcal{C}$ di destra è in parallelo alla porta pilotata della $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$. Conseguentemente, la tensione $v_{c2}(t)$ è vincolata algebricamente alla tensione pilotante $v_1(t)$: $v_{c2}(t) = \alpha v_1(t)$.



- Esistono vincoli algebrici tra le tre candidate ? Le tensioni dei $\mathcal{C}$ sono proporzionali a $v_1(t)$: $v_{c1}(t) = v_1(t)$ e $v_{c2}(t) = -\alpha v_1(t)$. Tra esse vi è il vincolo algebrico : $v_{c2}(t) = -\alpha v_{c1}(t)$.

Risultato : siccome vi sono tre candidate e un vincolo, le variabili di stato sono due.

2.6.6 Esercizio E4/11/09/98 : Variabili di stato in un circuito con tre indut.



Il circuito in figura contiene una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$, tre $\mathcal{L}$ e cinque $\mathcal{R}$.

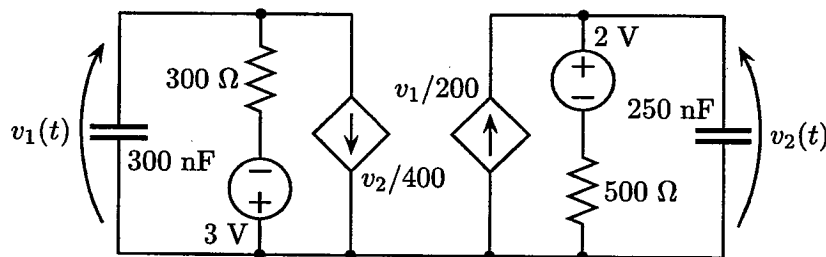
Quesito : Calcolare l'ordine del circuito.

• Nel circuito sono presenti tre candidate di stato cioè le correnti fluenti nei tre $\mathcal{L}$. Assumiamo che le tre correnti siano orientate verso il nodo al centro. Ma queste correnti sono soggette a due vincoli algebrici indipendenti.

- Il taglio costituito dai tre $\mathcal{L}$ vincola la somma delle correnti : $i_{\ell 1} + i_{\ell 2} + i_{\ell 3} = 0$, mentre la corrente $i_{\ell 3}$ fluente nel $\mathcal{L}$ (150 mH) è 6/5 della corrente $i_{\ell 2}$ fluente nel $\mathcal{L}$ (20 mH) a causa della $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$.
- Risultato** : La presenza di tre candidate e di due vincoli algebrici ci dice che vi è un'unica variabile di stato cioè che l'ordine del circuito è uno.

2.7 EQUAZIONE DI STATO E USCITA DI CIRCUITI DI ORDINE 2

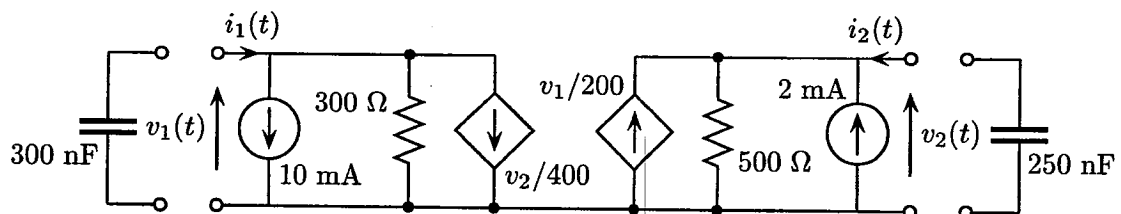
2.7.1 Esercizio E6/23/02/99 : Equazione di stato di ordine 2



Il circuito in figura è costituito da due $\hat{\mathcal{V}}$, due $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}$, due $\mathcal{C}$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Scrivere l'equazione di stato del circuito.

- Se separiamo i due $\mathcal{C}$ dal resto del circuito, noi caratterizziamo il DBT adinamico complementare. In questo DBT adinamico sostituiamo i due bipoli costituiti da $\hat{\mathcal{V}} \nmid \mathcal{R}$ col rispettivo modello di Norton.



- Poiché le tensioni $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono le due candidate di stato, occorre calcolare la rappresentazione $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$ (rappresentazione controllata in tensione) del DBT adinamico. Osservando il DBT adinamico notiamo che esso è proprio il modello controllato in tensione del DBT stesso. Questo ci consente di scrivere direttamente la rappresentazione :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/300 & 1/400 \\ -1/200 & 1/500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,010 \\ -0,002 \end{bmatrix}$$

Risultato : Le rappresentazioni differenziali dei $\mathcal{C}$: $i_1(t) = -300 \times 10^{-9} \dot{v}_1(t)$ e $i_2(t) = -250 \dot{v}_2(t)$, sostituendo $i_1(t)$ e $i_2(t)$ nella rappresentazione del DBT, generano l'equazione di stato :

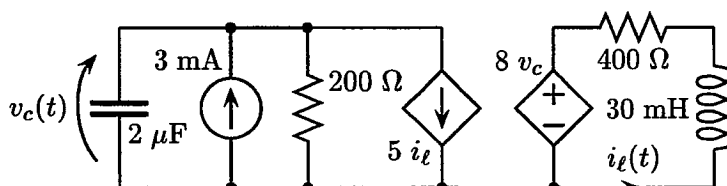
$$\begin{bmatrix} -300 \times 10^{-9} \dot{v}_1(t) \\ -250 \times 10^{-9} \dot{v}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/300 & 1/400 \\ -1/200 & 1/500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,010 \\ -0,002 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10^6/90 & -10^6/120 \\ 10^6/50 & -10^6/125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10^5/3 \\ 8000 \end{bmatrix}$$

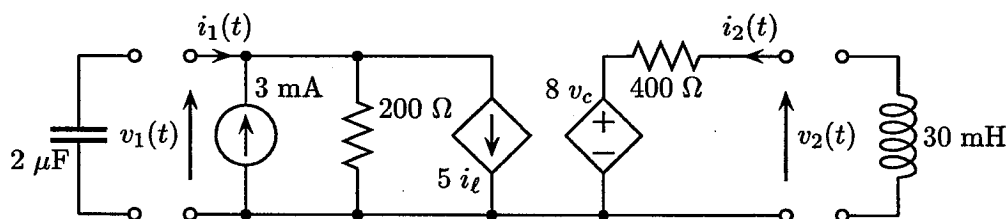
2.7.2 Esercizio E6/02/02/99 : Equazione di stato di ordine 2

Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}$, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$, una $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$, una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Scrivere l'equazione di stato del circuito.



- Se separiamo l' $\mathcal{L}$ e il $\mathcal{C}$ dal circuito, noi caratterizziamo il DBT adinamico complementare ai due bipoli conservativi.



- Poiché la candidate di stato sono la tensione alla prima porta v_1 e la corrente $i_2(t)$ alla seconda porta, occorre calcolare la rappresentazione $(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$ (seconda rappresentazione ibrida) del DBT adinamico. Osservando il DBT adinamico notiamo che la sua struttura è proprio quella del secondo modello ibrido del DBT stesso. Questo ci consente di scrivere direttamente la rappresentazione :

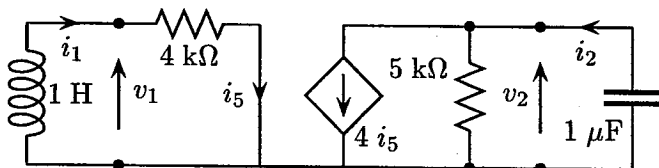
$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,005 & 5 \\ 8 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,003 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- La rappresentazioni differenziali del $\mathcal{C}$ e dell' $\mathcal{L}$: $i_1(t) = -C \dot{v}_1(t)$ e $v_2(t) = -L \dot{i}_2(t)$, sostituendo $i_1(t)$ e $v_2(t)$ nella rappresentazione del DBT, generano l'equazione di stato :

$$\begin{bmatrix} -C \dot{v}_1(t) \\ -L \dot{i}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,005 & 5 \\ 8 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,003 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2500 & -2500000 \\ -800/3 & -40000/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1500 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.7.3 Esercizio E6/09/01/99 : Equazione di stato di ordine 2 unidir.



Il circuito in figura è costituito da una $\mathcal{I}_{\mathcal{I}} \langle 4 i_5 \rangle$, un $\mathcal{L} \langle 1 \text{ H} \rangle$, un $\mathcal{C} \langle 1 \mu\text{F} \rangle$, un $\mathcal{R} \langle 4 \text{ k}\Omega \rangle$ e un $\mathcal{R} \langle 5 \text{ k}\Omega \rangle$.

Quesito : Scrivere l'equazione di stato del circuito.

- Separiamo il $\mathcal{C}$ e l' $\mathcal{L}$ dal circuito : quel che resta costituisce il DBT adinamico complementare. Poiché alla prima porta del DBT vi è l' $\mathcal{L}$ e alla seconda il $\mathcal{C}$, occorre scrivere la rappresentazione $(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$ (prima rappresentazione ibrida) del DBT.

- Dall'esame della prima porta otteniamo la relazione $v_1 = 4000 i_1$ e dall'esame della seconda otteniamo $i_2 = 4 i_1 + v_2/5000$. In forma compatta abbiamo :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 & 0 \\ 4 & 0,0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

• Le rappresentazioni differenziali dell' $\mathcal{L}$ e del $\mathcal{C}$ sono $v_1(t) = -1 \dot{i}_1(t)$ e $i_2(t) = -10^{-6} \dot{v}_2(t)$ in cui i segni “-” sono dovuti alla convenzione nonnormale.

Risultato : Sostituendo $v_1(t)$ e $i_2(t)$ nella prima rappresentazione ibrida del DBT adinamico, abbiamo un sistema differenziale da cui otteniamo immediatamente l'equazione di stato :

$$\begin{bmatrix} -1 \dot{i}_1(t) \\ -10^{-6} \dot{v}_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4000 & 0 \\ 4 & 0,0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4000 & 0 \\ -4000000 & -200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

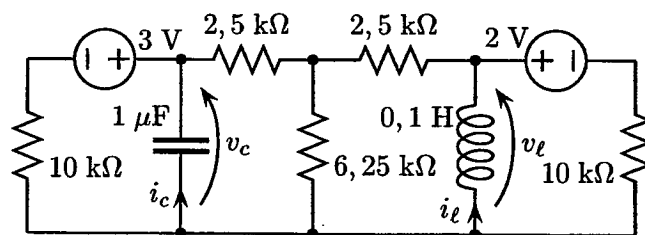
Commento : Il circuito risulta asintoticamente stabile poiché la due pulsazioni naturali, coincidenti con gli elementi sulla diagonale principale della matrice di stato, sono reali e negative.

2.7.4 Esercizio EC/17/06/97 : Equazione di stato di ordine 2

Il circuito dinamico in figura è costituito da due $\hat{\mathcal{V}}$, costanti, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e cinque $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare l'equazione di stato del circuito.

• Il circuito appare di ordine due poiché non vi sono evidenti legami algebrici tra le due candidate di stato.



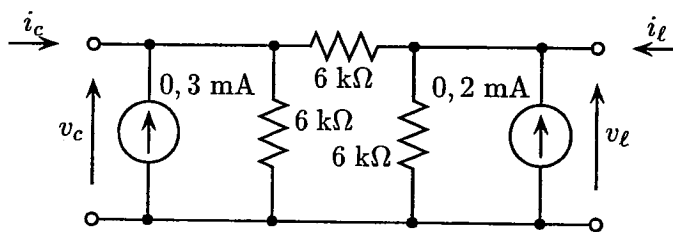
• Usiamo il metodo dei componenti complementari per calcolare l'equazione di stato. Il DBT adinamico complementare risulta costituito dalle due $\hat{\mathcal{V}}$ e dai cinque $\mathcal{R}$. Per il momento calcoliamo la rappresentazione controllata in tensione del DBT dal momento che essa appare la più facile da calcolare.

• Modifichiamo il DBT trasformando il DBT a stella nel DBT a triangolo equivalente : il triangolo è costituito dai $\mathcal{R}$ (6 kΩ) (connesso trasversalmente), $\mathcal{R}$ (15 kΩ) (in parallelo alla prima porta) e $\mathcal{R}$ (15 kΩ) (in parallelo alla seconda porta). Infine sostituiamo i due bipoli nonomogenei (modello di Thévenin) in parallelo alle due porte del DBT adinamico complementare col modello di Norton :

prima porta : $\hat{\mathcal{V}}$ (3 V) in serie al $\mathcal{R}$ (10 kΩ) $\rightarrow$ $\hat{\mathcal{I}}$ (0,3 mA) in parallelo al $\mathcal{R}$ (10 kΩ)

seconda porta : $\hat{\mathcal{V}}$ (2 V) in serie al $\mathcal{R}$ (10 kΩ) $\rightarrow$ $\hat{\mathcal{I}}$ (0,2 mA) in parallelo al $\mathcal{R}$ (10 kΩ)

Nel DBT adinamico compaiono due bipoli composti ciascuno costituito dal parallelo di un $\mathcal{R}$ (10 kΩ) e un $\mathcal{R}$ (15 kΩ) : ciascuno da origine a un unico $\mathcal{R}$ (6 kΩ) . Il DBT adinamico è costituito dalle $\hat{\mathcal{I}}$ (0,3 mA), $\hat{\mathcal{I}}$ (0,2 mA) e dai tre $\mathcal{R}$ (6 kΩ) :



• Possiamo calcolare immediatamente la rappresentazione $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$ del DBT adinamico complementare :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-3}/3 & -10^{-3}/6 \\ -10^{-3}/6 & 10^{-3}/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.3 \cdot 10^{-3} \\ -0.2 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

• Siccome alla prima porta del DBT adinamico è collegato un $\mathcal{C}$ e alla seconda porta un $\mathcal{L}$, occorre ottenere la rappresentazione controllata in v_1 e i_2 (seconda rappresentazione ibrida) .

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4000 & -1/2 \\ 1/2 & 3000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \cdot 10^{-4} \\ 6/10 \end{bmatrix}$$

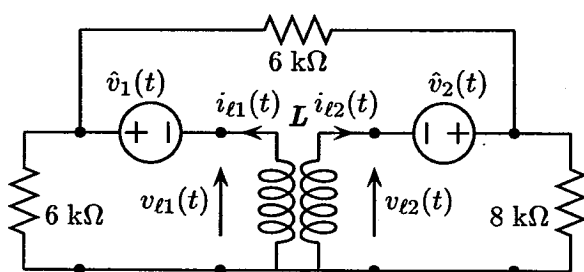
Risultato : Sostituendo i_1 e v_2 a primo membro con le relazioni differenziali del $\mathcal{C}$ $i_1(t) = -10^{-6} \dot{v}_1(t)$ e dell' $\mathcal{L}$ $v_2(t) = -0,1 \dot{i}_2(t)$ e isolando a primo membro le derivate delle candidate, otteniamo l'equazione di stato :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -250 & 500000 \\ -5 & -30000 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} v_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 400 \\ -6 \end{bmatrix}}_{B \hat{u}}$$

Commento : L'esistenza di quest'equazione di stato ci conferma che entrambe le candidate sono variabili di stato : il circuito dinamico è nondegenere e di ordine due.

2.7.5 Esercizio EC/01/07/97 : Equazione di stato di ordine 2 con indut. accop.

$$L = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix} \text{ H}$$

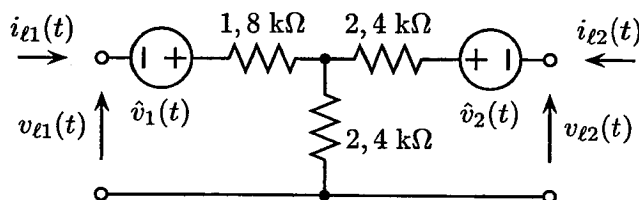


Il circuito dinamico in figura è costituito da due $\mathcal{V}$, una coppia di $\mathcal{LL}$ tripolari e tre $\mathcal{R}$.
Quesito : Calcolare l'equazione di stato del circuito.

• Il circuito appare di ordine due poiché non compaiono legami algebrici tra le candidate (cioè le correnti $i_{\ell 1}(t)$ e $i_{\ell 2}(t)$ fluenti negli $\mathcal{LL}$). La matrice L non è singolare : infatti il coefficiente di accoppiamento $k = M/\sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{3/8} < 1$ ci conferma che $i_{\ell 1}(t)$ e $i_{\ell 2}(t)$ sono in grado di diventare variabili di stato.

• Estraiamo dal circuito gli $\mathcal{LL}$: resta un DBT adinamico costituito dalle $\mathcal{V}(\hat{v}_1(t))$ e $\mathcal{V}(\hat{v}_2(t))$, dai due $\mathcal{R}(6 \text{ k}\Omega)$ e dal $\mathcal{R}(8 \text{ k}\Omega)$. Calcoliamo la rappresentazione $(v_{\ell 1}, v_{\ell 2}) \leftarrow (i_{\ell 1}, i_{\ell 2})$ del DBT adinamico dal momento che $i_{\ell 1}(t)$ e $i_{\ell 2}(t)$ sono le due candidate.

• Sostituiamo il DBT a triangolo col DBT a stella equivalente : essa è costituita da due $\mathcal{R}(2,4 \text{ k}\Omega)$ e da un $\mathcal{R}(1,8 \text{ k}\Omega)$:



• Possiamo calcolare immediatamente la rappresentazione controllata in corrente del DBT adinamico complementare e la rappresentazione differenziale degli $\mathcal{LL}$

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4200 & 2400 \\ 2400 & 4800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{v}_1(t) \\ -\hat{v}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix}$$

• Eguagliando i due secondi membri delle due precedenti equazioni si ottiene

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4200 & 2400 \\ 2400 & 4800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{v}_1(t) \\ -\hat{v}_2(t) \end{bmatrix}$$

• Per proseguire i calcoli calcoliamo l'inversa della matrice induttanza :

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 8/3 \end{bmatrix}$$

Risultato : Premoltiplichiamo i due membri per quest'inversa e esplicitiamo a primo membro il vettore $[\dot{i}_1(t) \ \dot{i}_2(t)]^T$. Eseguendo le moltiplicazioni tra le matrici, otteniamo l'equazione di stato :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -12000 & 0 \\ 2000 & -8000 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -8/3 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{v}_1(t) \\ \hat{v}_2(t) \end{bmatrix}}_{\hat{u}(t)}$$

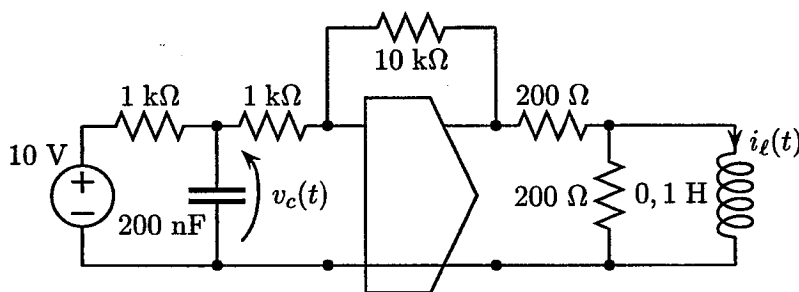
Commento : La matrice di stato è triangolare. Questo significa che la variabile di stato $i_1(t)$ non è affatto influenzata dall'altra variabile di stato $i_2(t)$. In altre parole è come se l' $\mathcal{L}$ alla prima porta facesse parte per proprio conto di un circuito dinamico di ordine uno. Questo effetto è causato dall'azione combinata degli $\mathcal{L}$ e del doppio bipolo adinamico : pur essendo entrambi bidirezionali e reciproci, l'effetto delle corrente $i_2(t)$ sulla corrente $i_1(t)$ è nullo.

Commento : La matrice di stato risulta triangolare nonostante che il circuito sia reciproco.

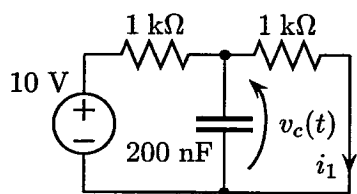
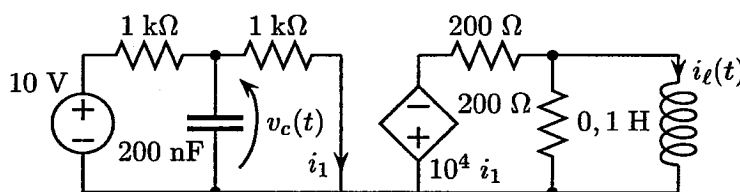
2.7.6 Esercizio EC/09/07/98 : Equaz. di stato di circuito unidir. ordine 2 con nullore

Il circuito dinamico in figura è costituito da un nullore tripolare, una $\hat{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e cinque $\mathcal{R}$.

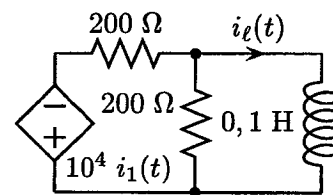
Quesito : Scrivere l'equazione di stato del circuito.



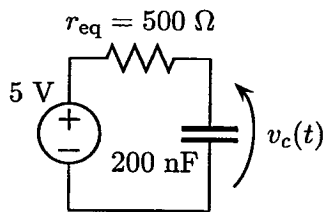
• Il nullore e il $\mathcal{R}$ ($10\text{ k}\Omega$) trasversale sono sostituiti dalla $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}$ equivalente : la unidirezionalità della $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}$ separa il circuito in un due circuiti di ordine uno a valle e l'altro a monte della $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}$.



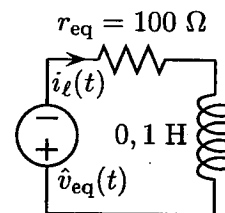
• Il circuito dinamico di ordine uno a monte della $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}$ ha come variabile di stato la tensione $v_c(t)$, mentre il circuito dinamico di ordine uno a valle della $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}$ ha come variabile di stato la corrente $i_l(t)$.



• La corrente $i_1(t)$, che pilota la $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}$ ($10000 i_1(t)$) nel circuito a valle, dipende dalla variabile di stato del circuito a monte : $i_1(t) = v_c(t)/1000$. Quindi la $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}$ ($10000 i_1(t)$) può essere sostituita dalla $\hat{\mathcal{V}}$ ($\hat{v}_2(t) = 10 v_c(t)$).



• Introduciamo in entrambi i circuiti dinamici il modello di Thévenin del bipolo adinamico complementare. Da una semplice ispezione abbiamo $r_{eq} = 500\ \Omega$ e $\hat{v}_{eq} = 5\text{ V}$ per il circuito a monte e $r_{eq} = 100\ \Omega$ e $\hat{v}_{eq} = 5 v_c(t)\text{ V}$ per il circuito a valle.



• L'equazione di stato (scalare) del circuito a monte è

$$\dot{v}_c(t) = -\frac{1}{r_{eq} C} v_c(t) + \frac{1}{r_{eq} C} \hat{v}_{eq}$$

$$\dot{v}_c(t) = -10000 v_c(t) + 50000$$

• L'equazione di stato (scalare) del circuito a valle risulta :

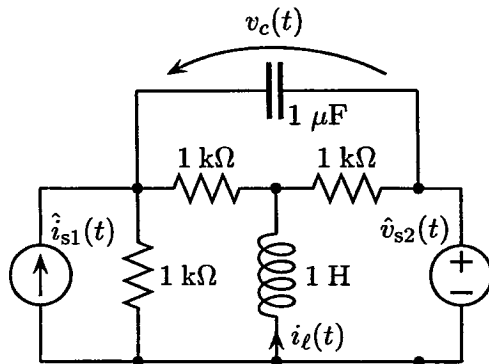
$$\dot{i}_l(t) = -\frac{r_{eq}}{L} i_l(t) - \frac{1}{L} \hat{v}_{eq}(t)$$

$$\dot{i}_l(t) = -1000 i_l(t) - 10 v_c(t)$$

Risultato : Riunendo insieme le due equazioni scalari dei due circuiti dinamici di ordine uno, otteniamo :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_c(t) \\ \dot{i}_l(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10000 & 0 \\ -10 & -1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_l(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.7.7 Esercizio EB/09/09/97 : Equazione di stato di ordine 2

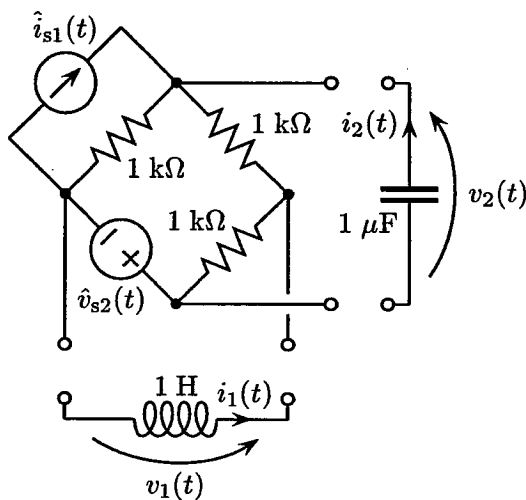


Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_{s2}(t)\rangle$ e una $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}_{s1}(t)\rangle$, un $\mathcal{L}\langle 1 \text{ H}\rangle$, un $\mathcal{C}\langle 1 \mu\text{F}\rangle$ e tre $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega\rangle$.

Quesito : Scrivere la equazione di stato del circuito.

• Scomponiamo il circuito in due componenti complementari, uno adinamico e l'altro conservativo, come risulta dalla figura.

Il DBI adinamico è costituito da quattro rami, due costituiti dai due $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega\rangle$, il terzo dalla $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_{s2}(t)\rangle$ e il quarto da una $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}_{s1}(t)\rangle$ in parallelo a un $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega\rangle$.



• Il doppio bipolo conservativo è costituito dall' $\mathcal{L}$ e dal $\mathcal{C}$, i quali non hanno alcun terminale in comune : quindi il quadripolo adinamico complementare opera come un DBI.

• L'esame del DBI adinamico ci mostra che esso ha la struttura di un ponte con due rami non omogenei : sia la porta connessa all' $\mathcal{L}$ la porta 1 e quella connessa al $\mathcal{C}$ la porta 2. Poiché le candidate sono $i_\ell(t) = i_1$ e $v_c(t) = v_2$, conviene descrivere il DBI adinamico con la rappresentazione $(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$ (prima rappresentazione ibrida).

• Le grandezze impresse della rappresentazione $(v_1, i_2) \leftarrow (i_1, v_2)$ sono definite dalle formule

$$\hat{v}_1(t) = v_1(t)|_{i_1=0, v_2=0}, \quad \hat{i}_2(t) = i_2(t)|_{i_1=0, v_2=0}$$

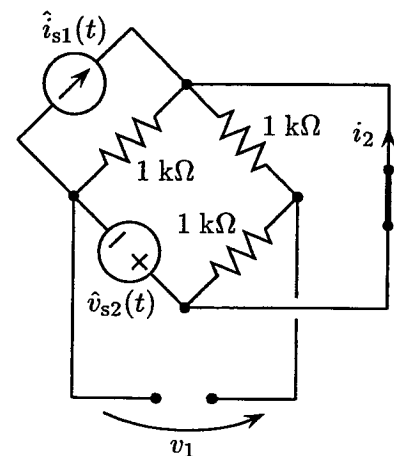
Occorre aspettarsi che esse siano tempo-varianti poiché sia la $\hat{\mathcal{V}}$ sia la $\hat{\mathcal{I}}$ interne al DBI adinamico sono tempo-varianti. Per il loro calcolo annulliamo le candidate $v_2(t)$ e $i_1(t)$ connettendo un c.a. alla prima porta e un c.c. alla seconda.

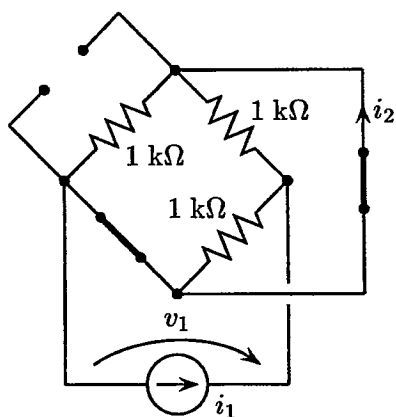
• Dall'esame del circuito si ha

$$\hat{v}_1(t) = \hat{v}_{s2}(t), \quad \hat{i}_2(t) = \frac{\hat{v}_{s2}(t) - \hat{i}_{s1}(t) 1000}{1000}$$

Il calcolo si $\hat{i}_2(t)$ viene eseguito sostituendo il bipolo $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}_{s1}(t)\rangle \parallel \mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega\rangle$ col modello di Thévenin, e ricordando che i due altri $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega\rangle$ non sono percorsi da corrente, perché la loro serie è in parallelo a un c.c.

• I quattro elementi della prima matrice ibrida sono calcolati, dopo avere azzerato le grandezze impresse delle $\hat{\mathcal{V}}$ e $\hat{\mathcal{I}}$ interne, mediante le note formule (vedere Cap. 9-FCE) :



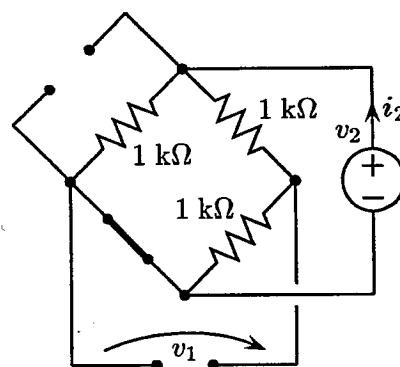


$$h'_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2=0} = 500 \, \Omega$$

$$h'_{21} = \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0} = -1/2$$

$$h'_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{i_1=0} = 0,0015 \, \text{S}^{-1}$$

$$h'_{12} = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1=0} = 1/2$$



- A questo punto possiamo scrivere la prima rappresentazione ibrida

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 & 1/2 \\ -1/2 & 1,5 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_{s2}(t) \\ \hat{v}_{s2}(t)/1000 - \hat{i}_{s1}(t) \end{bmatrix}$$

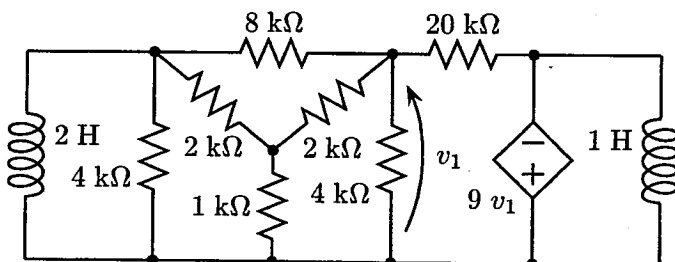
- Le rappresentazioni differenziali dell' $\mathcal{L}$ e del $\mathcal{C}$ sono : $v_\ell(t) = -L \dot{i}_\ell(t)$ e $i_c(t) = -C \dot{v}_c(t)$ dove $i_\ell(t) = i_1$, $v_\ell(t) = v_1$, $v_c(t) = v_2(t)$ e $i_c(t) = i_2$, avendo tenuto conto che le tensioni e correnti sono definite con la convenzione non-normale.
- Sostituendo nella prima rappresentazione ibrida del DBI adinamico le rappresentazioni differenziali dell' $\mathcal{L}$ e del $\mathcal{C}$, otteniamo

$$\begin{bmatrix} -L \dot{i}_\ell(t) \\ -C \dot{v}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 & 1/2 \\ -1/2 & 1,5 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\ell(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_{s2}(t) \\ \hat{v}_{s2}(t)/1000 - \hat{i}_{s1}(t) \end{bmatrix}$$

Risultato : Isolando a primo membro le derivate delle due candidate otteniamo l'equazione di stato

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_\ell(t) \\ \dot{v}_c(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -500 & -1/2 \\ 1/2 \cdot 10^6 & -1,5 \cdot 10^3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_\ell(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10^6 & -10^3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{i}_{s1}(t) \\ \hat{v}_{s2}(t) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{u}}(t)}$$

2.7.8 Esercizio EC/13/01/98 : Equazione di stato di un circuito unidir. ordine 2

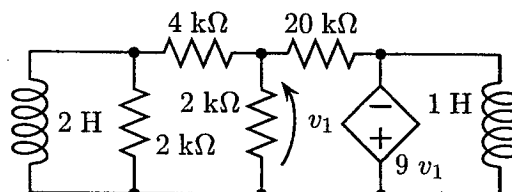


Il circuito in figura è costituito da una $\mathcal{V}_V$, due $\mathcal{L}$ e sette $\mathcal{R}$.

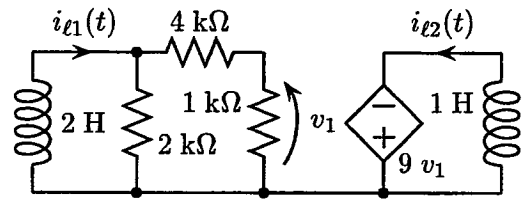
Quesito : Scrivere la equazione di stato del circuito e calcolare le pulsazioni naturali.

- Nel circuito vi è una stella costituita da due $\mathcal{R}$ (2 kΩ) e un $\mathcal{R}$ (1 kΩ) .

- Trasformiamo la stella in un triangolo di due $\mathcal{R}$ (4 kΩ) e un $\mathcal{R}$ (8 kΩ) . Questo triangolo è in parallelo a un triangolo preesistente di $\mathcal{R}$ con gli stessi valori delle resistenze. Sostituiamo questi due triangoli con un unico triangolo di $\mathcal{R}$ con resistenze dimezzate : due $\mathcal{R}$ (2 kΩ) e un $\mathcal{R}$ (4 kΩ) .



• Il $\mathcal{R}\langle 20 \text{ k}\Omega \rangle$ costituisce una maglia con le due porte della $\mathcal{V}_V$. In accordo al primo teorema di Miller, sostituiamo il $\mathcal{R}\langle 20 \text{ k}\Omega \rangle$ con un c.a. e inseriamo in parallelo al $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$ del triangolo un $\mathcal{R}\langle 20/(9+1) = 2 \text{ k}\Omega \rangle$. Infine i due $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$ in parallelo sono fusi in un unico $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$.



• Il circuito è unidirezionale per la presenza della $\mathcal{V}_V$. Quindi la corrente $i_{l1}(t)$ non dipende dalla corrente $i_{l2}(t)$. Possiamo scrivere una equazione scalare coinvolgente la corrente $i_{l1}(t)$ facente parte dell'equazione di stato complessiva:

$$L_1 \dot{i}_{l1}(t) = -r_{eq1} i_{l1}(t) \implies \dot{i}_{l1}(t) = -(r_{eq1}/L_1) i_{l1}(t) \quad \text{dove} \quad r_{eq1} = \frac{2 \times (4+1)}{2+4+1} = \frac{10}{7} \text{ k}\Omega$$

r_{eq1} è la resistenza del $\mathcal{R}$ composito complementare al primo $\mathcal{L}$.

• Dobbiamo ora scrivere l'equazione differenziale che coinvolge la corrente $i_{l2}(t)$. Per prima cosa esprimiamo la tensione pilotante $v_1(t)$ in funzione di $i_{l1}(t)$. La tensione ai capi dell' $\mathcal{L}$ di sinistra è uguale a $v_{l1}(t) = -r_{eq1} i_{l1}(t)$.

• Applicando la regola del partitore di tensione alle serie dei $\mathcal{R}\langle 4 \text{ k}\Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$ otteniamo $v_1(t) = v_{l1}(t)/5 = -i_{l1}(t) r_{eq1}/5 = -i_{l1}(t) 2/7$.

• Considerando la maglia costituita dalla porta pilotata della $\hat{\mathcal{V}}$ e dall' $\mathcal{L}\langle 1 \text{ H} \rangle$, si ottiene

$$L_2 \dot{i}_{l2}(t) = -9 v_1(t) = (18/7) i_{l1}(t)$$

Risultato : Riordinando le due equazioni scalari differenziali otteniamo l'equazione di stato in forma distesa e compatta :

$$\begin{aligned} \dot{i}_{l1}(t) &= -(10/(7 L_1)) i_{l1}(t) = -(5/7) i_{l1}(t) \\ \dot{i}_{l2}(t) &= (18/(7 L_2)) i_{l1}(t) = (18/7) i_{l1}(t) \end{aligned} \implies \begin{bmatrix} \dot{i}_{l1}(t) \\ \dot{i}_{l2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/7 & 0 \\ 18/7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{l1}(t) \\ i_{l2}(t) \end{bmatrix}$$

Le pulsazioni complesse naturali s_1 e s_2 coincidono con gli elementi della diagonale principale della matrice di stato : la matrice stessa è triangolare e quindi sono reali :

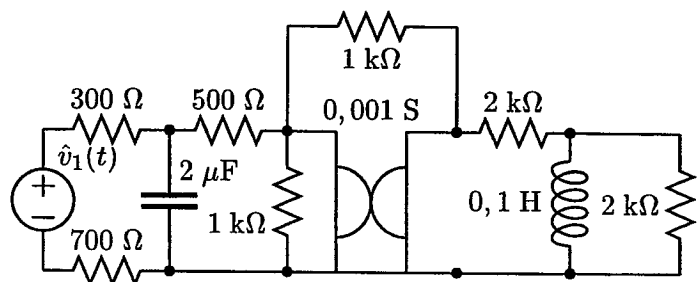
$$s_1 = -5/7 \text{ s}^{-1}, \quad s_2 = 0 \text{ s}^{-1}$$

2.7.9 Esercizio EB/27/01/98 : Equazione di stato di un circuito unidir. di ordine 2

Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, un giratore, un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e sette $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare l'equazione di stato del circuito e la relativa soluzione.

• Il circuito appare di ordine due poiché non vi sono vincoli algebrici tra le due candidate di stato.

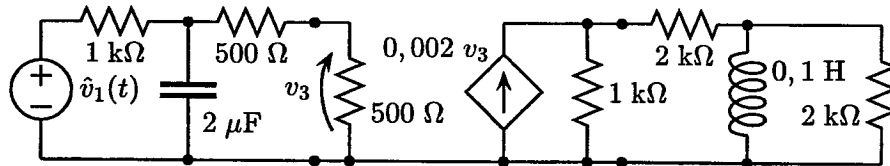


• Usiamo il metodo dei componenti complementari per calcolare l'equazione di stato. Il DBT dinamico complementare risulta costituito dalla $\hat{\mathcal{V}}$, dal giratore e dai sette $\mathcal{R}$. I $\mathcal{R}\langle 300 \Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 700 \Omega \rangle$ risultano in serie anche se non costituiscono un taglio nodale. Il primo è sostituito da un $\mathcal{R}\langle 300 + 700 = 1000 \Omega \rangle$ e il secondo da un c.c. . Esaminiamo il DBT composito dovuto alla connessione trasversale del $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$ col giratore. Questa connessione può essere considerata come il parallelo di due DBT di cui esistono le matrici conduttanze, la cui somma coincide con la matrice conduttanza del DBT composito

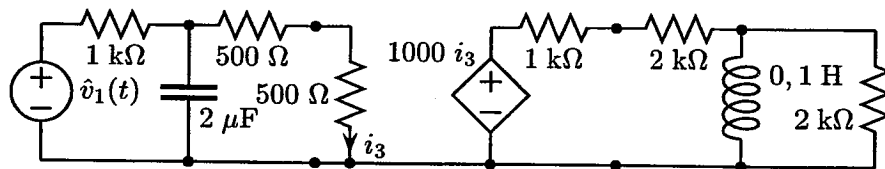
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0.001 & -0.001 \\ -0.001 & 0.001 \end{bmatrix}}_{\mathcal{R} \text{ trasversale}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0.001 \\ -0.001 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{giratore}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ -0.002 & 0.001 \end{bmatrix}}_{\text{DBT composito}} \text{ S}$$

matrice
conduttanza
del DBT composito
unidirezionale

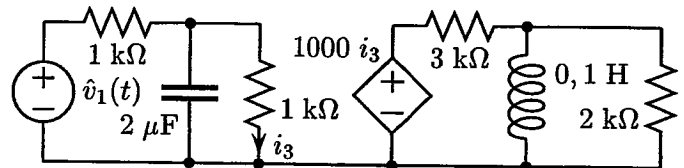
• Il DBT composito è equivalente a un sorgente pilotata nonideale il cui modello consiste di due $\mathcal{R} \langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$ in parallelo alle due porte e di una $\mathcal{I}_V \langle -0,002 v_3 \rangle$ (vedere Cap. 10-FCE). In parallelo alla porta pilotante della $\mathcal{I}_V$ si trovano due $\mathcal{R} \langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$ che sono fusi in un unico $\mathcal{R} \langle 500 \Omega \rangle$. Il circuito è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\mathcal{I}_V$, un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e sei $\mathcal{R}$:



• I due $\mathcal{R} \langle 500 \Omega \rangle$ e $\mathcal{R} \langle 1000 \Omega \rangle$ in parallelo alle due porte della $\mathcal{I}_V$ insieme alla $\mathcal{I}_V$ stessa costituiscono ancora una sorgente pilotata nonideale. Possiamo passare al modello controllato in corrente della sorgente nonideale (vedere Cap. 10-FCE): esso è costituito da una $\mathcal{V}_I$ con in serie alla porta pilotante il $\mathcal{R} \langle 500 \Omega \rangle$ e in serie alla porta pilotata il $\mathcal{R} \langle 1000 \Omega \rangle$. La transresistenza r_m della $\mathcal{V}_I$ coincide col prodotto della transconduttanza della $\mathcal{I}_V$ con le due resistenze $r_m = (500 \times 1000)/500 = 1000 \Omega$. Il circuito è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\mathcal{V}_I$, un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e sei $\mathcal{R}$.



• Fondiamo i due $\mathcal{R} \langle 500 \Omega \rangle$ in serie alla porta pilotante della $\mathcal{V}_I$ in un unico $\mathcal{R} \langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$ e i $\mathcal{R} \langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$ e $\mathcal{R} \langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$ in serie alla porta pilotata in un unico $\mathcal{R} \langle 3 \text{ k}\Omega \rangle$. Il circuito è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\mathcal{V}_I$, un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e quattro $\mathcal{R}$:



• Appliciamo il teorema di Thévenin al bipolo composito costituito dalla $\hat{\mathcal{V}}$ e dai due $\mathcal{R} \langle 1000 \Omega \rangle$: il modello di Thévenin di questo bipolo composito: $\hat{\mathcal{V}} \langle \hat{v}_1/2 \rangle$ in serie a un $\mathcal{R} \langle 500 \Omega \rangle$.

• Il circuito è unidirezionale per la presenza della $\mathcal{V}_I$. Quindi la tensione ai capi del $\mathcal{C} \langle 2 \mu\text{F} \rangle$ non dipenderà dalla corrente fluente nell' $\mathcal{L}$. Annullando la somma delle tensioni lungo la maglia costituita dalla $\hat{\mathcal{V}} \langle \hat{v}_1/2 \rangle$ dal $\mathcal{R} \langle 500 \Omega \rangle$ e dal $\mathcal{C} \langle 2 \mu\text{F} \rangle$, scriviamo una equazione scalare differenziale facente parte dell'equazione di stato complessiva:

$$500 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \dot{v}_{c1}(t) + v_{c1}(t) = \hat{v}_1(t)/2 \implies \dot{v}_{c1}(t) = -1000 v_{c1}(t) + \hat{v}_1(t)/2$$

• Dobbiamo ora scrivere l'equazione differenziale che coinvolge la corrente $i_{\ell 2}(t)$ fluente nel secondo $\mathcal{L}$. Occorre per prima cosa ricavare l'espressione della corrente pilotante la $\mathcal{V}_I$ $i_1(t) = v_{c1}(t)/1000$. Quindi la tensione pilotata della $\mathcal{V}_I$ è $v_2(t) = r_m i_1(t) = v_{c1}(t)$.

• Per esaminare la corrente $i_{\ell 2}(t)$ fluente nell' $\mathcal{L}$ occorre trovare il modello di Thévenin del bipolo composito complementare all' $\mathcal{L}$:

$$v_{\text{eq}}(t) = v_2(t) \cdot 2/5 = 2/5 v_{c1}(t) \quad , \quad r_{\text{eq}} = \frac{3000 \times 2000}{2000 + 3000} = 1200 \Omega$$

- Annulliamo la somma delle tensioni lungo l'unica maglia :

$$v_{eq}(t) = r_{eq} i_{\ell 2}(t) + L \dot{i}_{\ell 2}(t) \Rightarrow \dot{i}_{\ell 2}(t) = -12000 i_{\ell 2}(t) + 4 v_{c1}(t)$$

Risultato : Riunendo le due equazioni scalari differenziali otteniamo l'equazione di stato :

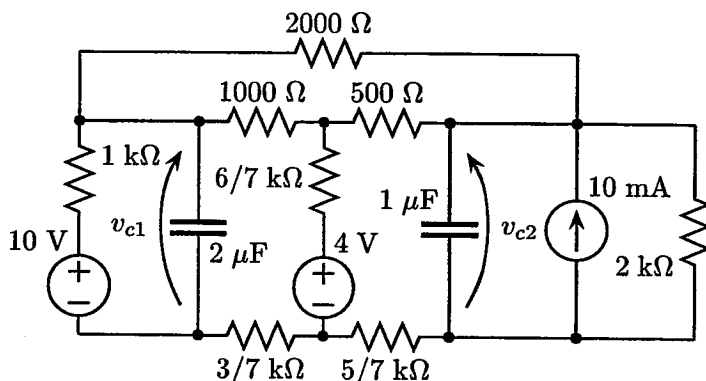
$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{c1}(t) \\ \dot{i}_{\ell 2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 0 \\ 4 & -12000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1}(t) \\ i_{\ell 2}(t) \end{bmatrix} + 500 \begin{bmatrix} \hat{v}_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

WWWWW SCRIVERE LA soluzione dell'equazione di stato. WWWWW

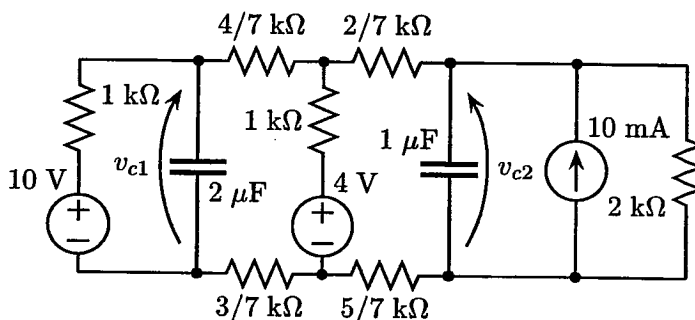
2.7.10 Esercizio EC/25/06/98 : Equaz. di stato di circuito ordine 2

Il circuito in figura è costituito da due $\hat{V}$, una $\hat{I}$, due C e otto R .

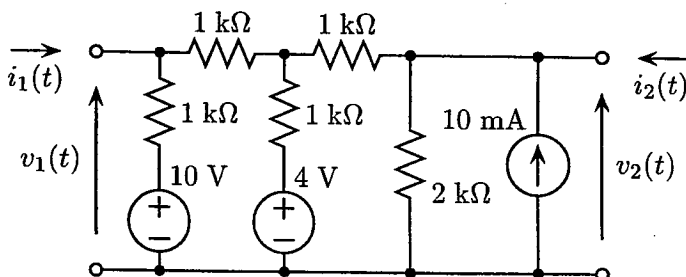
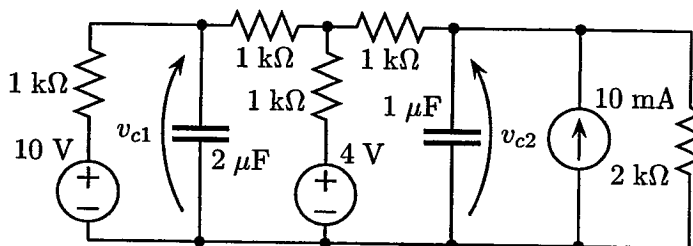
Quesito : Scrivere l'equazione di stato del circuito.



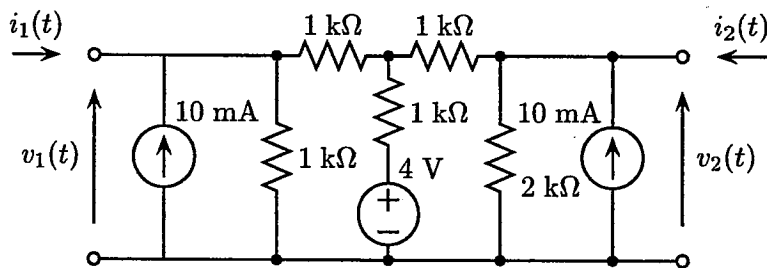
- I $R(2000\Omega)$, $R(1000\Omega)$ e $R(500\Omega)$ costituiscono un triangolo e li sostituiamo con la stella equivalente costituita dai $R(4/7k\Omega)$, $R(2/7k\Omega)$ e $R(1/7k\Omega)$. Quest'ultimo R risulta in serie al $R(6/7k\Omega)$ e viene fuso con questo in un unico $R(1k\Omega)$.



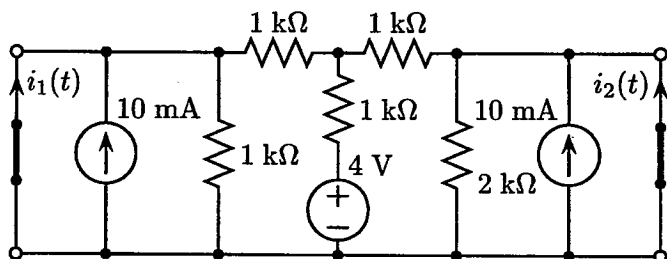
- Consideriamo i due tagli costituiti dalle due coppie di R : $R(3/7k\Omega)$ e $R(4/7k\Omega)$, $R(5/7k\Omega)$ e $R(2/7k\Omega)$: ciascuna coppia è sostituita da un R con resistenza uguale alla somma delle resistenze e da un c.c. .



- Separando i due C , otteniamo il DBT adinamico complementare. Essendo $v_{c1}(t)$ e $v_{c2}(t)$ le candidate di stato, calcoliamo la rappresentazione $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$ del suddetto DBT. A questo scopo sostituiamo alla serie della $\hat{V}(10V)$ e del $R(1k\Omega)$ il modello di Norton.

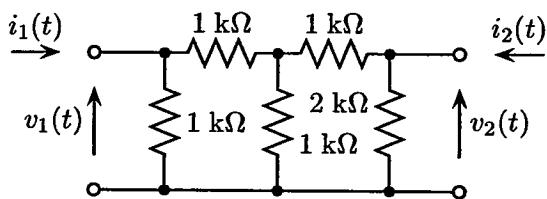


- Le correnti impresse $\hat{i}_1$ e $\hat{i}_2$ della rappresentazione $(\hat{i}_1, \hat{i}_2) \leftarrow (v_1, v_2)$ coincidono coi valori di $i_1(t)$ e $i_2(t)$ qualora le due porte del DBT siano chiuse su due c.c. .

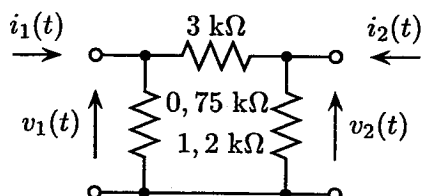


- Appliciamo il teorema di sovrapposizione: la $\hat{\mathcal{I}} \langle 10 \text{ mA} \rangle$ a sinistra da origine a una corrente di -10 mA esclusivamente nel c.c. a sinistra ed, analogamente, la $\hat{\mathcal{I}} \langle 10 \text{ mA} \rangle$ a destra da origine a una corrente di -10 mA nel c.c. a destra. La $\hat{\mathcal{V}} \langle 4 \text{ V} \rangle$ al centro da origine a una corrente di $-4/3 \text{ mA}$ in entrambi i c.c. .

Sovrapponendo i contributi delle tre $\hat{\mathcal{I}}$ otteniamo le correnti impresse della rappresentazione sono :

$$\hat{i}_1 = \hat{i}_2 = -10 - 4/3 = -34/3 \text{ mA}$$


- Per calcolare la matrice $\mathbf{G}$ della rappresentazione $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$ costruiamo il DBT omogeneo associato azzerando le grandezze impresse interne allo stesso. Sostituendo la stella di tre $\mathcal{R} \langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$ con il triangolo equivalente di tre $\mathcal{R} \langle 3 \text{ k}\Omega \rangle$, otteniamo il DBT a triangolo :



- La rappresentazione $(i_1, i_2) \leftarrow (v_1, v_2)$ del DBT è :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \cdot 10^{-3} & -1/3 \cdot 10^{-3} \\ -1/3 \cdot 10^{-3} & 7/6 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -34/3 \cdot 10^{-3} \\ -34/3 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

- Tramite le rappresentazioni differenziali $i_1(t) = -2 \cdot 10^{-6} \dot{v}_1$ e $i_2(t) = -1 \cdot 10^{-6} \dot{v}_2$, dei $\mathcal{C} \langle 2 \mu\text{F} \rangle$ e $\mathcal{C} \langle 1 \mu\text{F} \rangle$ sostituiamo i_1 e i_2 nella rappresentazione del DBT adinamico complementare :

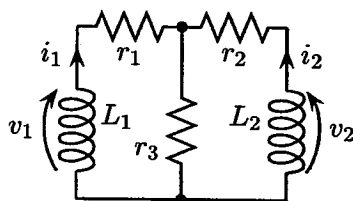
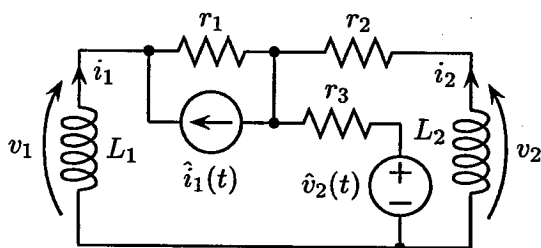
$$\begin{bmatrix} -2 \cdot 10^{-6} \dot{v}_1(t) \\ -1 \cdot 10^{-6} \dot{v}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \cdot 10^{-3} & -1/3 \cdot 10^{-3} \\ -1/3 \cdot 10^{-3} & 7/6 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -34/3 \cdot 10^{-3} \\ -34/3 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Risultato : Dividendo le due equazioni per i valori delle capacità, otteniamo l'equazione di stato del circuito :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/6 \cdot 10^3 & 1/6 \cdot 10^3 \\ 1/3 \cdot 10^3 & -7/6 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17/3 \cdot 10^3 \\ 34/3 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

2.8 MATRICI DI STATO

2.8.1 Esercizio E6/17/06/96 : Matrice di stato di un circuito di ordine 2



Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\hat{\mathcal{I}}$, due $\mathcal{L}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la matrice di stato $\mathbf{A}$ in forma letterale.

• Siccome la matrice di stato dipende solamente dal circuito dinamico omogeneo associato, conviene costruirlo, eseguendo le sostituzioni $\hat{\mathcal{I}} \rightarrow$ c.a. e $\hat{\mathcal{V}} \rightarrow$ c.c. :

• Scomponiamo il circuito in due componenti complementari adinamico e conservativo : Il primo è un DBT adinamico costituito da una stella di tre $\mathcal{R}$, mentre il secondo è costituito dai due $\mathcal{L}$. Siccome le correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ sono le candidate di stato, occorre calcolare la rappresentazione controllata in corrente del DBT adinamico :

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + r_3 & r_3 \\ r_3 & r_2 + r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

Risultato : Tenendo conto della convenzione nonnormale, le relazioni costitutive dei due $\mathcal{L}$ sono $v_1(t) = -L_1 \dot{i}_1(t)$ e $v_2(t) = -L_2 \dot{i}_2(t)$. Sostituiamo $v_1(t)$ e $v_2(t)$ nella rappresentazione del DBT adinamico e successivamente esplicitiamo a primo membro le derivate delle due correnti, si ottiene l'equazione di stato del circuito dinamico omogeneo associato :

$$\begin{bmatrix} -L_1 \dot{i}_1(t) \\ -L_2 \dot{i}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + r_3 & r_3 \\ r_3 & r_2 + r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(r_1 + r_3)/L_1 & -r_3/L_1 \\ -r_3/L_2 & -(r_2 + r_3)/L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

la cui matrice è proprio la matrice di stato $\mathbf{A}$ cercata.

