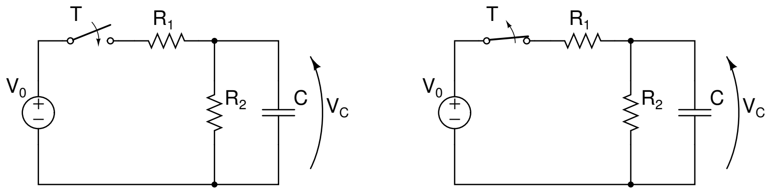
Teoria dei circuiti – Esercitazione di Laboratorio
<u>Transitori e dominio dei fasori</u>

Esercizio 1



(a) (b)

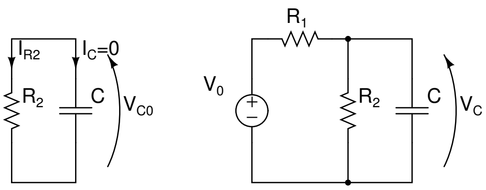
Con riferimento al circuito di figura, si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 0.1\,\mu\mathrm{F}$, $V_0 = 5\,\mathrm{V}$.

Determinare l'andamento della tensione $V_C(t)$ nei due casi seguenti:

- per $t < t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T è aperto ed il circuito è a regime. All'istante $t = t_0$ l'interruttore T si chiude;
- per $t < t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T è chiuso ed il circuito è a regime. All'istante $t = t_0$ l'interruttore T si apre.

Soluzione

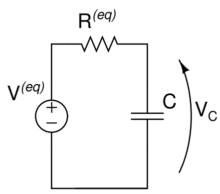
Si analizzino separatamente i due transitori, cominciando dal primo richiesto, ovvero quello in cui l'interruttore commuta da aperto a chiuso.



(a) (b)

Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T è aperto ed il circuito corrisponde a quello indicato con (a). Dall'ipotesi che la capacità sia a regime, ovvero $I_C = 0$, si ha che $I_{R2} = 0$ e quindi $V_{C0} = V_{R2} = R_2 I_{R2} = 0\,\mathrm{V}$.

All'istante $t = 0$ l'interruttore si chiude, ed il circuito si modifica come indicato in (b). Calcolando il circuito equivalente di Thevenin del circuito formato da V_0, R_1 e R_2, si può considerare il transitorio sul seguente circuito equivalente



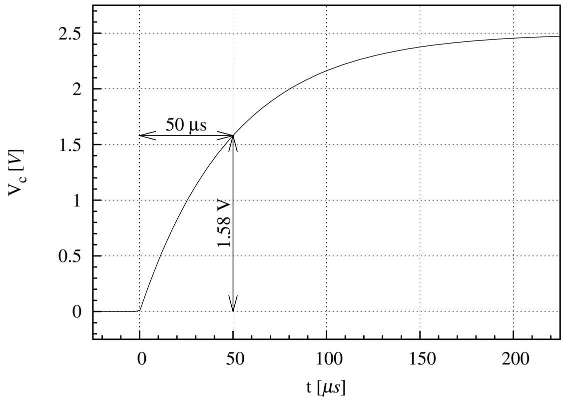
con

$$V^{(eq)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0 = 2.5\,\mathrm{V}, \quad R^{(eq)} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 500\,\Omega$$

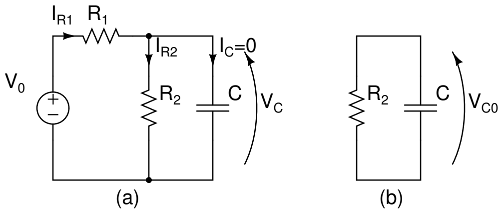
e quindi la tensione $V_C(t)$ si può esprimere come

$$V_C(t) = \begin{cases} V_{C0} = 0\,\mathrm{V} & t \leq 0\,\mathrm{s} \\ V^{(eq)} + \left(V_{C0} - V^{(eq)}\right) e^{-\frac{t}{R^{(eq)}C}} = 2.5\left(1 - e^{-20000\,t}\right)\mathrm{V} & t > 0\,\mathrm{s} \end{cases}$$

come rappresentato nella figura seguente. La costante di tempo del transitorio vale $\tau = R^{(eq)}\,C = 50\,\mu\mathrm{s}$. Poiché secondo le convenzioni dei segni adottate, la tensione ai capi del condensatore (e quindi anche la quantità di carica in esso accumulata) aumenta, si indichi questo transitorio come “transitorio di carica”.



Si passi ora a considerare il secondo transitorio richiesto dall'esercizio. In questo caso il circuito, rispettivamente per $t < t_0$ e per $t > t_0$, risulta equivalente ai due circuiti indicati con (a) e con (b).



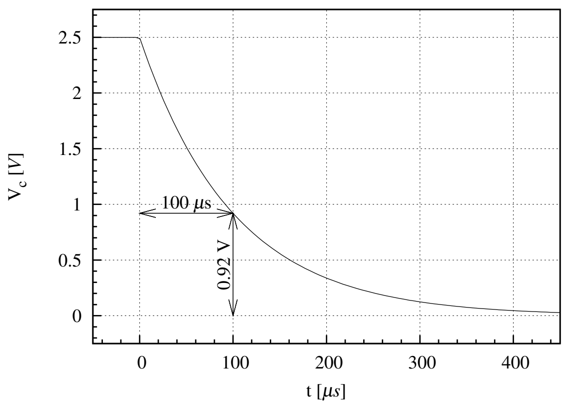
Per $t < t_0$, si calcoli la soluzione di regime assumendo $I_C = 0$, ovvero $I_{R1} = I_{R2}$. Per $t > t_0$ il circuito connesso alla capacità risulta essere la sola R_2; il suo equivalente di Thevenin è quindi R_2 stessa.

$$V_{C0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0 = 2.5\,\mathrm{V}, \quad V^{(eq)} = 0\,\mathrm{V}, \quad R^{(eq)} = R_2 = 1000\,\Omega$$

e la $V_C(t)$ si può esprimere come

$$V_C(t) = \begin{cases} V_{C0} = 2.5\,\mathrm{V} & t \le 0\,\mathrm{s} \\ V^{(eq)} + \left(V_{C0} - V^{(eq)}\right) e^{-\frac{t}{R^{(eq)}\,C}} = 2.5\,e^{-10000\,t}\mathrm{V} & t > 0\,\mathrm{s} \end{cases}$$

come rappresentato nella figura seguente. La costante di tempo del transitorio vale $\tau = R^{(eq)