Commento : Calcoliamo le pulsazioni naturali del circuito in forma letterale. Esse sono le radici dell'equazione di secondo grado :

$$\left(\frac{r_1 + r_3}{L_1} + s \right) \left(\frac{r_2 + r_3}{L_2} + s \right) - \frac{r_3^2}{L_1 L_2} \\ s^2 + s \frac{r_1 L_2 + r_2 L_1 + r_3 (L_1 + L_2)}{L_1 L_2} + \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 - 2 r_3^2}{L_1 L_2}$$

Le radici s_1 e s_2 della suddetta equazione sono :

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix} = \frac{-r_1 L_2 - r_2 L_1 - r_3 (L_1 + L_2) \pm \sqrt{[L_2 (r_1 + r_3) - L_1 (r_2 + r_3)]^2 + 4 L_1 L_2 r_3^2}}{2 L_1 L_2}$$

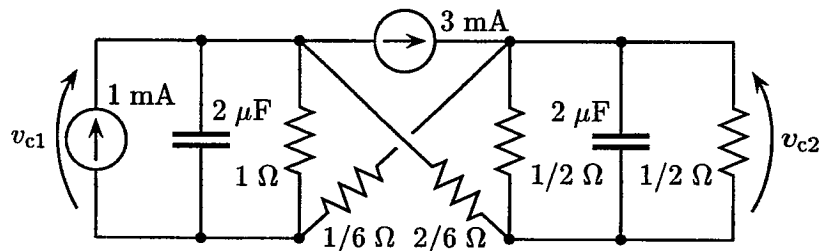
La suddetta espressione letterale delle pulsazioni ci dice che, se le induttanze e le resistenze sono positive, le pulsazioni sono distinte, reali e negativi. Conseguentemente, il suddetto circuito risulta asintoticamente stabile. Questo risultato era prevedibile poiché tutti i componenti adinamici omogenei (i tre $\mathcal{R}$) presenti nel circuito sono dissipativi.

2.8.2 Esercizio E6/05/07/96 : Matrice di stato di un circuito di ordine 2

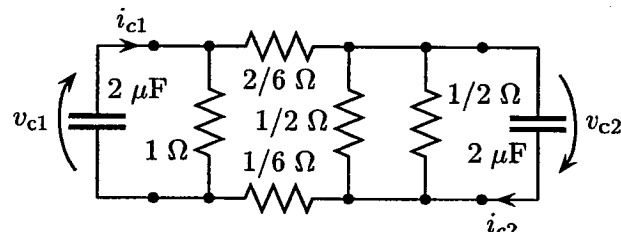
Il circuito dinamico in figura è costituito da due $\hat{\mathcal{I}}$, due $\mathcal{C}$ e cinque $\mathcal{R}$:

Quesito : Calcolare la matrice di stato A .

• Le tensioni $v_{c1}(t)$ e $v_{c2}(t)$ sono le due candidate di stato.

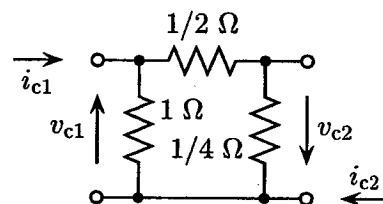


• La matrice di stato dipende solamente dal circuito dinamico omogeneo associato, ottenuto mediante le $\hat{\mathcal{I}} \rightarrow \text{c.a.}$. Notare che per togliere l'incrocio tra i $\mathcal{R}(2/6 \Omega)$ e $\mathcal{R}(1/6 \Omega)$ la freccia della tensione $v_{c2}(t)$ risulta diretta verso il basso.



• Il circuito dinamico omogeneo associato è costituito da un quadripolo adinamico di cinque $\mathcal{R}$ operante come un DBI e chiuso su due $\mathcal{C}$. I due $\mathcal{R}(1/2 \Omega)$ in parallelo sono sostituiti da un unico $\mathcal{R}(1/4 \Omega)$. Il DBI è formato dai $\mathcal{R}(1 \Omega)$, $\mathcal{R}(1/6 \Omega)$, $\mathcal{R}(1/3 \Omega)$ e $\mathcal{R}(1/4 \Omega)$.

I $\mathcal{R}(1/6 \Omega)$ e $\mathcal{R}(1/3 \Omega)$ formano un taglio : essi sono connessi in serie e sono sostituiti da un unico $\mathcal{R}(1/6 + 1/3 = 1/2 \Omega)$. Conseguentemente il rettangolo di $\mathcal{R}$ operante come un DBI viene trasformato in un DBT costituito dai $\mathcal{R}(1 \Omega)$, $\mathcal{R}(1/2 \Omega)$ e $\mathcal{R}(1/4 \Omega)$ connessi a triangolo.



• Poiché le tensioni ai capi dei due $\mathcal{C}$ sono le candidate di stato, scriviamo la rappresentazione controllata in tensione del doppio bipolo adinamico tripolare, tenendo conto della convenzione normale rovesciata usata alla seconda porta :

$$\begin{bmatrix} i_{c1}(t) \\ i_{c2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1}(t) \\ v_{c2}(t) \end{bmatrix}$$

Risultato : Tenendo conto della convenzione nonnormale usata per i due $\mathcal{C}$, le relazioni costitutive dei due $\mathcal{C}$ sono $i_{c1}(t) = -2 \cdot 10^{-6} \dot{v}_{c1}(t)$ e $i_{c2}(t) = -2 \cdot 10^{-6} \dot{v}_{c2}(t)$. Se sostituiamo le correnti $i_{c1}(t)$ e $i_{c2}(t)$ dei due $\mathcal{C}$ nella equazione e esplicitiamo a primo membro le derivate $\dot{v}_{c1}(t)$ e $\dot{v}_{c2}(t)$, otteniamo l'equazione di stato del circuito dinamico omogeneo associato :

$$\begin{bmatrix} -2 \cdot 10^{-6} \dot{v}_{c1}(t) \\ -2 \cdot 10^{-6} \dot{v}_{c2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1}(t) \\ v_{c2}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{v}_{c1}(t) \\ \dot{v}_{c2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \cdot 10^6 & -10^6 \\ -10^6 & -3 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1}(t) \\ v_{c2}(t) \end{bmatrix}$$

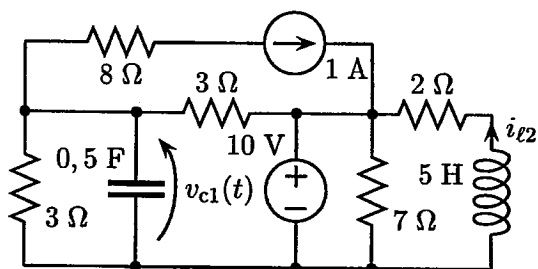
la cui matrice è proprio la matrice di stato A cercata.

Commento : Il suddetto circuito risulta asintoticamente stabile dal momento che le sue pulsazioni naturali s_1 e s_2 sono reali e negative. L'equazione, le cui radici sono proprio le pulsazioni s_1 e s_2 , è

$$(s + 3/2 \cdot 10^6)(s + 3 \cdot 10^6) - 10^{12} = 0 \Rightarrow s_1 = -10^6, s_2 = -7/2 \cdot 10^6$$

Questo risultato era prevedibile poiché tutti i componenti adinamici presenti nel circuito omogeneo associato sono dissipativi.

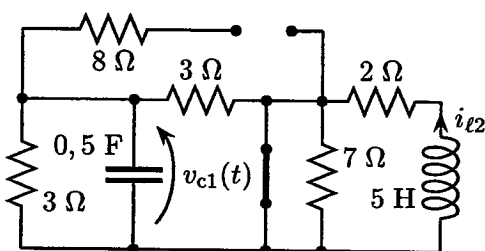
2.8.3 Esercizio E6/08/11/96 : Matrice di stato di un circuito zero-dir. di ordine 2



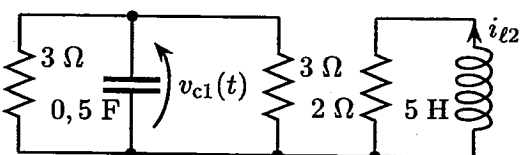
Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\hat{\mathcal{I}}$, un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e cinque $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la matrice di stato del circuito.

• La matrice di stato A dipende solamente dal circuito dinamico omogeneo associato, che viene ottenuto da quello originario mediante le sostituzioni $\hat{\mathcal{I}} \rightarrow \text{c.a.}$ e $\hat{\mathcal{V}} \rightarrow \text{c.c.}$:



• Il circuito dinamico omogeneo associato risulta costituito da quattro $\mathcal{R}$, un $\mathcal{L}$ e un $\mathcal{C}$. In esso compare un nodo cruciale, cioè un nodo i cui rami incidenti costituiscono due tagli disgiunti, invece che un solo taglio. Conseguentemente il circuito dinamico omogeneo associato può essere separato in due circuiti dinamici di ordine uno.



• Il primo circuito è costituito dal parallelo del $\mathcal{C}$ (0,5 F) e dei due $\mathcal{R}$ (3 Ω). Riunendo questi due $\mathcal{R}$ (3 Ω) in un unico $\mathcal{R}$ (3/2 Ω), il primo circuito è costituito dal $\mathcal{C}$ (0,5 F) e dal $\mathcal{R}$ (3/2 Ω). La costante di tempo risulta $\tau_1 = C r_{eq} = 1/2 \times 3/2 = 3/4 \text{ s}$. Il secondo circuito è costituito dal $\mathcal{L}$ (5 H) e dal $\mathcal{R}$ (2 Ω). La costante di tempo $\tau_2 = L/r_{eq} = 5/2 \text{ s}$.

Risultato : La matrice di stato risulta diagonale : infatti il circuito omogeneo associato è separato in due circuiti di ordine uno.

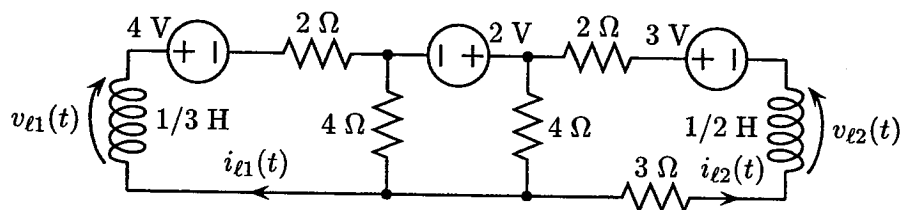
$$A = \begin{bmatrix} -1/\tau_1 & 0 \\ 0 & -1/\tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/3 & 0 \\ 0 & -2/5 \end{bmatrix} \text{ s}^{-1}$$

Commento : Gli elementi della diagonale principale sono le pulsazioni naturali del circuito, che coincidono con gl'inversi, cambiati di segno, delle costanti di tempo dei due circuiti di ordine uno.

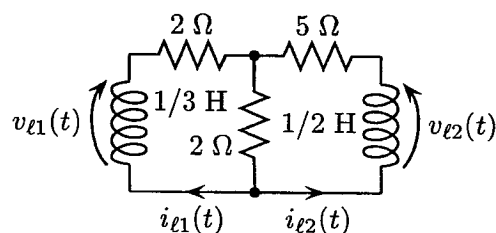
2.8.4 Esercizio E6/16/01/97 : Matrice di stato di un circuito di ordine 2

Il circuito dinamico in figura è costituito da tre $\hat{\mathcal{V}}$, due $\mathcal{L}$ e cinque $\mathcal{R}$:

Quesito : Calcolare la matrice di stato A del circuito.



• Siccome la matrice di stato A dipende solamente dal circuito dinamico omogeneo associato, conviene sostituire ciascuna $\hat{\mathcal{V}}$ con un c.c. : I due $\mathcal{R}$ (4 Ω) sono in parallelo e sono sostituiti da un unico $\mathcal{R}$ (2 Ω). Uno dei $\mathcal{R}$ (2 Ω) e il $\mathcal{R}$ (3 Ω) formano un taglio e sono sostituiti da un unico $\mathcal{R}$ (2 + 3 = 5 Ω). Il circuito è costituito da due $\mathcal{L}$ e una stella di $\mathcal{R}$:



- Scomponiamo il circuito dinamico omogeneo associato in due componenti complementari :
- Il primo è un DBT a stella di tre $\mathcal{R}$, mentre il secondo è costituito dai due $\mathcal{L}$. Siccome le correnti i_1 e i_2 fluenti negli $\mathcal{L}$ sono le candidate di stato, calcoliamo la matrice delle resistenze $\mathcal{R}$ del DBT resistivo a stella, in cui i_1 e i_2 sono le grandezze indipendenti :

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

Risultato : Tenendo conto della convenzione nonnormale, le relazioni costitutive dei due $\mathcal{L}$ sono $v_1(t) = -1/3 \dot{i}_1(t)$ e $v_2(t) = -1/2 \dot{i}_2(t)$. Sostituiamo le tensioni $v_1(t)$ e $v_2(t)$ nella rappresentazione del DBT adinamico nel punto 2 e esplicitando a primo membro le derivate delle due correnti, si ottiene l'equazione di stato del circuito dinamico omogeneo associato :

$$\begin{bmatrix} -1/3 \dot{i}_1(t) \\ -1/2 \dot{i}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -4 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

la cui matrice è proprio la matrice di stato $\mathbf{A}$ cercata.

Commento : Calcoliamo le pulsazioni naturali del circuito : esse sono le radici dell'equazione :

$$(12 + s) \times (14 + s) - 6 \times 4 = 0 \Rightarrow s^2 + s 26 + 144$$

Le radici s_1 e s_2 della suddetta equazione sono :

$$s_1 = -13 - \sqrt{169 - 144} = -18 \text{ s}^{-1}, \quad s_2 = -13 + \sqrt{169 - 144} = -8 \text{ s}^{-1}$$

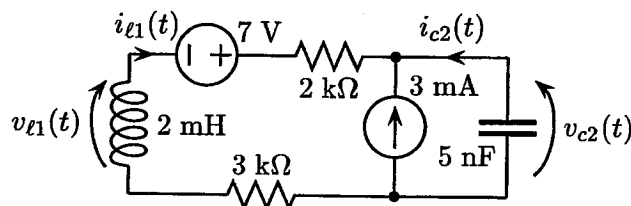
Il suddetto circuito risulta asintoticamente stabile dal momento che le due pulsazioni naturali sono reali e negative. Questo risultato era prevedibile dal momento che il circuito omogeneo associato è formato da tre $\mathcal{R}$ (dissipativi) e da due $\mathcal{L}$ (conservativi).

2.8.5 Esercizio E6/30/01/97 : Matrice di stato di un circuito di ordine 2

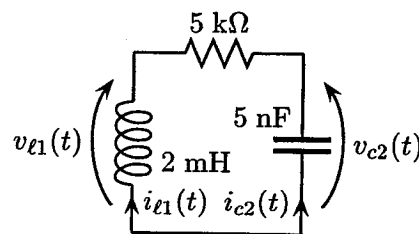
Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\hat{\mathcal{I}}$, un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$, e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la matrice di stato $\mathbf{A}$.

La corrente $i_{\ell 1}(t)$ fluente nell' $\mathcal{L}$ e la tensione $v_{c2}(t)$ ai capi del $\mathcal{C}$ sono le due candidate di stato.



- La matrice di stato dipende solamente dal circuito omogeneo associato, ottenuto sostituendo $\hat{\mathcal{I}} \rightarrow \text{c.a.}$ e $\hat{\mathcal{V}} \rightarrow \text{c.c.}$: esso consiste in un'unica maglia costituita dai $\mathcal{R} \langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$, $\mathcal{R} \langle 3 \text{ k}\Omega \rangle$, dall' $\mathcal{L}$ e dal $\mathcal{C}$: i due $\mathcal{R}$ sono fusi in un unico $\mathcal{R} \langle 2 + 3 = 5 \text{ k}\Omega \rangle$. Il circuito dinamico omogeneo associato risulta costituito da un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e un $\mathcal{R}$:



- La corrente della prima porta e la tensione della seconda porta del DBT adinamico sono le candidate di stato. Calcolo la prima rappresentazione ibrida del DBT :

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

- Le grandezze del DBT adinamico coincidono con le grandezze candidate e anticandidate dei due bipoli conservativi in accordo alle :

$$v_1(t) = v_{\ell 1}(t) \quad , \quad i_1(t) = i_{\ell 1}(t) \quad , \quad i_2(t) = i_{c2}(t) \quad , \quad v_2(t) = v_{c2}(t)$$

Le rappresentazioni dell' $\mathcal{L}$ e del $\mathcal{C}$ sono : $v_{\ell 1}(t) = -2 \cdot 10^{-3} \dot{i}_{\ell 1}(t)$ e $i_{c2}(t) = -5 \cdot 10^{-9} \dot{v}_{c2}(t)$, in cui i segni "−" tengono conto della convenzione nonnormale usata per essi.

Risultato : Sostituiamo $i_1(t)$, $v_1(t)$, $i_2(t)$ e $v_2(t)$ nella equazione ed esplicitiamo a primo membro le derivate $\dot{v}_{c1}(t)$ e $\dot{v}_{c2}(t)$: si ottiene l'equazione di stato del circuito dinamico omogeneo associato otteniamo :

$$\begin{bmatrix} -2 \cdot 10^{-3} \dot{i}_{l1}(t) \\ -5 \cdot 10^{-9} \dot{v}_{c2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{l1}(t) \\ v_{c2}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{i}_{l1}(t) \\ \dot{v}_{c2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 \cdot 10^6 & -1/2 \cdot 10^3 \\ 1/5 \cdot 10^9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{l1}(t) \\ v_{c2}(t) \end{bmatrix}$$

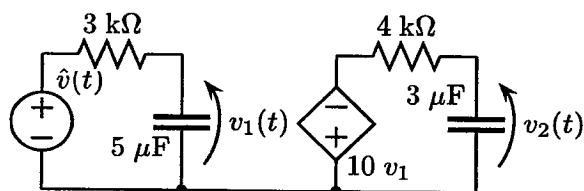
la cui matrice è proprio la matrice di stato $\mathbf{A}$ cercata.

Commento : Esaminiamo la pulsazioni naturali del suddetto circuito : l'equazione, le cui radici sono proprio le pulsazioni s_1 e s_2 , è

$$s^2 + s \cdot 5/2 \cdot 10^6 + 10^{11} = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -\frac{5}{4} \cdot 10^6 - 10^6 \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{1}{10}} s^{-1} \\ s_2 = -\frac{5}{4} \cdot 10^6 + 10^6 \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{1}{10}} s^{-1} \end{cases}$$

Il circuito è asintoticamente stabile poiché entrambe le pulsazioni naturali sono reali e negative. Questo risultato era prevedibile poiché l'unico componente (il $\mathcal{R} \langle 5 \text{ k}\Omega \rangle$) presente nel DBT dinamico omogeneo associato è dissipativo.

2.8.6 Esercizio E6/20/02/97 : Matrice di stato di un circuito unidir. di ordine 2

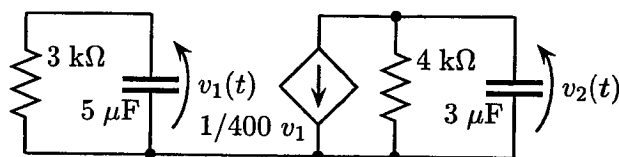
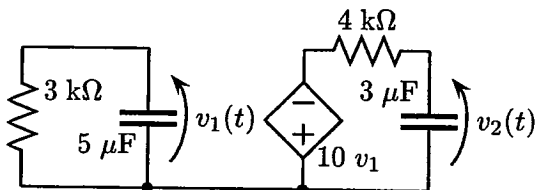


Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$, due $\mathcal{C}$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la matrice di stato $\mathbf{A}$.

• Le tensioni $v_{c1}(t)$ e $v_{c2}(t)$ ai capi dei due $\mathcal{C}$ sono le due candidate di stato.

- Siccome la matrice di stato dipende dal circuito omogeneo associato, sostituiamo la $\hat{\mathcal{V}} \rightarrow \text{c.c.}$.
- Il circuito omogeneo associato risulta costituito da un DBT dinamico, a sua volta costituito da una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$ e due $\mathcal{R}$, e da due $\mathcal{C}$. Siccome le candidate di stato sono le due tensioni del DBT, conviene calcolare la matrice $\mathbf{G}$ del DBT. A questo fine sostituiamo la $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$ con una $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}$ applicando la trasformazione Thevenin $\rightarrow$ Norton alla porta pilotata e giungiamo al circuito



- La matrice $\mathbf{G}$ viene calcolata immediatamente :
$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3000 & 0 \\ 5/2000 & 1/4000 \end{bmatrix} \text{ S}$$

Risultato : Tenendo conto delle relazioni costitutive dei due $\mathcal{C}$ connessi alle due porte del DBT dinamico $i_{c1}(t) = -5 \cdot 10^{-6} \dot{v}_{c1}(t)$ e $i_{c2}(t) = -3 \cdot 10^{-6} \dot{v}_{c2}(t)$, esplicitiamo a primo membro le derivate $\dot{v}_{c1}(t)$ e $\dot{v}_{c2}(t)$: otteniamo l'equazione di stato del circuito omogeneo associato :

$$\begin{bmatrix} -5 \cdot 10^{-6} \dot{v}_{c1}(t) \\ -3 \cdot 10^{-6} \dot{v}_{c2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3000 & 0 \\ 5/2000 & 1/4000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1}(t) \\ v_{c2}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{v}_{c1}(t) \\ \dot{v}_{c2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/15 \cdot 10^3 & 0 \\ -5/6 \cdot 10^3 & -1/12 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1}(t) \\ v_{c2}(t) \end{bmatrix}$$

la cui matrice è proprio la matrice di stato $\mathbf{A}$ cercata.

Commento : Esaminiamo la pulsazioni naturali del suddetto circuito : siccome la matrice $\mathbf{A}$

risulta triangolare in seguito alla unidirezionalità del DBT adinamico, le pulsazioni coincidono con gli elementi sulla diagonale principale e quindi sono entrambe reali e negative. Questo fatto ci conferma che il circuito dinamico è asintoticamente stabile.

2.9 PULSAZIONI NATURALI

2.9.1 Esercizio E6/13/09/96 : Pulsaz. naturali di un circuito zero-dir. di ordine 2

Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}$, un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e quattro $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare le pulsazioni naturali del circuito.

- Le pulsazioni naturali del circuito sono gli autovalori della matrice di stato e dipendono dal circuito omogeneo associato, che viene ottenuto mediante la sostituzione $\hat{\mathcal{I}} \rightarrow$ c.a. nel circuito originario.

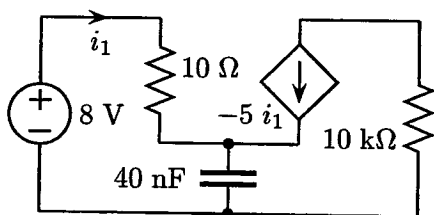
- Il circuito dinamico omogeneo associato è costituito da quattro $\mathcal{R}$, un $\mathcal{L}$ e un $\mathcal{C}$. In esso è presente un nodo cruciale, cioè un nodo i cui rami incidenti costituiscono due tagli disgiunti, invece che un solo taglio. Conseguentemente il circuito dinamico omogeneo associato può essere separato in due circuiti dinamici di ordine uno :

- Il primo circuito è costituito dall' $\mathcal{L}$ (1 H) in parallelo ad un $\mathcal{R}$ (4 Ω) e alla serie di un $\mathcal{R}$ (3 Ω) e $\mathcal{R}$ (1 Ω) . Fondendo i tre $\mathcal{R}$ in un unico $\mathcal{R}$ (2 Ω) , il primo circuito è costituito dall' $\mathcal{L}$ (1 H) e dal $\mathcal{R}$ ($r_{eq1} = 2 \Omega$) . La costante di tempo risulta $\tau_1 = L/r_{eq1} = 1/2$ s . Il secondo circuito è costituito dal $\mathcal{C}$ (1 μ F) e dal $\mathcal{R}$ ($r_{eq2} = 1/2 \Omega$) . La costante di tempo risulta $\tau_2 = C r_{eq2} = 10^{-6} \times 1/2 = 1/2 \mu$ s .

Risultato : Le due pulsazioni naturali coincidono con gl'inversi, cambiati di segno, delle costanti di tempo dei due rispettivi circuiti di primo grado :

$$\sigma_1 = -\frac{1}{\tau_1} = -\frac{1}{1/2} = -2 \text{ s}^{-1} \quad , \quad \sigma_2 = -\frac{1}{\tau_2} = -\frac{1}{10^{-6} \cdot 1/2} = -2 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$$

2.9.2 Esercizio E6/17/06/97 : Pulsazione naturale di un circuito di ordine uno

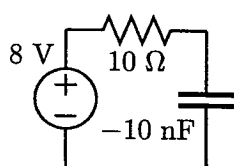


Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$, un $\mathcal{C}$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare l'unica pulsazione naturale s_1 .

- Poiché la corrente pilotata, la corrente pilotante e la corrente del $\mathcal{C}$ confluiscono in un unico nodo, possiamo applicare il secondo teorema di Miller.

- Il $\mathcal{C}$ (40 nF) è sostituito da un c.c. e in serie al $\mathcal{R}$ (10 Ω) è inserito un $\mathcal{C}$ ($40/(1-5) = -10$ nF) . Notare che la capacità risulta negativa.



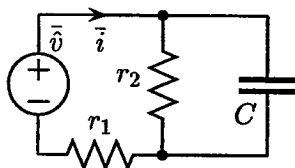
Risultato : Il circuito è costituito da un'unica maglia di tre componenti : la $\hat{\mathcal{V}}$ (8 V) il $\mathcal{R}$ (10 Ω) e il $\mathcal{C}$ (-10 nF) . La pulsazione naturale s_1 dipende dal prodotto $r C$:

$$s_1 = -\frac{1}{C r} = -\frac{1}{-10^{-8} \times 10} = 10^7 \text{ s}^{-1}$$

Commento : Siccome l'unica pulsazione naturale (reale) risulta positiva, il circuito è instabile. L'instabilità è dovuta al rapporto delle correnti della $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$, che fa cambiare segno alla capacità.

Spesso si incontrano circuiti costituiti da $\mathcal{R}$ (con resistenza positiva), $\mathcal{L}$ (con induttanza positiva) e $\mathcal{C}$ (con capacità positiva) e sorgenti pilotate. Proprio le sorgenti pilotate sono responsabili della eventuale instabilità del circuito. Infatti il circuito risulterebbe stabile se ciascun rapporto tra una grandezza pilotata e la rispettiva grandezza pilotante fosse nullo.

2.9.3 Esercizio E5/13/01/98 : Pulsazione naturale di un circuito di ordine uno



Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ cisoidale, un $\mathcal{C}\langle C \rangle$, un $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$ e un $\mathcal{R}\langle r_2 \rangle$ in cui C , r_1 e r_2 sono ignote. Il circuito opera in pseudoregime cisoidale con pulsazione complessa s imprecisata. L'ammettenza $y(s)$ del bipolo composto alimentato dalla $\hat{\mathcal{V}}$:

$$y(s) = \frac{0.005 + s \cdot 10^{-6}}{0.008 + s \cdot 10^{-6}}$$

Quesito : Calcolare le pulsazioni (complesse) naturali del circuito.

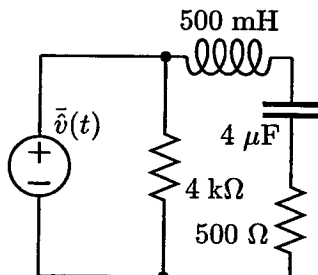
• L'ammettenza $y(s)$ del bipolo complementare è anche una funzione di rete del circuito, più precisamente essa è il rapporto tra il fasore $\bar{i}$ delle corrente uscente dalla $\hat{\mathcal{V}}$ e il fasore $\bar{v}$ della tensione impressa della $\hat{\mathcal{V}}$ stessa.

Risultato : Il circuito contiene un solo $\mathcal{C}$ la cui tensione è l'unica variabile di stato. Quindi vi è una sola pulsazione naturale s_1 che coincide necessariamente con l'unico polo della $y(s)$:

$$s_1 = -\frac{0.008}{10^{-6}} = -8000 \text{ s}^{-1}$$

Commento : Siccome s_1 è reale e negativa, il circuito è asintoticamente stabile.

2.9.4 Esercizio E3/27/01/98 : Pulsazioni naturali di un circuito di ordine due



Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ cisoidale di pulsazione imprecisata, un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare tutte le pulsazioni naturali del circuito.

• Siccome il circuito contiene un $\mathcal{C}$ e un $\mathcal{L}$, esso dovrebbe essere di ordine due, poiché non risultano evidenti vincoli algebrici in cui compaiano solo le tensioni ai capi del $\mathcal{C}$ e la corrente fluente nell' $\mathcal{L}$.

• Calcoliamo una funzione di rete del circuito nella speranza che essa abbia un polinomio di secondo grado come denominatore. Se questo viene accertato noi siamo sicuri che il circuito è di ordine due e che le radici del suddetto denominatore sono proprio le due pulsazioni naturali.

• Scegliamo come grandezza d'ingresso della funzione di rete la tensione impressa della $\hat{\mathcal{V}}$ e come grandezza d'uscita la corrente della stessa $\hat{\mathcal{V}}$. Questa funzione di rete è proprio l'ammettenza $y_0(s)$ del bipolo complementare connesso alla $\hat{\mathcal{V}}$.

$$y_0(s) = \frac{1}{4000} + \frac{1}{500 + s/2 + 1/(s \cdot 4 \cdot 10^{-6})} = \frac{1}{4000} + \frac{s \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{s^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} + s \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 1}$$

Risultato : Il denominatore della funzione ammettenza $y_0(s)$ risulta un polinomio di secondo grado, quindi le sue radici sono proprio le due pulsazioni naturali s_1 e s_2 del circuito :

$$s^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} + s \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 1 = 0 \implies \{ s_1 = -500 + j \cdot 500 \text{ s}^{-1} \quad s_2 = -500 - j \cdot 500 \text{ s}^{-1} \}$$

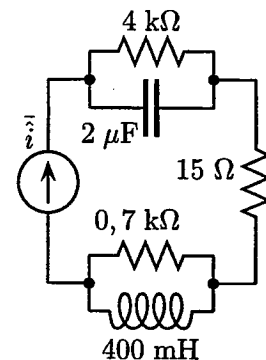
Commento : Le due pulsazioni naturali risultano complesse coniugate e quindi i modi naturali associate ad esse si riducono a un'unica sinusoide involupata da un esponenziale smorzato. Quindi il circuito risulta asintoticamente stabile.

2.9.5 Esercizio E4/17/02/98 : Pulsazioni naturali di un circuito di ordine due

Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{T}}$ cisoidale di pulsazione imprecisata, un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare tutte le pulsazioni naturali del circuito.

- Il circuito, che contiene un $\mathcal{C}$ e un $\mathcal{L}$, dovrebbe essere di ordine due, poiché non risultano evidenti vincoli algebrici in cui compaiano come uniche incognite le due candidate di stato.
- Calcoliamo una funzione di rete del circuito nella speranza che essa abbia un polinomio di secondo grado come denominatore. Se questo viene accertato noi siamo sicuri che il circuito è di ordine due e che le radici del denominatore sono proprio le due pulsazioni naturali.



- Scegliamo come funzione di rete il rapporto tra la tensione ai capi della $\hat{\mathcal{T}}(\hat{i})$ e la $\hat{i}$, cioè l'impedenza $z_0(s)$ del bipolo complementare alla $\hat{\mathcal{T}}(\hat{i})$:

$$z_0(s) = 15 + \frac{4000}{1 + s \, 2 \, 10^{-6} \, 4000} + \frac{s \, 0,4 \, 700}{700 + s \, 0,4}$$

- Non è necessario mettere $z_0(s)$ nella forma di rapporto di due polinomi per osservare che i poli dell'impedenza $z_0(s)$ sono due e coincidono con i poli dei due fratti semplici.

Risultato : Siccome i poli di $z_0(s)$ sono due, il circuito non risulta degenerare e questi poli coincidono con le due pulsazioni naturali s_1 e s_2 :

$$1 + s \, 8 \, 10^{-3} = 0 \implies s_1 = -125 \, \text{s}^{-1} \quad , \quad 700 + s \, 0,4 = 0 \implies s_2 = -1750 \, \text{s}^{-1}$$

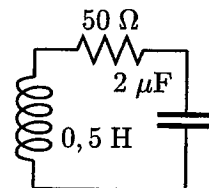
Commento : se avessimo calcolato la matrice di stato del circuito e quindi i suoi autovalori, il calcolo delle pulsazioni naturali sarebbe stato più oneroso.

2.9.6 Esercizio E3/25/06/98 : Pulsazioni naturali

Il circuito dinamico in figura è costituito da un'unica maglia contenente un $\mathcal{R}$, un $\mathcal{L}$ e un $\mathcal{C}$.

Quesito : Calcolare le pulsazioni naturali del circuito senza calcolare la matrice di stato.

- Nel circuito sono presenti due candidate di stato : la tensione ai capi del $\mathcal{C}$ e la corrente fluente nell' $\mathcal{L}$. Essa non sembrano vincolate da un'equazione algebrica.
- Cerchiamo una funzione di rete i cui poli coincidano con le pulsazioni naturali. Introduciamo al posto di un c.c. latente una $\hat{\mathcal{V}}$ e calcoliamo l'ammettenza vista dalla sorgente stessa :



$$y(s) = \frac{\hat{i}}{\hat{v}} = \frac{1}{s \, L + r + 1/(s \, C)} = \frac{s}{s^2 \, L + s \, r + 1/C}$$

I poli di $y(s)$ sono le radici del denominatore : $s^2 \, L + s \, r + 1/C = 0 \implies s^2 + s \, 100 + 1000000 = 0$.

Risultato : Siccome il numero di poli di $y(s)$ coincide col numero delle variabili di stato, le pulsazioni naturali sono due e coincidono con i poli di $y(s)$:

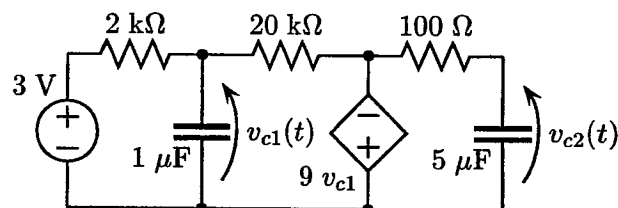
$$s_1 = -50 + j \sqrt{10^6 - 2500} \quad , \quad s_2 = -50 - j \sqrt{10^6 - 2500}$$

2.10 SOLUZIONE DI CIRCUITI DI ORDINE 2

2.10.1 Esercizio OR4/08/11/96 : Soluz. Equaz. di stato di circuito uni-dir. di ordine 2

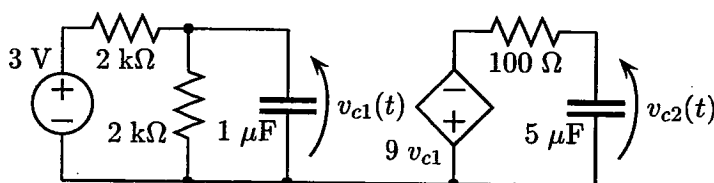
Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ costante, una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$, due $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la tensione $v_{c2}(t)$, sapendo che in $t = 0$ le tensioni dei $\mathcal{C}$ sono : $v_{c1}(0) = 0 \text{ V}$ e $v_{c2}(0) = 0 \text{ V}$.

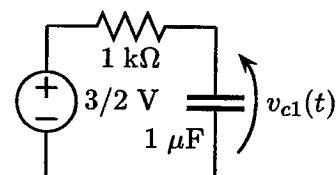


• La porta pilotata della $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$, il $\mathcal{C}$ ($1 \mu\text{F}$), la cui tensione $v_{c1}(t)$ è la tensione pilotante, e il $\mathcal{R}$ ($20 \text{ k}\Omega$) costituiscono una maglia.

• In accordo al primo teorema di Miller il $\mathcal{R}$ ($20 \text{ k}\Omega$) è sostituito da un c.a., mentre in parallelo al $\mathcal{C}$ ($1 \mu\text{F}$) viene inserito un $\mathcal{R}$ ($20/(9+1) = 2 \text{ k}\Omega$). Il circuito è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ costante, una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$, due $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$:



• Il circuito appare suddiviso in due parti connesse dalla $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$. La parte di sinistra è un circuito dinamico di ordine uno e, a causa della unidirezionalità $1 \rightarrow 2$ della $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$ ($9 v_{c1}$), opera indipendentemente dalla parte di destra. In essa compare un bipolo composto costituito dalla $\hat{\mathcal{V}}$ (3 V) e dai due $\mathcal{R}$ ($2 \text{ k}\Omega$). Otteniamo il modello di Thévenin del suddetto bipolo composto mediante l'omonimo teorema : una $\hat{\mathcal{V}}$ ($\hat{v}_2(t) = 3/2 \text{ V}$) in serie a un $\mathcal{R}$ ($1 \text{ k}\Omega$).

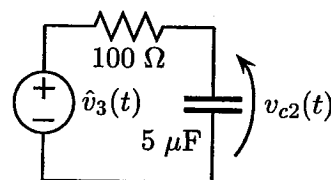


• La tensione $v_{c1}(t)$ è nello stesso tempo l'unica variabile di stato del circuito di sinistra e la grandezza pilotante della $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$. Dalla teoria sappiamo che $v_{c1}(t)$ ha la ben nota forma :

$v_{c1}(t) = [v_{c1}(0) - v_{c1}^{\text{sim}}(0)] \exp(-t/\tau_1) + v_{c1}^{\text{sim}}(t)$ dove la costante di tempo $\tau_1 = r_{\text{eq}} C = 1000 \times 10^{-6} = 1 \text{ ms}$. La soluzione similare $v_{c1}^{\text{sim}}(t)$ è costante e vale $3/2 \text{ V}$, perchè coincide con $\hat{v}_2(t)$. Il valore iniziale $v_{c1}(0) = 0 \text{ V}$ è un dato del problema.

• Perciò l'espressione della tensione $v_{c1}(t)$ risulta : $v_{c1}(t) = -3/2 \exp(-t/1000) + 3/2 \text{ V}$.

• La $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$ ($9 v_{c1}$) è sostituita da una $\hat{\mathcal{V}}$ ($\hat{v}_3(t)$) in cui $\hat{v}_3(t) = -9 v_{c1}(t) = 27/2 \exp(-t/\tau_1) - 27/2 \text{ V}$ poiché $v_{c1}(t)$ è nota. Il circuito di ordine uno è costituito dalla $\hat{\mathcal{V}}$ ($\hat{v}_3(t)$), dal $\mathcal{C}$ ($5 \mu\text{F}$) e dal $\mathcal{R}$ (100Ω) : la variabile di stato è la tensione $v_{c2}(t)$.



• La tensione $v_{c2}(t)$ assume la forma : $v_{c2}(t) = [v_{c2}(0) - v_{c2}^{\text{sim}}(0)] \exp(-t/\tau_2) + v_{c2}^{\text{sim}}(t)$, dove la costante di tempo è $\tau_2 = C_2 r_{\text{eq}} = 5 \cdot 10^{-6} \times 100 = 500 \mu\text{s}$. Notare che la costante τ_2 dipende dalla parte di destra del circuito, mentre la costante τ_1 è propria della parte di sinistra del circuito. Questo risultato è dovuto alla unidirezionalità $1 \rightarrow 2$ della $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$. La condizione iniziale $v_{c2}(0) = 0 \text{ V}$ è un dato del problema.

• La soluzione similare $v_{c2}^{\text{sim}}(t)$ è la somma di un termine costante e uno esponenziale, in analogia alla tensione impressa $\hat{v}_3(t)$.

• In presenza della sola $\hat{\mathcal{V}}$ costante ($\hat{\mathcal{V}}$ esponenziale $\rightarrow$ c.c.) la corrispondente soluzione similare $v_{c2}^{\text{sim}1}(t)$ risulta uguale a $-27/2 \text{ V}$. Essa viene calcolata sostituendo il $\mathcal{C}$ con un c.a. e analizzando il circuito adinamico risultante.

• In presenza della sola $\hat{\mathcal{V}}$ esponenziale ($\hat{\mathcal{V}}$ costante $\rightarrow$ c.c.) la corrispondente soluzione similare

$v_{c2}^{\text{sim}2}(t)$ può essere calcolata con la regola del partitore di tensione nel dominio dei fasori. Siccome siamo in presenza di esponenziali reali, la pulsazione s è puramente reale $s = \sigma_1 + j0 = -1/\tau_1 = -1000$;

$$\bar{v}_{c2}^{\text{sim}2} = \frac{\bar{v}_3/r}{1/r + \sigma_1 C} = \frac{(27/2) \times 1/100}{1/100 - 1000 \times 5 \cdot 10^{-6}} = 27 \text{ V}$$

Ritornando nel dominio del tempo si ha che : $v_{c2}^{\text{sim}2}(t) = 27 \exp(-t 1000) \text{ V}$.

• La soluzione similare complessiva è : $v_{c2}^{\text{sim}}(t) = v_{c2}^{\text{sim}1}(t) + v_{c2}^{\text{sim}2}(t) = -27/2 + 27 \exp(-t 1000) \text{ V}$, che per $t = 0$ assume il valore $v_{c2}^{\text{sim}}(0) = 27/2 \text{ V}$.

Risultato : L'espressione della $v_{c2}(t)$ assume la forma :

$$v_{c2}(t) = -27/2 \exp(-t 2000) - 27/2 + 27 \exp(-t 1000) \text{ V}$$

Commento : Abbiamo applicato il metodo dei fasori ad una tensione esponenziale. Questo potrebbe far inorridire i tradizionalisti.

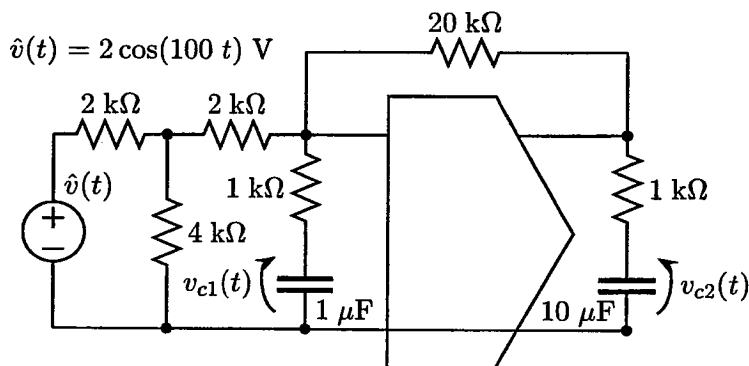
Commento : Se calcolassimo la matrice di stato A del circuito originario, avremmo due variabili di stato e l'unidirezionalità della $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$ implicherebbe che A sia triangolare.

2.10.2 Esercizio EB/17/06/97 : Soluz. Equaz. di stato di circuito zero-dir. di ordine 2

Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale, un nullole tripolare, due $\mathcal{C}$ e sei $\mathcal{R}$.

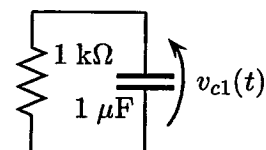
Quesito : Calcolare le tensioni $v_{c1}(t)$ e $v_{c2}(t)$, sapendo che i $\mathcal{C}$ sono scarichi per $t = 0$.

• Ciascun $\mathcal{C}$ è in serie a un $\mathcal{R}$ e costituisce con questo un bipolo composito.



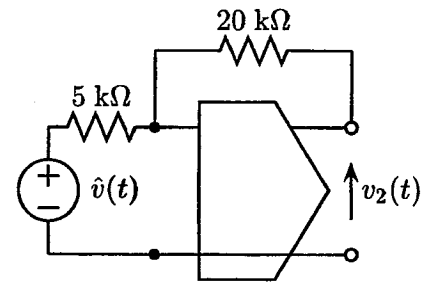
Il primo bipolo composito, in parallelo alla porta d'ingresso del nullole, è costituito dalla serie del $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$ e del $\mathcal{C}\langle 1 \mu\text{F} \rangle$. Il secondo bipolo composito, in parallelo alla porta d'uscita del nullole, è costituito dalla serie del $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$ e del $\mathcal{C}\langle 10 \mu\text{F} \rangle$.

• Il bipolo composito in parallelo alla porta d'ingresso può essere studiato come se facesse parte di un circuito separato di ordine uno. Siccome la tensione $v_1(t)$ della porta d'ingresso del nullole è nulla per ogni valore di t , questo circuito separato risulta omogeneo in quanto è costituito dal parallelo del $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$ e del $\mathcal{C}\langle 10 \mu\text{F} \rangle$.



• La tensione $v_{c1}(t)$ ai capi del $\mathcal{C}\langle 1 \mu\text{F} \rangle$ è nulla in $t = 0$ e quindi anche la tensione ai capi del $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$. Conseguentemente, la corrente nel $\mathcal{C}$ è permanentemente nulla e la tensione non varia rispetto al valore iniziale : $v_{c1}(t) = 0 \text{ V} \quad \forall t$. Il bipolo composito può essere rimosso poiché è influente sul resto del circuito.

• Il bipolo composito in parallelo alla porta d'uscita del nullo può essere studiato analizzando il modello di Thévenin del bipolo composito complementare. A questo fine il DBT adinamico a stella inserito tra la $\hat{V}$ e l'ingresso del nullo viene sostituito dal DBT a triangolo equivalente. I due $\mathcal{R}$ del triangolo in parallelo alla $\hat{V}$ e all'ingresso del nullo sono sostituiti da due c.a. . Il terzo $\mathcal{R}$ del triangolo connette la $\hat{V}$ all'ingresso del nullo: la sua resistenza, calcolata con la regola della trasformazione stella→triangolo, vale $2+2+(2 \times 2)/4 = 5 \text{ k}\Omega$. Il bipolo composito adinamico complementare è costituito da una $\hat{V}$, un nullo e due $\mathcal{R}$.

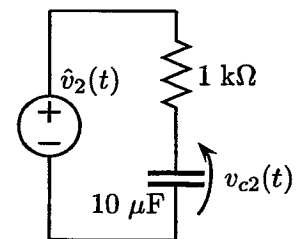


Dalle ben note proprietà del nullo (vedere Cap. 10-FCE) si ha che la tensione a vuoto del bipolo complementare risulta

$$v_2(t) = -\frac{20000}{5000} \hat{v}(t) = -8 \cos(100 t) \text{ V}$$

• La resistenza equivalente del modello di Thévenin risulta nulla, dal momento che la corrente della porta d'uscita del nullo è nonvincolata. Quindi il modello di Thévenin del bipolo complementare coincide con una $\hat{V}(\hat{v}_2(t))$ in cui $\hat{v}_2(t) = v_2(t) = -8 \cos(100 t) \text{ V}$.

Il circuito complessivo si riduce a un'unica maglia costituita dalla $\hat{V}(\hat{v}_2(t))$ dal $\mathcal{R}(1 \text{ k}\Omega)$ e dal $\mathcal{C}(10 \mu\text{F})$.



• La tensione $v_{c2}(t)$ è calcolata mediante la formula risolutiva dei circuiti dinamici di ordine uno:

$$v_{c2}(t) = [v_{c2}(0) - v_{c2}^{\text{sim}}(0)] \exp(-t/\tau) + v_{c2}^{\text{sim}}(t)$$

• La soluzione similare $v_{c2}^{\text{sim}}(t)$, calcolata nel dominio dei fasori, è uguale a $v_{c2}^{\text{sim}}(t) = 4\sqrt{2} \cos(100 t + 3\pi/4) \text{ V}$ che in $t = 0$ vale $v_{c2}^{\text{sim}}(0) = -4 \text{ V}$.

La costante di tempo τ vale $\tau = r_{\text{equ}} C = 1000 \cdot 10^{-5} = 0,01 \text{ s}$.

Siccome il $\mathcal{C}$ è scarico in $t = 0$ si ha che $v_{c2}(0) = 0$

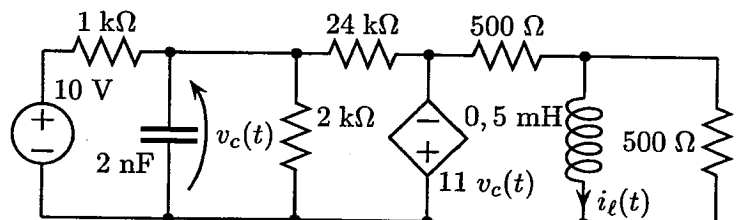
Risultato: La tensione $v_{c2}(t)$ risulta uguale a

$$v_{c2}(t) = \underbrace{4 \exp(-t/0,01)}_{\text{soluz. transitoria}} + \underbrace{4\sqrt{2} \cos(100 t + 3\pi/4)}_{\text{soluzione a regime}}$$

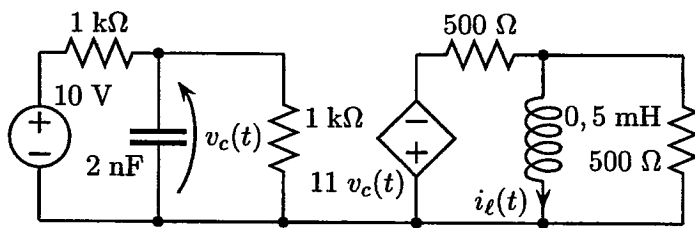
2.10.3 Esercizio EB/01/07/97: Soluz. Equaz. di stato di circuito uni-dir. di ordine 2

Il circuito in figura è costituito da una $\hat{V}$, una $\mathcal{V}_V$, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e cinque $\mathcal{R}$. Per $t = 0$ le candidate di stato valgono $v_c(0) = 10 \text{ V}$ e $i_\ell(0) = 0 \text{ A}$.

Quesito: Calcolare le candidate di stato $v_c(t)$ e $i_\ell(t)$.



• Il $\mathcal{R}(24 \text{ k}\Omega)$, il $\mathcal{R}(2 \text{ k}\Omega)$, la cui tensione pilota la $\mathcal{V}_V$, e la porta pilotata della $\mathcal{V}_V$ costituiscono una maglia. In accordo al primo teorema di Miller, il $\mathcal{R}(24 \text{ k}\Omega)$ è sostituito da un c.a., mentre in parallelo al $\mathcal{R}(2 \text{ k}\Omega)$ viene inserito un $\mathcal{R}(24/(1+11) = 2 \text{ k}\Omega)$. A loro volta i due $\mathcal{R}(2 \text{ k}\Omega)$ in parallelo sono sostituiti da un unico $\mathcal{R}(1 \text{ k}\Omega)$. Il circuito è costituito da una $\hat{V}$, una $\mathcal{V}_V$, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e quattro $\mathcal{R}$.



• La parte del circuito a monte della $\mathcal{V}_V$ opera indipendentemente dalla parte a valle a causa della unidirezionalità $1 \rightarrow 2$ della $\mathcal{V}_V$, riducendosi a un circuito dinamico di ordine uno.

• La tensione $v_c(t)$ è data dalla formula risolutiva: $v_c(t) = \exp(-t/\tau_1)[v_c(0) - v_c^{\text{sim}}(0)] + v_c^{\text{sim}}(t)$, dove la costante di tempo τ_1 è uguale a $\tau_1 = r_{\text{eq1}} C = 500 \times 2 \cdot 10^{-9} = 1 \mu\text{s}$.

La soluzione similare $v_c^{\text{sim}}(t)$ è costante essendo costante la $\hat{\mathcal{V}}$. Sostituendo il $\mathcal{C}$ (2 nF) con un c.a., si ha che $v_c^{\text{sim}}(t) = 5 \text{ V}$.

• Inserendo i valori numerici nella formula, la tensione $v_c(t)$ risulta:

$$v_c(t) = \exp(-t \cdot 10^6)[10 - 5] + 5 \text{ V} = 5 \exp(t \cdot 10^6) + 5 \text{ V}$$

• Siccome la tensione $v_c(t)$ è nota, la $\mathcal{V}_V(11 v_c(t))$ è sostituita da una $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}(t))$ in cui $\hat{v}(t) = -11 v_c(t) = -55 \exp(-t \cdot 10^6) - 55 \text{ V}$. Conseguentemente, la parte del circuito a valle della $\mathcal{V}_V$ risulta costituita da una $\hat{\mathcal{V}}$, due $\mathcal{R}$ e un $\mathcal{L}$ (circuito di ordine uno).

• La corrente $i_l(t)$ è data dalla formula risolutiva: $i_l(t) = \exp(-t/\tau_2)[i_l(0) - i_l^{\text{sim}}(0)] + i_l^{\text{sim}}(t)$, dove la costante di tempo $\tau_2 = L/r_{\text{eq2}} = 0,5 \cdot 10^{-3}/250 = 2 \mu\text{s}$ e $i_l(0) = 0$.

• La soluzione similare $v_c^{\text{sim}}(t)$ è composta da due termini essendo la tensione impressa del tipo $\hat{v}(t) = -55 \exp(-t \cdot 10^6) - 55 \text{ V}$.

Avendo sostituito l' $\mathcal{L}$ con un c.c., il termine della soluzione similare associato al termine costante della tensione impressa è $i_l^{\text{sim1}}(t) = -55/500 = -0,11 \text{ V}$.

Il termine associato al termine esponenziale $i_l^{\text{sim2}}(t)$ è calcolato mediante il teorema di Millmann nel dominio dei fasori:

$$\bar{i}^{\text{sim2}} = \frac{\bar{\hat{v}}/500}{1/500 + 1/500 + 1/(\sigma L)} \frac{1}{\sigma L} = \frac{-55}{2 \sigma L + 500} = \frac{-55}{-1000 + 500} = 0,11 \text{ A}$$

Ritornando nel dominio del tempo abbiamo $i_l^{\text{sim2}}(t) = 0,11 \exp(-t \cdot 10^6) \text{ A}$.

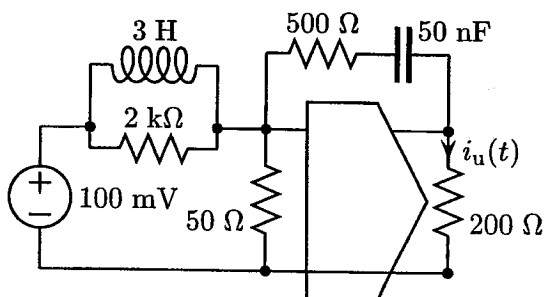
• La soluzione similare completa in $t = 0$ vale $i_l^{\text{sim}}(0) = i_l^{\text{sim1}}(0) + i_l^{\text{sim2}}(0) = 0 \text{ A}$.

Risultato: Inserendo i valori numerici, la corrente $i_l(t)$ risulta:

$$i_l(t) = \exp(-t \cdot 500000) [0 - 0] - 0,11 + 0,11 \exp(-t \cdot 10^6) = 0,11 [\exp(-t \cdot 10^6) - 1] \text{ A}$$

Nella soluzione non compare il termine transitorio in seguito alla nullità sia delle condizioni iniziali sia della soluzione similare completa in $t = 0$.

2.10.4 Esercizio EB/23/02/99: Soluz. di circuito con due pulsaz. nell'origine



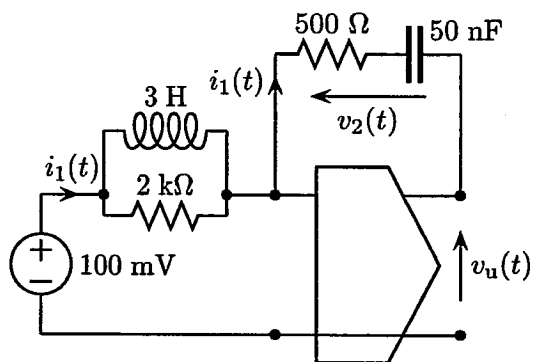
Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, un nullore, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e quattro $\mathcal{R}$.

Quesito: Calcolare la corrente $i_u(t)$ nel dominio del tempo, sapendo che l'energia in $t = 0$ è nulla sia nell' $\mathcal{L}$ sia nel $\mathcal{C}$.

• Il $\mathcal{R}$ (50 Ω) in parallelo all'ingresso del nullore ed il $\mathcal{R}$ (200 Ω) in parallelo all'uscita del nullore possono essere sostituiti da un c.a., poiché essi non influenzano il resto del circuito.

• Siccome la grandezza d'interesse $i_u(t)$ è proprio la corrente fluente nel $\mathcal{R}$ (200 Ω) soppresso, occorre tenerne conto scrivendo l'espressione:

$$i_u(t) = v_u(t)/200$$



- La corrente $i_1(t)$ uscente dalla $\hat{\mathcal{V}}$ risulta costituita da un termine costante che fluisce nel $\mathcal{R}$ ($2 \text{ k}\Omega$) e un termine proporzionale al tempo t che fluisce nel $\mathcal{L}$ (3 H) :

$$i_1(t) = 0,1/2000 + (1/3) \times 0,1 t \text{ A} .$$

- La stessa corrente $i_1(t)$ fluisce nel bipolo composto connesso trasversalmente al nullo e costituito dalla serie del $\mathcal{R}$ (500Ω) e del $\mathcal{C}$ (50 nF) . La tensione $v_2(t)$ vale

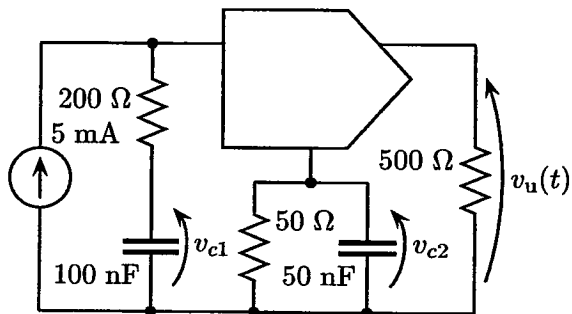
$$v_2(t) = 500 i_1(t) + 10^8/5 \int_0^t i_1(\tau) d\tau \text{ V} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_2(t) = 0,025 + 3050/3 t + 10^6/3 t^2 \text{ V} .$$

Risultato : Dalle formule precedenti otteniamo immediatamente :

$$i_u(t) = v_u(t)/200 = -v_2(t)/200 = -0,000125 - 61/12 t - 10^4/6 t^2 \text{ mA} .$$

Commento : Entrambe le pulsazioni naturali di questo circuito sono nell'origine come la pulsazione della tensione impressa. Questo spiega la presenza nella soluzione dei termini in t e t^2 .

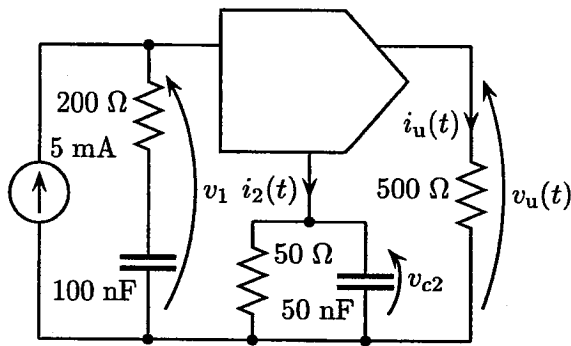
2.10.5 Esercizio EB/02/02/99 : Soluz. di circuito ordine 2 con nullo



Il circuito in figura è costituito da un nullo, una $\hat{\mathcal{I}}$, due $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la tensione $v_u(t)$ per $t > 0$, sapendo che $v_{c1}(0) = 2 \text{ V}$.

- La corrente impressa della $\hat{\mathcal{I}}$ ($\hat{i} = 5 \text{ mA}$) fluisce esclusivamente nel bipolo costituito dalla serie del $\mathcal{R}$ ($r_1 = 200 \Omega$) e del $\mathcal{C}$ ($C_1 = 100 \text{ nF}$) , poiché la corrente della porta d'ingresso del nullo è nulla.



- La tensione $v_1(t)$ risulta

$$v_1(t) = r_1 \hat{i} + v_{c1}(0) + \frac{1}{C_1} \int_0^t \hat{i} d\tau$$

$$v_1(t) = 1 + 2 + 10^7 \times 0,005 t = 3 + 5 \times 10^4 t \text{ V}$$

- Siccome la tensione della porta d'ingresso del nullore è nulla, la tensione $v_{c2}(t)$ coincide con $v_1(t)$.

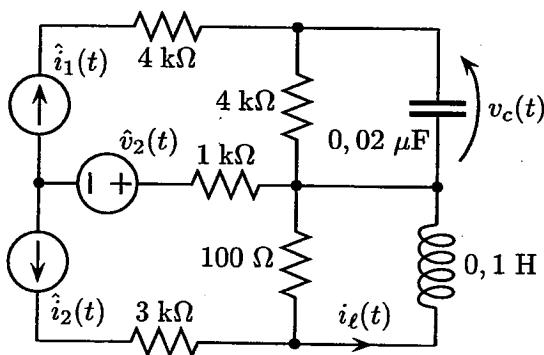
- La corrente $i_2(t)$ che fluisce nel parallelo del $\mathcal{R}$ ($r_2 = 50 \Omega$) e del $\mathcal{C}$ ($C_2 = 50 \text{ nF}$) risulta :

$$i_2(t) = v_1(t)/r_2 + C_2 \dot{v}_1(t) = (3 + 5 \cdot 10^4 t)/50 + 5 \cdot 10^{-8} \times 5 \cdot 10^4 = 1/16 + 1000 t \text{ mA}$$

Risultato : La legge di Kirchhoff delle correnti applicata al nullore tripolare stabilisce che la corrente $i_u(t)$ che fluisce nel $\mathcal{R}$ ($r_1 = 500 \Omega$) è uguale a $-i_2(t)$. Quindi si ottiene :

$$v_u(t) = -r_u i_2(t) = -500 (1/16 + 1000 t) = -31,25 - 5 \cdot 10^5 t \text{ V}$$

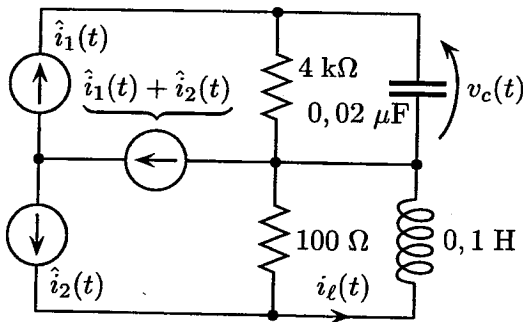
2.10.6 Esercizio EB/20/02/97 : Soluz. Equaz. di stato di circuito zero-dir. di ordine 2



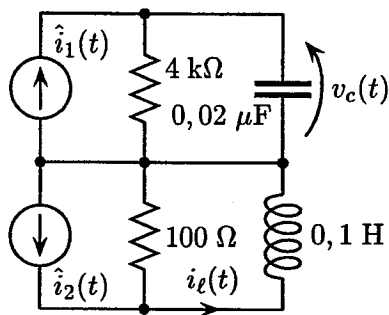
Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}$ ($\hat{i}_1(t) = 20 \text{ mA}$), una $\hat{\mathcal{I}}$ ($\hat{i}_2(t) = 10 \cos(1000 t) \text{ mA}$) e una $\hat{\mathcal{V}}$ ($\hat{v}_2(t) = 4 \text{ V}$), un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e cinque $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare l'equazione di stato e la soluzione, sapendo che $v_c(0) = 2 \text{ V}$ e $i_l(0) = 20 \text{ mA}$.

- I $\mathcal{R}$ ($4 \text{ k}\Omega$) e $\mathcal{R}$ ($3 \text{ k}\Omega$) sono sostituiti da due c.c., poiché sono in serie a una $\hat{\mathcal{I}}$. Il parallelo del $\mathcal{C}$ ($0,02 \mu\text{F}$) e del $\mathcal{R}$ ($4 \text{ k}\Omega$) risulta in serie alla $\hat{\mathcal{I}}$ ($\hat{i}_1(t) = 20 \text{ mA}$) e al bipolo composto costituito da tutti i rimanenti componenti del circuito.



- Il parallelo del $\mathcal{L}$ ($0,1 \text{ H}$) e del $\mathcal{R}$ (100Ω) risulta in serie alla $\hat{\mathcal{I}}$ ($\hat{i}_2(t) = 10 \cos(1000 t) \text{ mA}$) e a un bipolo composto costituito da tutti i rimanenti componenti del circuito. Conseguentemente, il circuito dinamico può essere separato in due circuiti dinamici del primo ordine : il primo costituito dal parallelo del $\mathcal{C}$ ($0,02 \mu\text{F}$), del $\mathcal{R}$ ($4 \text{ k}\Omega$) e della $\hat{\mathcal{I}}$ ($\hat{i}_1(t) = 20 \text{ mA}$). Il secondo è costituito dal parallelo del $\mathcal{L}$ ($0,1 \text{ H}$), del $\mathcal{R}$ (100Ω) e della $\hat{\mathcal{I}}$ ($\hat{i}_2(t) = 10 \cos(1000 t) \text{ mA}$).



- L'equazione di stato è costituita da due equazioni differenziali scalari disaccoppiate :

$$\begin{aligned} \text{primo circuito : } \dot{i}_1(t) &= v_c(t)/4000 + 20 \cdot 10^{-9} \dot{v}_c(t) \\ \text{da cui si ha : } \dot{v}_c(t) &= -12500 v_c(t) + 5 \cdot 10^7 \dot{i}_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{secondo circuito : } \dot{i}_2(t) &= i_l(t) + 0,1 \dot{i}_l(t)/100 \\ \text{da cui si ha : } \dot{i}_l(t) &= -1000 i_l(t) + 1000 \dot{i}_2(t) \end{aligned}$$

- La presenza delle derivate delle candidate a primo membro prova che entrambe sono variabili di stato.

Risultato 1 : La soluzione del primo circuito può essere calcolata mediante la nota formula per i circuiti di ordine uno : $v_c(t) = [v_c(0) - v_c^{\text{sim}}(0)] \exp(-t/\tau_1) + v_c^{\text{sim}}(t)$, dove $\tau_1 = 20 \cdot 10^{-9} \cdot 4000 = 80 \mu\text{s}$, $v_c(0) = 2 \text{ V}$ e $v_c(t) = 0,02 \times 4000 = 80 \text{ V}$. Facendo le sostituzioni indicate si ha la soluzione : $v_c(t) = -78 \exp(-t/0.000080) + 80 \text{ V}$.

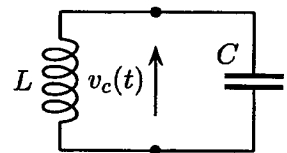
Risultato 2 : Anche la soluzione del secondo circuito può essere calcolata mediante la nota formula per i circuiti di ordine uno : $i_l(t) = [i_l(0) - i_l^{\text{sim}}(0)] \exp(-t/\tau_2) + i_l^{\text{sim}}(t)$, dove $\tau_2 = 0,1/100 = 1 \text{ ms}$, $i_l(0) = 20 \text{ mA}$ e $i_l^{\text{sim}}(t) = 10/\sqrt{2} \cos(1000 t - \pi/4) \text{ mA}$. Facendo le sostituzioni indicate si ha la soluzione : $i_l(t) = 15 \exp(-t/0,001) + 10/\sqrt{2} \cos(1000 t - \pi/4) \text{ mA}$.

2.11 SOLUZIONE DI CIRCUITI DI ORDINE 2 SEMPLICEMENTE STABILI

2.11.1 Esercizio E5/08/11/96 : Circuito omogeneo (conserv.) semplicemente stabile

Il circuito dinamico in figura è costituito da un $\mathcal{C}\langle C \rangle$ e $\mathcal{L}\langle L \rangle$: i valori di C e L sono positivi ma ignoti.

Quesito : Calcolare una delle possibili espressioni analitiche della tensione $v_c(t)$, sapendo che $v_c(t_1) = 0 \text{ V}$, $v_c(t_2) = 15 \text{ V}$ e $v_c(t_3) = 0 \text{ V}$ dove $t_1 = 23 \mu\text{s}$, $t_2 = 25 \mu\text{s}$ e $t_3 = 27 \mu\text{s}$.



- La tensione $v_c(t)$ del $\mathcal{C}$ e la corrente $i_l(t)$ dell' $\mathcal{L}$ sono le due candidate : entrambe, non essendo soggette a vincoli algebrici, sono variabili di stato : il circuito è di ordine due.
- Il circuito dinamico è conservativo dal momento che è costituito esclusivamente da due bipoli conservativi. Più precisamente l'energia totale $w^{\text{tot}}(t)$ immagazzinata nei componenti conservativi è costante al variare del tempo t : $w^{\text{tot}}(t) = C [v_c(t)]^2/2 + L [i_l(t)]^2/2 = \text{cost}$.
- Le pulsazioni naturali del circuito sono costituite da una coppia immaginaria coniugata. Infatti se inseriamo una $\hat{\mathcal{V}}$ al posto di un c.c. latente essa vede un'ammettenza $y(s) = s C / (s^2 L C + 1)$ i cui poli risultano immaginari. Quindi i modi naturali sono periodici (sinusoide).
- I valori noti della tensione $v_c(t)$ ci dicono che la sinusoide ha due zeri in t_1 e t_3 e un massimo in t_2 . Se assumiamo che l'intervallo $[t_1, t_3]$ corrisponda a un mezzo periodo, noi abbiamo che $T_1 = 8 \mu\text{s}$ e, conseguentemente, $\omega_1 = 2 \pi / T_1 = 2 \pi (1/8) 10^6 = (\pi/4) 10^6 \text{ rad/s}$. L'intervallo $[t_1, t_3]$ non può corrispondere ad un periodo : infatti se così fosse la tensione $v_c(t)$ dovrebbe essere necessariamente nulla anche in $t = t_2$.

Risultato : Il modo naturale risulta : $v_c(t) = 15 \cos(\pi 250000 t - \pi/4) \text{ V}$, dove la fase $-\pi/4$ rad risulta dal fatto che i massimi della sinusoide $v_c(t)$ cadono in $t = 1, 9, 17, 25, \dots \mu\text{s}$.

Commento : Esistono altre possibili soluzioni oltre a quella riportata qui sopra. Esse sono caratterizzate da una pulsazione reale $\omega_k = k \omega_1$, $k = 3, 5, 7, \dots$. La loro espressione analitica è :

$$v_c(t) = 15 \cos(\pi k 250000 t - k \pi/4) \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

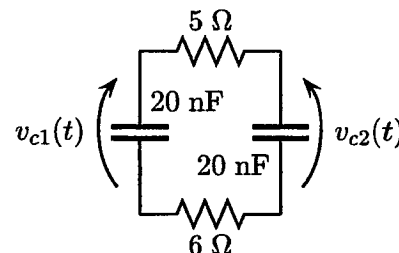
A ciascuna di queste soluzioni corrisponde un diverso valore del prodotto $L C$. Notare che queste soluzioni sinusoidali di frequenza diversa non possono affatto essere presenti simultaneamente nello stesso circuito. Infatti un'unica pulsazione reale ω , di valore $1/\sqrt{L C}$, può essere presente.

2.11.2 Esercizio E4/01/07/97 : Circuito omogeneo di ordine 2 semplicemente stabile

Il circuito dinamico in figura è costituito da un'unica maglia in cui compaiono due $\mathcal{C}$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare le tensioni $v_{c1}(t)$ e $v_{c2}(t)$ ai capi dei $\mathcal{C}$ a regime (cioè per $t \rightarrow \infty$), sapendo che in $t = 0$: $v_{c1}(0) = 7 \text{ V}$ e $v_{c2}(0) = 9 \text{ V}$.

• I due $\mathcal{C}$ sono in serie in quanto fanno parte dell'unica maglia del circuito.



• Conseguentemente, le variazioni di carica che essi subiscono nell'intervallo di tempo $[0, \infty)$ sono necessariamente uguali e di segno opposto (in seguito alla convenzione di segno contrapposte delle loro tensioni e cariche : $\Delta q_1 = q_1(\infty) - q_1(0) = -\Delta q_2 = -q_2(\infty) + q_2(0)$).

• Anche le corrispondenti variazioni delle tensioni sono uguali e di segno opposto dal momento che le capacità sono uguali :

$$C_1 \Delta v_{c1} = C_1 [v_{c1}(\infty) - v_{c1}(0)] = -C_2 \Delta v_{c2} = -C_2 [v_{c2}(\infty) - v_{c2}(0)] \Rightarrow \Delta v_{c1} = -\Delta v_{c2}$$

• D'altra parte, per $t \rightarrow \infty$, il circuito raggiunge un punto di equilibrio stabile in cui le due tensioni necessariamente coincidono dal momento che le tensioni ai capi dei due $\mathcal{R}$ sono nulle all'equilibrio : $v_{c1}(\infty) = v_{c2}(\infty)$. Le precedenti considerazioni ci consentono di scrivere

$$v_{c1}(0) + \Delta v_{c1} = v_{c2}(0) - \Delta v_{c1} \Rightarrow \Delta v_{c1} = \frac{v_{c2}(0) - v_{c1}(0)}{2} = 1 \text{ V}$$

Risultato : A regime le tensioni ai capi dei $\mathcal{C}$ valgono

$$v_{c1}(\infty) = v_{c2}(\infty) = \frac{v_{c1}(0) + v_{c2}(0)}{2} = \frac{9 + 7}{2} = 8 \text{ V}$$

Commento : La coincidenza dei valori finali delle due tensioni col valore medio delle tensioni iniziali è dovuto al fatto che le capacità dei due $\mathcal{C}$ sono uguali. Nel caso in cui $C_1 \neq C_2$ le due tensioni coinciderebbero con la media pesata.

$$v_{c1}(\infty) = v_{c2}(\infty) = \frac{v_{c1}(0) C_1 + v_{c2}(0) C_2}{C_1 + C_2}$$

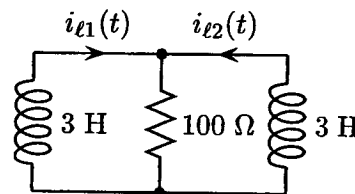
Commento : I valori delle resistenze sono ininfluenti sul risultato, dal momento che a regime la tensione ai loro capi è comunque nulla.

2.11.3 Esercizio E5/09/09/97 : Circuito omogeneo di ordine 2 semplicemente stabile

Il circuito dinamico in figura è costituito dal parallelo di due $\mathcal{L}$ (3 H) disaccoppiati e un $\mathcal{R}$ (100 Ω).

Quesito : Calcolare le correnti $i_{\ell 1}(t)$ e $i_{\ell 2}(t)$ per $t \rightarrow \infty$, sapendo che in $t = 0$: $i_{\ell 1}(0) = 3 \text{ A}$ e $i_{\ell 2}(0) = 7 \text{ A}$.

• I due $\mathcal{L}$, in parallelo, sono soggetti alla tensione $v(t)$.



• In particolare, l'integrale della tensione $v(t)$ nell'intervallo $[0, \infty)$, coincidente con la variazione del flusso $\phi(\infty) - \phi(0)$, è proporzionale alla variazione della corrente tra gli estremi dello stesso intervallo, dal momento che $L_1 = L_2$

$$\phi(\infty) - \phi(0) = L_1 [i_{\ell 1}(\infty) - i_{\ell 1}(0)] = L_2 [i_{\ell 2}(\infty) - i_{\ell 2}(0)] \Rightarrow i_{\ell 1}(\infty) - i_{\ell 1}(0) = i_{\ell 2}(\infty) - i_{\ell 2}(0)$$

• Per $t \rightarrow \infty$ (a regime) la corrente fluente nel $\mathcal{R}$ è necessariamente nulla. Quindi dalla legge di Kirchhoff delle correnti si ha che $i_{\ell 1}(\infty) = -i_{\ell 2}(\infty)$.

Risultato : Dai risultati precedenti si ha che :

$$\begin{cases} i_{\ell 1}(\infty) = -i_{\ell 2}(\infty) \\ i_{\ell 2}(\infty) - i_{\ell 1}(\infty) = i_{\ell 2}(0) - i_{\ell 1}(0) = 4 \text{ A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{\ell 1}(\infty) = -2 \text{ A} \\ i_{\ell 2}(\infty) = 2 \text{ A} \end{cases}$$

Commento 1 : Dall'esame della matrice di stato $\mathbf{A}$ del circuito constatiamo che le due pulsazioni

naturali sono reali : una negativa e l'altra nulla. Proprio il modo naturale costante, associato alla pulsazione nulla, fa sì che le due variabili di stato non si annullino per $\rightarrow \infty$.

Commento 2 : Se le due induttanze L_1 e L_2 fossero diverse, la soluzione sarebbe ...
(WWWWWWW CONTINUARE).

2.11.4 Esercizio E3/13/09/96 : Circuito ordine 1 semplicemente stabile

Il circuito dinamico nonomogeneo in figura è costituito da un tr.id. proprio, tre $\mathcal{R}$, un $\mathcal{C}$ e una $\hat{\mathcal{V}}$.

Quesito : Calcolare la tensione $v(t)$ per $t \geq 0$, sapendo che all'istante $t_0 = 0$ s la tensione $v_c(t_0)$ ai capi del $\mathcal{C}$ (2 F) vale 4 V.

- La tensione $v_c(t)$ ai capi del $\mathcal{C}$ (2 F) è l'unica variabile di stato : il circuito dinamico è nondegenere e di ordine uno.

- La corrente i_3 fluente nel ramo formato dalla serie del $\mathcal{C}$ (2 F) e del $\mathcal{R}$ (2 Ω) è nulla : infatti questo ramo forma da solo un taglio, perché il tr.id. è proprio.

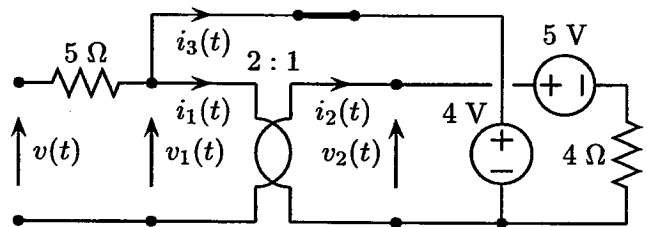
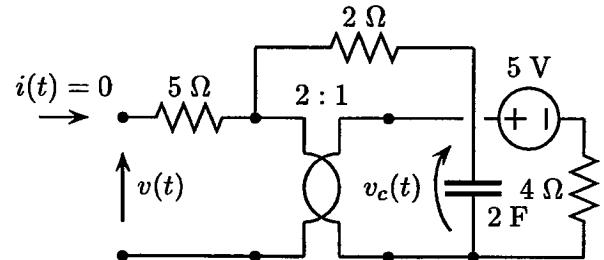
Possiamo sostituire il $\mathcal{R}$ (2 Ω) $\rightarrow$ c.c. e il $\mathcal{C}$ (2 F) $\rightarrow \hat{\mathcal{V}}$ (4 V). Otteniamo il circuito nella figura di destra :

- La corrente $i_1(t)$ della prima porta del tr.id. è nulla, perché questa porta è a vuoto. Conseguentemente anche la corrente $i_2(t)$ nella seconda porta del tr.id. è nulla e la tensione $v_2(t)$ della seconda porta del tr.id. coincide con la tensione impressa della $\hat{\mathcal{V}}$: $v_2(t) = \hat{v}(t) = 5$ V.

Risultato : La tensione richiesta è costante e coincide con la tensione $v_1(t)$ della prima porta del tr.id. e quindi vale : $v_1(t) = 2 v_2(t) = 2 \times 5 = 10$ V $\forall t$.

Notare che la tensione ai capi del $\mathcal{C}$ non ha alcuna influenza sul risultato.

Commento : L'assenza della scarica del $\mathcal{C}$ è dovuta al fatto che l'unica pulsazione naturale del circuito dinamico è nulla : ad essa è associato un modo naturale costante. È come se il $\mathcal{C}$ fosse in serie a un c.a. . Quindi il circuito è semplicemente stabile.

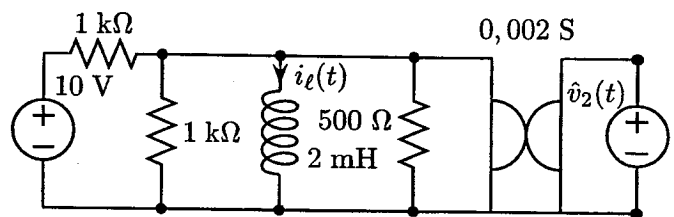


2.12 SOLUZIONE DI CIRCUITI CON SORGENTI IMPRESSIVE MISTE

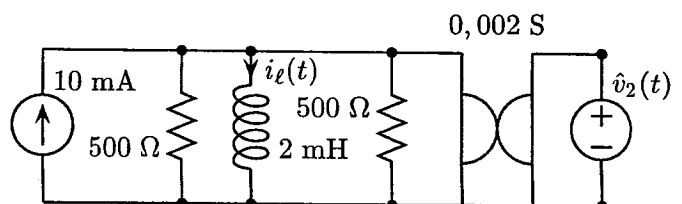
2.12.1 Esercizio EB/23/07/96 : Circuito ordine 1 con sorgenti impress. miste

Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ ($\hat{v}_1 = 10$ V), una $\hat{\mathcal{V}}$ ($\hat{v}_2(t) = 5 \cos(125000 t + \pi/4)$ V), un giratore, un $\mathcal{L}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la corrente $i_\ell(t)$, sapendo che $i_\ell(0) = 2$ mA.

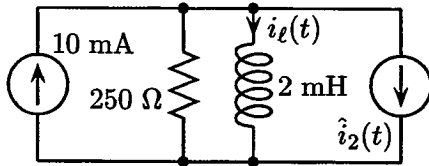


- Il bipolo composto costituito dalla $\hat{\mathcal{V}}$ (10 V) e dai due $\mathcal{R}$ (1 k Ω) è sostituito dal modello di Norton costituito dalla $\hat{\mathcal{I}}$ (10/1000 = 10 mA) e dal $\mathcal{R}$ (1000/2 = 500 Ω).



- Il bipolo composto costituito dalla $\hat{\mathcal{V}}$ ($\hat{v}_2(t)$), dal giratore e dal $\mathcal{R}$ (500 Ω) è sostituito dal modello di Norton : esso è ottenuto trasferendo in serie alla prima porta del giratore la $\hat{\mathcal{V}}$ ($\hat{v}_2(t)$) che risulta

equivalente ad una $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}_2(t)\rangle$ in cui $\hat{i}_2(t) = g_m 5 \cos(125000 t + \pi/4) = 10 \cos(125000 t + \pi/4) \text{ mA}$.
 Notare che $\hat{i}_2(t)$ è diretta verso il basso. La prima porta del giratore è equivalente a un c.a., essendo la seconda porta chiusa su un c.c., e quindi il giratore può essere soppresso. I due $\mathcal{R}\langle 500 \Omega \rangle$ superstiti, in parallelo, sono fusi in un unico $\mathcal{R}\langle 250 \Omega \rangle$, come risulta dalla figura sottostante.



• La corrente $i_\ell(t)$ è l'unica variabile di stato: dalla teoria sappiamo che $i_\ell(t)$ ha la ben nota forma:

$i_\ell(t) = [i_\ell(0) - i_\ell^{\text{sim}}(0)] \exp(-t/\tau) + i_\ell^{\text{sim}}(t)$. Il valore iniziale $i_\ell(0) = 2 \text{ mA}$ è un dato del problema, mentre la costante di tempo vale $\tau = L/r_{\text{eq}} = 0.002/250 = 8 \mu\text{s}$.

• La soluzione similare $i_\ell^{\text{sim}}(t)$, se esiste, è composta dalla somma di una costante e una sinusoidale, dal momento che nel circuito compaiono una $\hat{\mathcal{I}}$ costante e una $\hat{\mathcal{I}}$ sinusoidale. Per calcolarla conviene ricorrere al principio di sovrapposizione delle soluzioni particolari. In presenza della sola $\hat{\mathcal{I}}\langle 10 \text{ mA} \rangle$ ($\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}_2(t)\rangle \rightarrow \text{c.a.}$) la corrispondente soluzione similare $i_\ell^{\text{sim}1}(t)$ risulta uguale a $\hat{i}_1 = 1/100 \text{ A}$. Essa viene calcolata sostituendo l' $\mathcal{L}\langle 2 \text{ mH} \rangle \rightarrow$ un c.c., e analizzando il circuito adinamico risultante. In presenza della sola $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}_2(t)\rangle$ ($\hat{\mathcal{I}}\langle 10 \text{ mA} \rangle \rightarrow \text{c.a.}$) la corrispondente soluzione similare $i_\ell^{\text{sim}2}(t)$ può essere calcolata con la regola del partitore di corrente nel dominio dei fasori:

$$\bar{i}_\ell^{\text{sim}2} = \frac{-\hat{i}_2 r}{r + j \omega L} = \frac{1/100 \exp(-j \pi 3/4) \times 250}{250 + j 125000 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = \frac{1/100 \exp(-j 3 \pi/4)}{1 + j} = -\frac{\sqrt{2}}{200} \text{ A}$$

Ritornando nel dominio del tempo si ha: $i_\ell^{\text{sim}2}(t) = -\frac{\sqrt{2}}{200} \cos(125000 t) \text{ A}$.

La soluzione similare complessiva è:

$$i_\ell^{\text{sim}}(t) = i_\ell^{\text{sim}1}(t) + i_\ell^{\text{sim}2}(t) = \frac{1}{100} - \frac{\sqrt{2}}{200} \cos(125000 t) \text{ A} \Rightarrow i_\ell^{\text{sim}}(0) = \frac{1}{100} - \frac{\sqrt{2}}{200} \text{ A}$$

Risultato: Raccogliendo i risultati precedenti la corrente $i_\ell(t)$ diventa:

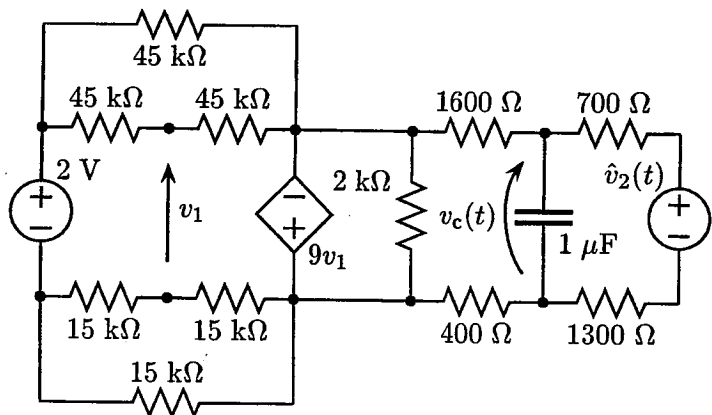
$$i_\ell(t) = \left(\frac{5\sqrt{2} - 8}{1000} \right) \exp(-t/1000) + \frac{1}{100} - \frac{\sqrt{2}}{200} \cos(125000 t) \text{ A}$$

2.12.2 Esercizio EB/13/09/96: Circuito di ordine 1 con sorgenti impress. miste

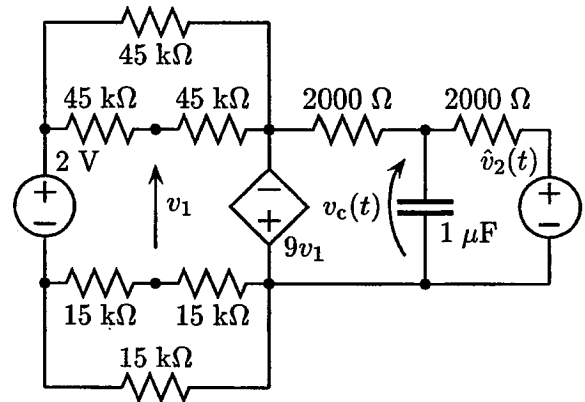
Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_1 = 2 \text{ V}\rangle$, una $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_2(t)\rangle$, con $\hat{v}_2(t) = 10 \cos(1000 t + \pi/4) \text{ V}$, una $\mathcal{V}_V$, un $\mathcal{C}$ e undici $\mathcal{R}$.

Quesito: Calcolare la tensione $v_c(t)$ ai capi del $\mathcal{C}$, sapendo che $v_c(0) = 2 \text{ V}$.

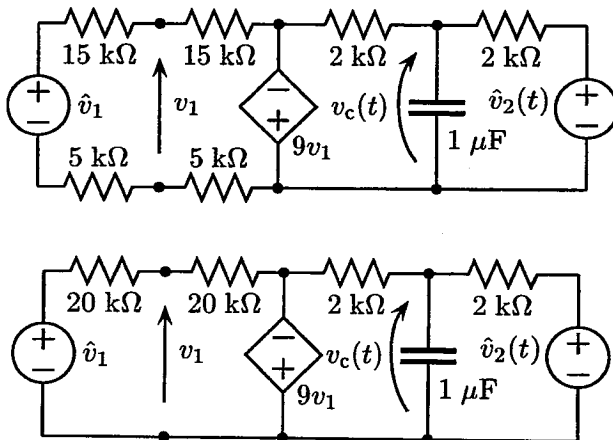
Il $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$ in parallelo alla porta pilotata della $\mathcal{V}_V$ è sostituito da un c.a., dal momento che la sua corrente non è di nostro interesse.



• Consideriamo i seguenti due tagli :
 il primo taglio è costituito dai $\mathcal{R}\langle 400\ \Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 1600\ \Omega \rangle$: essi sono sostituiti da un c.c. e da un $\mathcal{R}\langle 400 + 1600 = 2000\ \Omega \rangle$;
 il secondo taglio è costituito dai $\mathcal{R}\langle 1300\ \Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 700\ \Omega \rangle$: essi sono sostituiti da un c.c. e da un $\mathcal{R}\langle 1300 + 700 = 2000\ \Omega \rangle$;
 Queste due operazioni possono essere viste come la sostituzione di due quadripoli operanti come DBI con i corrispondenti DBT .



• Sulla sinistra del circuito vi sono due DBT composti costituiti da due triangoli equilibrati di $\mathcal{R}$: essi sono sostituiti dai due DBT a stella equivalenti. Le tre resistenze dei rami della prima stella (in alto) valgono $45/3 = 15\ \text{k}\Omega$ e quelle della seconda stella (in basso) valgono $15/3 = 5\ \text{k}\Omega$. In ciascuna stella uno dei tre $\mathcal{R}$ si trova in serie al c.a. ai cui capi è definita la tensione pilotante v_1 della $\mathcal{V}_V$: Ciascuno di questi $\mathcal{R}$ può essere sostituito da un c.c. dal momento che le loro correnti risultano nulle. Siamo in presenza di un circuito costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ costante, una $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale, una $\mathcal{V}_V$, un $\mathcal{C}$ e sei $\mathcal{R}$:



• Il circuito può essere ulteriormente semplificato, poiché vi compaiono due altri tagli, ciascuno costituito da due soli $\mathcal{R}$: un $\mathcal{R}\langle 5000\ \Omega \rangle$ e un $\mathcal{R}\langle 15000\ \Omega \rangle$ che sono sostituiti, da un c.c. e da un $\mathcal{R}\langle 5000 + 15000 = 20000\ \Omega \rangle$.

• Il primo teorema di Miller può essere applicato alla $\mathcal{V}_V$. Il $\mathcal{R}\langle 20\ \text{k}\Omega \rangle$ con un terminale in comune alla porta pilotata della $\mathcal{V}_V$ può essere sostituito da un c.a., mentre deve essere inserito un $\mathcal{R}\langle 20000/(9 + 1) = 2000\ \Omega \rangle$ in parallelo al c.a. ai cui capi è definita la tensione pilotante v_1 .

• la tensione v_1 può essere calcolata facilmente mediante la regola del partitore di tensione :

$$v_1 = \frac{\hat{v}_1 \cdot 2000}{2000 + 20000} = \frac{2 \times 2000}{2000 + 20000} = \frac{2 \times 2000}{2000 + 20000} = \frac{2}{11} \text{ V}$$

• Poiché la tensione pilotante $v_1 = 2/11\ \text{V}$, la $\mathcal{V}_V\langle 9\ v_1 \rangle$ è sostituita da una $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_3 = -18/11\ \text{V} \rangle$. Il circuito è costituito dalle $\hat{\mathcal{V}}\langle -18/11\ \text{V} \rangle$ e $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_2(t) \rangle$, dal $\mathcal{C}\langle 1\ \mu\text{F} \rangle$ e dai due $\mathcal{R}\langle 2\ \text{k}\Omega \rangle$.

• La tensione $v_c(t)$ ai capi del $\mathcal{C}$ è l'unica variabile di stato : dalla teoria sappiamo che $v_c(t)$ ha la forma :

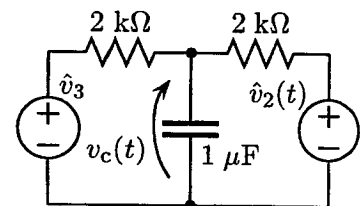
$$v_c(t) = [v_c(0) - v_c^{\text{sim}}(0)] \exp(-t/\tau) + v_c^{\text{sim}}(t)$$

dove il valore iniziale $v_c(0) = 2\ \text{V}$ è un dato del problema, mentre $\tau = C / r_{\text{eq}} = 10^{-6} \times 1000 = 1/1000\ \text{s}$.

• La soluzione similare $v_c^{\text{sim}}(t)$ è composta dal momento che nel circuito compaiono una $\hat{\mathcal{V}}$ costante e una $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale : conviene ricorrere al principio di sovrapposizione delle soluzioni particolari.

• In presenza della sola $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_3 \rangle$ ($\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_2(t) \rangle \rightarrow \text{c.c.}$) la corrispondente soluzione similare $v_c^{\text{sim1}}(t)$ risulta uguale a $1/2\ \hat{v}_3 = -9/11\ \text{V}$. Essa viene calcolata sostituendo il $\mathcal{C}$ con un c.a., e analizzando il circuito adinamico risultante con la regola del partitore di tensione.

• In presenza della sola $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_2(t) \rangle$ ($\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_3 \rangle \rightarrow \text{c.c.}$) la corrispondente soluzione similare $v_c^{\text{sim2}}(t)$ può



essere calcolata mediante la regola del primo teorema di Millman nel dominio dei fasori :

$$\bar{v}_c^{\text{sim}2} = \frac{\bar{v}_2/2000}{1/2000 + 1/2000 + j\omega C} = \frac{5 \exp(j\pi/4) \times 10^{-3}}{10^{-3} + j1000 \cdot 10^{-6}} = \frac{5 \exp(j\pi/4)}{1+j} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ V}$$

Ritornando nel dominio del tempo si ha che : $v_c^{\text{sim}2}(t) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cos(1000 t) \text{ V}$.

• la soluzione similare complessiva è :

$$v_c^{\text{sim}}(t) = v_c^{\text{sim}1}(t) + v_c^{\text{sim}2}(t) = -\frac{9}{11} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \cos(1000 t) \text{ V} \quad , \quad v_c^{\text{sim}}(0) = -\frac{9}{11} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ V}$$

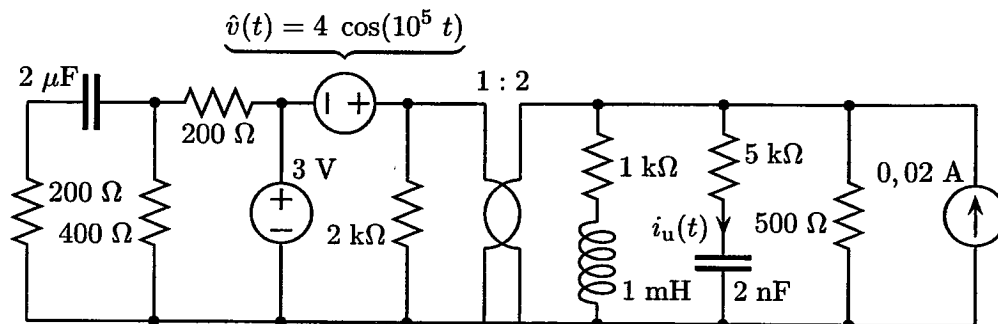
Risultato : Raccogliendo i risultati precedenti, la tensione $v_c(t)$ diventa :

$$v_c(t) = \frac{62 - 55\sqrt{2}}{22} \exp(-t/1000) - \frac{9}{11} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \cos(1000 t) \text{ V}$$

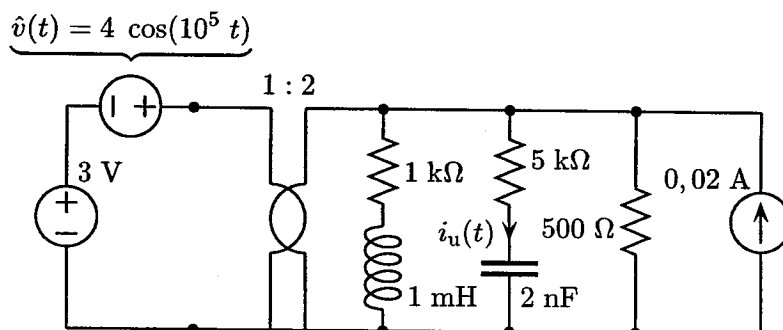
2.12.3 Esercizio EB/08/11/96 : Circuito ordine 1 con sorgenti impress. miste

Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}$, due $\hat{\mathcal{V}}$, un tr.id., due $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e sette $\mathcal{R}$:

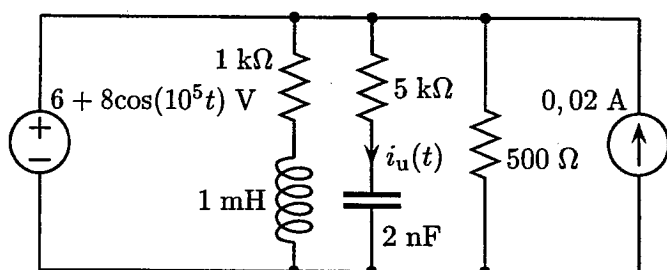
Quesito : Calcolare la corrente $i_u(t)$ che fluisce nel bipolo costituito dalla serie del $\mathcal{R}\langle 5 \text{ k}\Omega \rangle$ e del $\mathcal{C}\langle 2 \text{ nF} \rangle$, sapendo che in $t = 0$ l'energia immagazzinata nei due $\mathcal{C}$ e nell' $\mathcal{L}$ è nulla.



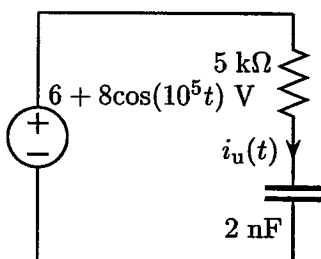
• Il bipolo composito costituito da $\mathcal{R}\langle 200 \Omega \rangle$, $\mathcal{R}\langle 200 \Omega \rangle$, $\mathcal{R}\langle 400 \Omega \rangle$ e $\mathcal{C}\langle 2 \mu\text{F} \rangle$ è in parallelo alla $\hat{\mathcal{V}}\langle 3 \text{ V} \rangle$. Siccome la corrente richiesta $i_u(t)$ non è interna al bipolo composito, questo può essere sostituito da un c.a. . Le $\hat{\mathcal{V}}\langle 3 \text{ V} \rangle$ e $\hat{\mathcal{V}}\langle 4 \cos(10^5 t) \text{ V} \rangle$ sono in serie e quindi esse sono equivalenti a un'unica $\hat{\mathcal{V}}$, che a sua volta risulta in parallelo alla prima porta del tr.id. . Essa è caratterizzata da una tensione impressa $3 + 4 \cos(10^5 t) \text{ V}$. Il $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$ in parallelo alla prima porta del tr.id. può essere rimpiazzato da un c.a. , dal momento che è in parallelo anche alla suddetta $\hat{\mathcal{V}}$.



La suddetta $\hat{\mathcal{V}}$ può essere trasferita in parallelo alla seconda porta del tr.id. raddoppiando la sua tensione impressa, che diventa $2 \times [3 + 4 \cos(10^5 t)] = 6 + 8 \cos(10^5 t) \text{ V}$. Conseguentemente il tr.id. può essere eliminato. Siamo in presenza di un circuito con una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\hat{\mathcal{I}}$, un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e tre $\mathcal{R}$:



- Il circuito dinamico è costituito da cinque bipoli in parallelo : tutti i bipoli possono essere sostituiti da un c.a. eccetto la $\hat{V}$ e il bipolo in cui scorre la corrente $i_u(t)$ che è l'unica grandezza di interesse, come risulta dalla figura sottostante :



- Il circuito dinamico è di primo ordine dal momento che vi è un unico $\mathcal{C}$, la cui tensione è la variabile di stato, e nessun $\mathcal{L}$: la tensione $v_c(t)$ assume la forma :

$$v_c(t) = [v_c(0) - v_c^{\text{sim}}(0)] \exp(-t/\tau) + v_c^{\text{sim}}(t)$$

- Dal momento che in $t = 0\text{ ms}$ l'energia immagazzinata in tutti i componenti conservativi è nulla, si ha che $v_c(0) = 0\text{ V}$. La costante di tempo vale $\tau = r_{\text{eq}} C = 5000 \times 2 \cdot 10^{-9} = 10\ \mu\text{s}$.

• Siccome l'unica sorgente impressiva presente è una $\hat{V}$ la cui tensione impressa è costituita dalla somma di un costante e una sinusoidale, la soluzione similare, se esiste, è a sua volta composta dalla somma di una costante e una sinusoidale : per calcolarla conviene ricorrere al principio di sovrapposizione delle soluzioni particolari.

• In presenza della sola $\hat{V}$ costante ($\hat{V}$ sinusoidale $\rightarrow$ c.c.) la corrispondente soluzione similare $v_c^{\text{sim1}}(t)$ risulta uguale a 6 V . Essa viene calcolata sostituendo il $\mathcal{C}$ con un c.a., e analizzando il circuito adinamico risultante.

• In presenza della sola $\hat{V}$ sinusoidale ($\hat{V}$ costante $\rightarrow$ c.c.) la corrispondente soluzione similare $v_c^{\text{sim2}}(t)$ può essere calcolata nel dominio dei fasori con la regola del partitore di tensione :

$$\bar{v}_c^{\text{sim2}} = \frac{\bar{v}_2 \cdot 1/r}{1/r + j\omega C} = \frac{8/5000}{1/5000 + j2 \cdot 10^{-9} \cdot 10^5} = \frac{8}{1+j} \text{ V}$$

Ritornando nel dominio del tempo si ha : $v_c^{\text{sim2}}(t) = 4\sqrt{2} \cos(100000 t - \pi/4)\text{ V}$; in particolare per $t = 0\text{ ms}$ si ha $v_c^{\text{sim2}}(0) = 4\text{ V}$.

Risultato : Dai risultati precedenti, si ottiene l'andamento della variabile di stato :

$$v_c(t) = -10 \exp(-t/100000) + 6 + 4\sqrt{2} \cos(100000 t - \pi/4)\text{ V}$$

La corrente $i_u(t)$ può essere ottenuta dalla rappresentazione differenziale del $\mathcal{C}$:

$$i_u(t) = C \dot{v}_c(t) =$$

$$= 2 \cdot 10^{-9} \times (-100000) \times (-10) \exp(-t/100000) + 2 \cdot 10^{-9} \times 100000 \times 4\sqrt{2} \cos(100000 t + \pi/4)\text{ A}$$

$$i_u(t) = 2 \cdot 10^{-3} \exp(-t/100000) + 0.8 \cdot 10^{-3} \sqrt{2} \cos(100000 t + \pi/4)\text{ A}$$

Alternativamente, la corrente $i_u(t)$ può essere calcolata dalla equazione algebrica :

$$i_u(t) = \frac{\hat{v}_1(t) + \hat{v}_2(t) - v_c(t)}{r} =$$

$$= 2 \cdot 10^{-4} \times 8 \cos(100000 t) + 2 \cdot 10^{-4} \times 10 \exp(-t/100000) - 2 \cdot 10^{-4} \times 4\sqrt{2} \cos(100000 t - \pi/4)$$

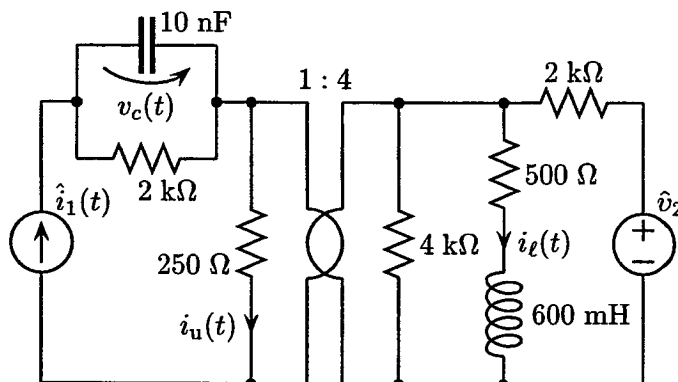
La somma delle due sinusoidi isofrequenziali da origine ad un'unica sinusoidale, ottenuta sommando i rispettivi fasori : $i_u(t) = \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \times 0.8 \cos(100000 t + \pi/4) + 2 \cdot 10^{-3} \exp(-t/100000)$, che coincide con l'espressione calcolata in precedenza.

2.12.4 Esercizio EB/30/01/97 : Circuito di ordine 1 con sorgenti impress. miste

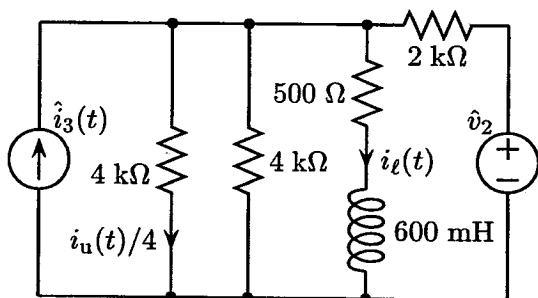
Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}_1(t)\rangle$ in cui $\hat{i}_1(t) = 10 \cos(2500 t)$ mA, una $\hat{\mathcal{V}}\langle\hat{v}_2 = 20 \text{ V}\rangle$, un tr.id., un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e cinque $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la corrente $i_u(t)$, sapendo che la tensione $v_c(0) = 6 \text{ V}$ e che la corrente $i_\ell(0) = 20 \text{ mA}$.

• Il bipolo $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle \parallel \mathcal{C}\langle 10 \text{ nF} \rangle$, essendo in serie alla $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}_1(t)\rangle$, è sostituito da un c.c. .



• La $\hat{\mathcal{I}}\langle\hat{i}_1(t)\rangle$ e il $\mathcal{R}\langle 250 \Omega \rangle$ sono trasferiti in parallelo alla seconda porta del tr.id. : la corrente impressa $\hat{i}_1(t)$ viene divisa per 4 e la resistenza di 250Ω viene moltiplicata per 4^2 . Si ottiene una corrente impressa : $\hat{i}_3(t) = 5/2 \cos(2500 t)$ mA e una resistenza di $250 \times 4^2 \Omega = 4 \text{ k}\Omega$.



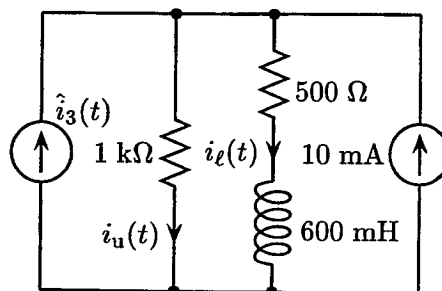
• La trasformazione precedente coinvolge la corrente $i_u(t)$ oggetto del problema : è facile arguire che la corrente fluente nel $\mathcal{R}\langle 4 \text{ k}\Omega \rangle$ ottenuto dalla trasformazione è uguale a $i_u(t)/4$.

• Siamo in presenza di un circuito con una $\hat{\mathcal{I}}$ sinusoidale, una $\hat{\mathcal{V}}$ costante, un $\mathcal{L}$ e quattro $\mathcal{R}$:

• Il bipolo $\hat{\mathcal{V}}\langle 20 \text{ V} \rangle \parallel \mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$ è sostituito dal modello di Norton $\hat{\mathcal{I}}\langle 10 \text{ mA} \rangle \parallel \mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$.

• I tre $\mathcal{R}$ in parallelo, due di $4 \text{ k}\Omega$ e uno di $2 \text{ k}\Omega$ sono fusi in un unico $\mathcal{R}\langle 1/(1/4 + 1/4 + 1/2) = 1 \text{ k}\Omega \rangle$. Ricordiamo che la corrente che fluisce in questo $\mathcal{R}$ è uguale a $4 \times (i_u(t)/4) = i_u(t)$.

• Il circuito dinamico è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}$ sinusoidale, una $\hat{\mathcal{I}}$ costante, un $\mathcal{L}$ e due $\mathcal{R}$:



• Il circuito dinamico è di primo ordine dal momento che è presente un $\mathcal{L}$, la cui corrente $i_\ell(t)$ diventa l'unica variabile di stato. Dalla teoria la corrente $i_\ell(t)$ assume la forma :

$$i_\ell(t) = [i_\ell(0) - i_\ell^{\text{sim}}(0)] \exp(-t/\tau) + i_\ell^{\text{sim}}(t)$$

• Dai dati del problema sappiamo che $i_\ell(0) = 20 \text{ mA}$.

• La costante di tempo vale $\tau = L/r_{\text{eq}} = 0,6/(1000 + 500) = 0,4 \text{ ms}$.

• Siccome sono presenti una $\hat{\mathcal{I}}$ costante e una $\hat{\mathcal{I}}$ sinusoidale, la soluzione similare $i_\ell^{\text{sim}}(t)$, se esiste, è composta dalla somma di un termine costante e uno sinusoidale : per calcolarla conviene ricorrere al principio di sovrapposizione delle soluzioni particolari.

• In presenza della sola $\hat{\mathcal{I}}$ sinusoidale ($\hat{\mathcal{I}}$ costante $\rightarrow$ c.a.) la corrispondente soluzione similare $i_\ell^{\text{sim1}}(t)$ può essere calcolata con la regola del partitore di corrente nel dominio dei fasori :

$$\bar{i}_\ell^{\text{sim1}} = \frac{\bar{i}_2 \cdot 1000}{1000 + 500 + j\omega L} = \frac{2,5 \times 1000}{1500 + j2500 \times 0,6} = \frac{5}{3 + j3} \text{ mA}$$

Ritornando nel dominio del tempo si ha che :

$$i_\ell^{\text{sim1}}(t) = \frac{5}{3\sqrt{2}} \cos(2500 t - \pi/4) \text{ mA} \implies i_\ell^{\text{sim1}}(0) = 5/6 \text{ mA}$$

• In presenza della sola $\hat{\mathcal{I}}$ costante ($\hat{\mathcal{I}}$ sinusoidale $\rightarrow$ c.a.) la corrispondente soluzione similare $i_{\ell}^{\text{sim}2}(t)$ risulta uguale a 20/3 mA. Essa viene calcolata sostituendo l' $\mathcal{L}$ con un c.c., e analizzando il circuito adinamico risultante mediante la regola del partitore di corrente.

Risultato : Tenendo conto dei risultati precedenti, la variabile di stato risulta :

$$i_{\ell}(t) = \left(20 - \frac{20}{3} - \frac{5}{6}\right) \exp(-t/2500) + \frac{20}{3} + \frac{5}{3\sqrt{2}} \cos(2500t - \pi/4) \text{ mA}$$

$$i_{\ell}(t) = \frac{25}{2} \exp(-t/2500) + \frac{20}{3} + \frac{5}{3\sqrt{2}} \cos(2500t - \pi/4) \text{ mA}$$

La corrente $i_u(t)$ può essere ottenuta dalla applicazione della Legge di Kirchhoff delle correnti a uno dei due nodi del circuito : $i_u(t) = \hat{i}_3(t) + \hat{i}_2(t) - i_{\ell}(t)$, cioè :

$$i_u(t) = 10 + \frac{5}{2} \cos(2500t) - \frac{25}{2} \exp(-t/2500) - \frac{20}{3} - \frac{5}{3\sqrt{2}} \cos(2500t - \pi/4) \text{ mA}$$

Le due sinusoidi isofrequenziali sono sommate in un'unica sinusoide sommando i loro fasori :

$$i_u(t) = \frac{10}{3} + \frac{\sqrt{125}}{6} \cos(2500t + \arctg(1/2)) - \frac{25}{2} \exp(-t/2500) \text{ mA}$$

Metodo alternativo :

• Siccome l'oggetto del problema è una grandezza che non risulta una variabile di stato si può procedere in una maniera diversa. Dalla teoria noi sappiamo che l'espressione analitica della corrente $i_u(t)$ è simile a quella della variabile di stato $i_{\ell}(t)$, cioè :

$$i_u(t) = [i_u(0) - i_u^{\text{sim}}(0)] \exp(-t/\tau) + i_u^{\text{sim}}(t)$$

• La costante di tempo τ è la stessa calcolata in precedenza. La soluzione similare $i_u^{\text{sim}}(t)$ è composta dalla somma di una costante e una sinusoide e viene calcolata ricorrendo al principio di sovrapposizione delle soluzioni particolari.

• La principale differenza consiste nel fatto che il valore iniziale della corrente $i_u(0)$ non è tra i dati del problema.

• Comunque $i_u(0)$ può essere calcolato costruendo un circuito adinamico "istantaneo" nel senso che vale solamente in un intorno infinitesimale del tempo $t = 0$. Esso viene costruito mediante le seguenti sostituzioni :

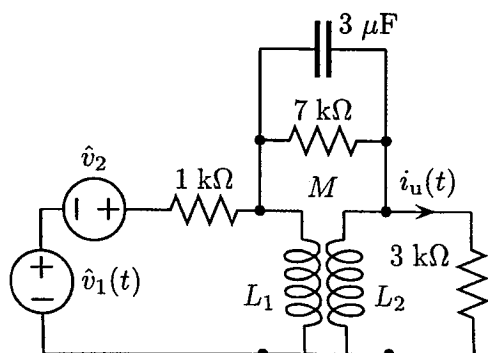
$\hat{\mathcal{V}}$ tempo-varianti $\rightarrow \hat{\mathcal{V}}$ costanti con $\hat{v} = \hat{v}(0)$, $\hat{\mathcal{I}}$ tempo-varianti $\rightarrow \hat{\mathcal{I}}$ costanti con $\hat{i} = \hat{i}(0)$,
 $\mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{V}}$ costanti con $\hat{v} = v_c(0)$ e $\mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{I}}$ costanti con $\hat{i} = i_{\ell}(0)$.

• La soluzione del suddetto circuito adinamico "istantaneo" ci fornisce i valori iniziali di tutte le grandezze del circuito, in particolare $i_u(0)$.

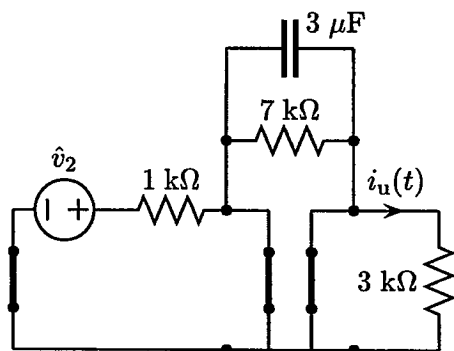
2.12.5 Esercizio E4/23/02/99 : Circuito di ordine tre con sorgenti impress. miste

Il circuito in figura opera a regime ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_2 = 4 \text{ V} \rangle$, una $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_1(t) = 5 \cos(1000t) \text{ V} \rangle$, una coppia di $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare il valore medio della corrente $i_u(t)$ su un intervallo di tempo molto più lungo del periodo della tensione impressa $\hat{v}_2(t)$.



• Il regime del circuito è misto poiché nel circuito appaiono una $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_2 = 4 \text{ V} \rangle$ e una $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v}_1(t) = 5 \cos(1000t) \text{ V} \rangle$. Quindi la corrente $i_u(t)$ sarà composta da un sinusoide sovrapposta a una costante : il suo valore medio, calcolato su un lungo periodo, coincide proprio con la componente costante. Poiché la componente costante è dovuta esclusivamente alla $\hat{\mathcal{V}}\langle 4 \text{ V} \rangle$, la $\hat{\mathcal{V}}\langle 5 \cos(1000t) \text{ V} \rangle$ può essere sostituita da un c.c. dal momento che essa non ha alcun effetto sul valore medio.



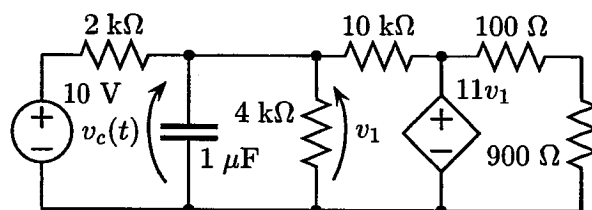
Risultato : Dall'analisi del circuito in regime costante si ha che la tensione ai capi del $\mathcal{R}(3 \text{ k}\Omega)$ è nulla, poichè esso risulta in parallelo alla seconda porta degli $\mathcal{LL}$, che equivale a un c.c. in regime costante. Conseguentemente, la componente costante della corrente $i_u(t)$ è nulla e quindi anche il valor medio.

2.13 ALTRI PROBLEMI NON CLASSIFICATI

2.13.1 Esercizio OR7/08/11/96 : Circuito di ordine 1 instabile

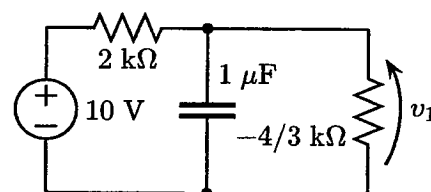
Il circuito dinamico in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}(10 \text{ V})$, una $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{C}$ e cinque $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la tensione $v_c(t)$ ai capi del $\mathcal{C}$, essendo $v_c(0) = 3 \text{ V}$.



• I $\mathcal{R}(100 \Omega)$ e $\mathcal{R}(900 \Omega)$ sono in serie e sono sostituiti da un unico $\mathcal{R}(1000 \Omega)$ in parallelo alla porta pilotata della $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$. Siccome la corrente che li percorre non è di interesse, questo $\mathcal{R}$ viene sostituito da un c.a. . La porta pilotata della $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}(11 v_1)$, il $\mathcal{R}(4 \text{ k}\Omega)$ ai cui capi è definita la tensione pilotante v_1 e il $\mathcal{R}(10 \text{ k}\Omega)$ formano una maglia a cui si può applicare il primo teorema di Miller.

• Il $\mathcal{R}(10 \text{ k}\Omega)$ viene sostituito da un c.a., mentre viene inserito un $\mathcal{R}(10/(1 - 11) = -1 \text{ k}\Omega)$ in parallelo al $\mathcal{R}(4 \text{ k}\Omega)$. La resistenza di questo nuovo $\mathcal{R}$ è negativa : questo risultato è dovuto al verso della tensione pilotata della $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$. A questo punto possiamo fondere i $\mathcal{R}(4 \text{ k}\Omega)$ e $\mathcal{R}(-1 \text{ k}\Omega)$ in un unico $\mathcal{R}(4 \times (-1))/[4 + (-1)] = -4/3 \text{ k}\Omega$.

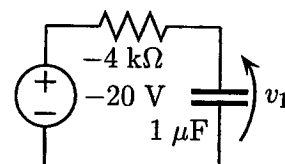


• Applichiamo il teorema di Thevenin al bipolo composto dalla $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_1 = 10 \text{ V})$, dai $\mathcal{R}(2 \text{ k}\Omega)$ e $\mathcal{R}(-4/3 \text{ k}\Omega)$. Otteniamo il modello di Thevenin $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_2) \parallel \mathcal{R}(r)$

$$\text{dove } \hat{v}_2 = [\hat{v}_1 \times (-4/3)]/[2 + (-4/3)] = -20 \text{ V}$$

$$\text{e } r = [2 \times (-4/3)]/[2 + (-4/3)] = -4 \text{ k}\Omega.$$

• Il circuito è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}(-20 \text{ V})$, un $\mathcal{R}(-4 \text{ k}\Omega)$ e un $\mathcal{C}(1 \mu\text{F})$:



• Il valore negativo della resistenza fa pensare allo studente sprovvisto di avere commesso qualche errore di calcolo. Al contrario questo valore deve insospettire : c'è da aspettarsi qualcosa di insolito da questo circuito.

• Essendo il circuito di primo ordine la tensione $v_c(t)$ è l'unica variabile di stato, che può essere valutata mediante la formula nota dalla teoria valida anche nel caso di resistenze e/o capacità negative : $v_c(t) = [v_c(0) - v_c^{\text{sim}}(0)] \exp(t \sigma) + v_c^{\text{sim}}(t)$.

• Il valore iniziale $v_c(0) = 3 \text{ V}$ è un dato del problema.

• La pulsazione naturale reale è uguale a $\sigma = -1/(C r_{\text{eq}}) = -1/[10^{-6} \times (-4 \cdot 10^3)] = +250 \text{ s}^{-1}$. Questo risultato ci dice che l'unica pulsazione naturale del circuito giace nel semipiano destro della pulsazione complessa : quindi il circuito è instabile, perché il corrispondente modo naturale è un esponenziale reale crescente.

• La soluzione similare $v_c^{\text{sim}}(t)$, se esiste, è costante come la tensione impressa : $v_c^{\text{sim}}(t)$ viene calcolata

sostituendo il $\mathcal{C}$ con un c.a. e risolvendo il circuito adinamico risultante: $v_c^{\text{sim}}(t) = \hat{v}_2 = -20 \text{ V}$.

Risultato: La tensione $v_c(t)$ risulta: $v_c(t) = [3 - (-20)] \exp(t/250) + (-20) \text{ V}$.

Commento: La tensione $v_c(t)$ cresce in modo "esplosivo": questo significa che il circuito fisico potrebbe deteriorarsi oppure che qualche componente andrebbe a operare in zone di non-linearità non previste dai modelli che noi abbiamo supposto.

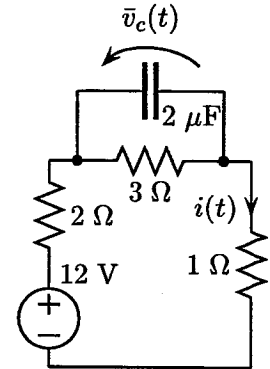
2.13.2 Esercizio E5/09/07/98 : Circuito di ordine 1 già a regime

Il circuito in figura è composto da una $\hat{\mathcal{V}}$ costante, un $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito: Calcolare la corrente $i(t)$ per $t \geq 0$, sapendo che la tensione $v_c(t)$ vale 6 V per $t = 0$.

• Siccome a regime il $\mathcal{C}$ equivale a un c.a., la corrente $i(t)$ raggiunge il valore $i(\infty) = 12/(2+3+1) = 2 \text{ A}$, mentre la tensione $v_c(t)$ coincide con la tensione ai capi del $\mathcal{R}$ (3Ω). Per la regola del partitore di tensione $v_c(\infty)$ vale $(12 \times 3)/(2+3+1) = 6 \text{ V}$.

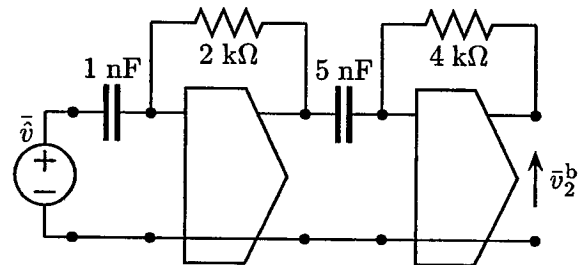
Risultato: Siccome la tensione iniziale $v_c(0)$ e quella a regime $v_c(t \rightarrow \infty)$ sono coincidenti, il circuito è già a regime fin dall'inizio e quindi abbiamo: $i(t) = 2 \text{ A} \forall t \geq 0$.



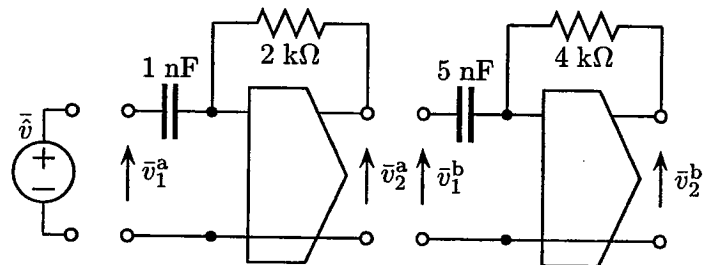
2.13.3 Esercizio AP4 del 23 luglio 1997 : Circuito degenere ordine 0 con due candidate

Il circuito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da due nullori, una $\hat{\mathcal{V}}$, due $\mathcal{C}$, due $\mathcal{R}$.

Quesito: Calcolare la funzione di rete definita dal rapporto $\bar{v}_2^b/\bar{v}$.



• Il circuito consiste nella cascata di due DBT alimentati da una $\hat{\mathcal{V}}$ e con la seconda porta del secondo DBT a vuoto. Ciascun DBT è costituito da un nullore, un $\mathcal{C}$ e un $\mathcal{R}$ ed è unidirezionale e con impedenza d'uscita nulla:



• Le matrici di trasmissione diretta dei due DBT sono

$$\mathbf{T}'^a(s) = \begin{bmatrix} -1/(s C_1 r_1) & 0 \\ -1/r_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}'^b(s) = \begin{bmatrix} -1/(s C_2 r_2) & 0 \\ -1/r_2 & 0 \end{bmatrix}$$

• La matrice di trasmissione della cascata dei due DBT è uguale al prodotto $\mathbf{T}'(s) = \mathbf{T}'^a(s) \mathbf{T}'^b(s)$:

$$\begin{bmatrix} 1/(s^2 C_1 C_2 r_1 r_2) & 0 \\ 1/(s C_2 r_1 r_2) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/(s C_1 r_1) & 0 \\ -1/r_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/(s C_2 r_2) & 0 \\ -1/r_2 & 0 \end{bmatrix}$$

• Per definizione, la matrice $\mathbf{T}'(s)$ consente di esprimere la tensione e la corrente della prima porta in funzione di quelle della seconda porta:

$$\begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{i}_1^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(s^2 C_1 C_2 r_1 r_2) & 0 \\ 1/(s C_2 r_1 r_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_2^b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Risultato: Dalla prima delle equazioni scalari otteniamo la funzione di rete cercata:

$$\frac{\bar{v}_2^b}{\bar{v}} = s^2 C_1 C_2 r_1 r_2 = s^2 1 \cdot 10^{-9} \times 5 \cdot 10^{-9} \times 2 \cdot 10^3 \times 4 \cdot 10^3 = s^2 4 \cdot 10^{-11}$$

Commento : La suddetta funzione di rete è un semplice polinomio di secondo grado, essendo il denominatore una costante. Esaminiamo il circuito nel dominio del tempo. Nessuna delle candidate di stato, le tensioni $v_{c1}(t)$ e $v_{c2}(t)$ ai capi dei due $\mathcal{C}$, è in grado di diventare variabile di stato : la tensione $v_{c1}(t)$ è vincolata algebricamente perché coincide con la tensione impressa $\hat{v}(t)$, mentre la tensione $v_{c2}(t) = \bar{v}_2^a(t)$ è proporzionale alla corrente fluente nel primo $\mathcal{C}$: $v_{c2}(t) = -r_1 i_{c1}(t) \dot{\hat{v}}(t) = -r_1 C_1 \dot{\hat{v}}(t)$. Nonostante l'apparenza, questa equazione è algebrica (nondifferenziale) poiché l'unica derivata coinvolta è quella di una grandezza nota. Quindi il circuito è "doppiamente degenerare" e questo spiega il fatto che il grado del numeratore della funzione di rete sia di due unità superiore a quello del denominatore.

Commento : Ciascuno dei DBT in cascata viene chiamato derivatore per le sue caratteristiche.

3 CIRCUITI OPERANTI IN PSEUDOREGIME CISOIDALE

In questo capitolo vengono presi in considerazione esercizi riguardanti circuiti operanti in pseudoregime cisoidale. Un circuito dinamico lineare è in pseudoregime cisoidale, quando le grandezze impresse di tutte le sorgenti impresseive sono cisoidi con la medesima pulsazione s e la soluzione transitoria è nulla, in seguito a valori particolari delle condizioni iniziali. Questo pseudoregime può esistere solamente nei circuiti costituiti da

cortocircuiti (c.c.) e circuiti aperti (c.a.), sorgenti impresseive di tensione ($\hat{\mathcal{V}}$) e corrente ($\hat{\mathcal{I}}$) cisoidali (con la medesima pulsazione complessa), resistori ($\mathcal{R}$), le quattro sorgenti pilotate ($\mathcal{V}_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ e $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$), nullore ($\mathcal{N}$, amplificatore operazionale idealizzato), trasformatori ideali ($\mathcal{T}$, tr.id.), giratori ($\mathcal{G}$), condensatori ($\mathcal{C}$), induttori ($\mathcal{L}$) e induttori accoppiati ($\mathcal{LL}$).

Nella maggior parte dei problemi la pulsazione s comune alle grandezze impresse non viene specificata: ogni problema di questo tipo deve essere risolto considerando s come una variabile indeterminata. In questo ambito vengono esaminate le funzioni di rete.

La teoria necessaria per risolvere questi esercizi è trattata nei CCap. 17-21-FCE:

Sez. 1 : Funzione impedenza e ammettenza di bipoli composti : Calcolo della funzione impedenza ovvero ammettenza di bipoli composti operanti in pseudoregime cisoidale.

Sez. 2 : Doppî bipoli composti : Calcolo della matrice di una rappresentazione esplicita di doppi bipoli operanti in pseudoregime cisoidale. Notare che, se la pulsazione s non è specificata, gli elementi della matrice sono funzioni di rete, eccetto quelli delle matrici noncardinali.

Sez. 3 : Zero-direzionalità dei doppi bipoli : Determinazione dei valori della pulsazione complessa per cui un doppio bipolo diventa zero-direzionale.

Sez. 4 : Metodo dei nodi : Scrittura delle equazioni risolutive di un circuito operante in pseudoregime cisoidale, mediante il metodo delle tensioni di nodo.

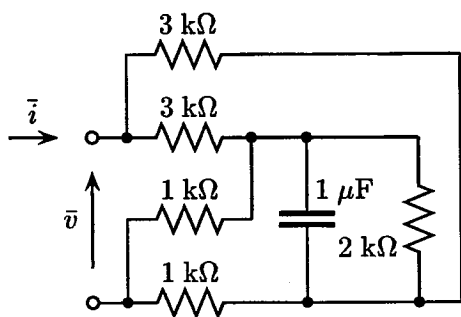
Sez. 5 : Funzioni di rete : Calcolo di una o più funzioni di rete di un circuito operante in pseudoregime cisoidale.

Sez. 6 : Funzioni di rete in $s = 0$ e/o $s \rightarrow \infty$: Calcolo diretto delle funzioni di rete per s nulla e/o infinita.

Sez. 7 : Problemi inversi in pseudoregime cisoidale : Calcolo di alcuni parametri del circuito, una volta note alcune tensioni e/o correnti.

3.1 FUNZIONE IMPEDENZA E AMMETTENZA DI BIPOLI COMPOSITI

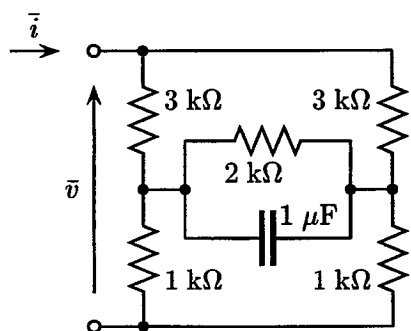
3.1.1 Esercizio E3/17/06/96 : Impedenza di un bipolo con ponte



Il bipolo composito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da un $\mathcal{C}$ e cinque $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare l'impedenza $z(s) = \bar{v}/\bar{i}$ del bipolo composito.

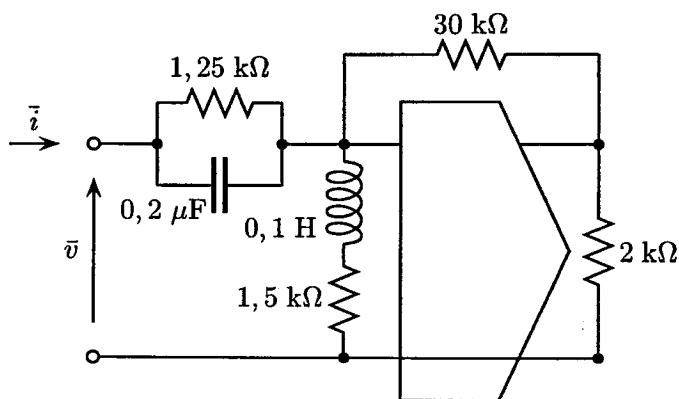
• Il bipolo composito può essere visto come la prima porta di un quadripolo resistivo costituito dai due $\mathcal{R}(3 \text{ k}\Omega)$ e dai due $\mathcal{R}(1 \text{ k}\Omega)$: il quadripolo opera come DBI e quindi è un ponte resistivo ed è chiuso sul bipolo costituito dal parallelo del $\mathcal{C}(1 \mu\text{F})$ e del $\mathcal{R}(2 \text{ k}\Omega)$. Per maggior chiarezza conviene ridisegnarlo in modo più tradizionale.



• Il DBI a ponte è in equilibrio poiché i due prodotti delle resistenze dei rami opposti, $3 \text{ k}\Omega \times 1 \text{ k}\Omega$ e $3 \text{ k}\Omega \times 1 \text{ k}\Omega$, sono coincidenti. In altre parole, il DBI a ponte è zero-direzionale; quindi la sua impedenza d'ingresso (cioè l'impedenza vista alla prima porta) $z(s)$ non dipende dal bipolo connesso alla seconda porta. In particolare $z(s)$ coincide con l'impedenza alla prima porta con la seconda a vuoto cioè con la resistenza r_{11} del DBI a ponte : $z(s) = r_{11}$.

Risultato : La resistenza r_{11} coincide con il parallelo di due $\mathcal{R}$, ciascuno dei quali è formato dalla serie di un $\mathcal{R}(3 \text{ k}\Omega)$ e un $\mathcal{R}(1 \text{ k}\Omega)$. Quindi $z(s)$ non dipende da s e risulta uguale a $2 + j0 \text{ k}\Omega$.

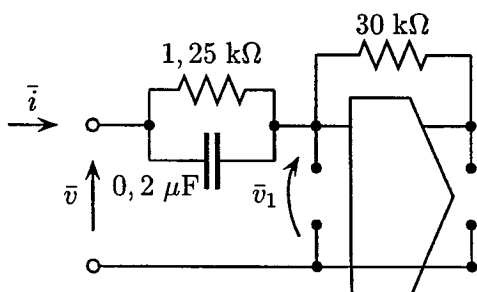
3.1.2 Esercizio E3/05/07/96 : Impedenza di un bipolo con nullore



Il bipolo composito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da un nullore, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e quattro $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare l'impedenza $z(s) = \bar{v}/\bar{i}$ del bipolo composito.

• I due bipoli in parallelo alle due porte del nullore possono essere sostituiti da due c.a. in quanto sono ininfluenti. Sia la tensione $\bar{v}_1$ sia la corrente della prima porta (nullatore) del nullore sono nulle.



Risultato : L'impedenza $z(s)$ da noi cercata coincide con quella del bipolo $\mathcal{R}(1,25 \text{ k}\Omega) \parallel \mathcal{C}(0,20 \mu\text{F})$, dal momento che la tensione $\bar{v}_1 = 0$, essendo ai capi di un nullatore; essa risulta :

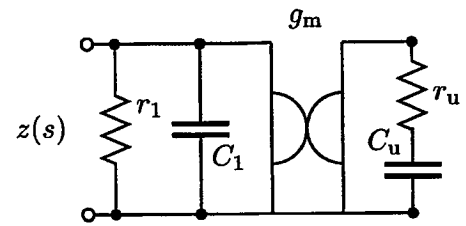
$$z(s) = \frac{1}{0,8 \cdot 10^{-3} + 0,20 \cdot 10^{-6} s} \Omega$$

Commento : Il $\mathcal{R}(30 \text{ k}\Omega)$ non è coinvolto nell'impedenza $z(s)$.

3.1.3 Esercizio E5/13/09/96 : impedenza di un bipolo con giratore

Il bipolo composito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da due $\mathcal{C}$, un giratore e due $\mathcal{R}$. I valori dei parametri dei componenti, compresa la transconduttanza di girazione, sono ignoti (comunque sono tutti positivi).

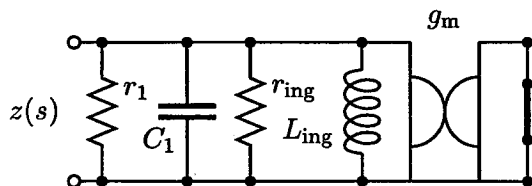
Quesito : Calcolare la struttura dell'impedenza $z(s)$ del bipolo composito, cioè mettere in evidenza i termini del numeratore e del denominatore di $z(s)$ che sono nonnulli.



• Il bipolo $\mathcal{C}\langle C_u \rangle \parallel \mathcal{R}\langle r_u \rangle$ connesso alla seconda porta del $\mathcal{G}$ può essere trasferito in parallelo alla prima porta dello stesso. Esso viene trasformato nel bipolo $\mathcal{L}\langle L_{ing} \rangle \parallel \mathcal{R}\langle r_{ing} \rangle$:

$$v_1 = 1/g_m i_2, \quad i_1 = g_m v_2 \implies z_{ing}(s) = \frac{\bar{v}_1}{\bar{i}_1} = \frac{1}{g_m^2 z_u} = \frac{1}{g_m^2 [r_u + 1/(s C_u)]} = \frac{1}{g_m^2 r_u + g_m^2/(s C_u)}$$

quindi $r_{ing} = 1/(g_m^2 r_u)$ e $L_{ing} = C_u/g_m^2$. Il bipolo composito è costituito dal parallelo dei bipoli $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$, $\mathcal{R}\langle r_{ing} \rangle$, $\mathcal{C}\langle C_1 \rangle$, $\mathcal{L}\langle L_{ing} \rangle$ e della prima porta del $\mathcal{G}$ equivalente a un c.a., essendo la seconda porta chiusa su un c.c. :



• Fondendo $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$ e $\mathcal{R}\langle r_{ing} \rangle$ in un unico $\mathcal{R}\langle r = (r_1 r_{ing})/(r_1 + r_{ing}) \rangle$ e sopprimendo la prima porta del $\mathcal{G}$, il modello del bipolo si riduce al $\mathcal{R}\langle r \rangle \parallel \mathcal{C}\langle C_1 \rangle \parallel \mathcal{L}\langle L_{ing} \rangle$, cioè ad un risonatore non-ideale parallelo.

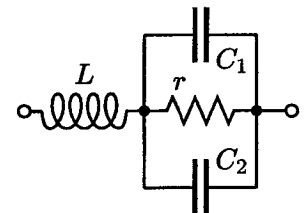
Risultato : La struttura della funzione impedenza di un risonatore nonideale parallelo, nota dalla teoria, è facilmente calcolata :

$$z(s) = \frac{1}{1/(s L_{ing}) + 1/r + s C_1} = \frac{a_1 s}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}$$

3.1.4 Esercizio E3/08/11/96 : Impedenza di un bipolo RLC

Il bipolo composito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da due $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e un $\mathcal{R}$. I parametri dei componenti sono positivi ma ignoti.

Quesito : Trovare la struttura della impedenza $z(s)$, cioè quali coefficienti della $z(s)$ sono nonnulli.



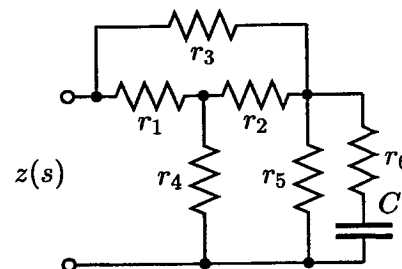
Risultato : Il bipolo è costituito da un $\mathcal{L}$ a sua volta in serie al parallelo di due $\mathcal{C}$ e un $\mathcal{R}$. I due $\mathcal{C}$ possono essere fusi in un unico $\mathcal{C}$ di capacità $C = C_1 + C_2$ che resta in parallelo al $\mathcal{R}$. La funzione impedenza $z_1(s)$ di questo parallelo è il rapporto di una costante su un polinomio di primo grado in s . Per ottenere l'impedenza $z(s)$ del bipolo composito occorre sommare a $z_1(s)$ l'impedenza sL dell' $\mathcal{L}$: $z(s)$ risulta una funzione razionale, il cui denominatore è di primo grado in s e il cui numeratore è di secondo grado :

$$z_1(s) = \frac{1}{1/r + sC} = \frac{a_0}{b_0 + sb_1} \implies z(s) = \frac{a_0}{b_0 + sb_1} + sL = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}{b_0 + b_1 s}$$

3.1.5 Esercizio E3/30/01/97 : Impedenza di un bipolo RC

Il bipolo composito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da un $\mathcal{C}$, e sei $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare, in forma letterale, un valore della pulsazione complessa s in cui l'impedenza $z(s)$ del bipolo composito sia puramente reale e, nello stesso tempo, non dipenda dal valore della capacità C . Sono escluse le soluzioni banali $s = 0$ e $s \rightarrow \infty$.



• Teniamo conto delle seguenti osservazioni :

Il calcolo dell'impedenza $z(s)$ del bipolo composito, come funzione di s , è piuttosto pesante.

Il $\mathcal{C}\langle C \rangle$ è l'unico bipolo presente nel circuito la cui impedenza dipende da s .

Il $\mathcal{C}\langle C \rangle$ è in serie al $\mathcal{R}\langle r_6 \rangle$. L'impedenza $z_1(s)$ di questa serie è $z_1(s) = r_6 + 1/(sC)$.

Tutti i rimanenti bipoli hanno un'impedenza puramente reale e invariante rispetto a s .

Risultato : L'impedenza $z(s)$ è sicuramente reale e non dipende da C qualora sia nulla l'impedenza $z_1(s)$:

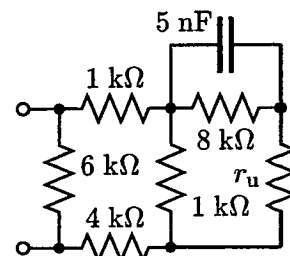
$$z_1(s) = r_6 + \frac{1}{sC} = 0 \implies s = -\frac{1}{r_6 C}$$

Commento : Per valori reali di s l'impedenza $z(s)$ è reale. Inoltre, per i seguenti valori reali $s_1 = 0$, $s_2 \rightarrow \infty$, $s_3 = 1/C$ e $s_4 = -1/(r_6 C)$ i corrispondenti valori dell'impedenza $z(s_1)$, $z(s_2)$, $z(s_3)$ e $z_4(s)$ non dipendono dal valore di C , ma solamente dai valori delle resistenze.

3.1.6 Esercizio E3/23/07/97 : Impedenza di un bipolo RC

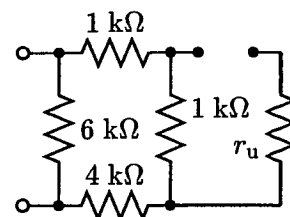
Il bipolo composito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è composto dalla connessione di un $\mathcal{C}$ e sei $\mathcal{R}$. Tra essi cinque hanno un valore noto di resistenza e il sesto ha resistenza r_u .

Quesito : Calcolare il valore s_1 della pulsazione complessa s per cui l'impedenza $z(s)$ del bipolo composito non dipende dal valore di r_u e calcolare il valore di $z(s_1)$.



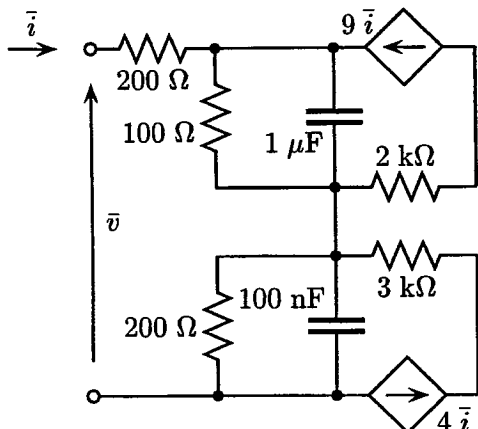
Risultato 1 : All'interno del bipolo composito vi è l'unico bipolo dinamico $\mathcal{C}\langle 5 \text{ nF} \rangle \parallel \mathcal{R}\langle 8 \text{ k}\Omega \rangle$: esso diventa un c.a., qualora la sua ammettenza sia nulla :

$$\frac{1}{8000} + 5 \cdot 10^{-9} s = 0 \implies s_1 = -\frac{1}{8000 \times 5 \cdot 10^{-9}} = -25 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$



Risultato 2 : Per $s = s_1$, il $\mathcal{R}\langle r_u \rangle$ si trova in serie a un c.a. e quindi r_u non ha alcun effetto sull'impedenza $z(s)$. Per $s = s_1$, $z(s)$ coincide con la resistenza del parallelo dei $\mathcal{R}\langle 6 \text{ k}\Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 1 + 1 + 4 = 6 \text{ k}\Omega \rangle$. Quindi si ha che : $z(s_1) = 3 \text{ k}\Omega$.

3.1.7 Esercizio EB/09/07/98 : Impedenza di un bipolo RC con sIpI

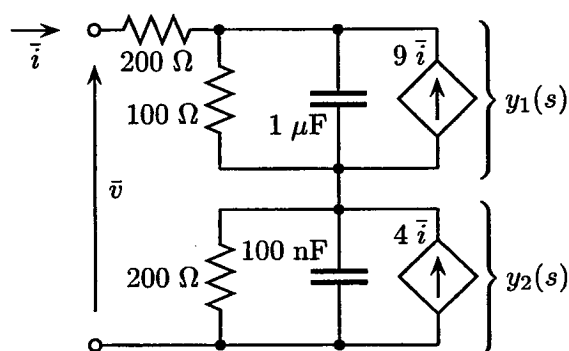


Il bipolo dinamico composto in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è composto da due $\mathcal{I}\mathcal{I}$, due $\mathcal{C}$, e cinque $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare l'impedenza $z(s) = \bar{v}/\bar{i}$ del bipolo composto.

- In serie alla porta pilotata di ciascuna $\mathcal{I}\mathcal{I}$ vi è un $\mathcal{R}$: un $\mathcal{R}$ (2 kΩ) e un $\mathcal{R}$ (3 kΩ), rispettivamente. Essi possono essere sostituiti da due c.c. .

- Il bipolo composto è costituito dalla serie di tre bipoli : un semplice $\mathcal{R}$ (200 Ω), e due bipoli a loro volta composti da un $\mathcal{R}$, un $\mathcal{C}$ e una $\mathcal{I}\mathcal{I}$.



- Le ammettenze $y_1(s)$ e $y_2(s)$ di questi ultimi bipoli sono calcolate tenendo conto che la corrente che attraversa il bipolo $\mathcal{R} \parallel \mathcal{C}$ è proporzionale alla corrente $\bar{i}$:

$$y_1(s) = [1/100 + s 10^{-6}]/(1 + 9)$$

$$y_2(s) = [1/200 + s 10^{-7}]/(1 + 4) ,$$

dove i fattori (1 + 9) e (1 + 4) sono dovuti all'azione delle correnti pilotate delle rispettive $\mathcal{I}\mathcal{I}$: è lo stesso fattore che incontriamo nell'applicare il secondo teorema di MILLER.

- Sommando le tre impedenze dei tre bipoli in serie otteniamo :

$$z(s) = 200 + 1/y_1(s) + 1/y_2(s) = 200 + \frac{10}{0,01 + s 10^{-6}} + \frac{5}{0,005 + s 10^{-7}}$$

$$z(s) = 200 + \frac{1000}{1 + s/10000} + \frac{1000}{1 + s/50000} = 200 + 2000 \frac{s 6/100000}{(1 + s/10000)(1 + s/50000)}$$

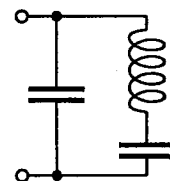
Risultato : Eseguendo i conti si ottiene :

$$z(s) = 200 \frac{s^2 2 10^{-9} + s 7,2 10^{-4} + 1}{(1 + s/10000)(1 + s/50000)}$$

3.1.8 Esercizio E3/09/07/98 : Struttura dell'impedenza di un bipolo RLC

Il bipolo composto in figura contiene due $\mathcal{C}$ e un $\mathcal{L}$ e opera in pseudoregime cisoidale. I valori delle due capacità e dell'induttanza sono incogniti ma comunque positivi.

Quesito : Calcolare la struttura della funzione impedenza $z(s)$, cioè individuare i coefficienti del numeratore e denominatore diversi da zero.



- Noi dobbiamo studiare la struttura dell'impedenza $z(s)$, cioè individuare i coefficienti nonnulli di $z(s)$ che è una funzione razionale in s :

$$z(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + \dots}$$

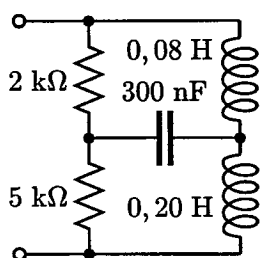
- La struttura del bipolo composto ci suggerisce di esaminare l'ammettenza $y(s) = 1/z(s)$:

$$y(s) = s C_1 + \frac{1}{s L + 1/(s C_2)} = s C_1 + \frac{s C_2}{s^2 L C_2 + 1} = \frac{s^3 L C_2 C_1 + s (C_1 + C_2)}{s^2 L C_2 + 1}$$

Risultato : L'espressione letterale di $y(s)$ ci permette di concludere che solo quattro coefficienti dell'impedenza $z(s)$ sono nonnulli : a_0, a_2, b_1, b_3 .

Commento : Il numeratore e denominatore di $z(s)$ sono, rispettivamente, polinomi pari e dispari in s . Questa proprietà è condivisa dalle impedenze e ammettenze dei bipoli costituiti esclusivamente da $\mathcal{L}$ e $\mathcal{C}$: esse risultano uguali al rapporto di un polinomio dispari e uno pari o viceversa.

3.1.9 Esercizio E4/28/07/98 : Zeri e poli dell'impedenza di un bipolo RLC



Il bipolo composito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da due $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare gli zeri e i poli dell'impedenza $z(s)$ del bipolo composito.

- Nel bipolo composito compare un ponte costituito dai $\mathcal{R}$ (2 kΩ) e $\mathcal{R}$ (5 kΩ) e dagli $\mathcal{L}$ (0,20 H) e $\mathcal{L}$ (0,08 H) , mentre la seconda porta è chiusa sul $\mathcal{C}$ (300 nF) .

- Il ponte è in equilibrio poiché i prodotti delle impedenze dei rami opposti sono uguali per qualsiasi valore di s : $2000 \times 0,20 \text{ s} = 5000 \times 0,08 \text{ s}$.

- Quindi il ponte costituisce un DBI zerodirezionale : l'impedenza alla prima porta $z(s)$ non risente della presenza del $\mathcal{C}$ (300 nF) , che è sostituito convenientemente con un c.a. .

$$z(s) = \frac{(5000 + 2000) \times (0,20 + 0,08) s}{(5000 + 2000) + (0,20 + 0,08) s} = \frac{1960 s}{7000 + 0,28 s} \Omega$$

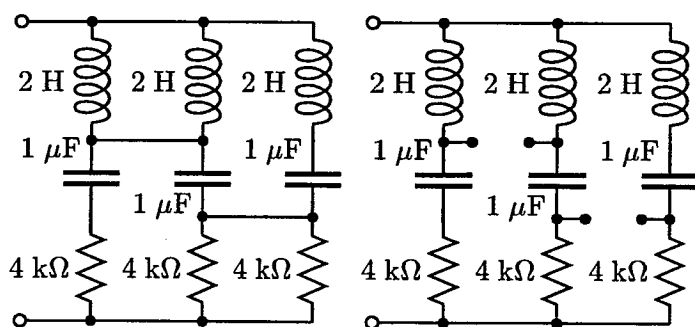
Risultato : l'unico zero è nell'origine $s_z = 0 \text{ s}^{-1}$ e l'unico polo è reale e negativo $s_p = -25000 \text{ s}^{-1}$.

3.1.10 Esercizio E3/11/09/98 : Impedenza di un bipolo con ponti in equilibrio

Il bipolo composito in figura opera in pseudoregime cisoidale.

Quesito : Calcolare l'impedenza $z(s)$ del bipolo composito.

- All'interno del bipolo vi sono due c.c. : sostituiamoli con due c.a. e investighiamo la situazione : il bipolo composito risulta costituito dal parallelo di tre bipoli con la stessa struttura serie e gli stessi valori dei parametri. Questo dimostra che le tensioni ai capi dei due c.a. sostitutivi sono nulle, come la tensione ai capi della seconda porta a vuoto di un ponte in equilibrio.

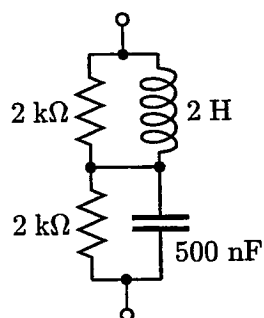


Risultato : L'impedenza non risente della sostituzione dei due c.c. con i due c.a. . Quindi essa risulta uguale ad un 1/3 di quella comune ai tre bipoli connessi in parallelo.

$$z(s) = [s 2 + 4000 + 1/(s 10^{-6})]/3$$

$$z(s) = s 2/3 + 4000/3 + 1/(s 10^{-6} 3) \Omega$$

3.1.11 Esercizio E3/02/02/99 : Zeri e poli dell'impedenza di un bipolo



Il bipolo in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare il numero di zeri e poli dell'impedenza $z(s)$ del bipolo composito e la loro posizione nel piano complesso.

• Il bipolo di impedenza $z(s)$ è costituito dalla serie di due bipoli ciascuno dei quali è costituito dal parallelo di due bipoli elementari :

$$z(s) = \frac{2000 \times s \cdot 2}{2000 + s \cdot 2} + \frac{2000 / (s \cdot 0,5 \cdot 10^{-6})}{2000 + 1 / (s \cdot 0,5 \cdot 10^{-6})} = \frac{2000 s + 2 \cdot 10^6}{1000 + s} = 2000 \Omega$$

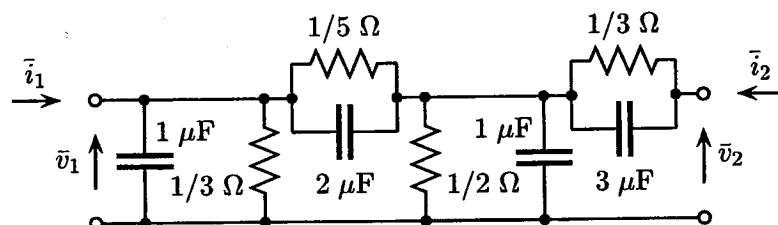
Risultato : Siccome l'impedenza $z(s)$ non dipende dalla pulsazione complessa s , essa non ha alcun zero e polo.

3.2 DOPPI BIPOLI COMPOSITI

3.2.1 Esercizio EC/23/07/96 : Matrice impedenza di un DB a scala

Il DBT composito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da quattro $\mathcal{C}$ e quattro $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la matrice impedenza $\mathbf{Z}(s)$ del DBT composito.



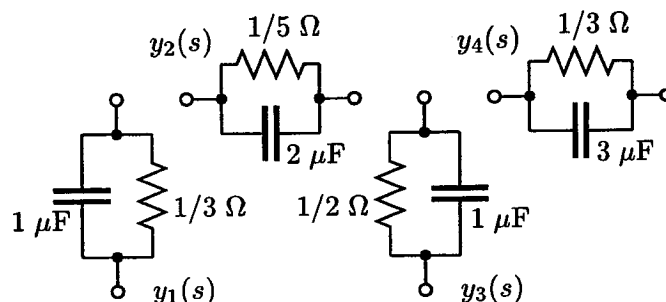
• Il DBT composito è costituito dalla connessione a scala di quattro bipoli. Le loro ammettenze sono :

$$y_1(s) = 3 + s \cdot 10^{-6} \text{ S}$$

$$y_2(s) = 5 + s \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ S}$$

$$y_3(s) = 2 + s \cdot 10^{-6} \text{ S}$$

$$y_4(s) = 3 + s \cdot 3 \cdot 10^{-6} \text{ S}$$



• Il DBT composito può essere visto come un DBT a "II" (triangolo) dei tre bipoli d'ammettenza $y_1(s)$, $y_2(s)$ e $y_3(s)$ con il bipolo d'ammettenza $y_4(s)$ in serie alla seconda porta.

Alternativamente, il DBT composito può essere visto come un DBT a "T" (stella) dei tre bipoli d'ammettenza $y_2(s)$, $y_3(s)$ e $y_4(s)$ con il bipolo d'ammettenza $y_1(s)$ in parallelo alla prima porta.

• Delle suddette "visioni" del DBT conviene prendere in considerazione la prima dal momento che conduce a calcoli molto più semplici. Infatti il calcolo della matrice delle ammettenze $\mathbf{Y}^a(s)$ del DBT a II è più facile poiché l'ammettenza dei bipoli è un polinomio di primo grado in s .

$$\mathbf{Y}^a(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) + y_2(s) & -y_2(s) \\ -y_2(s) & y_3(s) + y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot 3 \cdot 10^{-6} + 8 & -s \cdot 2 \cdot 10^{-6} - 5 \\ -s \cdot 2 \cdot 10^{-6} - 5 & s \cdot 3 \cdot 10^{-6} + 7 \end{bmatrix} \text{ S}$$

• Siccome dobbiamo aggiungere in serie alla seconda porta il quarto bipolo conviene prima trovare la matrice $\mathbf{Z}^a(s)$ del DBT a II invertendo la matrice $\mathbf{Y}^a(s)$:

$$\mathbf{Z}^a(s) = [\mathbf{Y}^a(s)]^{-1} = \frac{1}{s^2 \cdot 5 \cdot 10^{-12} + s \cdot 25 \cdot 10^{-6} + 31} \begin{bmatrix} s \cdot 3 \cdot 10^{-6} + 7 & s \cdot 2 \cdot 10^{-6} + 5 \\ s \cdot 2 \cdot 10^{-6} + 5 & s \cdot 3 \cdot 10^{-6} + 8 \end{bmatrix} \Omega$$

Notare che gli elementi della matrice $\mathbf{Z}^a(s)$ hanno il denominatore comune di secondo grado. Quindi vi sono due soli poli, nonostante la presenza di tre $\mathcal{C}$. Ma essi costituiscono una maglia per cui

all'interno del DBT a Π vi sono tre candidate di stato ma due sole variabili di stato.

Risultato : La matrice $Z(s)$ del DBT complessivo risulta uguale alla precedente matrice $Z^a(s)$ con l'eccezione del termine $z_{22}(s)$ che deve essere accresciuto dell'impedenza $1/y_4(s)$ del bipolo di ammettenza $y_4(s)$ in serie alla seconda porta :

$$Z(s) = \begin{bmatrix} z_{11}^a(s) & z_{12}^a(s) \\ z_{21}^a(s) & z_{22}^a(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/y_4(s) \end{bmatrix} \Omega$$

$$Z(s) = \begin{bmatrix} \frac{s \cdot 3 \cdot 10^{-6} + 7}{s^2 \cdot 5 \cdot 10^{-12} + s \cdot 25 \cdot 10^{-6} + 31} & \frac{s \cdot 2 \cdot 10^{-6} + 5}{s^2 \cdot 5 \cdot 10^{-12} + s \cdot 25 \cdot 10^{-6} + 31} \\ \frac{s \cdot 2 \cdot 10^{-6} + 5}{s^2 \cdot 5 \cdot 10^{-12} + s \cdot 25 \cdot 10^{-6} + 31} & \frac{s^2 \cdot 14 \cdot 10^{-12} + s \cdot 58 \cdot 10^{-6} + 55}{(s^2 \cdot 5 \cdot 10^{-12} + s \cdot 25 \cdot 10^{-6} + 31)(s \cdot 3 \cdot 10^{-6} + 3)} \end{bmatrix} \Omega$$

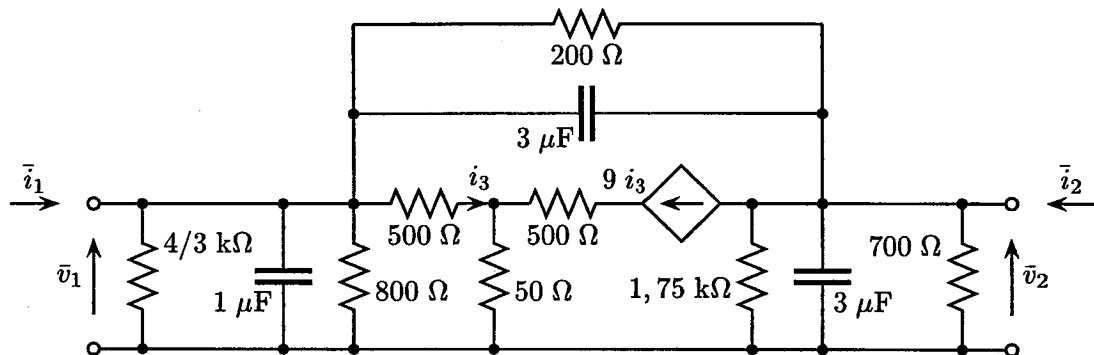
Le due frazioni costituenti l'impedenza a vuoto della seconda porta $z_{22}(s)$ possono essere facilmente ricondotte ad un'unica frazione.

Commento : L'impedenza a vuoto della seconda porta $z_{22}(s)$ ha tre poli, mentre le (trans)impedenze $z_{11}(s)$ e $z_{12}(s) = z_{21}(s)$ hanno due soli poli.

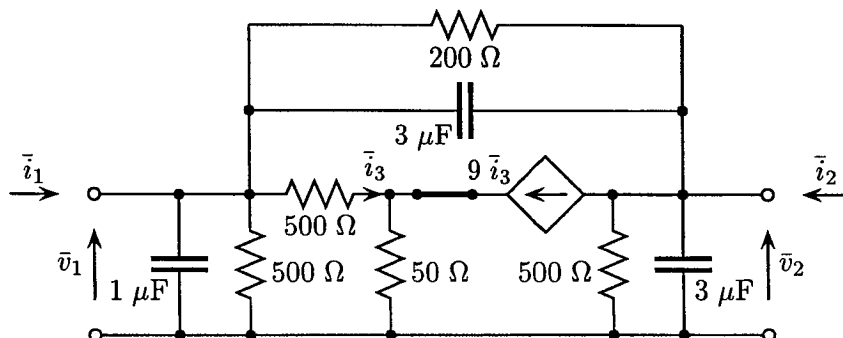
3.2.2 Esercizio EA/30/01/97 : Rappres. cardinale di un DBT dinamico

Il DBT composto in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da una $\mathcal{I}_T$, tre $\mathcal{C}$ e otto $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare una delle rappresentazioni cardinali del DBT.

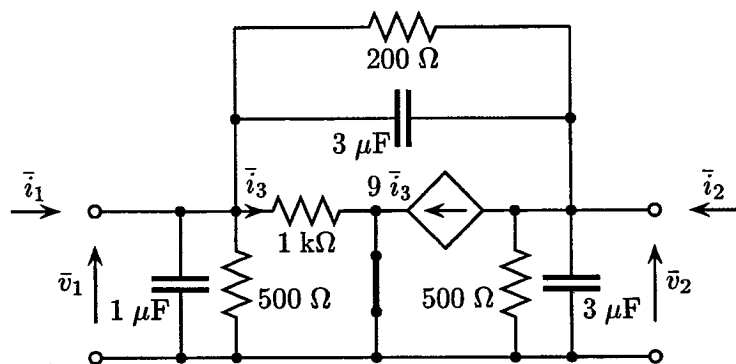


• Nel DBT composto sono assenti sorgenti impulsive. Quindi è sufficiente calcolare la matrice della rappresentazione cardinale. I $\mathcal{R}\langle 4/3 \text{ k}\Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 800 \Omega \rangle$ sono in parallelo e vengono sostituiti da un unico $\mathcal{R}\langle (4000/3 \times 800)/(800 + 4000/3) = 500 \Omega \rangle$. Anche i due $\mathcal{R}\langle 1750 \Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 700 \Omega \rangle$ sono in parallelo e vengono sostituiti da un unico $\mathcal{R}\langle (1750 \times 700)/(700 + 1750) = 500 \Omega \rangle$. Il $\mathcal{R}\langle 500 \Omega \rangle$ in serie alla porta pilotata della $\mathcal{I}_T$ può essere sostituito da un c.c. . Il DBT composto dinamico costituito da una $\mathcal{I}_T$, tre $\mathcal{C}$ e cinque $\mathcal{R}$:



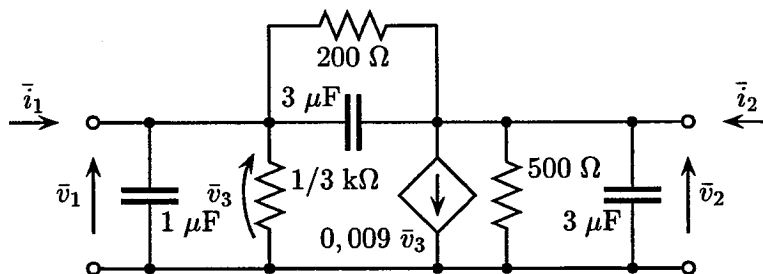
• Consideriamo il taglio costituito dalla porta pilotata della $\mathcal{I}_T\langle 9 i_3 \rangle$, il $\mathcal{R}\langle 50 \Omega \rangle$ e il $\mathcal{R}\langle 500 \Omega \rangle$ percorso dalla corrente pilotante $\bar{i}_3$.

• In accordo al secondo teorema di Miller, il $\mathcal{R}(50\ \Omega)$ viene sostituito da un c.c. e viene inserito un $\mathcal{R}(50 \times (9+1) = 500\ \Omega)$ in serie al $\mathcal{R}(500\ \Omega)$ pre-esistente, in cui scorre la $\bar{i}_3$. I due $\mathcal{R}(500\ \Omega)$ in serie sono fusi in un unico $\mathcal{R}(1000\ \Omega)$.



Il DBT composito dinamico è costituito da una $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$, tre $\mathcal{C}$ e quattro $\mathcal{R}$:

• Sostituiamo la $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}(9\ \bar{i}_3)$ con una $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}(0,009\ \bar{v}_3)$ avendo rimpiazzato la corrente $\bar{i}_3$ con la tensione $\bar{v}_3$ ai capi del $\mathcal{R}(1000\ \Omega)$. Questo $\mathcal{R}$ è in parallelo a uno dei $\mathcal{R}(500\ \Omega)$ e viene fuso con questo in un unico $\mathcal{R}(1/3\ \text{k}\Omega)$.



• Il DBT composito dinamico è costituito da una $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}$, tre $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$.

• Il DBT composito può essere visto come il parallelo di due DBT : il primo DBT è costituito dal triangolo di tre bipoli, ciascuno formato dal parallelo di un $\mathcal{R}$ e un $\mathcal{C}$, mentre il secondo DBT è semplicemente una $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}$ (adinamica) tripolare.

La matrice delle ammettenze del DBT a triangolo e quella delle ammettenze della $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}$ sono :

$$\mathbf{Y}^a = \begin{bmatrix} s\ 4\ 10^{-6} + 8\ 10^{-3} & -s\ 3\ 10^{-6} - 5\ 10^{-3} \\ -s\ 3\ 10^{-6} - 5\ 10^{-3} & s\ 6\ 10^{-6} + 7\ 10^{-3} \end{bmatrix} \text{ S} , \quad \mathbf{Y}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9\ 10^{-3} & 0 \end{bmatrix} \text{ S}$$

Risultato : Sommando le due matrici delle ammettenze, otteniamo quella del DBT composito, cioè la sua rappresentazione controllata in tensione :

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{Y}^a + \mathbf{Y}^b = \begin{bmatrix} s\ 4\ 10^{-6} + 8\ 10^{-3} & -s\ 3\ 10^{-6} - 5\ 10^{-3} \\ -s\ 3\ 10^{-6} - 5\ 10^{-3} & s\ 6\ 10^{-6} + 7\ 10^{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9\ 10^{-3} & 0 \end{bmatrix}$$

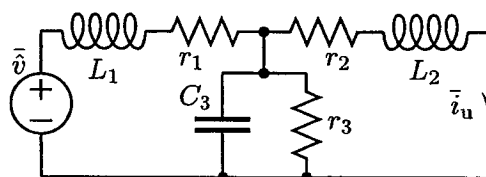
$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} s\ 4\ 10^{-6} + 8\ 10^{-3} & -s\ 3\ 10^{-6} - 5\ 10^{-3} \\ -s\ 3\ 10^{-6} + 4\ 10^{-3} & s\ 6\ 10^{-6} + 7\ 10^{-3} \end{bmatrix} \text{ S}$$

Commento : La matrice $\mathbf{Y}(s)$ non è simmetrica poiché la $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ rende nonreciproco il DBT.

3.2.3 Esercizio EC/30/01/97 : Matrice di trasmissione di un DBT

Il circuito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{C}$, due $\mathcal{L}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la matrice di trasmissione diretta $\mathbf{T}'(s)$ del DBT segnato dalla linea tratteggiata e la transammettenza $y_m(s) = \bar{i}_u / \bar{v}$.



Rispondiamo per il momento alla prima domanda del problema :

• Il DBT evidenziato all'interno del circuito è costituito da una stella di tre bipoli dinamici : per semplificare l'organizzazione dei calcoli conviene introdurre le rispettive immettenze :

$$z_1(s) = s\ L_1 + r_1 , \quad y_3(s) = s\ C_3 + 1/r_3 , \quad z_2(s) = s\ L_2 + r_2$$

• D'altra parte esso può anche essere visto come la cascata di tre DBT : il primo e il terzo sono formati da uno dei suddetti bipoli e un c.c. mentre quello intermedio può essere visto come un bipolo a quattro terminali. Esprimendo le grandezze alla prima porta in funzione di quelle alla seconda porta, noi abbiamo le tre matrici di trasmissione dei tre DBT :

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y_3(s) & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & z_2(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Eseguendo il prodotto delle tre matrici nell'ordine indicato si ottiene la matrice $T'(s)$ del doppio bipolo composito :

$$T'(s) = \begin{bmatrix} 1 & z_1(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y_3(s) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_2(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + z_1(s) y_2(s) & z_1(s) + z_2(s) + z_2(s) y_3(s) z_1(s) \\ y_3(s) & 1 + z_2(s) y_3(s) \end{bmatrix}$$

Risultato 1 : Sostituendo le espressioni di $z_1(s)$, $y_3(s)$ e $z_2(s)$, otteniamo i quattro elementi della matrice $T'(s)$ in termini di s :

$$t'_{11}(s) = s^2 C_3 L_1 + s (C_3 r_1 + L_1/r_3) + r_1/r_3 + 1$$

$$t'_{12}(s) = s^3 L_1 C_3 L_2 + s^2 (L_1 C_3 r_2 + L_2 C_3 r_1 + L_1 L_2/r_3) + s (L_1 r_2/r_3 + L_2 r_1/r_3 + C_3 r_1 r_2 + L_1 + L_2) + r_1 + r_2 + r_1 r_2/r_3$$

$$t'_{21}(s) = s C_3 + 1/r_3$$

$$t'_{22}(s) = s^2 C_3 L_2 + s (C_3 r_2 + L_2/r_3) + r_2/r_3 + 1$$

• Rispondiamo ora alla seconda domanda del problema : per calcolare la transammettenza $F(s) = \bar{i}_u/\bar{v}$ conviene utilizzare al massimo i calcoli già fatti in precedenza. A questo fine confrontiamo la definizione della matrice di trasmissione diretta e della transammettenza $y_m(s)$:

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{i}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t'_{11}(s) & t'_{12}(s) \\ t'_{21}(s) & t'_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix}, \quad y_m(s) = \frac{\bar{i}_u}{\bar{v}} \Big|_{\bar{v}_2=0}$$

• Tenendo conto che $\bar{v}_1 = \bar{v}$ e $\bar{i}_2 = \bar{i}_u$ si ha : $\bar{v} = t'_{11}(s) \bar{v}_2 + t'_{12}(s) \bar{i}_u \implies \bar{v} = t'_{12}(s) \bar{i}_u$.

Risultato 2 : Si ottiene immediatamente che la transammettenza $y_m(s) = \bar{i}_u/\bar{v}$ risulta uguale all'inverso dell'elemento $t'_{12}(s)$ della matrice $T'(s)$ riportato nel **Risultato 1**.

$$y_m(s) = \frac{1}{t'_{12}(s)}$$

Commento : Tutti e quattro gli elementi della matrice $T'(s)$ risultano semplici polinomi in s e non funzioni razionali. Questo fatto è dovuto alla mancanza di zeri di trasmissione finiti nel DBT dinamico, come risulta evidente nell'espressione analitica della $y_m(s)$.

3.2.4 Esercizio EC/20/02/97 : Matrice cardinale di un DBT composito

Il DBT composito in figura è costituito da una $\mathcal{V}_V$, una $\mathcal{I}_I$, due $\mathcal{C}$ e cinque $\mathcal{R}$ ed opera in pseudoregime cisoidale.

Quesito : Calcolare una delle matrici cardinali del DBT composito.

- Il $\mathcal{R}$ (3 k Ω) in serie alla porta pilotata della $\mathcal{I}_I$ è rimpiazzato da un c.c. .

- Vi è una maglia costituita dalla porta pilotata della $\mathcal{V}_V$ (9 $\bar{v}_3$), dal bipolo $\mathcal{C}$ (1 nF) $\parallel$ $\mathcal{R}$ (20 k Ω) e dal $\mathcal{R}$ (2 k Ω), soggetto alla tensione pilotante $\bar{v}_3$.

- In accordo al primo teorema di Miller, il bipolo costituito dal parallelo del $\mathcal{C}$ (1 nF) e del $\mathcal{R}$ (20 k Ω) viene sostituito da un c.a., mentre viene inserito in parallelo al $\mathcal{R}$ (2 k Ω) un bipolo costituito dal parallelo di un $\mathcal{R}$ (20/(9 + 1) = 2 k Ω) e di un $\mathcal{C}$ (1 $\times$ (9 + 1) = 10 nF). I due $\mathcal{R}$ (2 k Ω) in parallelo vengono fusi in un unico $\mathcal{R}$ (1 k Ω) .

- Il DBT composito è costituito da una $\mathcal{V}_V$, una $\mathcal{I}_I$, due $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$. Siccome la porta pilotata della $\mathcal{V}_V$ (9 $\bar{v}_3$) è in serie a quella della $\mathcal{I}_I$ (4 $\bar{i}_1$), essa viene sostituita da un c.c. . Il DBT composito è costituito da una $\mathcal{I}_I$, due $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$:

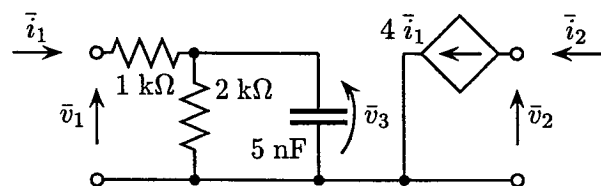
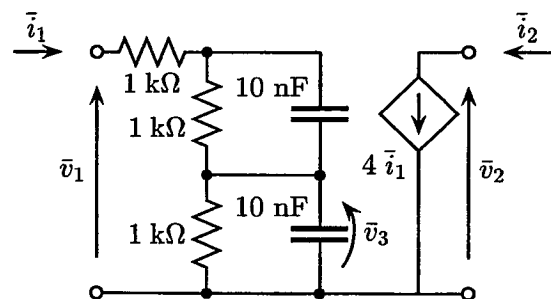
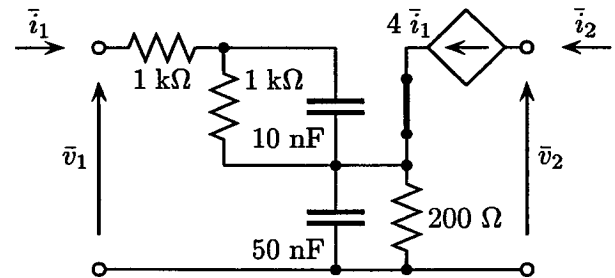
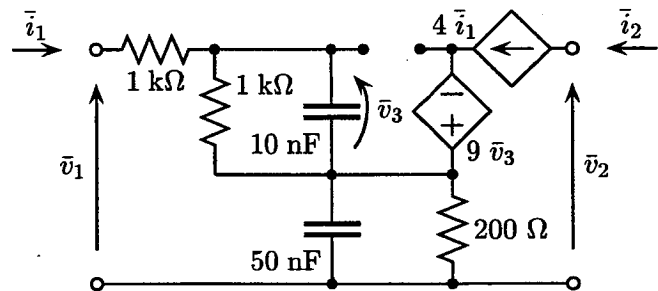
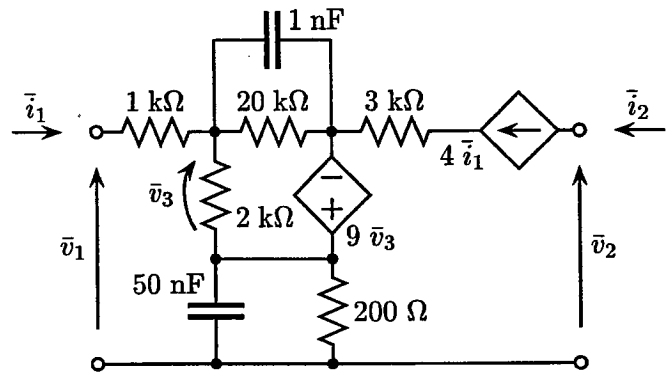
- Nel DBT compare un taglio nodale in cui confluiscono la porta pilotata della $\mathcal{I}_I$ (4 $\bar{i}_1$), i $\mathcal{R}$ (200 Ω), $\mathcal{R}$ (1 k Ω), $\mathcal{C}$ (50 nF) e $\mathcal{C}$ (10 nF) .

- Seguendo il secondo teorema di Miller, il $\mathcal{R}$ (200 Ω) $\parallel$ $\mathcal{C}$ (50 nF) è sostituito da un c.c., mentre in serie al $\mathcal{R}$ (1 k Ω) $\parallel$ $\mathcal{C}$ (10 nF) è inserito il $\mathcal{R}$ (200 $\times$ (4 + 1) = 1 k Ω) $\parallel$ $\mathcal{C}$ (50/(4 + 1) = 10 nF). Il DBT è costituito da una $\mathcal{I}_I$, due $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$:

- La corrente $\bar{i}_1$ fluisce nella serie di tre bipoli : un $\mathcal{R}$ (1 k Ω) e due bipoli composti identici $\mathcal{R}$ (1 k Ω) $\parallel$ $\mathcal{C}$ (10 nF). Questi ultimi due sono sostituiti da un unico bipolo composito $\mathcal{R}$ (1 + 1 = 2 k Ω) $\parallel$ $\mathcal{C}$ (10/2 = 5 nF).

- Il DBT composito è costituito da una $\mathcal{I}_I$, un $\mathcal{C}$ e due $\mathcal{R}$.

- Il bipolo composto dai $\mathcal{R}$ (1 k Ω), $\mathcal{R}$ (2 k Ω) e dal $\mathcal{C}$ (5 nF) è in parallelo alla prima porta e stabilisce un vincolo tra $\bar{v}_1$ e $\bar{i}_1$:



$$\bar{v}_1 = \left[1000 + \frac{2000}{1 + 2000 \times 5 \cdot 10^{-9} s} \right] \bar{i}_1 = z_1(s) \bar{i}_1$$

- La seconda equazione è stabilita dalla $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}\langle 4 \bar{i}_1 \rangle$ che vincola le due correnti : $\bar{i}_2 = 4 \bar{i}_1$.

Risultato : Il DBT composito è unidirezionale $1 \rightarrow 2$ per la presenza della $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}\langle 4 \bar{i}_1 \rangle$: le matrici $\mathbf{Z}(s)$ e $\mathbf{H}''(s)$ non esistono poiché, rispettivamente, le correnti $\bar{i}_1$ e $\bar{i}_2$ e le grandezze $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$ sono vincolate tra loro. Le altre matrici cardinali $\mathbf{Y}(s)$ e $\mathbf{H}'(s)$ esistono :

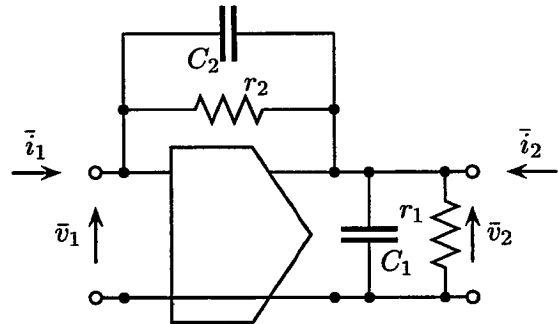
$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} 1/z_1(s) & 0 \\ 4/z_1(s) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}'(s) = \begin{bmatrix} z_1(s) & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2.5 Esercizio E3/13/01/98 : Rappresentazione di un DBT con nullore

Il DBT in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da un nullore tripolare, due $\mathcal{C}$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare le due relazioni costitutive del doppio bipolo in forma letterale.

- Essendo il $\mathcal{R}\langle r_1 \rangle$ e il $\mathcal{C}\langle C_1 \rangle$ in parallelo alla porta d'uscita del nullore (noratore), essi sono sostituiti da due c.a.



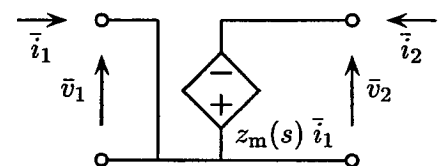
- La prima relazione costitutiva è ottenuta dall'osservazione che la tensione v_1 della porta 1 coincide con quella dell'ingresso del nullore (cioè del nullatore) : $\bar{v}_1 = 0$.

- All'interno del doppio bipolo composito vi è una maglia costituita dalle due porte del nullore e dal bipolo formato dal parallelo del $\mathcal{R}\langle r_2 \rangle$ e del $\mathcal{C}\langle C_2 \rangle$. La corrente che fluisce in questo bipolo coincide con la corrente $\bar{i}_1$ della prima porta. Quindi si ha la seconda relazione costitutiva :

$$\bar{v}_2 = - \frac{r_2}{1 + s r_2 C_2} \bar{i}_1$$

Risultato : Le due relazioni costitutive del DBT composito sono riorganizzate in forma matriciale corrispondente alla rappresentazione controllata in corrente : la matrice impedenza $\mathbf{Z}(s)$ ha un solo elemento diverso da zero : $z_{21}(s) = -z_m(s) = -r_2/(1 + s r_2 C_2) \bar{i}_1$, da cui si conclude che il DBT è una sorgente pilotata dinamica.

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -r_2/(1 + s r_2 C_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix}$$

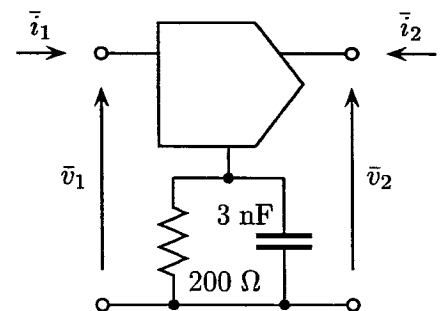


3.2.6 Esercizio E6/27/01/98 : Matrice ammettenza di un DBT con nullore

Il DBT in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da un nullore, un $\mathcal{C}$ e un $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la matrice ammettenza del DBT.

- Il bipolo composto dal parallelo del $\mathcal{R}\langle 200 \Omega \rangle$ e del $\mathcal{C}\langle 3 \text{ nF} \rangle$ è in serie al terminale comune del nullore.
- La prima relazione costitutiva è ottenuta dall'osservazione che la corrente i_1 della porta 1 coincide con quella dell'ingresso del nullore (cioè del nullatore) e quindi è nulla : $\bar{i}_1 = 0$.



- La tensione $\bar{v}_1$ del doppio bipolo tripolare composito coincide con la tensione ai capi del bipolo resistivo-capacitivo. A sua volta la corrente fluente in questo bipolo coincide a meno del segno con

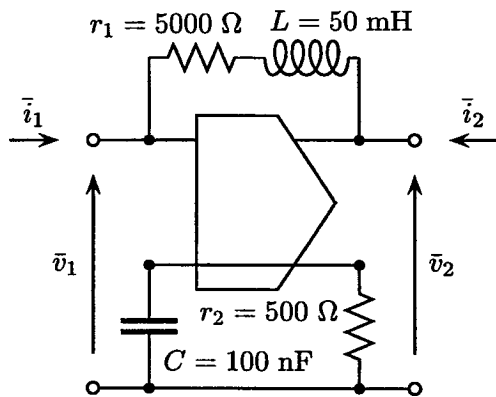
la corrente $\bar{i}_2$. Si ha : $\bar{i}_2 = (1/200 + s \cdot 3 \cdot 10^{-9}) \bar{v}_1$.

Risultato : Le due relazioni costitutive del doppio bipolo composito sono riorganizzate in forma matriciale :

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/200 + s \cdot 3 \cdot 10^{-9} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix}$$

Esse corrispondono alla rappresentazione controllata in tensione del doppio bipolo composito e la matrice delle rappresentazione è la matrice ammettenza $Y(s)$ del DBT. Siccome solo l'elemento $y_{21}(s)$ della matrice è nonnullo, il doppio bipolo è una $\mathcal{I}_V$ dinamica (vedere Cap. 18-FCE).

3.2.7 Esercizio EB/25/06/98 : Matrice impedenza di un DBT con nullore



Il DBT dinamico in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da un nullore tripolare, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la matrice ammettenza $Y(s)$.

• Calcoliamo l'ammettenza

$$y_0(s) = s \cdot 10^{-7} + 0,002 \text{ } \Omega$$

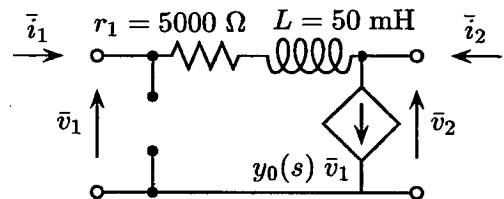
del bipolo costituito dal parallelo del $\mathcal{R}(500 \text{ } \Omega)$ e del $\mathcal{C}(100 \text{ nF})$ e connesso in serie al terminale comune del nullore.

• Calcoliamo l'ammettenza

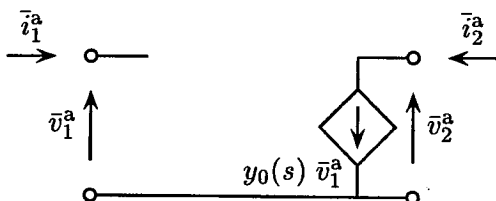
$$y_1(s) = 1/(5000 + s \cdot 0,05) \text{ } \Omega$$

del bipolo costituito dalla serie del $\mathcal{R}(5000 \text{ } \Omega)$ e del $\mathcal{L}(50 \text{ mH})$ e connesso trasversalmente al nullore tripolare.

• Il DBT composto dal nullore tripolare e dal bipolo di impedenza $y_0(s)$ in serie al terminale comune è equivalente a una $\mathcal{I}_V$ (dinamica) la cui transammettenza è proprio l'ammettenza $y_0(s)$, come risulta in figura.

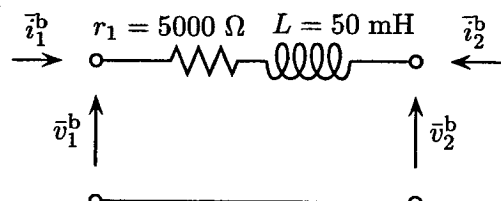


• Il DBT dinamico risulta composto dal parallelo di due DBT : la $\mathcal{I}_V$ dinamica e la coppia trasversale del bipolo di ammettenza $y_1(s)$ e di un c.c. .



• La matrice ammettenza della $\mathcal{I}_V$ dinamica risulta :

$$Y^a(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_0(s) & 0 \end{bmatrix}$$



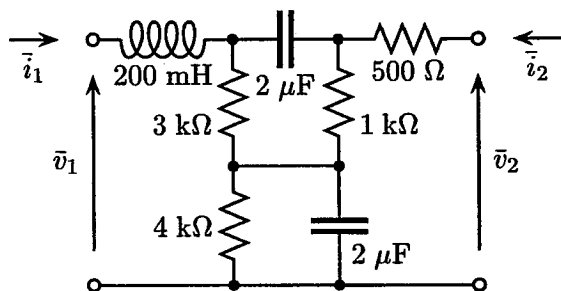
• La matrice ammettenza del DBT costituito dalla suddetta coppia trasversale risulta :

$$Y^b(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) & -y_1(s) \\ -y_1(s) & y_1(s) \end{bmatrix}$$

Risultato : Sommando le matrici $Y^a(s)$ e $Y^b(s)$ otteniamo la matrice ammettenza $Y(s)$ del DBT originario :

$$Y(s) = Y^a(s) + Y^b(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) & -y_1(s) \\ y_0(s) - y_1(s) & y_1(s) \end{bmatrix}$$

3.2.8 Esercizio EC/23/02/99 : Zeri e poli delle (trans-)impedenze



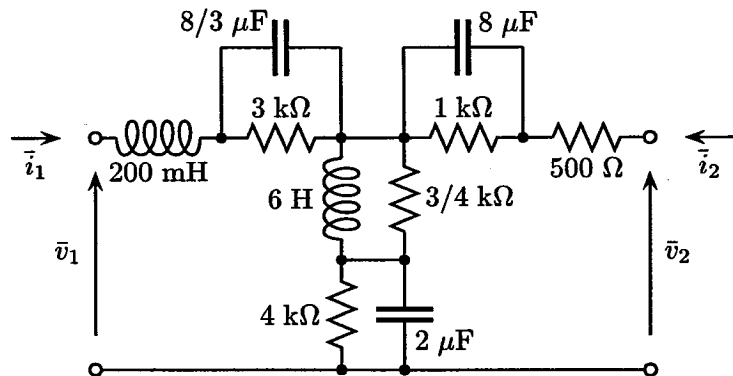
Il DBT in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da un $\mathcal{L}$, due $\mathcal{C}$ e quattro $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare gli zeri e i poli di ciascuno dei quattro elementi della matrice impedenza $Z(s)$.

• Il triangolo costituito dai $\mathcal{R}\langle 3 \text{ k}\Omega \rangle$, $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$ e dal $\mathcal{C}\langle 2 \mu\text{F} \rangle$ viene sostituito dalla stella equivalente.

- Ciascun ramo della stella è costituito da due bipoli in parallelo :

$\mathcal{R}\langle 3 \text{ k}\Omega \rangle \parallel \mathcal{C}\langle 8/3 \mu\text{F} \rangle$, $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle \parallel \mathcal{C}\langle 8 \mu\text{F} \rangle$, $\mathcal{R}\langle 3/4 \text{ k}\Omega \rangle \parallel \mathcal{L}\langle 6 \text{ H} \rangle$.



• Il DBT originario è equivalente a una stella di tre bipoli composti, le cui impedenze sono :

$$z_a(s) = s \cdot 0,2 + \frac{3000}{1 + s \cdot 8 \cdot 10^{-3}}$$

$$z_b(s) = 500 + \frac{1000}{1 + s \cdot 8 \cdot 10^{-3}}$$

$$z_c(s) = \frac{4000}{1 + s \cdot 8 \cdot 10^{-3}} + \frac{s \cdot 6}{1 + s \cdot 8 \cdot 10^{-3}}$$

- Riduciamo le tre suddette impedenze ad un'unica frazione :

$$z_a(s) = \frac{3000 + s \cdot 0,2 + s^2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3}}{1 + s \cdot 8 \cdot 10^{-3}}, \quad z_b(s) = \frac{1500 + s \cdot 4}{1 + s \cdot 8 \cdot 10^{-3}}, \quad z_c(s) = \frac{4000 + s \cdot 6}{1 + s \cdot 8 \cdot 10^{-3}}$$

Calcoliamo gli elementi $z_{11}(t)$, $z_{12}(t) = z_{21}(t)$ e $z_{22}(t)$ della matrice impedenza, mettendoli sotto forma di un'unica funzione razionale :

$$z_{11}(t) = z_a(s) + z_c(s) = \frac{7000 + s \cdot 6,2 + s^2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3}}{1 + s \cdot 8 \cdot 10^{-3}}$$

$$z_{12}(t) = z_{21}(t) = z_c(s) = \frac{4000 + s \cdot 6}{1 + s \cdot 8 \cdot 10^{-3}}, \quad z_{22}(t) = z_b(s) + z_c(s) = \frac{5500 + s \cdot 10}{1 + s \cdot 8 \cdot 10^{-3}}$$

Risultato 1 : Ogni elemento della matrice $Z(s)$ ha un unico polo finito in $s = -125 \text{ s}^{-1}$. Inoltre $z_{11}(s)$, essendo il suo numeratore di grado due, ha un ulteriore polo in $s \rightarrow \infty$.

Risultato 2 : Gli zeri coincidono con le radici del numeratore :

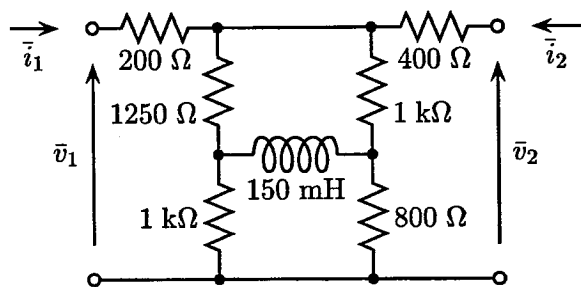
$$z_{11}(t) : 7000 + s \cdot 6,2 + s^2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} = 0 \implies \text{zeri complessi in } s = -1937,5 \pm j \cdot 625 \sqrt{1,59} \text{ s}^{-1}$$

$$z_{12}(t) : 4000 + s \cdot 6 = 0 \implies \text{uno zero reale in } s = -2000/3 \text{ s}^{-1}$$

$$z_{22}(t) : 5500 + s \cdot 10 = 0 \implies \text{uno zero reale in } s = -550 \text{ s}^{-1}$$

Commento : Il DBT dinamico originario considerato in questo esercizio ha tre candidate di stato, poiché vi appaiono due $\mathcal{C}$ e un $\mathcal{L}$. Dopo la trasformazione del triangolo in una stella, le candidate salgono a cinque : ma le tre impedenze dei tre rami della stella hanno lo stesso unico polo; questo polo coincide con la pulsazione per cui la somma delle impedenze del triangolo è nulla. Inoltre anche l'impedenza del ramo preesistente costituito dal parallelo del $\mathcal{R}\langle 4 \text{ k}\Omega \rangle$ e del $\mathcal{C}\langle 2 \mu\text{F} \rangle$ ha lo stesso polo : quest'ultima coincidenza è puramente casuale. Il polo in $s \rightarrow \infty$ presente solamente nella $z_{11}(s)$ è dovuto all' $\mathcal{L}\langle 200 \text{ mH} \rangle$ in serie alla porta 1.

3.2.9 Esercizio E5/23/02/99 : Matrice impedenza



• L'equilibrio del ponte ci consente di affermare che l' $\mathcal{L}$ (150 mH) non influisce sulla matrice impedenza del DBT: esso può essere rimpiazzato da un c.a.. Conseguentemente la matrice $\mathbf{Z}(s)$ è reale e invariante rispetto alla pulsazione s (DBT adinamico).

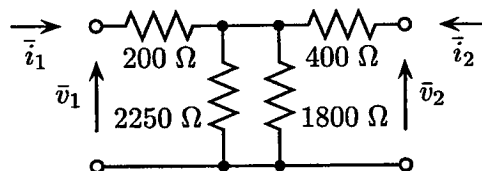
Risultato : Siccome il DBT è una stella di tre $\mathcal{R}$ la matrice risulta :

$$\mathbf{Z}(s) = \begin{bmatrix} 200 + r_3 & r_3 \\ r_3 & 400 + r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1200 & 1000 \\ 1000 & 1400 \end{bmatrix} \Omega$$

in cui r_3 è la resistenza del parallelo dei $\mathcal{R}$ (2250 Ω) e $\mathcal{R}$ (1800 Ω) e vale :

$$r_3 = (2250 \times 1800) / (2250 + 1800) = 1000 \Omega.$$

Commento : Questo risultato ci conferma che all'interno del DBT vi è un modo naturale che è nonosservabile e noncontrollabile da parte delle quattro grandezze che definiscono le porte del DBT.

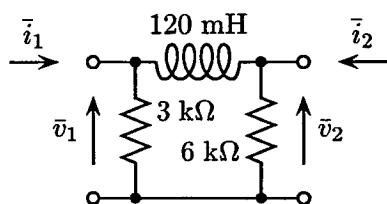


Il DBT composito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da un $\mathcal{L}$ e sei $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la matrice impedenza $\mathbf{Z}(s)$.

• All'interno del DBT vi è un evidente ponte resistivo costituito dai $\mathcal{R}$ (1250 Ω), $\mathcal{R}$ (1000 Ω), $\mathcal{R}$ (1000 Ω), $\mathcal{R}$ (800 Ω). I prodotti delle resistenze dei lati opposti sono uguali : $1250 \times 800 = 1000 \times 1000$.

3.2.10 Esercizio E3/09/01/99 : transimpedenza di un DBT



Risultato : Le formule che esprimono le impedenze del DBT a stella per mezzo di quelle del DBT equivalente a triangolo ci consentono di scrivere :

$$z_{12}(s) = \frac{3000 \times 6000}{3000 + 6000 + s \cdot 0,120} = \frac{2000}{1 + s/75000} \Omega$$

Il DBT in figura opera in pseudoregime cisoidale.

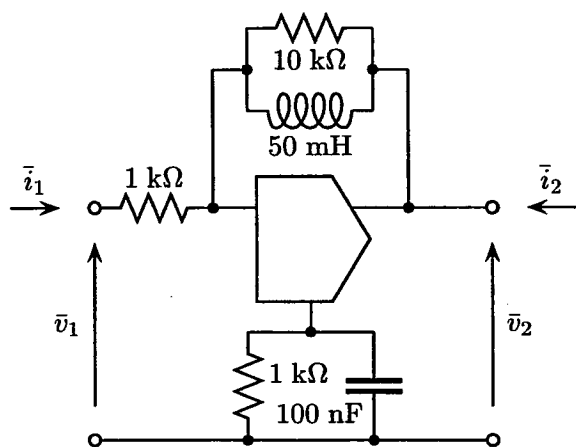
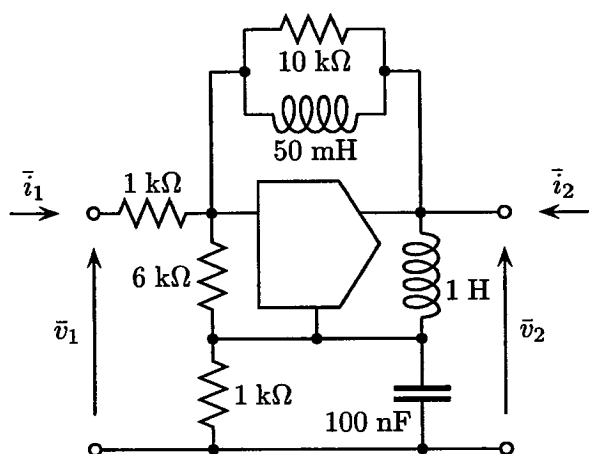
Quesito : Calcolare la transimpedenza $z_{12}(s)$ del DBT.

• Siccome il DBT ha una struttura a triangolo per calcolare la transimpedenza è più conveniente avere a disposizione il modello a stella del DBT : la transimpedenza $z_{12}(s)$ coincide con l'impedenza del ramo del DBT a stella incidente al terminale comune alla due porte del DBT.

3.2.11 Esercizio EC/09/01/99 : Matrice impedenza di un DBT con nullore

Il DBT in figura opera in pseudoregime cisoidale.

Quesito : Calcolare la matrice $\mathbf{Z}(s)$ del DBT.



- la matrice $Z^a(s)$ della $\mathcal{V}_T$ con in serie alla prima porta il $\mathcal{R}(1 \text{ k}\Omega)$ risulta :

$$Z^a(s) = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ -z_1(s) & 0 \end{bmatrix}$$

Risultato : La matrice $Z(s)$ del DBT coincide con la somma delle precedenti matrici impedenza :

$$Z(s) = Z^a(s) + Z^b(s) = \begin{bmatrix} 1000 + z_0(s) & z_0(s) \\ z_0(s) - z_1(s) & z_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2000 + 10^{-1}s}{1 + 10^{-4}s} & \frac{1000}{1 + 10^{-4}s} \\ \frac{1000 - 4,5 \cdot 10^{-3} - s^2 0,5 \cdot 10^{-6}}{(1 + 10^{-4}s)(1 + s 0,5 \cdot 10^{-6})} & \frac{1000}{1 + 10^{-4}s} \end{bmatrix}$$

- Il $\mathcal{R}(6 \text{ k}\Omega)$ e l' $\mathcal{L}(1 \text{ H})$ in parallelo alle due porte del nullore tripolare sono sostituiti da due c.a., poiché sono ininfluenti sul resto del circuito.

- Calcoliamo l'impedenza

$$z_1(s) = (s 10000)(s + 2000000)$$

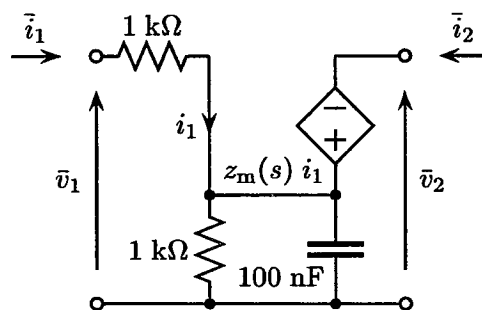
del bipolo costituito dal parallelo del $\mathcal{R}(10 \text{ k}\Omega)$ e dell' $\mathcal{L}(50 \text{ mH})$ e connesso trasversalmente al nullore tripolare.

- Calcoliamo l'impedenza

$$z_0(s) = 1000/(1 + 10^{-4}s)$$

del bipolo costituito dal parallelo del $\mathcal{R}(1 \text{ k}\Omega)$ e del $\mathcal{C}(100 \text{ nF})$ e connesso in serie al terminale comune del nullore.

- Il nullore tripolare e il bipolo di impedenza $z_1(s)$ costituiscono una $\mathcal{V}_T$ dinamica con transimpedenza $z_m(s) = -z_1(s)$.



- La matrice $Z^b(s)$ del suddetto bipolo visto come bipolo con quattro terminali risulta :

$$Z^b(s) = \begin{bmatrix} z_0(s) & z_0(s) \\ z_0(s) & z_0(s) \end{bmatrix}$$

3.3 ZERO-DIREZIONALITÀ DEI DOPPI BIPOLI

3.3.1 Esercizio E4/16/01/97 : Zeri della transimpedenza di un DB

Il DBT composito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e sei $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare gli zeri della transimpedenza $z_{21}(s)$ del DBT.

- Il calcolo completo di $z_{21}(s)$ (numeratore e denominatore) è da evitare perché piuttosto pesante. Nel DBT bipolo vi sono due candidate dovute al $\mathcal{C}$ e all' $\mathcal{L}$.

- Non essendoci alcun vincolo algebrico coinvolgente le candidate, il denominatore della transimpedenza $z_{21}(s)$ dovrebbe essere un polinomio di grado 2. Quindi ci si aspetta che vi siano anche due zeri della $z_{21}(s)$, comprendendo gli eventuali zeri all'infinito. Il DBT composito è costituito dalla connessione a scala di cinque bipoli. Tra questi vi sono i $\mathcal{R}\langle 10\text{ k}\Omega\rangle$, $\mathcal{R}\langle 3\text{ k}\Omega\rangle$ e $\mathcal{R}\langle 2\text{ k}\Omega\rangle$ la cui impedenza è una pura resistenza (costante al variare di s) e non sono in grado di generare zeri della $z_{21}(s)$.

- Occorre esaminare i due rimanenti bipoli del DBT a scala. Il primo bipolo è costituito dalla serie del $\mathcal{R}\langle 2\text{ k}\Omega\rangle$ e del parallelo del $\mathcal{R}\langle 5\text{ k}\Omega\rangle$ e del $\mathcal{C}\langle 0,5\text{ }\mu\text{F}\rangle$. Qualora l'impedenza di questo bipolo fosse ∞ , il DBT tripolare sarebbe zerodirezionale, in quanto si ha un taglio costituito da un solo ramo. Quindi si ha uno zero reale negativo per

$$\frac{1}{5000} + s \cdot 5 \cdot 10^{-7} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{1}{5000 \times 5 \cdot 10^{-7}} = -400\text{ s}^{-1}$$

- Il secondo bipolo è costituito dalla serie del $\mathcal{R}\langle 500\text{ }\Omega\rangle$ e dell' $\mathcal{L}\langle 0,2\text{ H}\rangle$. Qualora l'impedenza di questo bipolo fosse nulla, il DBT tripolare sarebbe zerodirezionale, in quanto si ha un nodo cruciale nel DBT a scala. Si ha uno zero reale negativo per

$$500 + s \cdot \frac{1}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -500 \times 5 = -2500\text{ s}^{-1}$$

Risultato : La transimpedenza $z_{21}(s)$ del DBT composito ha due zeri reali negativi :

$$s_1 = -400\text{ s}^{-1}, \quad s_2 = -2500\text{ s}^{-1}$$

3.3.2 Esercizio E3/09/09/97 : Zeri di trasmissione di un DBT RLC

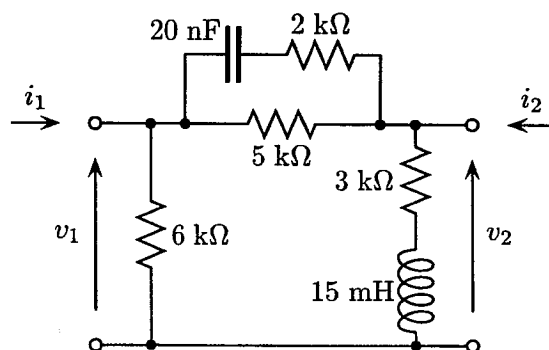
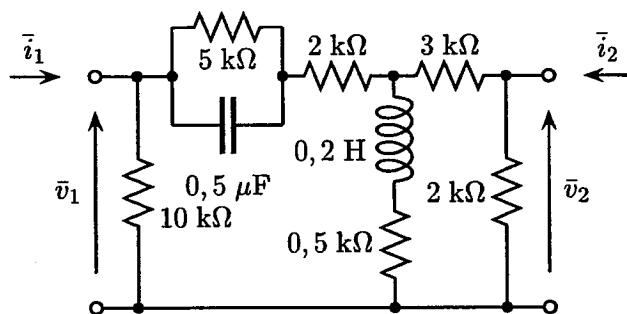
Il DBT in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da tre bipoli formanti un triangolo.

Quesito : Calcolare i valori della pulsazione complessa s per cui il DBT dinamico diventa zero-direzionale.

- Dal momento che il DBT ha una struttura a triangolo, esso diventa zero-direzionale, se e solo se uno dei doppi bipoli in parallelo alle due porte diventa un c.c. ovvero il bipolo trasversale diventa un c.a.

- L'impedenza del $\mathcal{R}\langle 6\text{ k}\Omega\rangle$ in parallelo alla prima porta non può, per qualsiasi valore di s , essere un c.c. e quindi non può causare la zero-direzionalità del DBT.

Risultato 1 : Il bipolo trasversale, costituito da due rami in parallelo, diventa un c.a., qualora le



ammettenze (impedenze) dei due rami siano uguali e opposte :

$$5000 = -2000 - \frac{1}{s \cdot 20 \cdot 10^{-9}} \Rightarrow 7000 + \frac{1}{s \cdot 20 \cdot 10^{-9}} = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{7000 \cdot 20 \cdot 10^{-9}} = -\frac{100000}{14} \text{ s}^{-1}$$

Risultato 2 : Il bipolo costituito dalla serie del $\mathcal{R}$ (3 k Ω) e del $\mathcal{L}$ (15 mH) diventa un c.c., qualora la sua impedenza sia nulla

$$3000 + s \cdot 15 \cdot 10^{-3} = 0 \Rightarrow s = -\frac{3000}{15 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow s = -200000 \text{ s}^{-1}$$

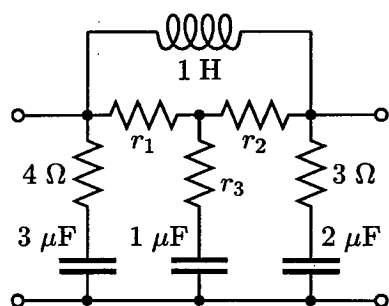
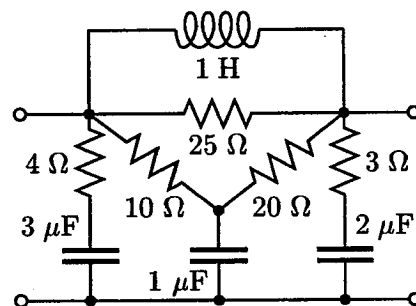
3.3.3 Esercizio EB/13/01/98 : zerodirezionalità di doppi bipoli

Il DBT dinamico in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da un $\mathcal{L}$, tre $\mathcal{C}$ e cinque $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare le pulsazioni complesse s per cui il doppio bipolo diventa zero-direzionale.

• La struttura del DBT non è a scala per cui le pulsazioni complesse per cui diventa zero-direzionale non possono essere individuate da una semplice ispezione dei bipoli interni al DBT.

• Eseguiamo alcune trasformazioni semplici per trasformare il DBT in uno a scala. Trasformiamo il triangolo dei $\mathcal{R}$ (10 Ω), $\mathcal{R}$ (25 Ω) e $\mathcal{R}$ (20 Ω) nella stella equivalente dei $\mathcal{R}$ (r_1), $\mathcal{R}$ (r_2) e $\mathcal{R}$ (r_3). Il doppio bipolo è costituito da un $\mathcal{L}$, tre $\mathcal{C}$ e cinque $\mathcal{R}$:



$$r_1 = \frac{10 \times 25}{10 + 20 + 25} = 50/11 \Omega$$

$$r_2 = \frac{20 \times 25}{10 + 20 + 25} = 100/11 \Omega$$

$$r_3 = \frac{10 \times 20}{10 + 20 + 25} = 40/11 \Omega$$

• Trasformiamo il triangolo costituito dall' $\mathcal{L}$ (1 H) e dai $\mathcal{R}$ (r_1) e $\mathcal{R}$ (r_2) in una stella di tre bipoli di ammettenza $y_a(s)$, $y_b(s)$ e $y_c(s)$: nella figura sottostante vediamo il DBT equivalente a quello originale.

$$y_a(s) = \frac{r_1 + r_2 + sL}{r_1 \times sL} = \frac{1}{r_1} + \frac{1 + r_2/r_1}{sL} = \frac{11}{50} + \frac{3}{s}$$

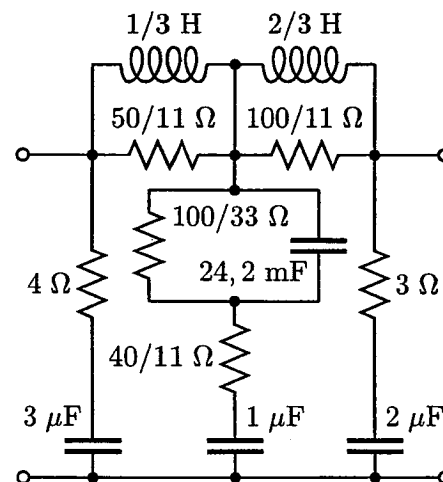
che corrisponde a un $\mathcal{R}$ (50/11 Ω) $\parallel$ $\mathcal{L}$ (1/3 H).

$$y_b(s) = \frac{r_1 + r_2 + sL}{r_2 \times sL} = \frac{1}{r_2} + \frac{1 + r_1/r_2}{sL} = \frac{11}{100} + \frac{3}{2s}$$

che corrisponde a un $\mathcal{R}$ (100/11 Ω) $\parallel$ $\mathcal{L}$ (2/3 H).

$$y_c(s) = \frac{r_1 + r_2 + sL}{r_1 r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} + \frac{sL}{r_1 r_2} = \frac{33}{100} + \frac{s \cdot 121}{5000}$$

che corrisponde a un $\mathcal{R}$ (100/33 Ω) $\parallel$ $\mathcal{C}$ (24,2 mF).



• Il doppio bipolo ha una struttura a scala con tre bipoli connessi al terminale comune di impedenza $z_1(s)$, $z_3(s)$ e $z_5(s)$ e due bipoli trasversali di ammettenza $y_a(s)$ e $y_b(s)$:

$$z_1(s) = 4 + \frac{1}{s \cdot 3 \cdot 10^{-6}} \quad , \quad y_a(s) = \frac{11}{50} + \frac{1}{s \cdot 3} \quad , \quad z_3(s) = \frac{1}{s \cdot 10^{-6}} + \frac{40}{11} + \frac{100/33}{1 + s \cdot 2,420/33}$$

- **Nodo 2** : vi confluiscono la $\hat{\mathcal{V}}\langle\bar{v}_3\rangle$, il $\mathcal{R}\langle r_2\rangle$, il $\mathcal{C}\langle C_2\rangle$, e la $\mathcal{V}_I\langle r_m\bar{i}_2\rangle$. Annullando la somma delle quattro correnti incidenti si ha l'equazione : $(\bar{v}_2^{\text{nod}} - \bar{v}_1^{\text{nod}})(1/r_2 + sC_2) + \bar{i}_3 + \bar{i}_5 = 0$, dove $\bar{i}_3$ e $\bar{i}_5$ sono le correnti fluenti nella $\hat{\mathcal{V}}\langle\bar{v}_3\rangle$ e nella $\mathcal{V}_I\langle r_m\bar{i}_2\rangle$, introdotte come incognite ausiliarie dal momento che la $\hat{\mathcal{V}}\langle\bar{v}_3\rangle$ e la $\mathcal{V}_I\langle r_m\bar{i}_2\rangle$ non sono controllabili in corrente.
 - **Nodo 3** : vi confluiscono la $\hat{\mathcal{V}}\langle\bar{v}_3\rangle$, la $\hat{\mathcal{I}}\langle\bar{i}_4\rangle$, $\mathcal{R}\langle r_4\rangle$, l' $\mathcal{L}\langle L_4\rangle$. Annullando la somma delle quattro correnti incidenti si ha l'equazione : $\bar{v}_3^{\text{nod}}[1/r_4 + 1/(sL_4)] - \bar{i}_3 = \bar{i}_4$.
 - Abbiamo costruito le tre equazioni principali nelle cinque incognite $\bar{v}_1^{\text{nod}}$, $\bar{v}_2^{\text{nod}}$, $\bar{v}_3^{\text{nod}}$, $\bar{i}_3$ e $\bar{i}_5$. Mancano due equazioni che devono essere derivate dalle relazioni costitutive dei componenti non controllabili in corrente.
 - Dalla relazione costitutiva della porta pilotata della $\mathcal{V}_I$ si ha $\bar{v}_2^{\text{nod}} = r_m \bar{i}_2$. La corrente pilotante $\bar{i}_2$ costituisce una nuova incognita. Per eliminarla occorre considerare il suo legame con le incognite già presenti nel sistema di equazioni : $\bar{i}_2 = (\bar{v}_2^{\text{nod}} - \bar{v}_1^{\text{nod}})/r_2$. Possiamo riscrivere la relazione costitutiva della porta pilotata della $\mathcal{V}_I\langle r_m\bar{i}_2\rangle$: $\bar{v}_2^{\text{nod}} = r_m (\bar{v}_2^{\text{nod}} - \bar{v}_1^{\text{nod}})/r_2$.
 - La relazione costitutiva della $\hat{\mathcal{V}}\langle\bar{v}_3\rangle$ implica che : $\bar{v}_2^{\text{nod}} - \bar{v}_3^{\text{nod}} = \bar{v}_3$.
- Risultato** : Il sistema completo, di cinque equazioni in cinque incognite, assume la forma :

$$\begin{bmatrix} 1/r_2 + sC_2 & -1/r_2 - sC_2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/r_2 - sC_2 & 1/r_2 + sC_2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/r_4 + 1/(sL_4) & -1 & 0 \\ r_m/r_2 & 1 - r_m/r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1^{\text{nod}} \\ \bar{v}_2^{\text{nod}} \\ \bar{v}_3^{\text{nod}} \\ \bar{i}_3 \\ \bar{i}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ 0 \\ \bar{i}_4 \\ 0 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix}$$

La matrice del sistema ha una struttura particolare, dal momento che alcuni suoi elementi sono nulli. Più precisamente, l'incognita $\bar{i}_5$ compare solamente nella seconda equazione, l'incognita $\bar{i}_3$ compare solamente nella seconda e terza equazione, l'incognita $\bar{v}_3^{\text{nod}}$ nella terza e quinta. Inoltre nella prima e quarta equazione compaiono solamente le incognite $\bar{v}_1^{\text{nod}}$ e $\bar{v}_2^{\text{nod}}$. Il sistema può essere riscritto riordinando le equazioni

$$\begin{bmatrix} 1/r_2 + sC_2 & -1/r_2 - sC_2 & 0 & 0 & 0 \\ r_m/r_2 & 1 - r_m/r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r_4 + 1/(sL_4) & -1 & 0 \\ -1/r_2 - sC_2 & 1/r_2 + sC_2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1^{\text{nod}} \\ \bar{v}_2^{\text{nod}} \\ \bar{v}_3^{\text{nod}} \\ \bar{i}_3 \\ \bar{i}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ 0 \\ \bar{i}_4 \\ 0 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix}$$

Le prime due equazioni scalari costituiscono un sistema ridotto nelle due incognite $\bar{v}_1^{\text{nod}}$ e $\bar{v}_2^{\text{nod}}$. Esse possono essere risolte indipendentemente dalle tre rimanenti equazioni. Una volta note $\bar{v}_1^{\text{nod}}$ e $\bar{v}_2^{\text{nod}}$ possono essere ottenute in successione $\bar{v}_3^{\text{nod}}$ dalla terza equazione, $\bar{i}_3$ dalla quarta e $\bar{i}_5$ dalla quinta.

3.5 FUNZIONI DI RETE

3.5.1 Esercizio EC/17/06/96 : Funzione di rete di un DB a scala RC

Il circuito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da una $\hat{V}$ cisoidale, tre C e cinque R .

Quesito : Calcolare la funzione di rete $F(s) = \bar{v}_u / \bar{\hat{v}}$.

- Il $R(2\text{ k}\Omega)$ in parallelo alla $\hat{V}$ è sostituito da un c.a., poiché la corrente che lo percorre non è di interesse.

- Nel circuito sono presenti tre bipoli, ciascuno costituito dal parallelo di un R e un C .

$$y_1(s) = 0,0005 + s \, 0,5 \cdot 10^{-6} \quad , \quad y_2(s) = 0,001 + s \, 10^{-6}$$

$$y_u(s) = 0,0002 + s \, 0,2 \cdot 10^{-6}$$

I prodotti rC di questi tre bipoli sono coincidenti e valgono $1/1000\text{ s}$. Questo fatto ci assicura che le tre ammettenze dei suddetti bipoli hanno lo stesso zero.

- Prima di calcolare la tensione $\bar{v}_u$ in funzione della $\bar{\hat{v}}$ conviene compiere un passo intermedio che considera la tensione $\bar{v}_1$ ai capi del R di $R(1\text{ k}\Omega)$ che non è in parallelo ad alcun C .

- Esaminiamo la relazione tra questa tensione $\bar{v}_1$ e la tensione $\bar{v}_u$: esse sono legate dalla regola del partitore di tensione nel dominio dei fasori:

$$\frac{\bar{v}_u}{\bar{v}_1} = \frac{10^{-3} + s \, 10^{-6}}{(10^{-3} + s \, 10^{-6}) + (1/5 \cdot 10^{-3} + s \, 1/5 \cdot 10^{-6})} = \frac{1 + s \, 10^{-3}}{6/5 + s \, 6/5 \cdot 10^{-3}} = \frac{5}{6}$$

Questo rapporto tra i fasori risulta puramente reale dal momento che l'unico zero e l'unico polo si cancellano a vicenda. Ciò è dovuto al fatto che le impedenze $1/y_2(s)$ e $1/y_u$ dei due bipoli resistivi-capacitivi coinvolti nel partitore hanno lo stesso polo. In altre parole siamo in presenza di un partitore di tensione RC compensato (vedere Cap. 21-FCE).

- Usiamo la formula fornita dal primo teorema di Millmann per esprimere il rapporto $\bar{v}_1/\bar{\hat{v}}$:

$$\frac{\bar{v}_1}{\bar{\hat{v}}} = \frac{y_1(s)}{y_1(s) + 0,001 + (y_2(s) y_u(s))/(y_2(s) + y_u(s))} = \frac{3 + s \, 3 \cdot 10^{-3}}{10 + s \, 4 \cdot 10^{-3}}$$

Risultato : Dai risultati precedenti calcoliamo la funzione di rete $F(s)$ come prodotto :

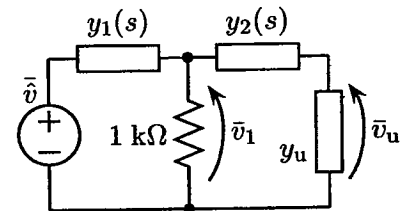
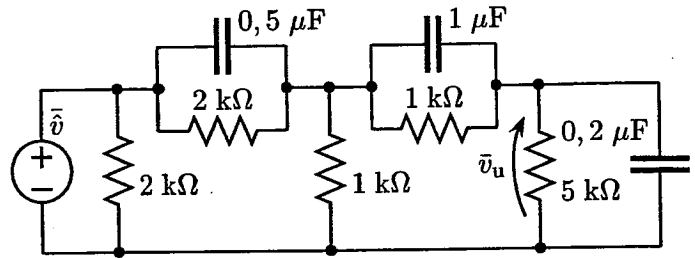
$$F(s) = \frac{\bar{v}_u}{\bar{\hat{v}}} = \frac{\bar{v}_u}{\bar{v}_1} \times \frac{\bar{v}_1}{\bar{\hat{v}}} = \frac{5}{8} \frac{1 + s \, 10^{-3}}{5/2 + s \, 10^{-3}}$$

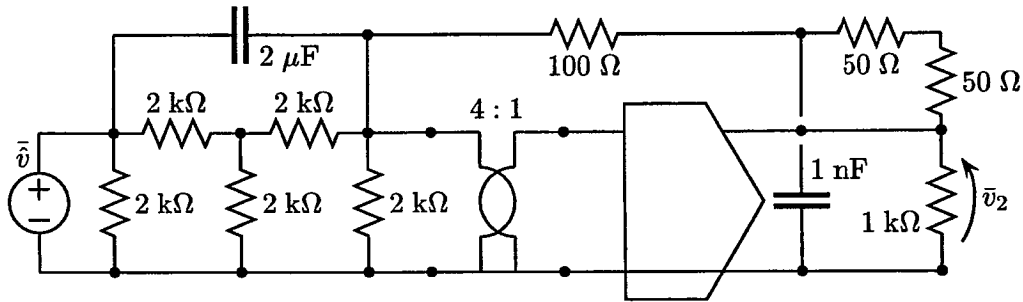
Commento : La funzione di rete $F(s)$ coincide, col termine $h''_{21}(s)$ della seconda matrice ibrida del DBT composito costituito dal parallelo di tutti i componenti omogenei (tre C e cinque R) presenti nel circuito in figura.

3.5.2 Esercizio EC/13/09/96 : Rapporto di tensioni in un circuito con nullore e tr.id.

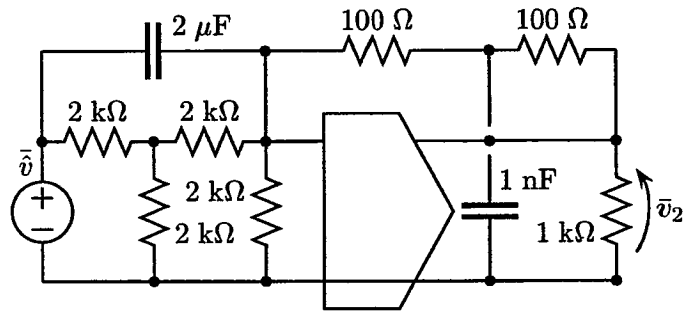
Il circuito dinamico e lineare in figura è costituito da una $\hat{V}$, un nullore tripolare, un tr.id. tripolare, due C e nove R : Il circuito opera in pseudoregime cisoidale.

Quesito : Calcolare la funzione di rete $F(s) = \bar{v}_2/\bar{\hat{v}}$, dove $\bar{v}_2$ è la tensione ai capi del noratore.



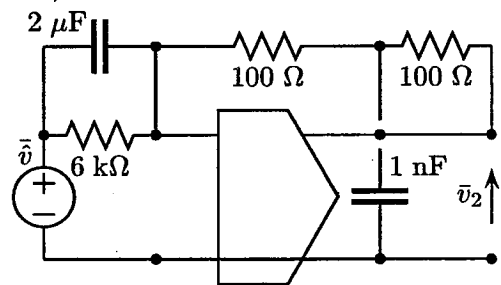


• Il $\mathcal{R}\langle 2\text{ k}\Omega\rangle$ in parallelo alla $\hat{\mathcal{V}}(\bar{v})$ è sostituito da un c.a., mentre i due $\mathcal{R}\langle 50\text{ k}\Omega\rangle$ in serie sono fusi in un unico $\mathcal{R}\langle 100\text{ k}\Omega\rangle$. La cascata del tr.id. e del nullore è a sua volta equivalente al nullore stesso. Il circuito è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, un nullore, due $\mathcal{C}$ e sette $\mathcal{R}$:



• I $\mathcal{R}\langle 2\text{ k}\Omega\rangle$ e $\mathcal{R}\langle 1\text{ k}\Omega\rangle$, in parallelo alle due porte del nullore, sono sostituiti da due c.a..

• Tra la $\hat{\mathcal{V}}$ e il nullore vi è una stella di tre $\mathcal{R}\langle 2\text{ k}\Omega\rangle$: la sostituiamo con il triangolo equivalente di tre $\mathcal{R}\langle 6\text{ k}\Omega\rangle$. Il $\mathcal{R}\langle 6\text{ k}\Omega\rangle$ del triangolo in parallelo alla $\hat{\mathcal{V}}$ e quello in parallelo alla porta d'ingresso del nullore sono sostituiti da un c.a.. Il circuito è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, un nullore, due $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$:

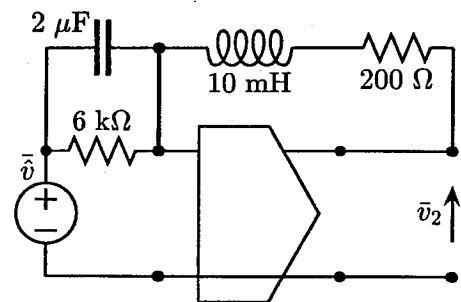


• Il nullore (tripolare) è in parallelo a un DBT costituito da una stella di due $\mathcal{R}\langle 100\text{ }\Omega\rangle$ e un $\mathcal{C}\langle 1\text{ }\mu\text{F}\rangle$. Questo DBT a stella è sostituito dal DBT equivalente a triangolo: due dei bipoli del triangolo sono sostituiti da un c.a., poiché risultano in parallelo alle due porte del nullore.

• L'impedenza del rimanente bipolo del DBT equivalente a triangolo, connesso trasversalmente al nullore, può essere calcolata dalla nota formula:

$$z_c(s) = 100 + 100 + 100 \times 100 \times s \cdot 10^{-9} = 200 + 10^{-5} s \text{ }\Omega$$

Esso è equivalente alla serie di un $\mathcal{R}\langle 200\text{ }\Omega\rangle$ e un $\mathcal{L}\langle 10\text{ mH}\rangle$. Il circuito è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, un nullore, un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e due $\mathcal{R}$:



• Consideriamo l'impedenza $z_a(s)$ del bipolo composto dal parallelo del $\mathcal{R}\langle 6\text{ k}\Omega\rangle$ e del $\mathcal{C}\langle 2\text{ }\mu\text{F}\rangle$:

$$z_a(s) = \frac{1}{1/6000 + s \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \text{ }\Omega$$

• Poiché sia la tensione sia la corrente della porta d'ingresso (il nullatore) del nullore sono nulle, possiamo concludere: i due bipoli composti, rispettivamente di impedenza $z_a(s)$ e $z_c(s)$ sono percorsi dalla medesima corrente $\bar{i}_1$. La tensione ai capi del bipolo d'impedenza $z_a(s)$ coincide con la tensione impressa $\bar{v}$, mentre la tensione ai capi del bipolo d'impedenza $z_c(s)$ coincide con $-\bar{v}_u$:

$$\bar{v} = z_a(s) \bar{i}_1, \quad \bar{v}_u = -z_c(s) \bar{i}_1$$

Risultato: La funzione di rete $F(s)$ risulta uguale a:

$$F(s) = \frac{\bar{v}_u}{\bar{v}} = -\frac{z_c(s)}{z_a(s)} = -(200 + 10^{-5} s) (1/6000 + s \cdot 2 \cdot 10^{-6}) = -s^2 \cdot 2 \cdot 10^{-11} - s (10^{-8}/6 + 4 \cdot 10^{-4}) - 1/30$$

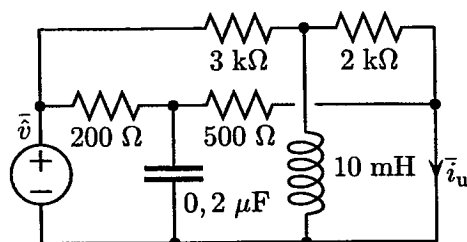
Commento : Siccome $F(s)$ ha due zeri reali e nessun polo finito, nel circuito non vi è alcuna variabile di stato. Infatti la tensione ai capi del $C(2 \mu F)$ coincide con la tensione impressa $\hat{v}(t)$, mentre la corrente fluente nell' $L(10 \text{ mH})$ coincide con la corrente i_1 che fluisce nel bipolo all'ingresso.

3.5.3 Esercizio EC/08/11/96 : Funzione di rete in un circuito RLC

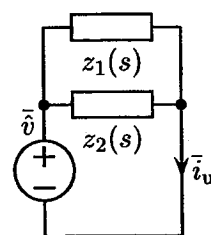
Il circuito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da una $\hat{V}$, un C , un L e quattro R .

Quesito : Calcolare la funzione di rete $F(s) = \bar{i}_u / \bar{v}$.

• Nel circuito sono presenti due DBT a stella connessi in parallelo. La stella del primo DBT è costituita da un $R(3 \text{ k}\Omega)$, un $R(2 \text{ k}\Omega)$ e un $L(10 \text{ mH})$, mentre quella del secondo DBT è costituita da un $R(200 \Omega)$, un $R(500 \Omega)$ e un $C(0,2 \mu F)$.



• L'analisi del DBT composito diventa semplice, se sostituiamo i due DBT a stella in parallelo con i corrispondenti triangoli. Per ciascuno dei DBT a triangolo un bipolo si trova in parallelo alla $\hat{V}$ e un altro in parallelo al c.c. . Siccome essi sono ininfluenti sul circuito, non occorre calcolare le loro impedenze. Quindi nel DBT composito rimangono solamente i due bipoli trasversali, uno per ciascun triangolo, di impedenze $z_1(s)$ e $z_2(s)$.



• Le impedenze $z_1(s)$ e $z_2(s)$ sono calcolate per mezzo della trasformazione stella $\rightarrow$ triangolo :

$$z_1(s) = 3000 + 2000 + \frac{3000 \times 2000}{s \cdot 1/100} = 5000 + 6 \cdot 10^8 / s \Omega$$

$$z_2(s) = 200 + 500 + 200 \times 500 \times (s \cdot 1/5 \cdot 10^{-6}) = 700 + s \cdot 1/50 \Omega$$

Risultato : Tenendo conto della convenzione di segno della corrente i_u , si ha che :

$$F(s) = \frac{\bar{i}_u}{\bar{v}} = \frac{1}{z_1(s)} + \frac{1}{z_2(s)} = \frac{2 \cdot 10^{-4} s}{s + 120 \cdot 10^3} + \frac{50}{35000 + s} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{s^2 + s \cdot 285000 + 30 \cdot 10^9}{(s + 120 \cdot 10^3)(s + 35000)} S$$

Commento : La funzione di rete $F(s)$ coincide con la transammettenza $-y_{21}(s)$ del DBT composito costituito dal parallelo dei due DBT a stella.

3.5.4 Esercizio E4/09/09/97 : Zeri e poli di funzione di rete di un circuito RLC

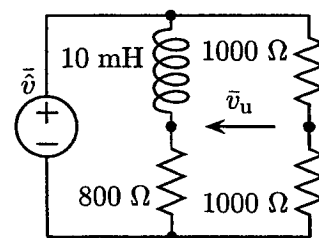
Il circuito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da una $\hat{V}$, un L e tre R .

Quesito : Calcolare zeri e poli della funzione di rete $\bar{v}_u / \bar{v}$.

• La corrente fluente nell' L è l'unica candidata e anche l'unica variabile di stato poiché non compaiono equazioni algebriche che coinvolgono solamente la candidata e, eventualmente, la tensione impressa.

• Il circuito può essere visto come due partitori di tensione alimentati in parallelo dall'unica $\hat{V}$ presente nel circuito.

• La tensione $\bar{v}_u$ può essere espressa in funzione della tensione impressa



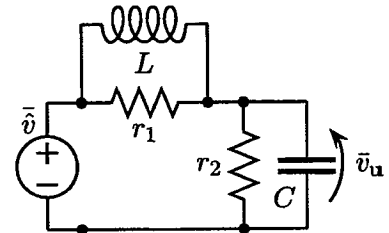
$$\bar{v}_u = \bar{v} \left[\frac{800}{800 + s/100} - \frac{1000}{1000 + 1000} \right] \Rightarrow \frac{\bar{v}_u}{\bar{v}} = \frac{1}{2} \times \frac{-s + 80000}{s + 80000}$$

Risultato : la funzione di rete è caratterizzata da un unico zero reale positivo in $s = 80000 \text{ s}^{-1}$ e un unico polo reale negativo in $s = -80000 \text{ s}^{-1}$. La funzione di rete è di tipo passatutto, poiché lo zero coincide col polo a meno del segno.

3.5.5 Esercizio E6/23/07/97 : Gradi del numer. e denomin. di funzione di rete

Il circuito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e due $\mathcal{R}$: I parametri L , C , r_1 e r_2 sono positivi ma incogniti.

Quesito : Esaminare la struttura della funzione di rete $\bar{v}_u/\bar{\hat{v}}$: cioè stabilire i gradi dei termini presenti sia al numeratore sia al denominatore.



Risultato : La funzione di rete sotto esame è il rapporto delle tensioni di un partitore dinamico. Calcoliamo la funzione di rete usando la formula del rapporto delle ammettenze :

$$\frac{\bar{v}_u}{\bar{\hat{v}}} = \frac{1/r_1 + 1/(sL)}{1/r_1 + 1/r_2 + 1/(sL) + sC} = \frac{sL/r_1 + 1}{s^2LC + s(L/r_1 + L/r_2) + 1} \Rightarrow \begin{matrix} \text{primo grado} \\ \text{secondo grado} \end{matrix}$$

Sia il numeratore sia il denominatore sono polinomi con tutti i coefficienti positivi.

Commento : Per valori particolari di L , C , r_1 e r_2 il numeratore e il denominatore potrebbero diminuire di grado in seguito alla cancellazione dell'unico zero finito con uno dei poli. Se assumiamo i valori : $L = 0,2 \text{ H}$, $C = 1 \mu\text{F}$, $r_1 = 200 \Omega$ e $r_2 = 1000 \Omega$, la funzione di rete diventa

$$\frac{\bar{v}_u}{\bar{\hat{v}}} = \frac{s/1000 + 1}{s^2/5000000 + s/6000 + 1} = \frac{1}{s/5000 + 1} \Rightarrow \begin{matrix} \text{grado zero} \\ \text{primo grado} \end{matrix}$$

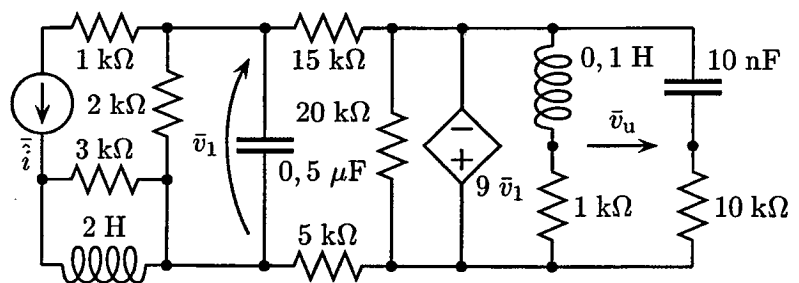
Infatti vi è uno zero reale $s_{z1} = -1000 \text{ s}^{-1}$ e due poli reali (radici dell'equazione $s^2 + s/6000 + 5000000 = 0$) $s_{p1} = -1000 \text{ s}^{-1}$ e $s_{p2} = -5000 \text{ s}^{-1}$. In questo caso il grado del numeratore e del denominatore diminuiscono in seguito alla cancellazione di s_{z1} e s_{p1} .

A parte questo caso, il numero dei poli coincide col numero delle candidate (tutte diventano variabili di stato). Nel caso generale si ha uno zero all' ∞ dovuto al $\mathcal{C}$ e uno zero reale finito dovuto al parallelo del $\mathcal{C}$ e del $\mathcal{R}$.

3.5.6 Esercizio EA/17/06/97 : Transimpedenza di un circuito con sVpV

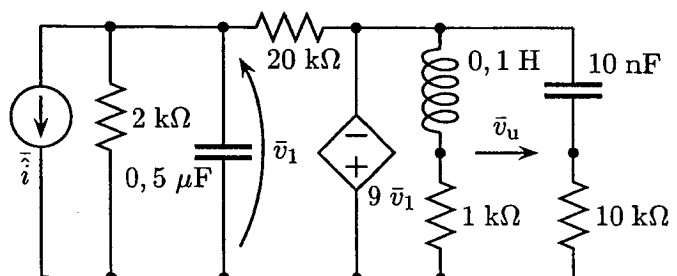
Il circuito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}$, una $\mathcal{V}_V$, due $\mathcal{L}$, due $\mathcal{C}$ e otto $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la transimpedenza (funzione di rete) definita dalla tensione $\bar{v}_u$ e dalla corrente $\bar{\hat{i}}$ della $\hat{\mathcal{I}}$.



• I due bipoli $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 3 \text{ k}\Omega \rangle \parallel \mathcal{L}\langle 2 \text{ H} \rangle$, risultando in serie alla $\hat{\mathcal{I}}$, sono sostituiti da due c.c. .

Questo risultato ci conferma che l' $\mathcal{L}\langle 2 \text{ H} \rangle$ fa parte di un circuito dinamico di prim'ordine, che opera separatamente dal resto del circuito. Il $\mathcal{R}\langle 20 \text{ k}\Omega \rangle$, in parallelo alla porta pilotata della $\mathcal{V}_V$, è sostituito da un c.a., mentre i $\mathcal{R}\langle 5 \text{ k}\Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 15 \text{ k}\Omega \rangle$, formanti un taglio, sono fusi in un unico $\mathcal{R}\langle 5 + 15 = 20 \text{ k}\Omega \rangle$.



• In accordo al primo teorema di Miller, il $\mathcal{R}\langle 20 \text{ k}\Omega \rangle$ è sostituito da un c.a., avendo inserito un $\mathcal{R}\langle 20/(9+1) = 2 \text{ k}\Omega \rangle$ in parallelo al $\mathcal{C}\langle 0,5 \mu\text{F} \rangle$ e al $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$. I due $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$ in parallelo sono fusi in un unico $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$. Il circuito è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}$, una $\mathcal{V}_V$, un $\mathcal{L}$, due $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$:

• Il bipolo composito $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle \parallel \mathcal{C}\langle 0,5 \mu\text{F} \rangle$ è percorso dalla corrente impressa $\hat{i}$. Conseguentemente, la tensione pilotante $\bar{v}_1$ risulta:

$$\bar{v}_1 = - \frac{\hat{i}}{1/1000 + s \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} = \frac{\hat{i} \cdot 1000}{1 + s/2000}$$

• La tensione pilotata $9 \bar{v}_1$ alimenta un ponte dinamico con la seconda porta a vuoto, la cui tensione è proprio la $\bar{v}_u$. La tensione $\bar{v}_u$ può essere espressa in funzione della tensione pilotata:

$$\bar{v}_u = 9 \bar{v}_1 \left[\frac{1000}{1000 + s/10} - \frac{10000}{10000 + 1/(s \cdot 10^{-8})} \right] = 9 \bar{v}_1 \frac{1 - s/10000}{1 + s/10000}$$

Risultato: Sostituendo l'espressione della tensione pilotante $\bar{v}_1$ nella formula, otteniamo la funzione di rete (transimpedenza) cercata:

$$\frac{\bar{v}_u}{\hat{i}} = 9 \underbrace{\frac{1000}{1 + s/2000}}_{\text{passabasso}} \times \underbrace{\frac{1 - s/10000}{1 + s/10000}}_{\text{passatutto}}$$

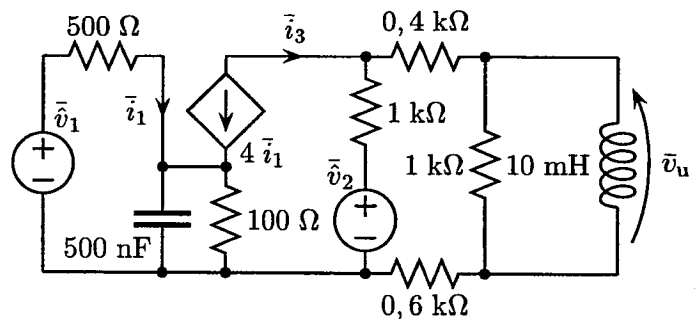
Commento: La funzione di rete ha due poli reali negativi, uno zero reale positivo e uno all' ∞ , benché tutte e tre le candidate diventino variabili di stato. Notare che le impedenze dei due bipoli in parallelo alla $\mathcal{V}_V$ $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle \parallel \mathcal{L}\langle 0,1 \text{ H} \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle \parallel \mathcal{C}\langle 10 \text{ nF} \rangle$ hanno lo zero reale $s = -10^4 \text{ s}^{-1}$ in comune. Le tre pulsazioni naturali sono reali: la pulsazione $s = -2000 \text{ s}^{-1}$ coincide con il polo reale del bipolo $\mathcal{R}\langle 1 \text{ k}\Omega \rangle \parallel \mathcal{C}\langle 0,5 \mu\text{nF} \rangle$, le altre due coincidono con il suddetto zero $s = -10^4 \text{ s}^{-1}$. Una di queste due sparisce dalla funzione di rete perché viene cancellata da uno zero della stessa. In conclusione, il circuito è nondegenere ed asintoticamente stabile.

3.5.7 Esercizio EC/23/07/97: Tre funzioni di rete di un circuito in regime cisoidale

Il circuito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da due $\hat{\mathcal{V}}$, una $\mathcal{I}_I$, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e sei $\mathcal{R}$.

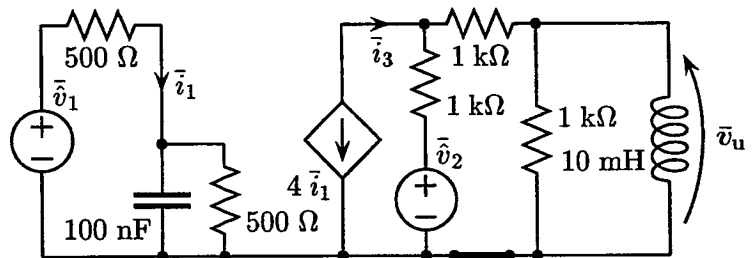
Quesito: Calcolare le tre funzioni di rete

$$F_1(s) = \frac{\bar{i}_3}{\bar{v}_1}, F_2(s) = \frac{\bar{v}_u}{\bar{v}_1}, F_3(s) = \frac{\bar{v}_u}{\bar{v}_2}$$



• Semplifichiamo il circuito mantenendo $\bar{i}_3$, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_u$ e $\bar{v}_2$, che definiscono le tre funzioni di rete, tra le grandezze di ramo. I $\mathcal{R}\langle 400 \Omega \rangle$ e $\mathcal{R}\langle 600 \Omega \rangle$ 600Ω sono in serie poiché essi costituiscono un taglio. Il $\mathcal{R}\langle 400 \Omega \rangle$ è sostituito da un $\mathcal{R}\langle 400 + 600 = 1000 \Omega \rangle$ e il $\mathcal{R}\langle 600 \Omega \rangle$ da un c.c. .

• Applichiamo il secondo teorema di Miller al taglio nodale costituito dal $\mathcal{C}\langle 500\text{ nF}\rangle$, dalla porta pilotata della $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ e dai $\mathcal{R}\langle 100\ \Omega\rangle$ e $\mathcal{R}\langle 500\ \Omega\rangle$: inseriamo in serie al $\mathcal{R}\langle 500\ \Omega\rangle$ un $\mathcal{R}\langle 500\ \Omega\rangle \parallel \mathcal{C}\langle 100\text{ nF}\rangle$, mentre il $\mathcal{C}\langle 500\text{ nF}\rangle \parallel \mathcal{R}\langle 100\ \Omega\rangle$ è sostituito da un c.c. .



- La corrente $\bar{i}_1$ viene calcolata dal rapporto :

$$\bar{z}_1 = \frac{\bar{\hat{v}}_1}{z_1} \text{ dove } z_1 = 500 \left[1 + \frac{1}{1 + s \cdot 500 \times 10^{-7}} \right] = 1000 \frac{1 + s/40000}{1 + s/20000}$$

- Essendo la corrente $\bar{i}_3 = -4 \bar{i}_1$, otteniamo la prima funzione di rete :

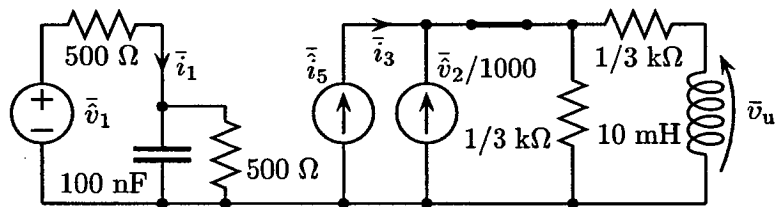
$$F_1(s) = \frac{\bar{v}_3}{\bar{v}_1} = \frac{-4}{z_1} = -\frac{1}{250} \frac{1 + s/20000}{1 + s/40000}$$

La conoscenza di $F_1(s)$ sarà utile per calcolare $F_2(s)$ più avanti.

• Poiché conosciamo la corrente $\bar{i}_3$ uscente dalla porta pilotata della $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$, possiamo sostituire la porta pilotata con una $\hat{\mathcal{I}}$ la cui corrente impressa $\hat{i}_5$ risulta : $\hat{i}_5 = F_1(s) \bar{v}_1$.

Introducendo il modello di Norton del bipolo $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_2) \dagger \mathcal{R}(1 \text{ k}\Omega)$, il circuito risulta costituito da una $\hat{\mathcal{I}}(\hat{i}_5)$, una $\hat{\mathcal{I}}(\hat{v}_2/1000)$ un $\mathcal{L}(10 \text{ mH})$ e tre $\mathcal{R}(1 \text{ k}\Omega)$ costituenti un triangolo equilibrato.

- Il triangolo è sostituito da una stella di tre $\mathcal{R}\langle 1/3 \text{ k}\Omega \rangle$ di cui uno è sostituito da un c.c., poiché risulta in serie al parallelo delle due $\hat{\mathcal{I}}$. Il circuito è costituito dalle $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{i}_5 \rangle$ e $\hat{\mathcal{I}}\langle \hat{v}_2/1000 \rangle$, dal $\mathcal{L}\langle 10 \text{ mH} \rangle$ e dai due $\mathcal{R}\langle 1/3 \text{ k}\Omega \rangle$.



- La tensione $\bar{v}_u$ può essere espressa in funzione della somma delle correnti impresse $\bar{i}_5 + \bar{v}_2/1000$ che fluisce nel bipolo composito costituito dai due $\mathcal{R}$ e dall' $\mathcal{L}$:

$$F_4(s) = \frac{\bar{v}_u}{\hat{i}_5 + \bar{v}_2/1000} = \frac{s}{100} \times \underbrace{\frac{1000/3}{1000/3 + 1000/3 + s/100}}_{\text{partitore di corrente}} = \frac{s/200}{s/(200000/3) + 1}$$

La funzione $F_4(s)$ non è una funzione di rete in senso stretto, dal momento che nel denominatore del rapporto che la definisce compaiono due grandezze impresse. Essa si trasforma in due funzioni di rete distinte, qualora annulliamo $\hat{i}_5$ oppure $\hat{v}_2$.

Questa funzione $F_4(s)$ è stata ottenuta calcolando la corrente fluente nell' $\mathcal{L}$ mediante la regola del partitore di corrente (nella forma di rapporto di ammettenze).

• Dalla $F_4(s)$ possiamo risalire alla $F_3(s)$:

$$F_3(s) = \frac{\bar{v}_u}{\bar{v}_2} = \frac{F_4(s)}{1000} = \frac{s/200000}{s/(200000/3) + 1}$$

- Dalla $F_1(s)$ e dalla $F_4(s)$ possiamo risalire alla $F_2(s)$

$$F_2(s) = \frac{\bar{v}_u}{\hat{v}_1} = \frac{\bar{v}_u}{\hat{v}_5} \times \frac{\hat{v}_3}{\hat{v}_1} = F_1(s) \times F_4(s) = -\frac{1}{50000} \times \frac{1+s/20000}{1+s/40000} \times \frac{s}{s/(200000/3)+1}$$

Commento : Possiamo osservare che $F_2(s)$ ha due poli reali negativi $s_{p1} = -40000 \text{ s}^{-1}$ e $s_{p2} = -200000/3 \text{ s}^{-1}$. Siccome le candidate di stato sono due, noi possiamo concludere che entrambe diventano variabili di stato e che s_{p1} e s_{p2} coincidono con le due pulsazioni naturali del circuito. Inoltre il circuito è asintoticamente stabile, dal momento che s_{p1} e s_{p2} sono nel semipiano sinistro. Le funzioni di rete $F_1(s)$ e $F_3(s)$ hanno un solo polo reale coincidente inevitabilmente con uno di

quelli della $F_2(s)$: in entrambi i casi uno dei poli è stato cancellato da uno zero.

Questa cancellazione è dovuta all'unidirezionalità della $\mathcal{I}_T$: il modo naturale caratterizzato dalla pulsazione s_{p1} rimane confinato nella parte del circuito a monte della $\mathcal{I}_T$, mentre il modo naturale caratterizzato dalla pulsazione s_{p2} rimane confinato nella parte del circuito a valle della $\mathcal{I}_T$.

3.5.8 Esercizio E5/17/02/98 : Transimpedenza in un circuito con sVpV

Il circuito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}$, una $\mathcal{V}_V$ tripolare, un $\mathcal{C}$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare le funzione di rete (transimpedenza) definita dal rapporto tra la tensione pilotata $\bar{v}_u$ e la corrente impressa $\hat{i}$ della $\hat{\mathcal{I}}$.

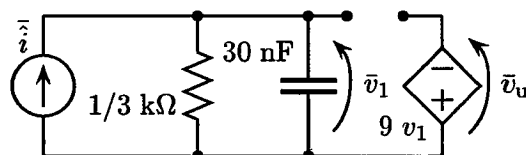
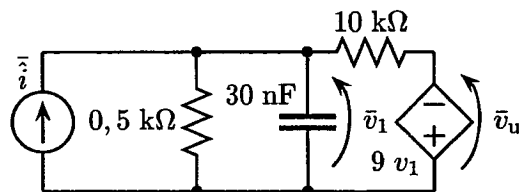
• Osserviamo che vi è un di $\mathcal{R} \langle 10 \text{ k}\Omega \rangle$ connesso trasversalmente alla $\mathcal{V}_V$ tripolare. Applicando il primo teorema di Miller sostituisco questo $\mathcal{R}$ con un c.a. e inserisco un $\mathcal{R} \langle 10/(1+9) = 1 \text{ k}\Omega \rangle$ in parallelo al $\mathcal{C} \langle 30 \text{ nF} \rangle$ (porta pilotante della $\mathcal{V}_V$). Sostituiamo i $\mathcal{R} \langle 0,5 \text{ k}\Omega \rangle$ e $\mathcal{R} \langle 1 \text{ k}\Omega \rangle$ in parallelo con un unico $\mathcal{R} \langle (0,5 \times 1)/(0,5 + 1) = 1/3 \text{ k}\Omega \rangle$.

• Siccome la corrente impressa $\hat{i}$ percorre il bipolo composito $\mathcal{C} \langle 30 \text{ nF} \rangle \parallel \mathcal{R} \langle 1/3 \text{ k}\Omega \rangle$, la tensione pilotante $\bar{v}_1$ risulta :

$$\bar{v}_1 = \frac{(1000/3)/(s \ 30 \ 10^{-9})}{1000/3 + 1/(s \ 30 \ 10^{-9})} \hat{i} = \frac{1000/3}{s \ 10^{-5} + 1} \hat{i}$$

Risultato : Tenendo conto della relazione tra la tensione pilotata $\bar{v}_u$ e quella pilotante $\bar{v}_1$, otteniamo :

$$\bar{v}_u = -9 \frac{1000/3}{s \ 10^{-5} + 1} \hat{i} \Rightarrow \frac{\bar{v}_u}{\hat{i}} = -\frac{3000}{s \ 10^{-5} + 1}$$



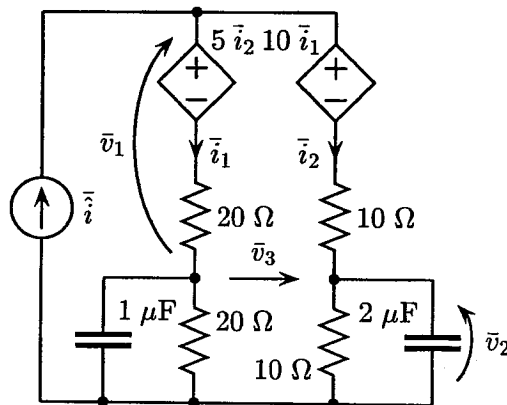
3.5.9 Esercizio EC/27/01/98 : Tre funzioni di rete in un circuito

Il circuito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}$, due $\mathcal{V}_T$, due $\mathcal{C}$ e quattro $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare le tre funzioni di rete :

$$F_1(s) = \frac{\bar{v}_1}{\hat{i}} \quad , \quad F_2(s) = \frac{\bar{v}_2}{\hat{i}} \quad , \quad F_3(s) = \frac{\bar{v}_3}{\hat{i}}$$

• Il circuito è costituito dal parallelo di una $\hat{\mathcal{I}}$ e due rami : ciascuno dei quali è costituito dalla serie di un bipolo composito e della porta pilotata di un $\mathcal{V}_T$. La grandezza impressa è comune alle tre funzioni di rete, mentre le tre grandezze d'uscita sono definite all'interno dei due rami.



• Introducendo le correnti $\bar{i}_1$ e $\bar{i}_2$ dei due rami, imponiamo la coincidenza delle tensioni ai capi dei due rami :

$$\begin{aligned} 5 \bar{i}_2 + \left[20 + \frac{20/(s \ 10^{-6})}{20 + 1/(s \ 10^{-6})} \right] \bar{i}_1 &= 10 \bar{i}_1 + \left[10 + \frac{10/(s \ 2 \ 10^{-6})}{10 + 1/(s \ 2 \ 10^{-6})} \right] \bar{i}_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow -10 \bar{i}_1 + 2 \left[10 + \frac{10}{20 s \ 10^{-6} + 1} \right] \bar{i}_1 &= -5 \bar{i}_2 + \left[10 + \frac{10}{20 s \ 10^{-6} + 1} \right] \bar{i}_2 \Rightarrow \bar{i}_2 = 2 \bar{i}_1 \end{aligned}$$

• Siccome la corrente $\hat{i}$ si ripartisce tra i due rami, si ha :

$$\hat{i} = \bar{i}_1 + \bar{i}_2 = \bar{i}_1 + 2 \bar{i}_1 \Rightarrow \bar{i}_1 = \hat{i}/3 \quad , \quad \bar{i}_2 = 2 \hat{i}/3$$

Risultato : Esprimiamo le tre grandezze d'uscita in funzione delle correnti $\bar{i}_1$ e $\bar{i}_2$ e, successivamente, sostituiamo le due correnti con la corrente impressa $\bar{i}$. Otteniamo le tre funzioni di rete :

$$\bar{v}_1 = 5 \bar{i}_2 + 20 \bar{i}_1 \Rightarrow F_1(s) = \frac{\bar{v}_1}{\bar{i}} = 10 \Omega$$

$$\bar{v}_2 = \frac{10}{20 s 10^{-6} + 1} \bar{i}_2 \Rightarrow F_2(s) = \frac{\bar{v}_2}{\bar{i}} = \frac{20/3}{1 + s 20 10^{-6}} \Omega$$

$$\bar{v}_3 = \frac{10}{20 s 10^{-6} + 1} \bar{i}_2 - \frac{20}{20 s 10^{-6} + 1} \bar{i}_1 \Rightarrow F_3(s) = 0 \Omega$$

Commento : Nel circuito dinamico vi sono due $\mathcal{C}$ e quindi due variabili di stato. Ma in nessuna delle funzioni di rete vi è un denominatore con due poli. Anzi due delle funzioni sono prive di poli dal momento che sono costanti. I due rami in parallelo si comportano come un partitore di corrente compensato nonostante la presenza delle due $\mathcal{V}_I$.

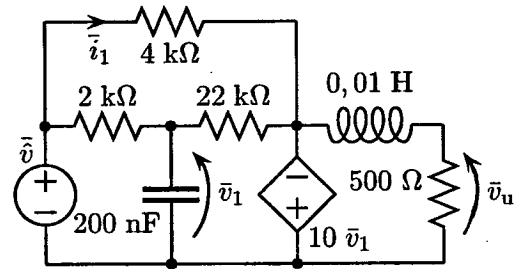
3.5.10 Esercizio EC/17/02/98 : Due funzioni di rete in un circuito

Il circuito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\mathcal{V}_V$, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e quattro $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare le due funzioni di rete

$$F_1(s) = \frac{\bar{v}_u}{\bar{v}} \quad , \quad F_2(s) = \frac{\bar{i}_1}{\bar{v}}$$

Semplifichiamo il circuito facendo attenzione che le due grandezze d'uscita $\bar{v}_u$ e $\bar{i}_1$ rimangano presenti.



• Il $\mathcal{R} \langle 22 \text{ k}\Omega \rangle$ forma una maglia con le due porte della $\mathcal{V}_V$. Possiamo applicare il primo teorema di Miller sostituendo il $\mathcal{R} \langle 22 \text{ k}\Omega \rangle$ con un c.a. e inserendo in parallelo al $\mathcal{C} \langle 200 \text{ nF} \rangle$ un $\mathcal{R} \langle 22/(10+1) = 2 \text{ k}\Omega \rangle$. Calcoliamo la tensione pilotante $\bar{v}_1$ con la regola del partitore di tensione :

$$\bar{v}_1 = \frac{\bar{v}/2000}{1/2000 + 1/2000 + s 200 10^{-9}} = \frac{\bar{v}/2}{1 + s 2 10^{-4}}$$

• La tensione $\bar{v}_u$ ai capi del $\mathcal{R} \langle 500 \Omega \rangle$ può essere calcolata con la regola del partitore di tensione partendo dalla tensione pilotata $-10 \bar{v}_1$

$$\bar{v}_u = \frac{-10 \bar{v}_1 500}{500 + s/100} = \frac{-10 \bar{v}_1}{1 + s 20 10^{-6}}$$

Risultato 1 : Eliminando $\bar{v}_1$ tra le due formule, otteniamo la prima funzione di rete

$$F_1(s) = \frac{\bar{v}_u}{\bar{v}} = \frac{\bar{v}_u}{\bar{v}_1} \frac{\bar{v}_1}{\bar{v}} = \frac{-5}{(1 + s 2 10^{-5})(1 + s 2 10^{-4})}$$

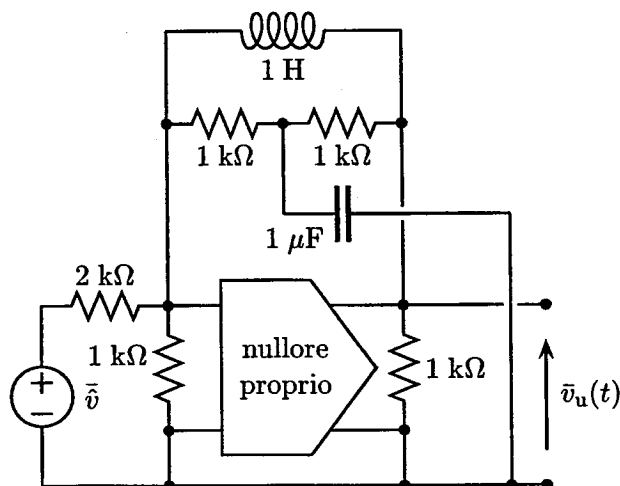
• La seconda funzione di rete può essere calcolata applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni alla maglia costituita dalla $\hat{\mathcal{V}}$, dalla porta pilotata della $\mathcal{V}_V$ e dal $\mathcal{R} \langle 4000 \Omega \rangle$:

$$4000 \bar{i}_1 = \bar{v} + 10 \bar{v}_1 \Rightarrow \bar{i}_1 = \bar{v}/4000 + \bar{v}_1/400$$

Risultato 2 : Sostituendo la tensione pilotante $\bar{v}_1$ si ottiene :

$$\bar{i}_1 = \bar{v}/4000 + \frac{\bar{v}/800}{1 + s 2 10^{-4}} \Rightarrow F_2(s) = \frac{\bar{i}_1}{\bar{v}} = \frac{1}{2000} \frac{3 + s 10^{-4}}{1 + s 2 10^{-4}}$$

3.5.11 Esercizio EC/11/09/98 : Funzione di rete di circuito con nullo

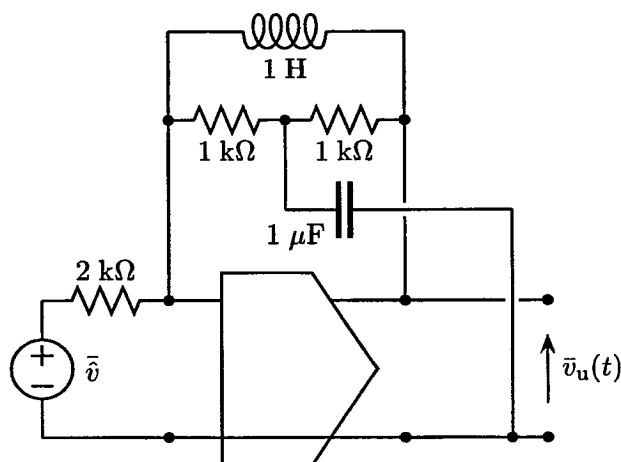


Il circuito dinamico in figura opera in pseudoregime cisoidale. Esso è composto da una $\hat{V}$, un nullo proprio, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e cinque $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la funzione di rete $\bar{v}_u/\bar{v}$

- I due $\mathcal{R}(1\text{ k}\Omega)$ in parallelo alla porta d'ingresso e d'uscita del nullo possono essere sostituiti da due c.a. .

- I due terminali in basso di ciascuna porta del nullo proprio sono connessi da un c.c. : inglobando questo c.c. nel nullo proprio, questo diventa tripolare.

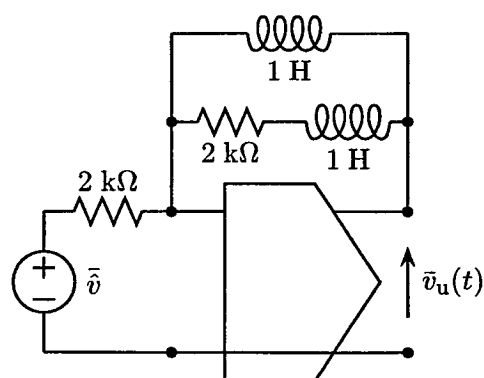


- Nel circuito vi è una stella, costituita dai $\mathcal{R}(1\text{ k}\Omega)$ e dal $\mathcal{C}(1\text{ }\mu\text{F})$, in parallelo al nullo tripolare. La trasformiamo nel triangolo equivalente : due dei tre rami del triangolo si trovano in parallelo alle due porte del nullo e perciò possono essere sostituiti da due c.a. .

- Il rimanente ramo viene a trovarsi connesso trasversalmente al nullo e più precisamente in parallelo all' $\mathcal{L}(1\text{ H})$. La sua impedenza $z_1(s)$ risulta :

$$1000 + 1000 + s \cdot 10^{-6} \cdot 10^6 = 2000 + s$$

Il bipolo trasversale risulta costituito dalla serie di un $\mathcal{R}(2\text{ k}\Omega)$ e un $\mathcal{L}(1\text{ H})$.



Risultato : La funzione di rete risulta uguale al rapporto tra l'impedenza del bipolo composito connesso trasversalmente al nullo tripolare e l'impedenza del $\mathcal{R}(2\text{ k}\Omega)$ in serie alla $\hat{V}$:

$$\frac{\bar{v}_u}{\bar{v}} = -\frac{s(2000 + s)}{2s + 2000} \cdot \frac{1}{2000} = -\frac{s/2000 \times (1 + s/2000)}{s/1000 + 1}$$

Commento : La funzione di rete è dotata di un polo reale negativo e uno per $s \rightarrow \infty$, e di uno zero reale negativo e uno nell'origine. Essi coincidono con gli zeri e poli dell'impedenza del bipolo composito trasversale al nullo.

3.6 FUNZIONI DI RETE IN $s = 0$ E/O $s \rightarrow \infty$

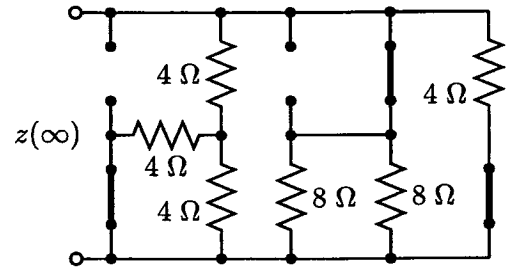
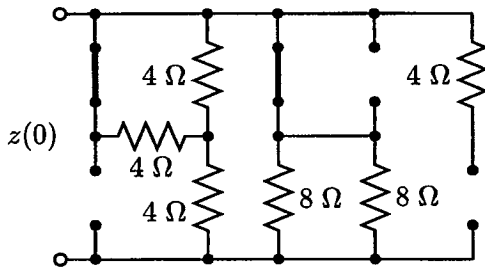
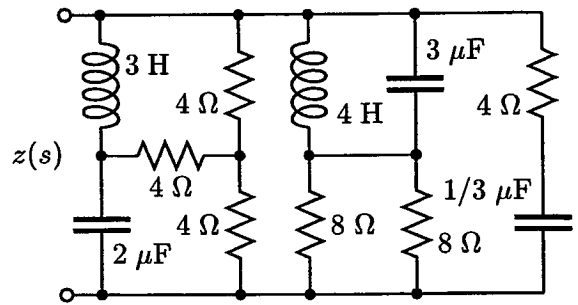
3.6.1 Esercizio E3/16/01/97 : Impedenza di un bipolo RLC per $s = 0$ e $s \rightarrow \infty$

Il bipolo composito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da tre $\mathcal{C}$, due $\mathcal{L}$ e sei $\mathcal{R}$.

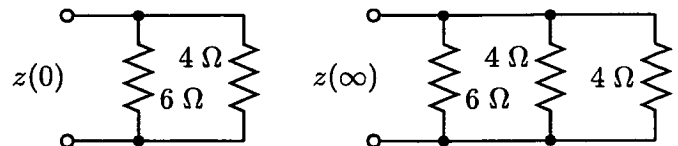
Quesito : Calcolare l'impedenza $z(s)$ del bipolo composito limitatamente ai valori della pulsazione $s = 0$ e $s \rightarrow \infty$.

- Il calcolo dell'impedenza $z(s)$ del bipolo composito in figura è piuttosto pesante e quindi da evitare.

- Il valore $z(0)$ dell'impedenza in $s = 0$ coincide con la resistenza del bipolo adinamico ottenuto da quello dinamico sostituendo ogni $\mathcal{L}$ con un c.c. e ogni $\mathcal{C}$ con un c.a. . Analogamente, il valore $z(\infty)$ dell'impedenza per $s \rightarrow \infty$ coincide con la resistenza del bipolo adinamico ottenuto da quello in figura eseguendo le sostituzioni $\mathcal{L} \rightarrow \text{c.a.}$ e $\mathcal{C} \rightarrow \text{c.c.}$.



- Entrambi i bipoli adinamici composti delle sovrastanti figure possono essere semplificati poiché vi sono alcune aggregazioni serie e parallelo di $\mathcal{R}$:



- Il bipolo resistivo equivalente a $z(0)$ è costituito dal parallelo di un $\mathcal{R} \langle 6 \text{ k}\Omega \rangle$ e un $\mathcal{R} \langle 4 \text{ k}\Omega \rangle$.

- Il bipolo resistivo equivalente a $z(\infty)$ è costituito dal parallelo di un $\mathcal{R} \langle 6 \text{ k}\Omega \rangle$ e due $\mathcal{R} \langle 4 \text{ k}\Omega \rangle$.

Risultato : I due valori dell'impedenza $z(s)$ risultano :

$$z(0) = \frac{1}{1/6 + 1/4} = \frac{12}{5} \Omega, \quad z(\infty) = \frac{1}{1/6 + 1/4 + 1/4} = \frac{3}{2} \Omega$$

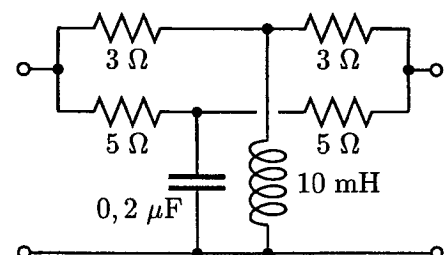
3.6.2 Esercizio E3/17/02/98 : Matrice ammettenza di un DBT per $s = 0$ e $s \rightarrow \infty$

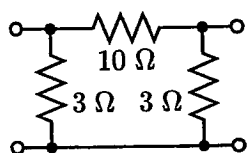
Il DBT in figura è costituito dal parallelo di due doppi bipoli a stella : uno costituito da due $\mathcal{R}$ e un $\mathcal{C}$ e l'altro da due $\mathcal{R}$ e un $\mathcal{L}$.

Quesito : Assumendo che il DBT composito operi in regime sinusoidale, calcolare la matrice delle ammettenze per $\omega = 0$ e $\omega \rightarrow \infty$.

- Se calcolassimo la matrice ammettenza $Y(s)$ in funzione di s e posto successivamente $s = 0$ e $s \rightarrow \infty$, eseguiremmo calcoli molto più pesanti.

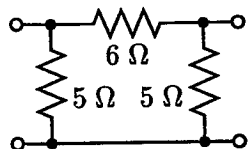
Risultato 1 : Nel caso $\omega = 0$ (regime costante) il $\mathcal{C}$ è equivalente a un c.a. e l' $\mathcal{L}$ a un c.c. . Il DBT si riduce a un triangolo di $\mathcal{R}$: due $\mathcal{R} \langle 3 \Omega \rangle$ e un $\mathcal{R} \langle 5 + 5 = 10 \Omega \rangle$. La matrice ammettenza, puramente reale, è :





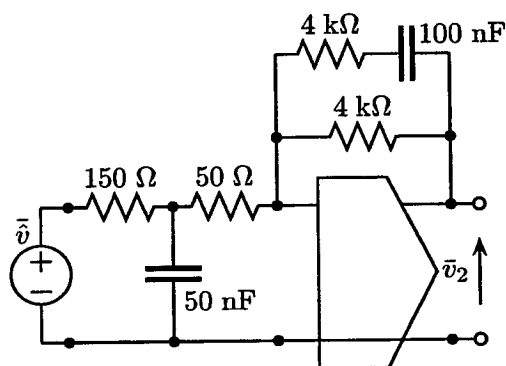
$$Y(0) = \begin{bmatrix} 1/3 + 1/10 & -1/10 \\ -1/10 & 1/3 + 1/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/30 & -0.1 \\ -0.1 & 13/30 \end{bmatrix} \text{ S}$$

Risultato 2 : Nel caso $\omega \rightarrow \infty$ il $\mathcal{C}$ è equivalente a un c.c. e l' $\mathcal{L}$ a un c.a. . Il DBT si riduce a un triangolo di $\mathcal{R}$: due $\mathcal{R} \langle 5 \Omega \rangle$ e un $\mathcal{R} \langle 3 + 3 = 6 \Omega \rangle$. La matrice ammettenza, puramente reale, è :



$$Y(\infty) = \begin{bmatrix} 1/5 + 1/6 & -1/6 \\ -1/6 & 1/5 + 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/30 & -1/6 \\ -1/6 & 11/30 \end{bmatrix} \text{ S}$$

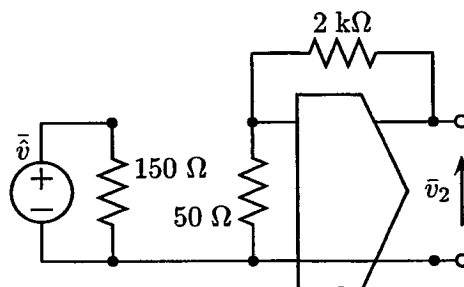
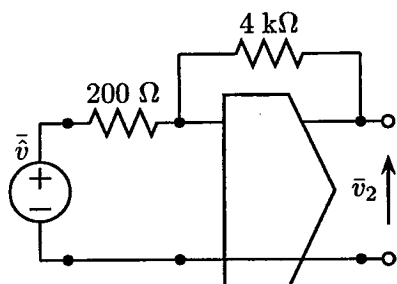
3.6.3 Esercizio E3/23/02/99 : Funzione di rete in $s = 0$ e $s \rightarrow \infty$ con nullore



Il circuito in figura opera in pseudoregime cisoidale.

Quesito : Calcolare la funzione di rete $F(s) = \bar{v}_2/\bar{v}$ per $s = 0$ e $s \rightarrow +\infty$.

• Siccome la funzione di rete interessa solo in $s = 0$ e $s \rightarrow \infty$, non conviene calcolarla per un generico s ma conviene calcolare direttamente i suoi valori in $s = 0$ e $s \rightarrow \infty$. Queste due situazioni equivalgono a sostituire i $\mathcal{C}$ con un c.a. ($s = 0$) e con un c.c. ($s \rightarrow \infty$), come risulta nelle due figure sottostanti.



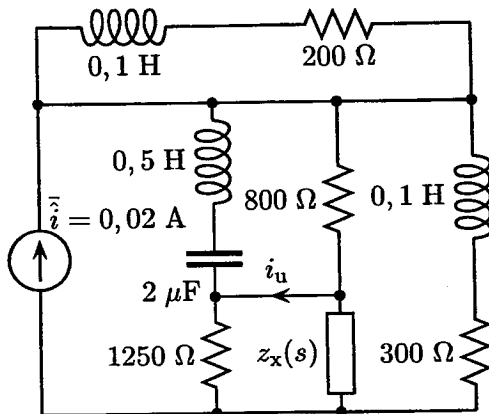
Risultato : Dall'analisi dei due circuiti adinamici si ha immediatamente che :

$$F(0) = -4000/200 = -20 \quad , \quad F(+\infty) = 0$$

Infatti nel caso $s \rightarrow \infty$ la tensione ai capi del $\mathcal{R} \langle 2 \text{ k}\Omega \rangle$ trasversale è nulla, poiché non è percorso da corrente.

3.7 PROBLEMI INVERSI IN PSEUDOREGIME CISOIDALE

3.7.1 Esercizio EB/28/07/98 : Problema inverso con ponte in equilibrio



Il circuito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}$, tre $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$, quattro $\mathcal{R}$ e un bipolo composito la cui impedenza non è conosciuta.

Quesito : Calcolare la composizione del bipolo la cui impedenza è ignota sapendo che la corrente $\hat{i}_u$ è nulla per qualsiasi valore della pulsazione s .

• Consideriamo all'interno del circuito i quattro bipoli : il $\mathcal{R}$ (1250 Ω), il $\mathcal{R}$ (800 Ω), il risonatore ideale serie costituito dal $\mathcal{L}$ (0,5 H) e dal $\mathcal{C}$ (2 μF) e, infine, il bipolo di impedenza sconosciuta $z_x(s)$.

• Questi quattro bipoli costituiscono un ponte la cui seconda porta è connessa al c.c. percorso dalla corrente $\hat{i}_u = 0$: siccome il ponte è in equilibrio per qualsiasi valore di s , cioè i due prodotti incrociati delle quattro impedenze del ponte sono coincidenti per qualsiasi s .

Risultato : Possiamo calcolare l'impedenza $z_x(s)$:

$$z_x(s) \times [0,5s + 1/(s \cdot 2 \cdot 10^{-6})] = 1250 \times 800 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_x(s) = \frac{10^6}{0,5s + 1/(s \cdot 2 \cdot 10^{-6})} = \frac{1}{s \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} + 1/(s \cdot 2)} \Rightarrow y_x(s) = s \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} + 1/(s \cdot 2)$$

da cui si intuisce che il bipolo di impedenza $z_x(s)$ è costituito dal parallelo di un $\mathcal{C}$ (0,5 μF) e un $\mathcal{L}$ (2 H) che è proprio un risonatore parallelo ideale.

4 CIRCUITI OPERANTI IN REGIME SINUSOIDALE

In questo capitolo vengono presi in considerazione esercizi riguardanti circuiti operanti in regime sinusoidale. Un circuito dinamico lineare è in regime sinusoidale, quando le grandezze impresse di tutte le sorgenti impresse sono sinusoidi con la medesima pulsazione ω e la soluzione transitoria è esaurita, nell'ipotesi che il circuito sia asintoticamente stabile.

Questo regime esiste solamente nei circuiti costituiti da

cortocircuiti (c.c.) e circuiti aperti (c.a.), sorgenti impresse di tensione ($\hat{\mathcal{V}}$) e corrente ($\hat{\mathcal{I}}$) sinusoidali (con la medesima pulsazione ω), resistori ($\mathcal{R}$), le quattro sorgenti pilotate ($\mathcal{V}_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ e $\mathcal{V}_{\mathcal{V}}$), nullore ($\mathcal{N}$, amplificatore operazionale idealizzato), trasformatori ideali ($\mathcal{T}$, tr.id.), giratori ($\mathcal{G}$), condensatori ($\mathcal{C}$), induttori ($\mathcal{L}$) e induttori accoppiati ($\mathcal{LL}$). Inoltre occorre che il circuito risulti asintoticamente stabile.

In molti problemi la pulsazione ω comune alle grandezze impresse non viene specificata: ogni problema di questo tipo deve essere risolto considerando ω come una variabile indeterminata. In questo ambito vengono introdotte le funzioni di rete in regime sinusoidale.

La teoria necessaria per risolvere questi esercizi è trattata nei CCap. 20-23-FCE:

Sez. 1 : Esercizi vari :

Sez. 2 : Potenza istantanea e complessa :

Sez. 3 : Calcolo della potenza attiva, reattiva e complessa :

Sez. 4 : Corollario di Boucherot :

Sez. 5 : Rapporti di potenze :

Sez. 6 : Diagrammi fasoriali :

Sez. 7 : Calcolo della fase di una grandezza :

Sez. 8 : Risonatori serie e parallelo :

Sez. 9 : Diagrammi di Nyquist :

Sez. 10 : Circuiti in regime multi-frequenziale :

Sez. 11 : Energia massima immagazzinata :

Sez. 12 : Problemi inversi in regime sinusoidale :

4.1 ESERCIZI VARI

4.1.1 Esercizio E4/09/01/99 : Corrente istantanea a regime

Sia dato un generico bipolo operante in regime sinusoidale e percorso dalla corrente istantanea $i(t)$. Il valore efficace i^{eff} vale $2/\sqrt{2}$ A, il massimo valore di $i(t)$ si ha per $t = 0,2, 0,6, 1,0, \dots$ ms.

Quesito : Calcolare l'espressione analitica della corrente istantanea $i(t)$.

Poiché il bipolo opera in regime sinusoidale la corrente $i(t)$ è una sinusoidale $i(t) = |\bar{i}| \cos(\omega t + \phi)$. L'ampiezza $|\bar{i}|$ vale $\sqrt{2} i^{\text{eff}} = 2$ A, mentre il periodo della sinusoidale coincide con l'intervallo tra due massimi successivi $T = 0,4$ ms, da cui si ha $\omega = 2\pi/T = 5000\pi$ rad/s.

Il calcolo di ϕ deve tener conto della posizione temporale del primo massimo (in $t = 0,2$ ms) per $t > 0$ rapportato al periodo $T = 0,4$ ms: Essa coincide con mezzo periodo per cui $\phi = \pm\pi$.

Risultato : L'espressione della corrente istantanea risulta : $i(t) = 2 \cos(\pi 5000 t \pm \pi)$.

4.1.2 Esercizio E4/25/06/98 : Corrente istantanea

Il circuito in figura è costituito da un'unica maglia e opera in regime sinusoidale alimentato dalla tensione impressa $\hat{v}(t) = 8 \sin(\omega t)$ dove $\omega = 200$ rad/s.

Quesito : Calcolare il valore della corrente $i(t)$ in $t = t_1 = 0,04$ s.

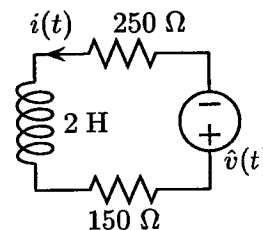
• Dal momento che il circuito opera in regime sinusoidale, lo esaminiamo nel dominio dei fasori. Il fasore della tensione impressa $\hat{v}(t) = 8 \sin(\omega t)$ risulta $\bar{v} = 8 \exp(-j\pi/2)$, mentre l'impedenza vista dalla $\bar{v}$ risulta $z = (150 + 250) + j\omega 2 = 400 + j400 \Omega$.

• Il fasore $\bar{i}$ della corrente $i(t)$ che fluisce nella maglia risulta $\bar{i} = \frac{\bar{v}}{z} = \frac{8 \exp(-j\pi/2)}{400 + j400} = 10\sqrt{2} \exp(j\pi/4)$ mA

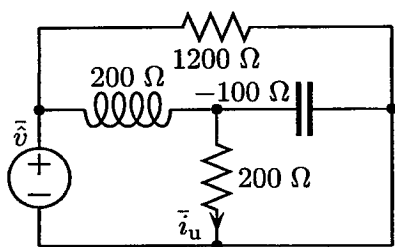
• Una volta noto il fasore, risaliamo all'espressione della corrente $i(t)$ nel dominio del tempo :

$$i(t) = 10\sqrt{2} \cos(200t + \pi/4)$$

Risultato : da cui si ottiene : $i(t_1) = 10\sqrt{2} \cos(200 \times 0,04 + \pi/4) = 10\sqrt{2} \cos(8 + \pi/4)$ mA



4.1.3 Esercizio EA/02/02/99 : Corrente e potenza istantanee

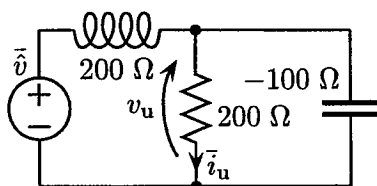


Il circuito in figura opera in regime sinusoidale con $f = 50$ Hz. Esso è costituito da una $\bar{V}$, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e due $\mathcal{R}$. La tensione impressa vale $\bar{v} = 100 + j100$ V.

Quesito : Calcolare la corrente $\bar{i}_u$ e la potenza complessa $\bar{P}_u$ assorbita dal $\mathcal{R}(200 \Omega)$. Inoltre calcolare la corrente istantanea $i_u(t)$ e la potenza istantanea $p_u(t)$ (nel dominio del tempo).

• Il $\mathcal{R}(1200 \Omega)$, in parallelo alla $\bar{V}(\bar{v})$, è sostituito da un c.a., poiché non ha alcun effetto sulla corrente $\bar{i}_u$.

• Dalla regola del partitore di tensione calcoliamo la tensione $\bar{v}_u$:



$$\bar{v}_u = \frac{(100 + j100)/(j200)}{1/(j200) + 1/200 + 1/(-j100)} = \frac{100(1+j)}{1+j-2} = -j100 \text{ V}$$

Risultato 1 : La corrente $\bar{i}_u$ risulta : $\bar{i}_u = \bar{v}_u/200 = -j0,5$ A.

Risultato 2 : La potenza complessa $\bar{P}_u$ assorbita dal $\mathcal{R}(200 \Omega)$ è puramente reale (potenza attiva) e vale : $\bar{P}_u = 0,5 \times 200 |\bar{i}_u|^2 = 25$ W.

Risultato 3 : La corrente istantanea $i_u(t)$ viene calcolata dal fasore $\bar{i}_u = -j0,5$ A, che ci dice che l'ampiezza è 0,5 A e la fase $-\pi/2$: $i_u(t) = 0,5 \cos(2\pi 50 t - \pi/2)$ A.

Risultato 4 : La potenza istantanea $p_u(t)$ assorbita dal $\mathcal{R}(200 \Omega)$ è una sinusoidale rialzata poiché la tensione e la corrente sono in fase : $p_u(t) = 25 + 25 \cos(\pi 200 t - \pi)$ W.

Commento : La potenza fluttuante, componente sinusoidale della potenza istantanea, ha una pulsazione doppia di quella della corrente $i_u(t)$, mentre la sua fase è tale che $p_u(t)$ è nulla in $t = 0$.

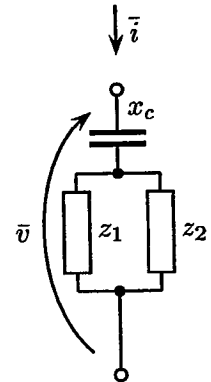
4.1.4 Esercizio E5/01/07/97 : Impedenza di un bipolo con freq. fissa

Il bipolo composito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da un $\mathcal{C}\langle x_c \rangle$ con x_c incognita e due bipoli dinamici di impedenze incognite z_1 e z_2 con $z_1 = z_2^*$. I fasori della tensione e della corrente del bipolo valgono $\bar{v} = 2 - j 1$ V e $\bar{i} = 4 + j 2$ A.

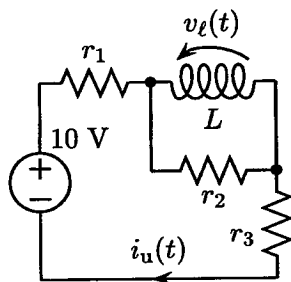
Quesito : Calcolare la reattanza del $\mathcal{C}\langle x_c \rangle$.

Risultato : L'impedenza del parallelo dei bipoli di impedenza z_1 e z_2 è reale, poiché z_1 e z_2 sono complesse coniugate : quindi la parte immaginaria dell'impedenza $\bar{v}/\bar{i}$ del bipolo composito coincide con la reattanza x_c del $\mathcal{C}$.

$$z = \frac{\bar{v}}{\bar{i}} = \frac{2 - j 1}{4 + j 2} = \frac{(2 - j 1)(4 - j 2)}{4^2 + 2^2} = \frac{3}{10} - j \frac{2}{5} \Omega \Rightarrow x_c = -\frac{2}{5} \Omega$$



4.1.5 Esercizio E5/09/01/99 WWWWW??? SPOSTARE in CAP. 02



Il circuito in figura è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}\langle 10 \text{ V} \rangle$, un $\mathcal{L}\langle L \rangle$, e i $\mathcal{R}\langle r_1 = 12 \text{ k}\Omega \rangle$, $\mathcal{R}\langle r_2 \rangle$, $\mathcal{R}\langle r_3 = 8 \text{ k}\Omega \rangle$. I valori di L e r_2 sono ignoti.

Quesito : Calcolare la corrente $i_u(t)$ per $t = 0$ e $t \rightarrow +\infty$, sapendo che la tensione ai capi dell' $\mathcal{L}$, è nulla in $t = 0$: $v_l(0) = 0$.

• Il circuito è costituito da un'unica maglia, se consideriamo il $\mathcal{L}\langle L \rangle \parallel \mathcal{R}\langle r_2 \rangle$ come un unico bipolo. La legge di Kirchhoff delle tensioni per la maglia è : $10 = (r_1 + r_3) i_u(t) + v_l(t)$.

Risultato 1 : Per $t = 0$ abbiamo $10 - v_l(0) = 20000 i_u(0)$ da cui si ha :

$$i_u(0) = 10/20000 = 0,5 \text{ mA}$$

Risultato 2 : Per $t \rightarrow +\infty$ abbiamo che la tensione $v_l(\infty)$ è nulla poiché il circuito è a regime, quindi la corrente $i_u(\infty)$ assume lo stesso valore che per $t = 0$: $i_u(\infty) = 0,5 \text{ mA}$.

Commento : Il circuito era già a regime in $t = 0$.

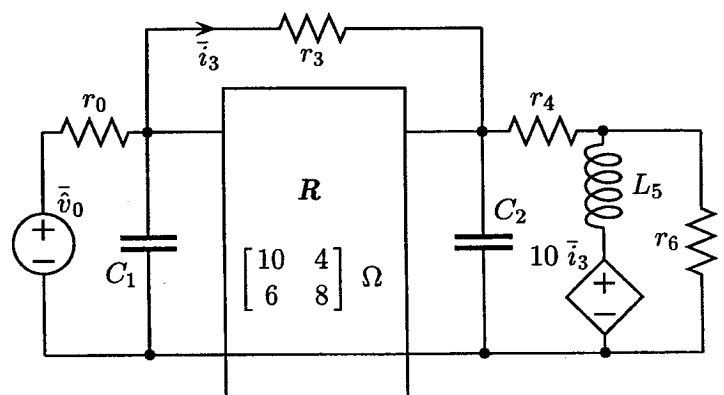
4.1.6 Esercizio EA/27/01/98 : Metodo dei nodi modificato in regime sinusoid.

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, dalla $\mathcal{V}_I\langle 10 \Omega \bar{i}_3 \rangle$, un $\mathcal{L}$, due $\mathcal{C}$ e quattro $\mathcal{R}$ e un DBT con matrice resistenza nota.

Quesito : Scrivere le equazioni risolutive del circuito seguendo il metodo nodale modificato.

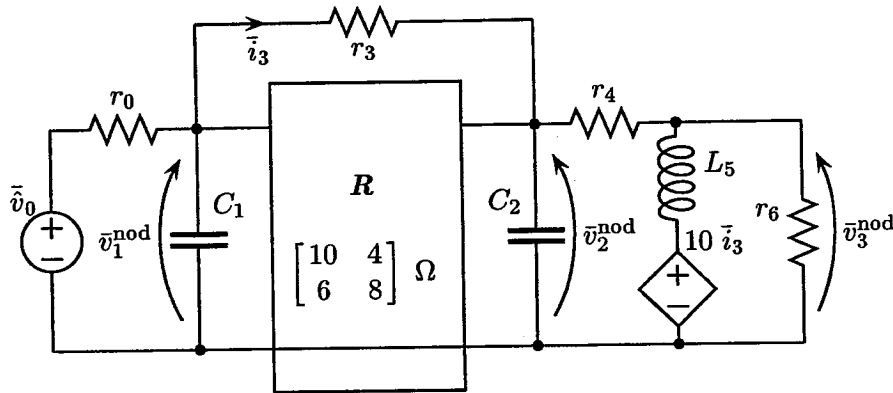
• Il metodo nodale modificato richiede l'uso di tutte le rappresentazioni controllate in tensione esistenti.

• Introduciamo la matrice conduttanza del DBT descritto dalla matrice R :



$$G = R^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & -1/14 \\ -3/28 & 5/28 \end{bmatrix} \text{ S}$$

- I tagli nodali indipendenti sono tre. Come nodo di riferimento consideriamo quello in basso in cui confluisce il terminale comune del DBT. Numeriamo i tre nodi in ordine crescente da sinistra verso destra e indichiamo con $\bar{v}_1^{\text{nod}}$, $\bar{v}_2^{\text{nod}}$ e $\bar{v}_3^{\text{nod}}$ le rispettive tensioni nodali.



- Scriviamo le tre equazioni principali, una per ciascun nodo :

- **Nodo 1** : vi confluiscono il bipolo $\mathcal{R}\langle r_0 \rangle \dagger \hat{\mathcal{V}}\langle \bar{v}_0 \rangle$, il $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$, il $\mathcal{C}\langle C_1 \rangle$, e la corrente della prima porta del DBT . Annulliamo la somma delle quattro correnti uscenti :

$$(\bar{v}_1^{\text{nod}} - \bar{v}_0)/r_0 + \bar{v}_1^{\text{nod}} j \hat{\omega} C_1 + (\bar{v}_1^{\text{nod}} - \bar{v}_2^{\text{nod}})/r_3 + g_{11} \bar{v}_1^{\text{nod}} + g_{12} \bar{v}_2^{\text{nod}} = 0$$

- **Nodo 2** : vi confluiscono il $\mathcal{R}\langle r_3 \rangle$, il $\mathcal{R}\langle r_4 \rangle$, il $\mathcal{C}\langle C_2 \rangle$, e la corrente della seconda porta del DBT . Annulliamo la somma delle quattro correnti uscenti :

$$(\bar{v}_2^{\text{nod}} - \bar{v}_3^{\text{nod}})/r_4 + \bar{v}_2^{\text{nod}} j \hat{\omega} C_2 + (\bar{v}_2^{\text{nod}} - \bar{v}_1^{\text{nod}})/r_3 + g_{22} \bar{v}_2^{\text{nod}} + g_{21} \bar{v}_1^{\text{nod}} = 0$$

- **Nodo 3** : vi confluiscono la serie dell' $\mathcal{L}\langle L_5 \rangle$ e della $\mathcal{V}_I\langle 10 \bar{i}_3 \rangle$, il $\mathcal{R}\langle r_4 \rangle$, e il $\mathcal{R}\langle r_6 \rangle$. Annulliamo la somma delle tre correnti uscenti :

$$(\bar{v}_3^{\text{nod}} - r_m \bar{i}_3)/(j \hat{\omega} L_5) + \bar{v}_3^{\text{nod}}/r_6 + (\bar{v}_3^{\text{nod}} - \bar{v}_2^{\text{nod}})/r_4 = 0$$

- Vi sono tre equazioni in quattro incognite : le tre tensioni di nodo e la corrente $\bar{i}_3$ pilotante la $\mathcal{V}_I$. Occorre aggiungere un'equazione che esprima $\bar{i}_3$ in funzione delle grandezze incognite già presenti nelle equazioni : $\bar{i}_3 = (\bar{v}_1^{\text{nod}} - \bar{v}_2^{\text{nod}})/r_3$. Sostituiamo la corrente $\bar{i}_3$ nell'equazione del terzo nodo :

$$[\bar{v}_3^{\text{nod}} - r_m ((\bar{v}_1^{\text{nod}} - \bar{v}_2^{\text{nod}})/r_3)]/(j \hat{\omega} L_5) + \bar{v}_3^{\text{nod}}/r_6 + (\bar{v}_3^{\text{nod}} - \bar{v}_2^{\text{nod}})/r_4 = 0$$

Risultato : Riordiniamo le tre equazioni nei nodi in un unico sistema con le tre tensioni di nodo nel ruolo di incognite :

$$\begin{bmatrix} [j \hat{\omega} C_1 + 1/r_0 + 1/r_3 + g_{11}] & [g_{12} - 1/r_3] & 0 \\ [g_{21} - 1/r_3] & [1/r_3 + 1/r_4 + g_{22} + j \hat{\omega} C_2] & -[1/r_4] \\ [-r_m/(r_3 j \hat{\omega} L_5)] & [r_m/(j \hat{\omega} L_5 r_3) - 1/r_4] & [1/(j \hat{\omega} L_5) + 1/r_6 + 1/r_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1^{\text{nod}} \\ \bar{v}_2^{\text{nod}} \\ \bar{v}_3^{\text{nod}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_0/r_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2 POTENZA ISTANTANEA E COMPLESSA

4.2.1 Esercizio E2/09/01/99 : Potenza attiva e reattiva da quella istant.

Consideriamo un bipolo operante in regime sinusoidale : La potenza istantanea $p(t)$ assorbita dal bipolo oscilla tra il valore massimo $P^{\text{max}} = 25 \text{ W}$ e il valore minimo $P^{\text{min}} = -1 \text{ W}$.

Quesito : Calcolare la potenza attiva (media) P e la potenza reattiva Q assorbita dal bipolo.

- Poichè la potenza istantanea $p(t)$ consiste nella sovrapposizione di una componente costante (potenza attiva) e una sinusoidale (potenza fluttuante), la potenza attiva P coincide con la media aritmetica tra il valore massimo e il valore minimo : $P = [P^{\text{max}} + P^{\text{min}}]/2 = 12 \text{ W}$.

- Siccome l'ampiezza della potenza fluttuante coincide con la potenza apparente

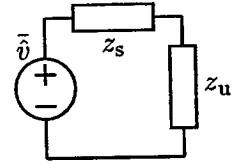
$$P^{\text{app}} = \sqrt{P^2 + Q^2} = [P^{\text{max}} - P^{\text{min}}]/2 \implies Q = \pm \sqrt{P^{\text{max}} P^{\text{min}}} = \pm 5 \text{ VAR} .$$

Commento : Questo metodo non consente di calcolare il segno della potenza reattiva : comunque in molti casi noi sappiamo a priori se il bipolo, di cui conosciamo il valore minimo e massimo della potenza istantanea, è resistivo-induttivo oppure resistivo-capacitivo. Questa informazione ulteriore ci consente di dirimere il segno di Q .

4.2.2 Esercizio E2/09/07/98 : Massimo e minimo della potenza istantanea

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale. Esso è costituito da una $\hat{V}$ ($\hat{v} = 8$ V) in serie a un bipolo con impedenza (interna) $z_s = 100 - j100 \Omega$ e da un carico con impedenza $z_u = 200 + j400 \Omega$.

Quesito : Calcolare il valore massimo $P_u^{\max}$ e minimo $P_u^{\min}$ della potenza istantanea $p_u(t)$ assorbita dal carico.



- La teoria esposta nel Cap. 22-FCE afferma che la potenza istantanea è uguale alla somma di un termine costante coincidente con la potenza attiva P_u e a un termine sinusoidale la cui ampiezza coincide col modulo della potenza complessa : $|\bar{P}_u| = \sqrt{P_u^2 + Q_u^2}$.
- Esprimiamo $P_u^{\max}$ e $P_u^{\min}$ in funzione di P_u e Q_u (vedere Cap. 23-FCE) :

$$P_u^{\max} = P_u + \sqrt{P_u^2 + Q_u^2}, \quad P_u^{\min} = P_u - \sqrt{P_u^2 + Q_u^2}$$

- Per calcolare P_u e Q_u occorre conoscere il fasore della corrente $i_u(t)$ che fluisce nel carico

$$\bar{i}_u = \frac{\bar{v}}{z_s + z_u} = \frac{8}{100 - j100 + 200 + j400} = \frac{8}{300 + j300} = (\sqrt{2} \times 40/3000) \exp(-j\pi/4) \text{ mA}$$

- La potenza attiva e reattiva assorbite dal carico risultano

$$P_u = (1/2) r_u |\bar{i}_u|^2 = (1/2) 200 (\sqrt{2} \times 40/3000)^2 = 0,32/9 \text{ W}$$

$$Q_u = (1/2) x_u |\bar{i}_u|^2 = (1/2) 400 (\sqrt{2} \times 40/3000)^2 = 0,64/9 \text{ W}$$

Risultato : Seguono immediatamente il valore massimo e minimo della potenza istantanea

$$P_u^{\max} = 0,32/9 + \sqrt{(0,32/9)^2 + (0,64/9)^2} = 0,32/9 (1 + \sqrt{5}) \text{ W}$$

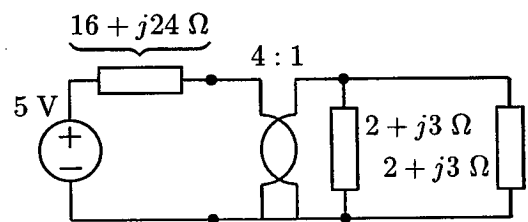
$$P_u^{\min} = 0,32/9 - \sqrt{(0,32/9)^2 + (0,64/9)^2} = 0,32/9 (1 - \sqrt{5}) \text{ W}$$

4.3 CALCOLO DELLA POTENZA ATTIVA, REATTIVA E COMPLESSA

4.3.1 Esercizio E2/27/01/98 : Potenze complesse in un circuito

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{V}$ (5 V) sinusoidale, un $\mathcal{T}$ (4 : 1) e tre bipoli.

Quesito : Calcolare la potenza complessa $\bar{P}_1 = P_1 + j Q_1$ entrante nella porta di sinistra del $\mathcal{T}$ e la potenza complessa $P_u + j Q_u$ assorbita dal bipolo di impedenza $2 + j 3 \Omega$ sulla destra.



- I due bipoli di impedenza $2 + j 3 \Omega$ sono in parallelo e sono equivalenti a un unico bipolo di impedenza $1 + j 1,5 \Omega$. La potenza complessa uscente dalla porta di destra del $\mathcal{T}$ è uguale a quella entrante nella porta di sinistra $\bar{P}_1$ e quindi abbiamo $\bar{P}_1 = 2 \bar{P}_u$.

- La porta di sinistra del $\mathcal{T}$ è equivalente ad un bipolo di impedenza $4^2 (1 + j 1,5) = 16 + j 24 \Omega$. Quindi la $\hat{V}$ sinusoidale è chiusa su un bipolo costituito dalla serie di due bipoli della stessa impedenza $16 + j 24 \Omega$. L'impedenza complessiva vista dalla $\hat{V}$ è $z_0 = 32 + j 48 \Omega$ e la metà della potenza

complessa $\bar{P}_0$ erogata dalla $\hat{V}$ entra nella porta di sinistra del $\mathcal{T}$: $\bar{P}_0 = 2 \bar{P}_1 = 4 \bar{P}_u$.

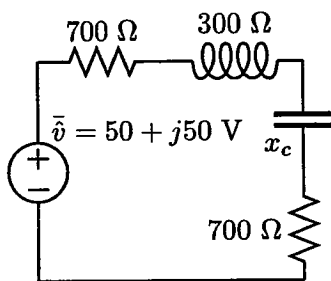
• La potenza complessa $\bar{P}_0$ risulta uguale a :

$$\bar{P}_0 = \frac{|\bar{v}|^2}{2 z_0^*} = \frac{25}{2 \times (32 - j 48)} = \frac{25}{32 \times (2 - j 3)} = \frac{25(2 + j 3)}{32 \times (4 + 9)} = \frac{25}{16 \times 13} + j \frac{75}{32 \times 13} \text{ VA}$$

Risultato : Le potenze complesse $\bar{P}_1$ e $\bar{P}_u$ risultano uguali a :

$$\bar{P}_1 = \frac{\bar{P}_0}{2} = \frac{25}{32 \times 13} + j \frac{75}{64 \times 13} \text{ VA} \quad , \quad \bar{P}_u = \frac{\bar{P}_0}{4} = \frac{25}{64 \times 13} + j \frac{75}{128 \times 13} \text{ VA}$$

4.3.2 Esercizio E5/28/07/98 : Potenza attiva massima



Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{V}$, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la reattanza x_c del $\mathcal{C}$, tale che la potenza attiva assorbita dal $\mathcal{R}$ ($r_u = 700 \Omega$) sulla destra sia massima.

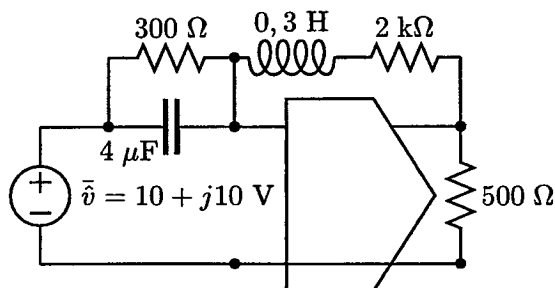
• La potenza attiva P_u assorbita dal suddetto $\mathcal{R}$ è proporzionale al quadrato dell'ampiezza della corrente $\bar{i}_u$ uscente dalla $\hat{V}$:

$$P_u = 0,5 r_u |\bar{i}_u|^2$$

• L'ampiezza $|\bar{i}_u|$ raggiunge il valore massimo in corrispondenza del valore minimo dell'ampiezza dell'impedenza $z(j\omega) = 1400 + j(300 + x_c)$ del bipolo composito alimentato dalla $\hat{V}$.

Risultato : La parte reale (resistenza) di $z(j\omega)$ è costante mentre la parte immaginaria (reattanza) risulta $300 + x_c$. La potenza P_u raggiunge il massimo quando la reattanza di $z(j\omega)$ è nulla : $x_c = -300 \Omega$.

4.3.3 Esercizio E2/28/07/98 : Potenza complessa con nullore



Il circuito in figura opera in regime sinusoidale con $f = 50 \text{ Hz}$ ed è costituito da un nullore, una $\hat{V}$, un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la potenza attiva P e reattiva Q erogate dalla $\hat{V}$ ($10 + j 10 \text{ V}$).

• Il bipolo $\mathcal{R}$ ($r_1 = 300 \Omega$) $\parallel$ $\mathcal{C}$ ($C_1 = 4 \mu\text{F}$) è connesso alla porta pilotante di una $\mathcal{V}_I$ dinamica (c.c.) che non assorbe potenza.

Risultato : La potenza attiva P e reattiva Q erogate dalla $\hat{V}$ coincidono con le rispettive potenze assorbite dal $\mathcal{R}$ (300Ω) e dal $\mathcal{C}$ ($4 \mu\text{F}$) :

$$P = \frac{1}{2 r_1} |\bar{v}|^2 = \frac{10^2 + 10^2}{2 \times 300} = 1/3 \text{ W}$$

$$Q = 2 \pi f C_1 |\bar{v}|^2 / 2 = \pi 100 4 \cdot 10^{-6} 100 = \pi 4 \cdot 10^{-2} \text{ VAR}$$

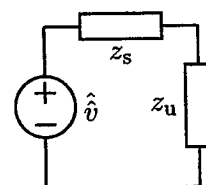
4.3.4 Esercizio E2/30/01/97 : Potenza attiva e reattiva assorbite da un bipolo

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale con ω fissata ed è costituito da una $\hat{V}$ ($\bar{v} = 200 \text{ V}$) (sinusoidale, $|\bar{v}|$ è il valore efficace) con in serie l'impedenza interna $z_s = 2 - j1 \Omega$ e un carico di impedenza $z_u = 3 + j6 \Omega$.

Quesito : Calcolare la potenza attiva P_u e la potenza reattiva Q_u assorbite dal carico.

- Nello svolgimento dei calcoli noi consideriamo come modulo di un fasore l'ampiezza delle rispettiva sinusoide.
- Il fasore $\bar{i}_u$ della corrente fluente nell'unica maglia risulta :

$$\bar{i}_u = \frac{\bar{v}}{z_s + z_u} = \frac{\sqrt{2} \times 200}{(2 - j1) + (3 + j6)} = \frac{\sqrt{2} 200}{5 + j5} = 40 \exp(-j\pi/4) \text{ A}$$



Nella suddetta espressione numerica la fase $\angle \bar{v}$ della tensione $\bar{v}$ è stata assunta nulla. Questo fatto non guasta la generalità della soluzione. Infatti le fasi di tutti i fasori di un circuito sono definite a meno di una costante additiva arbitraria. Comunque per calcolare le potenze ci basta conoscere l'ampiezza di $\bar{i}_u$.

Risultato : Calcoliamo la potenza complessa assorbita dal carico e quindi la potenza attiva e quella reattiva risultano :

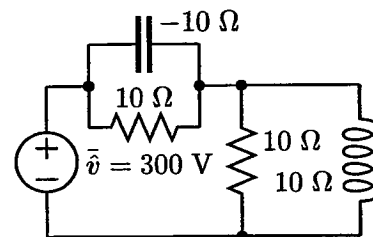
$$\bar{P}_u = P_u + j Q_u = \frac{1}{2} z_u |\bar{i}_u|^2 = \frac{1}{2} (3 + j6) |40|^2 = 2400 + j 4800 \text{ VA} \Rightarrow \begin{cases} P_u = 2400 \text{ W} \\ Q_u = 4800 \text{ VAR} \end{cases}$$

4.3.5 Esercizio E2/20/02/97 : Potenza attiva assorbita dal carico

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale con ω fissata ed è costituito da una sorgente nonideale di tensione sinusoidale $\hat{v}(t)$ con ampiezza 300 V e ammettenza interna $y_s = 1/10 + j1/10 \text{ S}$ e un carico di ammettenza $y_u = 1/10 - j1/10 \text{ S}$.

Quesito : Calcolare la potenza attiva P_u assorbita dal carico.

- Il fasore $\bar{v}_u$ della tensione ai capi del carico viene ottenuto mediante la regola del partitore di tensione :



$$\bar{v}_u = \frac{\bar{v} y_s}{y_s + y_u} = \frac{300 \times (1/10 + j1/10)}{(1/10 + j1/10) + (1/10 - j1/10)} = \frac{300 \times (1 + j)}{2} = 150 \sqrt{2} \exp(j\pi/4) \text{ V}$$

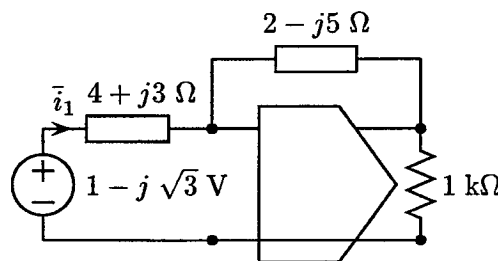
Risultato : La potenza attiva assorbita dal carico viene calcolata mediante la nota formula :

$$\bar{P}_u = \frac{1}{2} g_u |\bar{v}_u|^2 = \frac{1}{2} \frac{|150 \sqrt{2}|^2}{10} = 2250 \text{ W}$$

4.3.6 Esercizio E2/01/07/97 : Calcolo della potenza complessa in circuito con nullore

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale con ω incognita ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}(\bar{v} = 1 - \sqrt{3} \text{ V})$ (sinusoidale), un nullore, due bipoli di impedenza $z_1 = 4 + j3 \Omega$ e $z_2 = 2 - j5 \Omega$ e un $\mathcal{R}(1 \text{ k}\Omega)$.

Quesito : Calcolare le potenze complesse $P_1 + j Q_1$ e $P_2 + j Q_2$ assorbite dai bipoli di impedenza z_1 e z_2 .



- Siccome la porta d'ingresso del nullore è un nullatore, i due bipoli dinamici di impedenza z_1 e z_2 sono percorsi dalla stessa corrente $\bar{i}_1$, di cui ci interessa l'ampiezza :

$$|\bar{i}_1| = \frac{|\bar{v}|}{|z_1|} = \frac{|1 - j\sqrt{3}|}{|4 + j3|} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5} \text{ A}$$

- La potenza complessa assorbita dal bipolo di impedenza z_1 risulta

$$P_1 + j Q_1 = \frac{1}{2} z_1 |\bar{i}_1|^2 = \frac{1}{2} (4 + j3) \frac{4}{25} = \frac{8}{25} + j \frac{6}{25} \text{ VA}$$

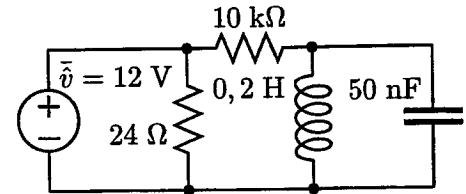
- La potenza complessa assorbita dal bipolo di impedenza z_2 risulta

$$P_2 + j Q_2 = \frac{1}{2} z_2 |\bar{i}_1|^2 = \frac{1}{2} (2 - j5) \frac{4}{25} = \frac{4}{25} - j \frac{2}{5} \text{ VA}$$

4.3.7 Esercizio E2/17/02/98 : Potenza complessa erogata da una sVi

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale con $\omega = 10000 \text{ rad/s}$ ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v} = 12 \text{ V})$, un $\mathcal{L}(0,2 \text{ H})$, un $\mathcal{C}(50 \text{ nF})$, un $\mathcal{R}(24 \Omega)$ e un $\mathcal{R}(10 \text{ k}\Omega)$.

Quesito : Calcolare la potenza complessa $\bar{P} = P + jQ$ erogata dalla $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v} = 12 \text{ V})$.



• L' $\mathcal{L}(0,2 \text{ H})$ e il $\mathcal{C}(50 \text{ nF})$ costituiscono un risonatore conservativo parallelo, la cui pulsazione di risonanza vale :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}} = \frac{1}{\sqrt{50 \cdot 10^{-9} \cdot 0,2}} = 10000 \text{ rad/s}$$

• Siccome la pulsazione ω_0 coincide con quella del regime sinusoidale, il risonatore ideale è equivalente a un c.a. e il $\mathcal{R}(10 \text{ k}\Omega)$ diventa superfluo : la $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v} = 12 \text{ V})$ risulta connessa al solo $\mathcal{R}(24 \Omega)$.

Risultato : La potenza complessa $\bar{P}$ è uguale a :

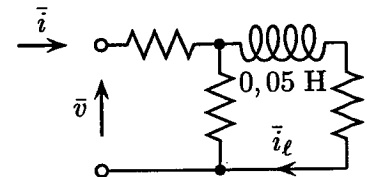
$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{\hat{v}^2}{z^*} = \frac{1}{2} \frac{12^2}{24} = 3 + j0 \text{ VA}$$

4.4 COROLLARIO DI BOUCHEROT

4.4.1 Esercizio E2/13/09/96 : Corollario di Boucherot

Il bipolo composito in figura opera in regime sinusoidale con $\omega_0 = 1000 \text{ rad/s}$ ed è costituito da un $\mathcal{L}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare l'ampiezza della corrente $\bar{i}_\ell$, conoscendo la tensione $\bar{v} = 10 \text{ V}$ e la corrente $\bar{i} = 2 - j1 \text{ A}$ del bipolo.



• La potenza reattiva Q assorbita dal bipolo composito coincide con la potenza reattiva Q_ℓ assorbita dall' $\mathcal{L}(0,05 \text{ H})$ in accordo al corollario di Boucherot. La potenza reattiva Q è uguale a $\Im\{1/2 \bar{v} \bar{i}^*\} = 1/2 \Im\{20 + j10\} = 5 \text{ VAR}$, mentre la potenza reattiva Q_ℓ è uguale a $1/2 \omega_0 L |\bar{i}_\ell|^2$.

Risultato : Uguagliando la espressione di Q e quella di Q_ℓ , si ottiene l'ampiezza di $\bar{i}_\ell$:

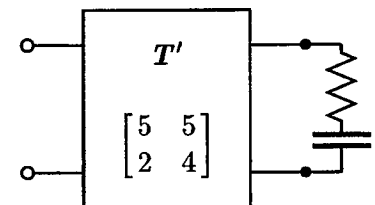
$$|\bar{i}_\ell| = \sqrt{\frac{2Q}{\omega_0 L}} = \sqrt{\frac{2 \times 5}{1000 \times 0,05}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ A}$$

Commento : Il valore efficace risulta uguale a : $i_\ell^{\text{eff}} = 1/\sqrt{10} \text{ A}$.

4.4.2 Esercizio E2/25/06/98 : Corollario di Boucherot

Il bipolo composito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da un doppio bipolo adinamico, di cui è nota la matrice $\mathbf{T}'$, chiuso su un bipolo RC.

Quesito : Calcolare la potenza reattiva Q_{ing} assorbita dal bipolo composito, conoscendo che il $\mathcal{C}$ assorbe la potenza reattiva $Q_c = -20 \text{ VAR}$.



• La teoria esposta nel Cap. 22-FCE afferma che la potenza reattiva Q_{ing} assorbita dal bipolo composito coincide con la potenza reattiva Q_c assorbita dal $\mathcal{C}$ moltiplicata per il determinante della matrice di trasmissione diretta $\mathbf{T}'$.

Risultato : Quindi abbiamo il risultato

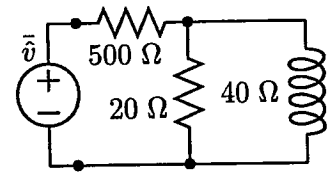
$$Q_{\text{ing}} = \det(\mathbf{T}') Q_c = (5 \times 4 - 5 \times 2) (-20) = (5 \times 4 - 5 \times 2) (-20) = -200 \text{ VAR}$$

Commento : Nell'esaminare il comportamento di un doppio bipolo chiuso su un bipolo, non è necessario conoscere se il doppio bipolo stesso sia proprio, tripolare o improprio. In ogni caso, il risultato rimane invariato.

4.4.3 Esercizio E2/17/06/96 : Corollario di Boucherot

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{V}$ sinusoidale e da un bipolo composito dinamico costituito a sua volta da un $\mathcal{L}$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la potenza reattiva Q assorbita dal bipolo composito, conoscendo che il $\mathcal{R}(20\ \Omega)$ assorbe la potenza attiva $P_1 = 70\ \text{W}$.



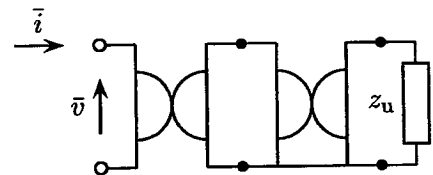
• La potenza reattiva Q assorbita dal bipolo composito coincide con la potenza reattiva Q_ℓ assorbita dall' $\mathcal{L}(40\ \Omega)$, in accordo al corollario di Boucherot. L' $\mathcal{L}(40\ \Omega)$ risulta in parallelo al $\mathcal{R}(20\ \Omega)$. Indichiamo con $\bar{v}_1$ il fasore delle tensione comune a entrambi.

• La potenza attiva P_1 assorbita dal $\mathcal{R}(20\ \Omega)$ risulta $P_1 = 70 = 1/2 |\bar{v}_1|^2 / 20$, da cui si ricava $|\bar{v}_1|^2 = (2 \times 70) \times 20\ \text{V}^2$. La potenza reattiva assorbita dall' $\mathcal{L}(40\ \Omega)$ risulta $Q_\ell = 1/2 |\bar{v}_1|^2 / 40$.

Risultato : Dal confronto di P_1 e Q_ℓ risulta : $Q = Q_\ell = P_1/2 = 35\ \text{VAR}$.

4.4.4 Esercizio E2/09/09/97 : Potenza complessa assorbita da un carico (Boucherot)

Il bipolo composito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da due $\mathcal{G}$ in cascata chiusi su un carico di impedenza z_u . Le transconduttanze di girazione dei $\mathcal{G}$ e l'impedenza z_u non sono note. I fasori della tensione e della corrente del bipolo valgono : $\bar{v}_1 = 2 + j\ 2\ \text{V}$ e $\bar{i}_1 = 3 + j\ 1\ \text{A}$.



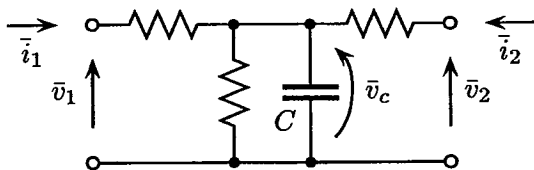
Quesito : Calcolare la potenza complessa $\bar{P}_u$ assorbita dal carico.

• Dalla teoria (vedere Cap. 13-FCE) è noto che la cascata di due $\mathcal{G}$ è equivalente a un unico $\mathcal{T}$. La potenza complessa assorbita da un $\mathcal{T}$ è nulla (vedere Cap. 22-FCE).

Risultato : Dal corollario della potenza complessa (vedere Cap. 22-FCE), si ha che la potenza complessa assorbita dal carico coincide con quella assorbita dal bipolo composito :

$$\bar{P}_u = \frac{1}{2} \bar{v} \bar{i}^* = \frac{1}{2} (2 + j2) (3 - j1) = 4 + j\ 2\ \text{VA}$$

4.4.5 Esercizio E2/02/02/99 : Corollario di Boucherot



Il DBT in figura opera in regime sinusoidale con $f = 300\ \text{Hz}$ ed è costituito da un $\mathcal{C}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare l'ampiezza della tensione $\bar{v}_c$ ai capi del $\mathcal{C}$, sapendo che le tensioni e le correnti alle porte del DBT sono $\bar{i}_1 = \bar{i}_2 = 2 + j2\ \text{mA}$ e $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 10\ \text{V}$ e che la capacità C vale $0,5\ \mu\text{F}$.

• La potenza reattiva entrante nel doppio bipolo risulta : $Q = 1/2 \Im[\bar{v}_1 \bar{i}_1^* + \bar{v}_2 \bar{i}_2^*]$. Dai calcoli si ha : $Q = -20\ \text{VAR}$.

Risultato : Il corollario della potenza reattiva ci dice che la potenza reattiva Q assorbita dal doppio bipolo coincide con la potenza reattiva Q_c assorbita dal $\mathcal{C}$, poiché gli altri bipoli interni al DBT sono $\mathcal{R}$. Quindi abbiamo :

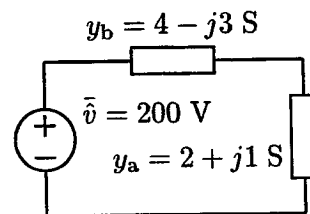
$$Q_c = -1/2 \omega C |\bar{v}_c|^2 = Q = -20\ \text{VAR} \Rightarrow |\bar{v}_c| = \sqrt{\frac{20}{1/2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 300 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}}} = 100 \sqrt{40/(\pi \cdot 3)}\ \text{V}$$

4.5 RAPPORTI TRA POTENZE

4.5.1 Esercizio E2/05/07/96 : Rapporto tra potenze reattive e attive in bipolo

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito dai bipoli dinamici di ammettenza $y_a = 2 + j 1 \text{ S}$ e C_b di ammettenza $y_b = 4 - j 3 \text{ S}$ e da una $\hat{V}$ sinusoidale.

Quesito : Calcolare il rapporto tra la potenza attiva P_a assorbita dal bipolo C_a e la potenza attiva P erogata dalla $\hat{V}$. Calcolare lo stesso rapporto per le corrispondenti potenze reattive Q_a e Q .



• La potenza attiva P e la potenza reattiva Q erogate dalla $\hat{V}$ coincidono con le somme delle rispettive potenze assorbite dai bipoli C_a e C_b . Cioè $P = P_a + P_b$ e $Q = Q_a + Q_b$, per il corollario della potenza complessa (Boucherot).

• Siccome i due bipoli C_a e C_b sono connessi in serie, le loro potenze attive P_a e P_b e le loro potenze reattive Q_a e Q_b sono proporzionali, rispettivamente, alle parti reali $r_a = \Re\{z_a\}$ e $r_b = \Re\{z_b\}$ (resistenze) e alle parti immaginarie $x_a = \Im\{z_a\}$ e $x_b = \Im\{z_b\}$ (reattanze) delle loro impedenze :

$$P_a \propto r_a, \quad P_b \propto r_b, \quad Q_a \propto x_a, \quad Q_b \propto x_b$$

• Calcoliamo le parti reali e immaginarie delle impedenze dei bipoli C_a e C_b :

$$r_a = \frac{g_a}{g_a^2 + b_a^2} = \frac{2}{5} \Omega, \quad x_a = \frac{-b_a}{g_a^2 + b_a^2} = -\frac{1}{5} \Omega \quad \text{dove } g_a = \Re\{y_a\}, \quad b_a = \Im\{y_a\}$$

$$r_b = \frac{g_b}{g_b^2 + b_b^2} = \frac{4}{25} \Omega, \quad x_b = \frac{-b_b}{g_b^2 + b_b^2} = \frac{3}{25} \Omega \quad \text{dove } g_b = \Re\{y_b\}, \quad b_b = \Im\{y_b\}$$

Risultato : Considerando i valori di r_a , r_b , x_a e x_b , possiamo calcolare i rapporti richiesti

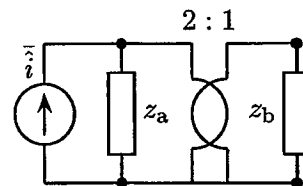
$$\frac{P_a}{P} = \frac{P_a}{P_a + P_b} = \frac{r_a}{r_a + r_b} = \frac{5}{7}, \quad \frac{Q_a}{Q} = \frac{Q_a}{Q_a + Q_b} = \frac{x_a}{x_a + x_b} = \frac{5}{2}$$

Commento : Notare che la tensione impressa della $\hat{V}$ non interviene affatto nel calcolo dei suddetti rapporti. Infatti il quesito riguarda rapporti di potenze e non le potenze stesse.

4.5.2 Esercizio E2/23/07/96 : Rapporto tra potenze attive e reattive in bipoli

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{I}$ sinusoidale, un $\mathcal{T}$ e i bipoli dinamici C_a di impedenza $z_a = 3 + j 4 \Omega$ e C_b di impedenza $z_b = 2 + j 1 \Omega$.

Quesito : Calcolare il rapporto P_a/P_b tra la potenza attiva P_a assorbita dal bipolo C_a e la potenza attiva P_b assorbita dal bipolo C_b .



• Siccome i bipoli C_a e C_b sono in parallelo alle porte del medesimo $\mathcal{T}$, il rapporto tra le loro tensioni $\bar{v}_a$ e $\bar{v}_b$ coincide col rapporto di trasformazione del $\mathcal{T}$: $\bar{v}_a = 2 \bar{v}_b$.

• Le potenze attive assorbite da C_a e C_b sono : $P_a = 1/2 g_a |\bar{v}_a|^2$ e $P_b = 1/2 g_b |\bar{v}_b|^2$.

• Le conduttanze dei due bipoli vengono calcolate dalle rispettive impedenze : $g_a = \frac{r_a}{r_a^2 + x_a^2} = \frac{3}{25} \text{ S}$, $g_b = \frac{r_b}{r_b^2 + x_b^2} = \frac{2}{5} \text{ S}$.

Risultato : Usando le precedenti espressioni, il rapporto delle potenze attive risulta :

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{1/2 g_a |\bar{v}_a|^2}{1/2 g_b |\bar{v}_b|^2} = \frac{g_a}{g_b} \times \frac{|\bar{v}_a|^2}{|\bar{v}_b|^2} = \frac{3/25}{2/5} \times \frac{2^2}{1^2} = \frac{6}{5}$$

4.5.3 Esercizio E2/08/11/96 : Rapporto tra potenza reattiva e attiva in bipolo

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale, tre $\mathcal{L}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare il rapporto Q/P tra la potenza reattiva Q e la potenza attiva P erogate dalla $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v})$.

• La $\hat{\mathcal{V}}$ alimenta un bipolo costituito da tre bipoli resistivi-induttivi. Quindi le potenze P e Q erogate coincidono con le somme delle rispettive potenze assorbite dei tre bipoli $P = P_1 + P_2 + P_3$ e $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ per il corollario (Boucherot) della potenza complessa (vedere Cap. 22-FCE).

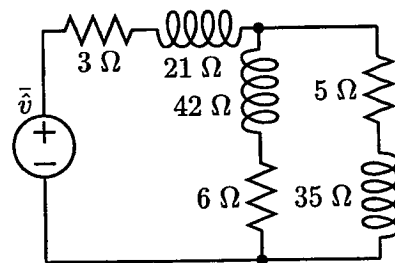
• Il rapporto tra la potenza reattiva e quella attiva assorbite da ciascuno dei tre bipoli resistivi-induttivi è uguale al rapporto tra la reattanza e resistenza. I rapporti tra la reattanza e la resistenza di ciascuno dei tre bipoli resistivi-induttivi sono coincidenti :

$$\frac{Q_1}{P_1} = \frac{x_1}{r_1} = 7, \quad \frac{Q_2}{P_2} = \frac{x_2}{r_2} = 7, \quad \frac{Q_3}{P_3} = \frac{x_3}{r_3} = 7$$

Risultato : Confrontando i risultati precedenti, si ha :

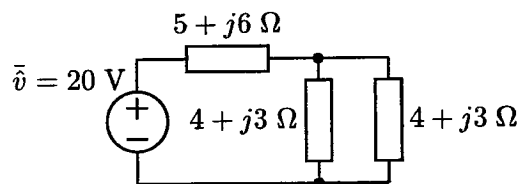
$$\frac{Q}{P} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{7 P_1 + 7 P_2 + 7 P_3}{P_1 + P_2 + P_3} = 7$$

Commento : Siccome il rapporto Q/P del bipolo composito coincide con quello dei tre bipoli resistivi-induttivi, si può anche affermare che la fase ϕ del bipolo composito coincide con quella comune ai tre bipoli interni ad esso, dal momento che $\tan(\phi) = Q/P$.



4.5.4 Esercizio E2/17/06/97 : Rapporti di potenze reattive e attive in un circuito

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale con ω fissata. Esso è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale con $|\hat{v}| = 20$ V la quale alimenta un bipolo composito costituito dalla serie del bipolo di impedenza $z_3 = 5 + j 6 \Omega$ e del parallelo dei bipoli di impedenze $z_1 = z_2 = 4 + j 3 \Omega$.



Quesito : Calcolare il rapporto tra la potenza attiva P_1 e la potenza reattiva Q_1 assorbite dal bipolo di impedenza z_1 e le corrispondenti potenze P e Q erogate dalla $\hat{\mathcal{V}}$.

• Se $\bar{i}_1$ denota la corrente fluente nel bipolo di impedenza z_3 , la potenza attiva P_3 e la potenza reattiva Q_3 assorbite dal bipolo sono

$$P_3 = \frac{1}{2} \Re[z_3] |\bar{i}_1|^2 = \frac{5}{2} |\bar{i}_1|^2, \quad Q_3 = \frac{1}{2} \Im[z_3] |\bar{i}_1|^2 = 3 |\bar{i}_1|^2$$

• Ciascuno dei bipoli di impedenza z_1 e z_2 è percorso da una corrente $\bar{i}_1/2$ in seguito alla regola del partitore di corrente applicata ai due bipoli di impedenza z_1 e z_2 . Le potenze attive P_1 e P_2 e reattive Q_1 e Q_2 assorbite sono rispettivamente

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2} \Re[z_1] \frac{|\bar{i}_1|^2}{4} = \frac{1}{2} 4 \frac{|\bar{i}_1|^2}{4} = \frac{1}{2} |\bar{i}_1|^2, \quad Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2} \Im[z_1] \frac{|\bar{i}_1|^2}{4} = \frac{1}{2} 3 \frac{|\bar{i}_1|^2}{4} = \frac{3}{8} |\bar{i}_1|^2$$

• Le potenze attiva P e reattiva Q erogate dalla $\hat{\mathcal{V}}$, per il corollario della potenza complessa sono

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 7/2 |\bar{i}_1|^2, \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{15}{4} |\bar{i}_1|^2$$

Risultato : Dalle suddette formule, i rapporti delle potenze risultano uguali a

$$\frac{P_1}{P} = \frac{1/2 |\bar{i}_1|^2}{7/2 |\bar{i}_1|^2} = \frac{1}{7}, \quad \frac{Q_1}{Q} = \frac{3/8 |\bar{i}_1|^2}{15/4 |\bar{i}_1|^2} = \frac{1}{10}$$

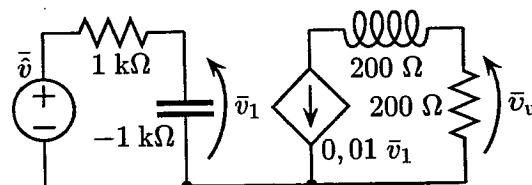
Commento : La tensione impressa $\hat{v}$ non ha alcuna influenza sui valori di P_1/P e Q_1/Q .

4.6 DIAGRAMMI FASORIALI

4.6.1 Esercizio E5/17/06/96 : Diagramma fasoriale in un circuito con sIpV

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v})$ (sinusoidale), una $\mathcal{I}_V$, un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e due $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la fase della tensione $\bar{v}_u$, conoscendo che la fase della $\bar{v}$ è nulla.



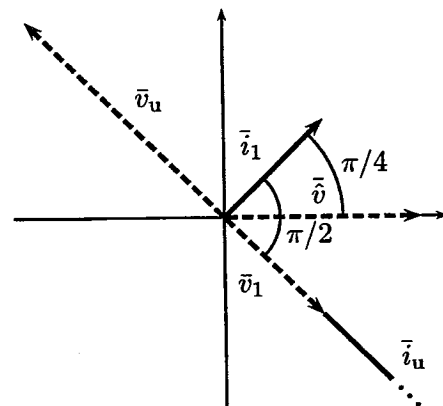
La corrente $\bar{i}_1$ che fluisce nel $\mathcal{C}(-1 \text{ k}\Omega)$ anticipa di $\pi/4$ rad la $\bar{v}$. Quindi $\angle \bar{i}_1 = \pi/4$ rad.

La tensione $\bar{v}_1$ è in ritardo di $\pi/2$ rad rispetto alla corrente $\bar{i}_1$. Quindi $\angle \bar{v}_1 = -\pi/4$ rad. La corrente $\bar{i}_u = 0,01 \bar{v}_1$ è in fase con $\bar{v}_1$. Quindi $\angle \bar{i}_u = -\pi/4$ rad.

Risultato : Siccome la tensione $\bar{v}_u$ ai capi del $\mathcal{R}(200 \Omega)$ è in opposizione di fase con la corrente $\bar{i}_u$, si ha :

$$\angle \bar{v}_u = \angle \bar{i}_u + \pi = +\frac{3}{4}\pi \text{ rad}$$

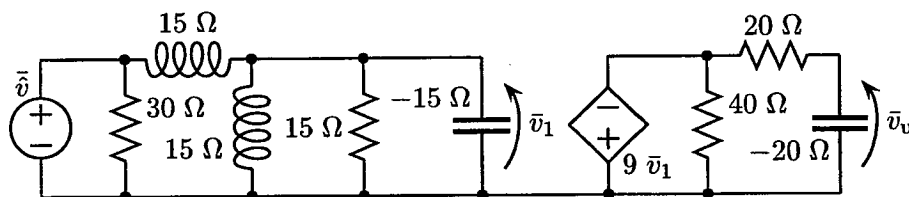
La figura a fianco riporta il diagramma fasoriale delle grandezze esaminate :



4.6.2 Esercizio E3/23/07/96 : Diagramma fasoriale in un circuito con due Cond. e Indut.

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, una $\mathcal{V}_V$, un $\mathcal{C}$, due $\mathcal{L}$ e quattro $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la fase della tensione $\bar{v}_u$, conoscendo che la fase della tensione impressa $\bar{v}$ della sorgente è $\pi/7$ rad.



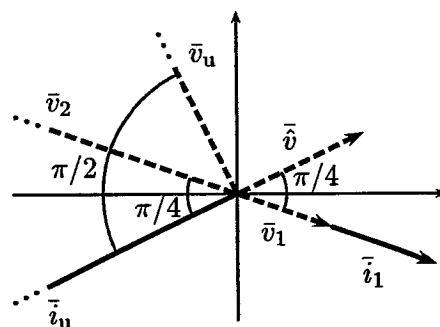
• Il $\mathcal{R}(30 \Omega)$ e il $\mathcal{R}(40 \Omega)$, sono in parallelo, rispettivamente, alla $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v})$ e alla porta pilotata della $\mathcal{V}_V(9 \bar{v}_1)$: entrambi possono essere sostituiti da due c.a., perchè ininfluenti. Il bipolo composito $\mathcal{C}(-15 \Omega) \parallel \mathcal{L}(15 \Omega)$ può essere rimosso in quanto è equivalente a un c.a. (risonatore ideale parallelo in risonanza).

• La corrente $\bar{i}_1$ che fluisce nel bipolo composito costituito dalla serie del restante $\mathcal{L}(15 \Omega)$ e del $\mathcal{R}(15 \Omega)$ è in ritardo di $\pi/4$ rad rispetto alla tensione impressa $\bar{v}$. Quindi $\angle \bar{i}_1 = \pi/7 - \pi/4$ rad. La tensione $\bar{v}_1$ pilotante è in fase con la corrente $\bar{i}_1$. Quindi $\angle \bar{v}_1 = \pi/7 - \pi/4$ rad. La tensione $\bar{v}_2$ ai capi della porta pilotata della $\mathcal{V}_V(9 \bar{v}_1)$ è in opposizione di fase alla tensione $\bar{v}_1$. Quindi $\angle \bar{v}_2 = \pi/7 - \pi/4 + \pi$ rad. La corrente $\bar{i}_u$ fluente nel $\mathcal{R}(20 \Omega) \parallel \mathcal{C}(-20 \Omega)$ è in anticipo di $\pi/4$ rad rispetto a $\bar{v}_2$. Quindi $\angle \bar{i}_u = \pi/7 + \pi$ rad.

Risultato : Siccome la tensione $\bar{v}_u$ ai capi del $C \langle -20 \Omega \rangle$ è in ritardo di $\pi/2$ rispetto alla corrente $\bar{i}_u$, si ha che

$$\angle \bar{v}_u = \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{2} = \frac{9}{14} \pi \text{ rad}$$

La figura a fianco riporta il diagramma fasoriale delle grandezze esaminate :



4.6.3 Esercizio E4/08/11/96 : Diagramma fasoriale di un bipolo

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale è costituito da una $\hat{V}$ sinusoidale, un C , un L e due R .

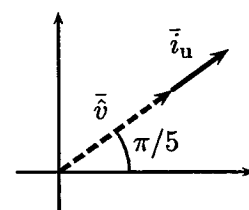
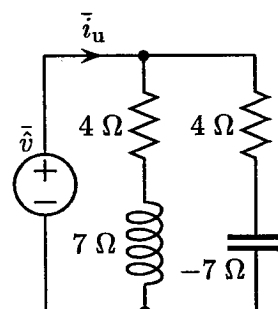
Quesito : Calcolare la fase della corrente $\bar{i}_u$, conoscendo che la fase della tensione impressa $\hat{v}$ della sorgente è $\pi/5$.

• Il bipolo composito percorso dalla corrente $\bar{i}_u$ è costituito dal parallelo di due bipoli : il primo resistivo-induttivo di impedenza $z_1 = 4 + j7 \Omega$ e il secondo resistivo-capacitivo di impedenza $z_2 = 4 - j7 \Omega$. Siccome z_1 e z_2 sono tra loro complesse coniugate, anche le loro ammettenze sono necessariamente complesse coniugate : $1/z_1 = [1/z_2]^*$.

• L'ammettenza y del bipolo composito costituito dal parallelo dei due suddetti bipoli è puramente reale dal momento che coincide con la somma di due numeri complessi e coniugati :

$$y = 1/z_1 + 1/z_2 = [1/z_2]^* + 1/z_2 = \text{ammettenza reale e positiva}$$

Risultato : Siccome la corrente $\bar{i}_u$ risulta essere in fase con la tensione impressa $\hat{v}$, si ha che $\angle \bar{i}_u = \pi/5 \text{ rad}$. La figura a fianco riporta il diagramma fasoriale delle grandezze esaminate :



4.7 CALCOLO DELLA FASE DI UNA GRANDEZZA

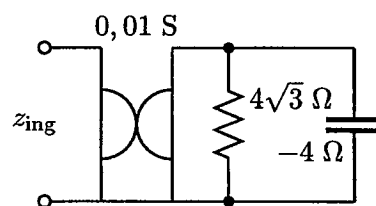
4.7.1 Esercizio E4/30/01/97 : Fase dell'impedenza

Il bipolo composito in figura opera in regime sinusoidale con ω fissata ed è costituito da un $\mathcal{G}$ chiuso sul parallelo di un C e un R .

Quesito : Calcolare la fase $\angle z_{ing}$ dell'impedenza z_{ing} .

• L'ammettenza y_u del bipolo resistivo-capacitivo connesso alla seconda porta del $\mathcal{G}$ è

$$y_u = \frac{1}{r_u} - j \frac{1}{x_u} = \frac{\sqrt{3}}{12} + j \frac{1}{4} \text{ S}$$



• La fase $\angle y_u$ di y_u coincide con l'arcotangente del rapporto tra la parte immaginaria e quella reale :

$$\angle y_u = \arctg \left(\frac{1/4}{\sqrt{3}/12} \right) = \arctg(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

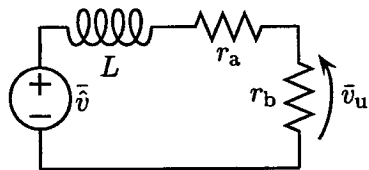
• L'impedenza z_{ing} del bipolo composito è proporzionale all'ammettenza y_u del carico :

$$z_{ing} = \frac{y_u}{g_m} \quad \text{dove } g_m \text{ è la transcondutt. del } \mathcal{G}.$$

Risultato : Siccome l'impedenza z_{ing} e l'ammettenza y_u sono uguali a meno di un fattore reale positivo, le loro fasi coincidono :

$$\angle z_{ing} = \angle y_u = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

4.7.2 Esercizio E4/02/02/99 : Fase di funzione di rete di ordine 1



Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{V}$ sinusoidale, un L e due R .

Quesito : Calcolare il minimo $\phi_{\min}$ e massimo $\phi_{\max}$ della fase della funzione di rete $\bar{v}_u/\bar{v}$ in tutto l'intervallo $0 \leq \omega \leq +\infty$.

- Dalla regola del partitore di tensione la funzione di rete risulta :

$$\frac{\bar{v}_u}{\bar{v}} = \frac{r_b}{r_a + r_b + j\omega L}$$

- I parametri r_a , r_b e L sono ignoti ma comunque positivi. Quindi la fase del numeratore (reale e positivo) è nulla, mentre la fase del denominatore $r_a + r_b + j\omega L$ è monotona crescente dal valore 0 per $\omega = 0$ fino al valore $+\pi/2$ per $\omega \rightarrow +\infty$.

Risultato : Si ha che $\phi_{\max} = 0$ e per $\omega = 0$, mentre $\phi_{\min} = -\pi/2$ per $\omega \rightarrow +\infty$.

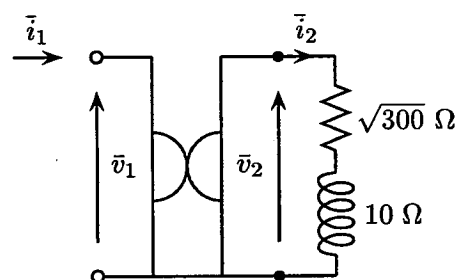
Commento : I valori $\phi_{\max}$ e $\phi_{\min}$ possono essere alterati entrambi di multipli interi di 2π : comunque la differenza $\phi_{\max} - \phi_{\min} = \pi/2$ rimane invariata, poiché il multiplo intero arbitrario è il medesimo per $\phi_{\max}$ e $\phi_{\min}$.

4.7.3 Esercizio E4/09/07/98 : Fase di un'impedenza

Il bipolo composito in figura opera in regime sinusoidale ed è composto da un G , un $R(\sqrt{300}\Omega)$ e un $L(10\Omega)$.

Quesito : Calcolare lo sfasamento $\angle \bar{v}_1 - \angle \bar{i}_1$ tra la tensione e la corrente del bipolo composito.

Risultato : Lo sfasamento $\angle \bar{v}_1 - \angle \bar{i}_1$ è la fase dell'impedenza del bipolo composito. Dalla teoria (vedere Cap. 22-FCE) sappiamo che la fase dell'impedenza della prima porta di un G è uguale ed opposta a quella del bipolo su cui è chiusa la seconda porta :



$$\angle \bar{v}_1 - \angle \bar{i}_1 = -[\angle \bar{v}_2 - \angle \bar{i}_2] = -\arctg\left(\frac{10}{\sqrt{300}}\right) = -\arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\pi/6 \text{ rad}$$

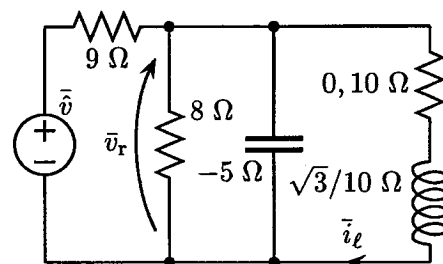
4.7.4 Esercizio E5/25/06/98 : Fase di un'impedenza

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{V}$, un L , un C e tre R .

Quesito : Calcolare lo sfasamento tra la tensione $\bar{v}_r$ e la corrente $\bar{i}_\ell$.

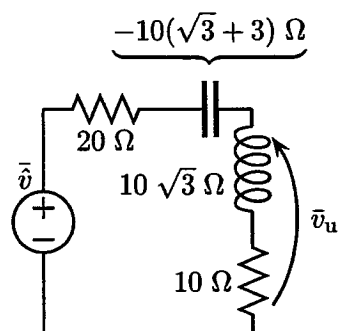
- Consideriamo il bipolo composito $R(0,1\Omega) \parallel L(0,1\sqrt{3}\Omega)$ soggetto alla tensione $\bar{v}_r$ e percorso dalla corrente $\bar{i}_\ell$.

Risultato : Lo sfasamento $\angle \bar{v}_r - \angle \bar{i}_\ell$ coincide con la fase dell'impedenza del bipolo composito :



$$\angle \bar{v}_r - \angle \bar{i}_\ell = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}/10}{1/10}\right) = \pi/3 \text{ rad}$$

4.7.5 Esercizio E3/17/06/97 : Fase di una tensione



Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\bar{V}$ sinusoidale, la cui fase è $\pi/6$ rad e due bipoli dinamici in serie di impedenza, rispettivamente, $20 - j 10 (\sqrt{3} + 3) \Omega$ e $10 + j 10 \sqrt{3} \Omega$.

Quesito : Calcolare la fase della tensione $\bar{v}_u$ ai capi del bipolo dinamico di impedenza $10 + j 10 \sqrt{3} \Omega$.

• Siamo in presenza di un partitore dinamico di tensione. Sia $\bar{i}_1$ la corrente che fluisce nella serie dei due bipoli dinamici. La fase di $\bar{i}_1$ dipende dalla fase $-\pi/4$ dell'impedenza $30 - j 30 \Omega$ dei due bipoli dinamici in serie :

$$\angle \bar{i}_1 = \angle \bar{v} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} \text{ rad}$$

Risultato : La differenza tra le fasi di $\angle \bar{v}_u$ e $\angle \bar{i}_1$ coincide con l'angolo $\pi/3$ dell'impedenza $10 + j 10 \sqrt{3} \Omega$ e, quindi si ottiene :

$$\angle \bar{v}_u = \angle \bar{i}_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} \pi \text{ rad}$$

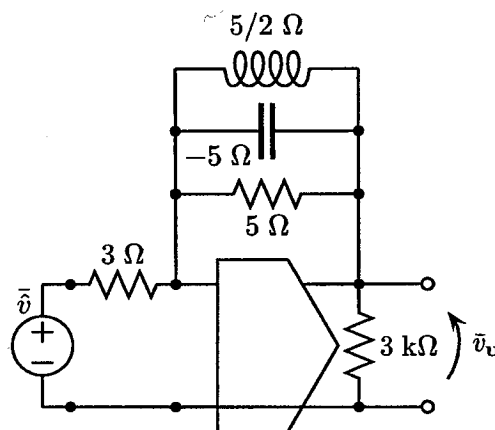
4.7.6 Esercizio E4/20/02/97 : Calcolo della fase di una tensione

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale con ω fissata ed è costituito da una $\bar{V}(\bar{v})$ (sinusoidale), un nullore, un $\mathcal{C}(-5 \Omega)$, un $\mathcal{L}(5/2 \Omega)$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la fase $\angle \bar{v}_u$ di $\bar{v}_u$, sapendo che la fase $\angle \bar{v}$ di $\bar{v}$ vale $\pi/4$.

• La corrente $\bar{i}_1$ fluente nel $\mathcal{R}(3 \Omega)$ è in fase con la tensione impressa $\bar{v}$: $\angle \bar{i}_1 = \angle \bar{v}$, poiché il loro rapporto coincide con la resistenza del $\mathcal{R}(3 \Omega)$.

• La corrente $\bar{i}_1$ fluisce anche nel bipolo composito $\mathcal{R}(5 \Omega) \parallel \mathcal{C}(-5 \Omega) \parallel \mathcal{L}(5/2 \Omega)$.



• L'ammettenza y^b del suddetto bipolo composito vale

$$y^b = \frac{1}{5} + \frac{2}{j 5} + j \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - j \frac{1}{5} \Rightarrow z^b = \frac{1}{y^b} = \frac{5}{2}(1 + j) \Omega$$

Conseguentemente la tensione $\bar{v}^b$ ai capi del bipolo composito vale : $\bar{v}^b = z^b \bar{i}_1$ ed è in anticipo di $\pi/4$ rispetto alla $\bar{v}$.

Risultato : La tensione $\bar{v}_u$ coincide con $-\bar{v}^b$ e quindi la sua fase è uguale :

$$\angle \bar{v}_u = \angle \bar{v}_b \pm \pi = \angle \bar{v} + \angle z^b \pm \pi = \pi/4 + \pi/4 - \pi = -\pi/2 \text{ rad}$$

4.8 RISONATORI SERIE E PARALLELO

4.8.1 Esercizio E3/01/07/97 : Ampiezza del risonatore serie

Il bipolo in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito dalla connessione serie di un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e un $\mathcal{R}$. Noi sappiamo che l'ampiezza della sua ammettenza $y(\omega) = y(j 2 \pi f)$ raggiunge il valore massimo $1/100 \text{ S}$ per $f = f_0 = 1000 \text{ Hz}$ e che l'ampiezza vale $\sqrt{2}/200 \text{ S}$ per $f = f_1 = 800 \text{ Hz}$.

Quesito : Calcolare il valore $f_2 \neq f_1$ per cui $|y(j 2 \pi f_2)| = \sqrt{2}/200 \text{ S}$.

• Il bipolo in figura è un risonatore serie nonconservativo. Dalla teoria (vedere Cap. 23-FCE) sappiamo che l'ampiezza della sua ammettenza ha un andamento a campana, quindi cresce monotonamente da 0 a $1/100 \text{ S}$ nell'intervallo $(0, f_0)$ e decresce monotonamente da $1/100 \text{ S}$ a 0 nel successivo intervallo (f_0, ∞) : esistono due valori di $\omega = 2\pi f$ in cui l'ampiezza ha lo stesso valore.

Risultato : Le coppie di valori di f in cui l'ampiezza assume lo stesso valore sono distribuiti con simmetria geometrica attorno al valore di f_0 , dal momento che $f_1 f_2 = f_0^2$:

$$f_2 = \frac{f_0^2}{f_1} = \frac{1000^2}{800} = 1250 \text{ Hz}$$

Commento : Qualora f_1 sia di poco inferiore o superiore a f_0 , la formula precedente può essere approssimata da $f_2 \simeq 2 f_0 - f_1$. In questo esempio la formula approssimata fornirebbe il valore $f_2 = 2 \times 1000 - 800 = 1200 \text{ Hz}$ che comporterebbe un errore inaccettabile. Il valore del fattore $Q = f_0/(f_2 - f_1) = 1000/(1250 - 800) = 20/9$ prova che il risonatore è poco selettivo.



4.8.2 Esercizio E4/23/07/96 : Funzione ampiezza del risonatore parallelo

Il bipolo composito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da un $\mathcal{C}$, un $\mathcal{L}$ e un $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare il valore massimo $|z|_{\max}$ raggiunto dall'ampiezza $|z(j\omega)|$ dell'impedenza $z(j\omega) = \bar{v}/\bar{i}$ del bipolo al variare di ω .

• Eseguiamo l'analisi del bipolo nel dominio dei fasori : esso, nonostante l'apparente complessità del disegno, è costituito dal parallelo di un $\mathcal{R}$ ($14 \text{ k}\Omega$), di un $\mathcal{C}$ ($2 \mu\text{F}$) e un $\mathcal{L}$ (50 mH) : esso è un risonatore nonideale (quasiconservativo) parallelo.

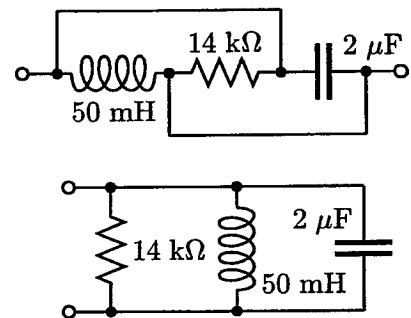
• Dall'esame del diagramma polare di NYQUIST dei risonatori nonideali (vedere Cap. 23-FCE), sappiamo che l'impedenza $z(j\omega)$ del risonatore raggiunge la massima ampiezza alla risonanza e che la risonanza viene raggiunta per il valore ω_0 di ω tale che le reattanze del $\mathcal{C}$ e dell' $\mathcal{L}$ sono uguali e opposte (il loro parallelo è equivalente a un c.a.).

• Per lo studente che non conosce i risonatori quasiconservativi e i loro diagrammi di NYQUIST, ricordiamo che l'impedenza del risonatore parallelo ha la forma :

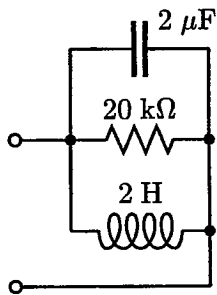
$$z(j\omega) = \frac{1}{j\omega 2 \cdot 10^{-6} + 1/14000 + 1/(j\omega 1/200)} \Omega$$

Il massimo dell'ampiezza si per il valore di ω che annulla la parte immaginaria del denominatore, dal momento che il numeratore e la parte reale del denominatore sono costanti.

Risultato : Quindi il valore massimo raggiunto dall'ampiezza della impedenza $z(j\omega)$ coincide con la resistenza del $\mathcal{R}$: $|z|_{\max} = 14 \text{ k}\Omega$



4.8.3 Esercizio E6/11/09/98 : Risonatore parallelo



Il bipolo composito dinamico in figura opera in regime sinusoidale.

Quesito : Calcolare il valore di ω per cui la parte reale e la parte immaginaria dell'impedenza $z(s)$ del bipolo composito siano diverse da zero e uguali in valore assoluto.

• Il bipolo composito, costituito da parallelo di un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e un $\mathcal{R}$, costituisce un risonatore parallelo quasi-conservativo (vedere Cap. 23-FCE).

• La teoria ci dice che il diagramma di Nyquist dell'impedenza $z(s)$ è una circonferenza che attraversa l'origine del piano dei numeri complessi.

• Intersechiamo la circonferenza con le due semirette bisettrici del primo e quarto quadrante del piano dei numeri complessi : le due bisettrici sono il luogo dei punti in cui la parte reale e la parte immaginaria sono uguali in valore assoluto. Le intersezioni significative sono due, a parte l'origine esclusa come ipotesi ; esse hanno luogo per i valori ω_1 e ω_2 già esaminati nella teoria dei risonatori.

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$$

$$\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = Q$$

Risultato : Dai valori dei parametri presenti nel risonatore serie quasiconservativo calcoliamo

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2 \times 2 \cdot 10^{-6}}} = 500 \text{ rad/s} \quad , \quad Q = \frac{r}{r_0} = \frac{r}{\sqrt{L/C}} = \frac{20000}{1000} = 20$$

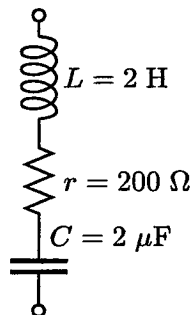
Da cui si ottiene l'equazione : $\omega_2 - \omega_0^2/\omega_2 - \omega_0/Q = 0 \implies \omega_2^2 - \omega_2 \cdot 500/20 - 500^2 = 0$.

$$\omega_2^2 - \omega_2 \cdot 25 - 250000 = 0 \implies \omega_2 = 12,5 + \sqrt{12,5^2 + 250000} \text{ rad/s} ,$$

$$\text{mentre } \omega_1 = \omega_0^2/\omega_2 = \sqrt{12,5^2 + 250000} - 12,5 \text{ rad/s} .$$

Commento : Il doppio segno “ $\pm$ ” che precede la radica quadrata è stato sostituito dall'unico segno “ $+$ ” dal momento che il segno “ $-$ ” darebbe origine a valori negativi senza significato.

4.8.4 Esercizio E2/23/02/99 : Risonatore serie



Il bipolo composito in figura opera in regime sinusoidale.

Quesito Calcolare il valore di ω del regime sapendo che la potenza attiva P assorbita dal bipolo è uguale a quella reattiva Q cambiata di segno.

• Indicando con $\vec{i}$ il fasore delle corrente fluente nel bipolo, si ottiene la relazione : $P = -Q \implies r |\vec{i}|^2/2 = -\omega L |\vec{i}|^2/2 + 1/(\omega C) |\vec{i}|^2/2$.
da cui, eliminando il fattore $|\vec{i}|^2/2$ si ottiene

$$r = -\omega L + 1/(\omega C) \implies \omega = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4 L/C}}{2 L}$$

Risultato : Sostituendo i valori numerici nella precedente formula, otteniamo :

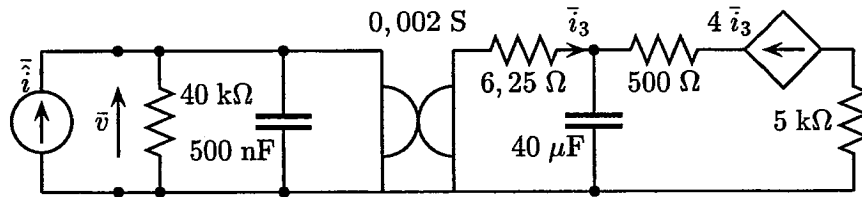
$$\omega = \frac{-200 \pm \sqrt{200^2 + 4 \times 2/(2 \cdot 10^{-6})}}{4} = \sqrt{2500 + 4000000} - 50 \text{ rad/s}$$

Notare che il doppio segno “ $\pm$ ” è sostituito dal segno “ $+$ ” poiché i valori negativi di ω non hanno significato fisico.

4.8.5 Esercizio EC/02/02/99 : Risonatore parallelo

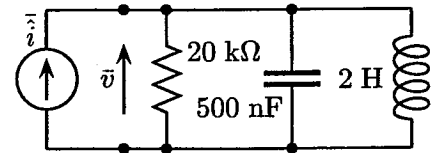
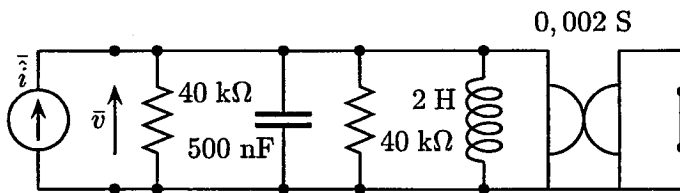
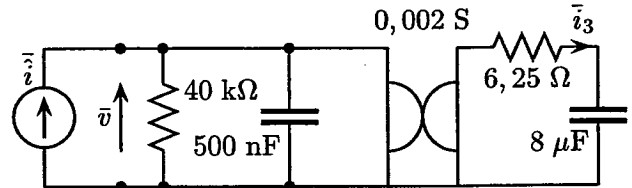
Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{I}}$, un $\mathcal{G}$, una $\mathcal{I}_T$, due $\mathcal{C}$ e quattro $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare il valore massimo dell'ampiezza dell'impedenza del bipolo complementare alla $\hat{\mathcal{I}}$ e il valore di ω per cui si ha il massimo e i valori di ω in cui l'ampiezza vale $1/\sqrt{2}$ del massimo.



• Il $\mathcal{R}\langle 500 \Omega \rangle$ in serie alla $\mathcal{I}_T$ può essere sostituito da un c.c.. Consideriamo il taglio costituito dal $\mathcal{R}\langle 6,25 \Omega \rangle$ dal $\mathcal{C}\langle 40 \mu\text{F} \rangle$ e dalla $\mathcal{I}_T\langle 4 \bar{i}_3 \rangle$.

• Applicando il secondo teorema di MILLER, il $\mathcal{C}\langle 40 \mu\text{F} \rangle$ viene sostituito da un c.c., mentre in serie al $\mathcal{R}\langle 6,25 \Omega \rangle$ viene inserito un $\mathcal{C}\langle 8 \mu\text{F} \rangle$. La $\mathcal{I}_T\langle 4 \bar{i}_3 \rangle$ e il $\mathcal{R}\langle 5 \text{ k}\Omega \rangle$ vengono omessi, poiché ininfluenti sul resto del circuito.



• La porta 1 del $\mathcal{G}$ equivale a un c.a., poiché la porta 2 è in corto circuito.
 • il bipolo complementare alla $\hat{\mathcal{I}}$ è un risonatore parallelo quasi-conservativo (vedere Cap. 23-FCE), poiché è costituito dal parallelo di un $\mathcal{R}\langle 20 \text{ k}\Omega \rangle$, $\mathcal{L}\langle 2 \text{ H} \rangle$ e $\mathcal{C}\langle 500 \text{ nF} \rangle$. La sua impedenza, in regime sinusoidale, risulta :

$$z(j\omega) = \frac{1}{1/20000 + 1/(j\omega 2) + j\omega 0,5 \cdot 10^{-6}}$$

Risultato 1 : Dalla teoria esposta nel Cap. 23-FCE sappiamo che il valore massimo dell'ampiezza dell'impedenza viene raggiunto quando la parte immaginaria del denominatore è nulla : esso coincide con la resistenza r del $\mathcal{R}$ presente nel modello del risonatore quasi-conservativo e viene raggiunto alla pulsazione di risonanza ω_0 :

$$\max_{\omega} [|z(j\omega)|] = r = 20000 \Omega, \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{2 \times 0,5 \cdot 10^{-6}} = 1000 \text{ rad/s}$$

Risultato 2 : Dal Cap. 23-FCE sappiamo che i valori di ω_1 e ω_2 di ω per cui l'ampiezza dell'impedenza coincide con il valore massimo diviso per $\sqrt{2}$ soddisfano alle equazioni :

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 \omega_2 &= \omega_0^2 = 10^6 \text{ rad/s} \\ \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} &= 1/Q = r_0/r = \sqrt{L/C}/r = 0,2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (\omega_1/\omega_0)^2 + (1/Q) \omega_1/\omega_0 - 1 = 0 \\ (\omega_2/\omega_0)^2 - (1/Q) \omega_2/\omega_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

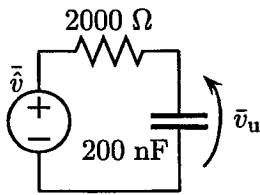
Da queste equazioni otteniamo i valori di ω_1 e ω_2 :

$$\omega_1 = \omega_0 [\sqrt{1/(4Q^2) + 1} - 1/(2Q)] = 1000 \times [\sqrt{1 + 0,01} - 0,1] \simeq 905 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \omega_0 [\sqrt{1/(4Q^2) + 1} + 1/(2Q)] = 1000 \times [\sqrt{1 + 0,01} + 0,1] \simeq 1105 \text{ rad/s}$$

4.9 DIAGRAMMI DI NYQUIST

4.9.1 Esercizio E3/28/07/98 : Fase di un partitore dinamico



Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{V}$, un C e un L .

Quesito : Calcolare il valore di ω per cui la tensione $\bar{v}_u$ è in ritardo di $\pi/4$ rispetto alla tensione impressa $\bar{v}$.

• Dalla regola del partitore di tensione noi sappiamo che
$$\frac{\bar{v}_u}{\bar{v}} = \frac{1/2000}{1/2000 + j\omega 200 \cdot 10^{-9}}$$

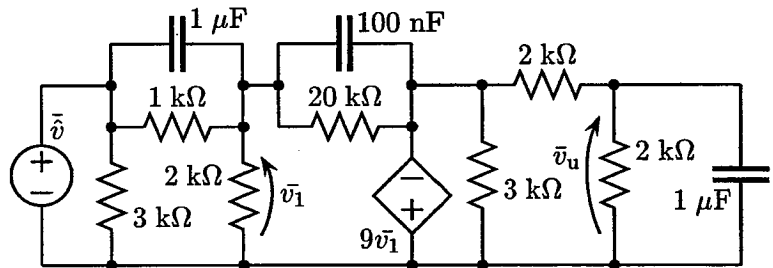
Risultato : Il ritardo di $\pi/4$ di $\bar{v}_u$ rispetto a $\bar{v}$ si ha quando la fase della funzione di rete $\bar{v}_u/\bar{v}$ vale $-\pi/4$ cioè quando la fase del denominatore vale $+\pi/4$:

$$1/2000 = \omega 200 \cdot 10^{-9} \implies \omega = \frac{1/2000}{200 \cdot 10^{-9}} = 2500 \text{ rad/s}$$

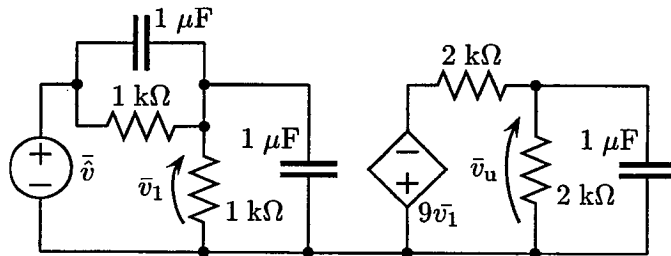
4.9.2 Esercizio EC/05/07/96 : Diagramma di Nyquist di circuito con tre cond.

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{V}(\bar{v})$ (sinusoidale), una V_V , tre C e sette R :

Quesito : Tracciare il diagramma di NYQUIST della funzione di rete $F(s) = \bar{v}_u/\bar{v}$.



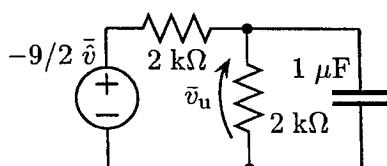
• I due $R(3 \text{ k}\Omega)$ in parallelo alla $\hat{V}(\bar{v})$ e alla porta pilotata della $V_V(9 \bar{v}_1)$ sono sostituiti da un c.a. . Consideriamo la maglia formata dalla $V_V(9 \bar{v}_1)$, dal $C(100 \text{ nF} \parallel R(20 \text{ k}\Omega))$ e dal $R(2 \text{ k}\Omega)$ ai cui capi è definita la tensione $\bar{v}_1$. In accordo al primo teorema di MILLER la suddetta maglia è eliminata : il bipolo $C(100 \text{ nF} \parallel R(20 \text{ k}\Omega))$ è sostituito da un c.a. . Contemporaneamente dobbiamo inserire in parallelo al $R(2 \text{ k}\Omega)$, ai cui capi è definita la tensione pilotante $\bar{v}_1$, il bipolo composito $C((9+1) \times 100 = 1000 \text{ nF}) \parallel R(20/(9+1) = 2 \text{ k}\Omega)$. Ci troviamo di fronte a due $R(2 \text{ k}\Omega)$ in parallelo che sono fusi in un unico $R(1 \text{ k}\Omega)$.



- Il circuito è costituito da quattro R , oltre alla $\hat{V}$, alla V_V e ai tre C .
- Osserviamo che a valle della $\hat{V}$ vi è un partitore costituito da due bipoli RC identici : $C(1 \mu F) \parallel R(1 \text{ k}\Omega)$.
- Dalla regola del partitore di tensione otteniamo $\bar{v}_1 = 1/2 \bar{v}$.

• La invarianza del rapporto $\bar{v}_1/\bar{v}$ rispetto a s , nonostante la presenza di due C , è dovuta al fatto che il partitore di tensione è compensato (vedere Cap. 23-FCE).

• Essendo la tensione pilotante $\bar{v}_1$ nota, la $V_V(9 \bar{v}_1)$ è sostituita da una $\hat{V}(\bar{v}_2)$, in cui $\bar{v}_2 = \bar{v}_1 = -9 \bar{v}_1 = -9 \times 1/2 \bar{v} = -9/2 \bar{v}$. Il circuito è costituito da una $\hat{V}$, un C e due R :

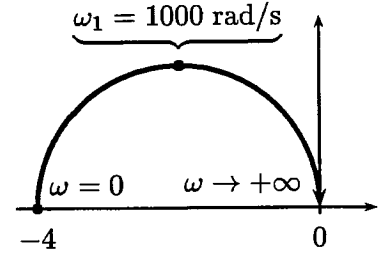


• La tensione $\bar{v}_u$ è ottenuta dalla tensione impressa $\bar{v}_2$ in accordo alla regola del partitore di tensione :

$$\frac{\bar{v}_u}{\bar{v}_2} = \frac{1/2000}{1/2000 + 1/2000 + s \cdot 10^{-6}} = \frac{1/2}{1 + s \cdot 10^{-3}}$$

Risultato : Dai risultati precedenti calcoliamo immediatamente la funzione di rete $F(s)$:

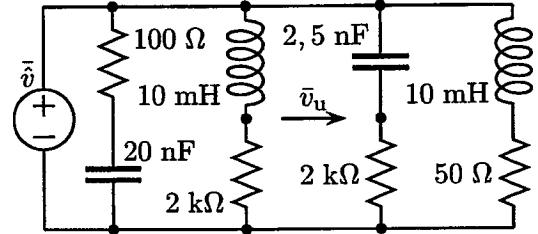
$$F(s) = \frac{\bar{v}_u}{\bar{v}} = \frac{\bar{v}_u}{\bar{v}_2} \times \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = \frac{1/2}{1 + s 10^{-3}} \times \left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{-9/4}{1 + s 10^{-3}}$$



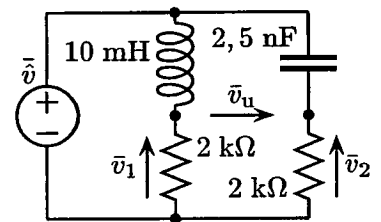
4.9.3 Esercizio EC/16/01/97 : Funzione di rete di ordine 1 e Nyquist

Il circuito in figura opera in pseudoregime cisoidale ed è costituito da una $\hat{V}$ cisoidale, due C , due L e quattro R .

Quesito : Calcolare la funzione di rete $F(s) = \bar{v}_u/\bar{v}$ e tracciare il diagramma di NYQUIST. Inoltre, calcolare la parte reale e la parte immaginaria di quattro punti appartenenti al diagramma e il corrispondente valore di ω .



• Il circuito è costituito dal parallelo della $\hat{V}(\bar{v})$ e quattro bipoli composti. I bipoli $R(100 \Omega) \parallel C(20 \text{ nF})$ e $R(50 \Omega) \parallel L(10 \text{ mH})$ non sono coinvolti dalla tensione $\bar{v}_u$ e quindi possono essere sostituiti da un c.a. I due bipoli composti rimasti costituiscono due partitori dinamici di ordine uno alimentati dall'unica $\hat{V}$: le tensioni $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$ sono determinate con la regola del partitore di tensione :



$$\text{Partitore } R(2 \text{ k}\Omega)/L(0,01 \text{ H}) : \bar{v}_1 = \bar{v} \frac{2000}{2000 + s 0.01} = \bar{v} \frac{1}{1 + s 5 \cdot 10^{-6}}$$

$$\text{Partitore } R(2 \text{ k}\Omega)/C(2,5 \text{ nF}) : \bar{v}_2 = \bar{v} \frac{2000}{2000 + 1/(s 2.5 \cdot 10^{-9})} = \bar{v} \frac{s 5 \cdot 10^{-6}}{1 + s 5 \cdot 10^{-6}}$$

Dalla differenza delle tensioni $\bar{v}_2$ e $\bar{v}_1$ noi otteniamo

$$\bar{v}_u = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \bar{v} \left[\frac{s 5 \cdot 10^{-6}}{1 + s 5 \cdot 10^{-6}} - \frac{1}{1 + s 5 \cdot 10^{-6}} \right] = \bar{v} \frac{s 5 \cdot 10^{-6} - 1}{1 + s 5 \cdot 10^{-6}}$$

• La funzione di rete $F(s)$, di cui è richiesto il diagramma di NYQUIST, sull'asse immaginario assume la forma :

$$F(j\omega) = -\frac{1 - j\omega 5 \cdot 10^{-6}}{1 + j\omega 5 \cdot 10^{-6}}$$

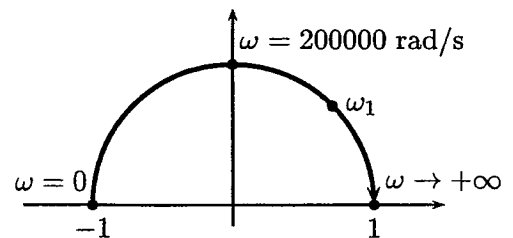
Risultato 1 : Se si prescinde dal segno "—" il numeratore è il complesso coniugato del denominatore $\forall \omega$: quindi l'ampiezza $|F(j\omega)|$ vale 1 per qualsiasi ω (funzione di rete passatutto).

Per $0 \rightarrow \omega \rightarrow +\infty$ la fase del numeratore varia nell'intervallo $0 \rightarrow -\pi/2$ e quella del denominatore nell'intervallo $0 \rightarrow \pi/2$. Tenendo conto che il segno "—" implica un contributo di $+\pi$, la fase $\angle F(j\omega)$ varia nell'intervallo $\pi \rightarrow 0$. Quindi il diagramma di NYQUIST è un semicerchio di raggio 1 e centro nell'origine nel semipiano superiore del piano complesso.

Risultato 2 : Come punti del piano complesso appartenenti al diagramma possiamo scegliere le due intersezioni con l'asse reale e l'unica intersezione con l'asse immaginario :

$$F(j0) = -1 + j0, \quad F(j0,2 \cdot 10^6) = 0 + j1, \quad F(j\infty) = 1 + j0$$

Come quarto punto scegliamo l'intersezione con la bisettrice del primo quadrante, che ha fase $\pi/4$. Si ha $F(j\omega_1) = 1/\sqrt{2} + j/\sqrt{2}$ dove ω_1 è il valore tale che $\arctang(\omega_1 5 \cdot 10^{-6}) = 3\pi/8 \rightarrow \omega_1 =$



$200000 \tan(3\pi/8) = 200000 (1 + \sqrt{2}) \text{ rad/s}$.

Commento: Uno dei partitori di ordine uno è passabasso (quello con l' $\mathcal{L}$), mentre l'altro è passaalto (quello con un $\mathcal{C}$). Le loro due funzioni di rete (parziali) hanno in comune la pulsazione di taglio, cioè l'unico polo reale negativo. Per questo motivo la differenza tra le due funzioni dei due partitori è una funzione (passatutto) con numeratore e denominatore di primo grado anziché secondo.

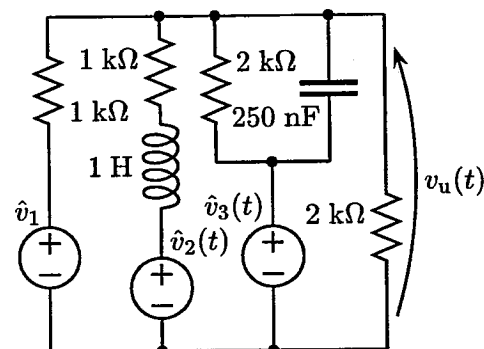
4.10 CIRCUITI IN REGIME MULTIFREQUENZIALE

4.10.1 Esercizio AP2 del 20/12/1996 : Regime multifrequenziale

Il circuito in figura è costituito dal parallelo di quattro bipoli : il primo è costituito dalla serie di una $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_1 = 10 \text{ V})$ e un $\mathcal{R}(1 \text{ k}\Omega)$, il secondo dalla serie di una $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_2(t) = 4 \cos(1000 t + \pi/4) \text{ V})$ di un $\mathcal{R}(1 \text{ k}\Omega)$ e un $\mathcal{L}(1 \text{ H})$, il terzo dalla serie di una $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_3(t) = 3 \cos(2000 t - \pi/4) \text{ V})$ e dal $\mathcal{R}(2 \text{ k}\Omega) \parallel \mathcal{C}(250 \text{ nF})$. Il quarto bipolo è un $\mathcal{R}(2 \text{ k}\Omega)$.

• Il suddetto circuito opera a regime : il regime è misto poiché vi sono tre sorgenti impulsive cisoidali con pulsazione $s_1 = 0$ (sorgente costante), $s_2 = \pm j 1000$ e $s_3 = \pm j 2000$ (sorgenti sinusoidali).

Quesito: Calcolare la tensione $v_u(t)$.



• Siccome solamente il regime del circuito è di nostro interesse, possiamo applicare direttamente il principio di sovrapposizione per le soluzioni similari. Essendo le tensioni impresse delle tre $\hat{\mathcal{V}}$ cisoidi con pulsazioni complesse diverse, il principio di sovrapposizione può essere applicato nel dominio del tempo e non nel dominio dei fasori, dal momento che la somma di fasori relativi a pulsazioni complesse diverse non ha alcun senso.

• Consideriamo la $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_1 = 10 \text{ V})$ e sostituiamo le $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_2(t) = 4 \cos(1000 t + \pi/4) \text{ V})$ e $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_3(t) = 3 \cos(2000 t - \pi/4) \text{ V})$ con due c.c. : la soluzione similare associata è anch'essa costante e viene calcolata sostituendo l' $\mathcal{L}$ con un c.c. e il $\mathcal{C}$ con un c.a. . Possiamo applicare il primo teorema di MILLMANN per un circuito adinamico :

$$v^{\text{sim1}}(t) = \frac{\hat{v}_1/1000}{1/1000 + 1/1000 + 1/2000 + 1/2000} = \frac{10}{3} \text{ V}$$

• Consideriamo la $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_2(t) = 4 \cos(1000 t + \pi/4) \text{ V})$ e sostituiamo le altre due $\hat{\mathcal{V}}$ con due c.c. : la soluzione similare associata è anch'essa sinusoidale con $\omega_2 = 1000$ e viene calcolata applicando la regola del primo teorema di MILLMANN nel dominio dei fasori :

$$\bar{v}_u^{\text{sim2}} = \frac{\bar{\hat{v}}_2/(1000 + j 1000)}{1/1000 + 1/(1000 + j 1000) + 1/2000 + j/4000 + 1/2000}$$

$$\bar{v}_u^{\text{sim2}} = \frac{(2\sqrt{2} + j 2\sqrt{2})/(1 + j 1)}{2 + (1 - j)/2 + j/4} = \frac{2\sqrt{2}}{2,5 - j 0,25} = \frac{8\sqrt{2}(10 + j 1)}{101} \text{ V}$$

Ritornando nel dominio del tempo abbiamo : $v^{\text{sim2}}(t) = \sqrt{\frac{128}{101}} \cos(1000 t + \arctg(1/10)) \text{ V}$.

• Consideriamo la $\hat{\mathcal{V}}(\hat{v}_3(t) = 3 \cos(2000 t - \pi/4) \text{ V})$ e sostituiamo le altre due $\hat{\mathcal{V}}$ con due c.c. : la soluzione similare associata è anch'essa sinusoidale con $\omega_3 = 2000$ e viene calcolata applicando la regola del primo teorema di MILLMANN nel dominio dei fasori :

$$\bar{v}_u^{\text{sim3}} = \frac{\bar{\hat{v}}_3/(1/2000 + j/2000)}{1/1000 + 1/(1000 + j 2000) + 1/2000 + j/2000 + 1/2000}$$

$$\bar{v}_u^{\text{sim3}} = \frac{(3/\sqrt{2} - j 3/\sqrt{2})(1/2 + j/2)}{2 + (1 - 2j)/5 + j/2} = \frac{3}{\sqrt{2}(2,2 + j 0,1)} = \frac{3}{\sqrt{9,70}} \exp(-j \arctg(1/22)) \text{ V}$$

Ritornando nel dominio del tempo, abbiamo : $v^{\text{sim}3}(t) = \frac{3}{\sqrt{9,70}} \cos(2000 t - \arctg(1/22)) \text{ V}$.

Risultato : La soluzione a regime è la somma delle tre soluzioni similari $v^{\text{sim}}(t) = v^{\text{sim}1}(t) + v^{\text{sim}2}(t) + v^{\text{sim}3}(t)$ associate a ciascuna delle tensioni impresse delle tre $\hat{\mathcal{V}}$:

$$v^{\text{sim}}(t) = \frac{10}{3} + \sqrt{\frac{128}{101}} \cos(1000 t + \arctg(1/10)) + \frac{3}{\sqrt{9,70}} \cos(2000 t - \arctg(1/22)) \text{ V}$$

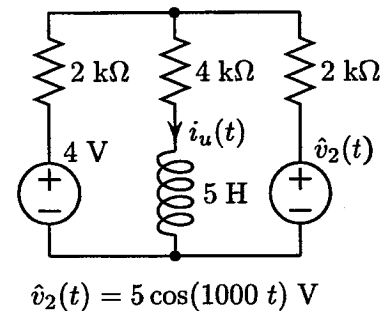
Commento : I fasori relativi alle tre soluzioni similari non possono essere assolutamente sommati dal momento che essi si riferiscono a domini caratterizzati da pulsazioni diverse.

4.10.2 Esercizio EA/17/02/98 : Potenza attiva in regime multifrequenziale

Il circuito in figura opera a regime ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$ costante, una $\hat{\mathcal{V}}$ sinusoidale, un $\mathcal{L}$ e tre $\mathcal{R}$.

Quesito : Calcolare la corrente $i_u(t)$ e la potenza attiva P_u dissipata nel ramo centrale.

• Essendoci due sorgenti impresse, una costante e l'altra sinusoidale, il regime è caratterizzato dalla presenza simultanea di grandezze costanti e sinusoidali. Possiamo usare il principio di sovrapposizione delle soluzioni similari nel dominio del tempo.



• Sostituiamo la $\hat{\mathcal{V}}\langle v_2(t) \rangle$ con un c.c. e analizziamo la componente costante del regime. In questo caso anche l' $\mathcal{L}\langle 5 \text{ H} \rangle$ viene sostituito da un c.c. , perché siamo in un regime costante.

• La componente costante i'_u di $i_u(t)$ può venir calcolata col teorema di MILLMANN (Cap.7-FCE).

$$i'_u = \frac{v'_u}{4000} = \frac{1}{4000} \frac{4/2000}{1/2000 + 1/4000 + 1/2000} = \frac{2}{5} \text{ mA}$$

dove v'_u è la tensione comune ai tre rami in parallelo.

• Per esaminare la componente sinusoidale $i''_u(t)$ di $i_u(t)$, sostituiamo il bipolo composito complementare all' $\mathcal{L}\langle 5 \text{ H} \rangle$ col modello di THÉVENIN : La tensione impressa $\hat{v}_{\text{eq}}(t)$ e la r_{eq} risultano :

$$\hat{v}_{\text{eq}}(t) = 5/2 \cos(1000 t) \text{ V} \quad , \quad r_{\text{eq}} = 4 + \frac{2 \times 2}{2 + 2} = 5 \text{ k}\Omega$$

Passando nel regime dei fasori possiamo calcolare il fasore $\bar{i}''_u$ di $i''_u(t)$:

$$\bar{i}''_u = \frac{\bar{\hat{v}}_{\text{eq}}}{r_{\text{eq}} + j \omega L} = \frac{5/2}{5000 + j 1000 5} = 10^{-3} (1 - j 1)/(2 \times 2) = 1/4 - j/4 \text{ mA}$$

Ritornando nel dominio del tempo otteniamo $i''_u(t) = \sqrt{2}/4 \cos(1000 t - \pi/4)$

Risultato 1 : La corrente $i_u(t)$ a regime vale

$$i_u(t) = i'_u(t) + i''_u(t) = 2/5 + \sqrt{2}/4 \cos(1000 t - \pi/4) \text{ mA}$$

Risultato 2 : La potenza attiva P_u assorbita dal ramo centrale coincide con quella assorbita dal $\mathcal{R}\langle 4000 \Omega \rangle$. Ricordare che nei regimi multifrequenziali la potenza attiva gode del principio di sovrapposizione (vedere Cap. 22-FCE) :

$$P_u = P'_u + P''_u = 4000 [i'_u]^2 + \frac{1}{2} 4000 [\bar{i}''_u]^2 = 4000 4/25 10^{-6} + 1/2 4000 2/16 10^{-6} \text{ W} = 890 \mu\text{W}$$

Commento : Il fattore 1/2 per la potenza attiva non ci vuole quando siamo in regime costante.

4.11 ENERGIA MASSIMA IMMAGAZZINATA

4.11.1 Esercizio E2/23/07/97 : Energia massima in un condensatore

Il bipolo composito in figura opera in regime sinusoidale di frequenza $f = 50$ Hz ed è costituito dalla serie di un $\mathcal{R}$ e di un $\mathcal{C}$: i fasori della tensione e corrente sono noti : $\bar{v} = 5 - j 1$ V e $\bar{i} = 3 + j 2$ A .

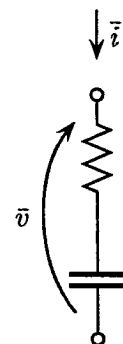
Quesito : Calcolare il valore massimo $w_{\max}$ raggiunto dall'energia (elettrostatica) immagazzinata nel $\mathcal{C}$.

• Dalla teoria (vedere Cap. 22-FCE) sappiamo che il valore massimo dell'energia $w_{\max}$ immagazzinata in un $\mathcal{C}$ in regime sinusoidale dipende dalla potenza reattiva Q_c :

$$w_{\max} = -Q_c / \omega = |Q_c| / (2 \pi f) .$$

Risultato : Siccome Q_c è la parte immaginaria è di quella complessa, otteniamo :

$$Q_c = \frac{1}{2} \Im[\bar{v} \bar{i}^*] = \frac{1}{2} \Im[(5 - j 1) (3 - j 2)] = -\frac{13}{2} \text{ VAR} \Rightarrow w_{\max} = \frac{13}{\pi 200} \text{ J}$$



4.11.2 Esercizio E2/13/01/98 : Energia massima in un induttore (Boucherot)

Il bipolo composito in figura opera in regime sinusoidale con frequenza nota $f = 50$ Hz . Il bipolo è costituito da due $\mathcal{R}$ di resistenza ignota e da un $\mathcal{L}$ di induttanza ignota. I fasori della tensione e della corrente del bipolo composito sono noti $\bar{v} = 4 + j 1$ V e $\bar{i} = 2 - j 2$ A .

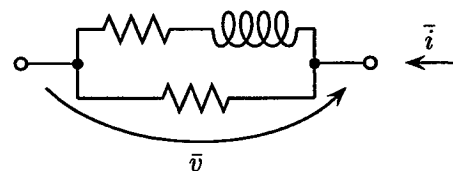
Quesito : Calcolare il valore massimo raggiunto dall'energia immagazzinata nell' $\mathcal{L}$ al variare del tempo t .

• Dal Corollario di Boucherot, la potenza reattiva Q assorbita dal bipolo composito coincide con quella Q_ℓ assorbita dall' $\mathcal{L}$:

$$Q_\ell = Q = \Im[(1/2) \bar{v} \bar{i}^*] = 5 \text{ VAR}$$

Risultato : Siccome il valore massimo $w_{\max}$ dell'energia immagazzinata nell' $\mathcal{L}$ è legato a Q_ℓ , otteniamo :

$$w_{\max} = \frac{Q_\ell}{\omega} = \frac{5}{2 \pi 50} = \frac{1}{\pi 20} \text{ J}$$



4.12 PROBLEMI INVERSI IN REGIME SINUSOIDALE

4.12.1 Esercizio E2/16/01/97 : Problema inverso riguardante le potenze

Il circuito in figura opera in regime sinusoidale con $\omega = \omega_0 = 300$ rad/s : esso è costituito da una $\hat{V}$ sinusoidale, un $\mathcal{C}$ e un carico di impedenza z_u . La capacità C e l'impedenza z_u non sono noti.

Quesito : Calcolare la capacità C conoscendo la potenza attiva assorbita dal carico $P_u = 600$ W e quella reattiva $Q_u = 400$ VAR e la potenza reattiva erogata dalla $\hat{V}$ $Q = 0$ VAR .

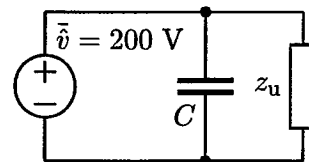
• Indicando con Q_c la potenza reattiva assorbita dal $\mathcal{C}$, il corollario di Boucherot ci dice che :

$$Q = Q_c + Q_u \Rightarrow Q_c = Q - Q_u = 0 - 400 = -400 \text{ VAR} .$$

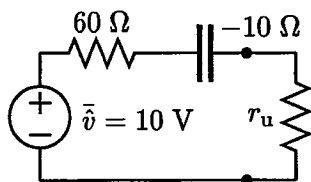
Risultato : D'altra parte la potenza reattiva Q_c dipende dall'ampiezza della tensione $\bar{\hat{v}}$ ai capi del $\mathcal{C}$ stesso :

$$Q_c = -\frac{1}{2} \omega_0 C |\bar{\hat{v}}|^2 \Rightarrow C = -\frac{2 Q_c}{\omega_0 |\bar{\hat{v}}|^2} = -\frac{2 \times (-400)}{300 \times 200^2} = \frac{200}{3} \mu\text{F}$$

Il fattore $1/2$ è dovuto al fatto che il modulo di $\bar{\hat{v}}$ coincide con l'ampiezza della sinusoide e non col valore efficace della stessa.



4.12.2 Esercizio E2/11/09/98 : problema inverso sulla potenza attiva



Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}$, un $\mathcal{C}$, e due $\mathcal{R}$, tra cui il carico di resistenza r_u ignota.

Quesito : Calcolare il valore di r_u per cui la potenza attiva P_u assorbita dal carico sia massima.

• Siccome $P_u = 0,5 r_u |\bar{i}_u|^2$ in cui $\bar{i}_u$ è la corrente che fluisce nell'unica maglia del circuito e nel carico stesso. Calcoliamo il quadrato dell'ampiezza di questa corrente :

$$|\bar{i}_u|^2 = \frac{|\hat{v}|^2}{(60 + r_u)^2 + (-10)^2}$$

Da cui si ha l'espressione della potenza, in cui r_u è presente solo nel denominatore

$$P_u = \frac{0,5 r_u |\hat{v}|^2}{(60 + r_u)^2 + 100} = \frac{0,5 |\hat{v}|^2}{(3600 + 100)/r_u + 120 + r_u}$$

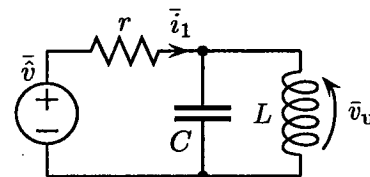
Risultato : Il massimo di P_u corrisponde al minimo del denominatore : $r_u = \sqrt{3700}$.

Commento : Notare che r_u coincide con l'ampiezza dell'impedenza del bipolo $\mathcal{R}\langle 60 \Omega \rangle \nmid \mathcal{C}\langle -10 \Omega \rangle$. Questo risultato è simile ma diverso da quello del classico teorema sulla massima potenza attiva erogabile da una sorgente sinusoidale non ideale.

4.12.3 Esercizio EC/09/09/97 : Problema inverso sul risonatore parallelo

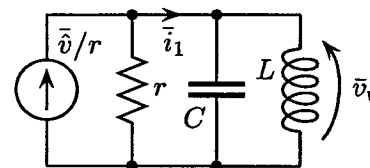
Il circuito in figura opera in regime sinusoidale ed è costituito da una $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v} \rangle$, un $\mathcal{L}$, un $\mathcal{C}$ e un $\mathcal{R}$. La tensione impressa $\hat{v}(t)$ è una senoide con pulsazione ω variabile e ampiezza $|\hat{v}|$, costante rispetto a ω , incognita.

Noi conosciamo l'ampiezza della tensione $\bar{v}_u$ per tre valori della frequenza $|\bar{v}_u| = 50$ V per $f_0 = 1000$ Hz, $|\bar{v}_u| = \sqrt{2} 25$ V per $f_1 = 800$ Hz e $f_2 = 1250$ Hz. Inoltre sappiamo che l'ampiezza della corrente fluente nel $\mathcal{R}$ raggiunge il valore massimo (al variare di ω) $i_{\max} = 0,2$ A.



Quesito : Calcolare il valore r della resistenza del $\mathcal{R}$, la capacità C del $\mathcal{C}$ e l'induttanza L dell' $\mathcal{L}$ e l'ampiezza costante della tensione impressa $|\hat{v}|$.

• La corrente $\bar{i}_1$ fluente nel $\mathcal{R}\langle r \rangle$ raggiunge il massimo $i_{\max}$ dell'ampiezza in corrispondenza del valore minimo dell'ampiezza dell'impedenza del risonatore ideale parallelo, che si ha per $\omega = 0$ ovvero $\omega \rightarrow \infty$ (per questi valori di ω il risonatore ideale parallelo è equivalente a un c.c.). Quindi possiamo scrivere $\bar{v} = r 0,2$. Il bipolo $\hat{\mathcal{V}}\langle \hat{v} \rangle \nmid \mathcal{R}\langle r \rangle$ è sostituita dal $\hat{\mathcal{I}}\langle \bar{v}/r \rangle \parallel \mathcal{R}\langle r \rangle$ (modello di NORTON).



Siamo in presenza di un risonatore nonconservativo parallelo alimentato da una $\hat{\mathcal{I}}$ sinusoidale.

• Calcoliamo la funzione di rete $F(s) = \bar{v}_u/\hat{v}$ per il tramite della funzione $\bar{v}_u/\hat{i}$

$$\frac{\bar{v}_u}{\hat{i}} = \frac{1}{sC + 1/r + 1/(sL)} \Rightarrow F(s) = \frac{\bar{v}_u}{\hat{v}} = \frac{\bar{v}_u}{\hat{i} r} = \frac{1}{sCr + 1 + r/(sL)}$$

• Calcoliamo il quadrato dell'ampiezza di $F(s)$ lungo l'asse $j\omega$

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{|\bar{v}_u|^2}{|\hat{v}|^2} = \frac{1}{1 + [\omega Cr - 1/(\omega L/r)]^2} = \frac{1}{1 + [Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)]^2}$$

$$\text{dove } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{e} \quad Q = \omega_0 Cr$$

come risulta dalla sezione sui risonatori quasi-conservativi (Cap. 23-FCE) : ω_0 è la pulsazione di risonanza, mentre Q è il fattore Q .

• Dal momento che $|F(j 2 \pi f_1)| = |F(j 2 \pi f_2)|$ e che $|F(j 2 \pi f_0)| = \sqrt{2} |F(j 2 \pi f_1)|$ abbiamo che $f_0 = 1000$ Hz è proprio la frequenza di risonanza

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{800 \times 1250} = 1000 \text{ Hz} \quad , \quad Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{1000}{1250 - 800} = \frac{20}{9}$$

Risultato 1 : Alla risonanza $\omega = \omega_0$ il parallelo dell' $\mathcal{L}$ e del $\mathcal{C}$ sono equivalenti a un c.a. e quindi possiamo calcolare la $|\hat{v}|$ e la resistenza r :

$$|\hat{v}| = |\bar{v}_u|_f = f_0 = 50 \text{ V} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\bar{v}}{\bar{i}_{\max}} = \frac{50}{0,2} = 250 \Omega$$

Risultato 2 : Dal valore di Q e di ω_0 otteniamo i valori della capacità e dell'induttanza

$$Q = \omega_0 C r \Rightarrow C = \frac{Q}{\omega_0 r} = \frac{20/9}{2 \pi 1000 250} = \frac{1}{\pi 225000} = \frac{40}{\pi 9} \mu\text{F}$$

$$L C = 1/\omega_0^2 \Rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{9 \pi 0,25 10^5}{4 \pi^2 1000^2} = \frac{9}{\pi 160} \text{ H}$$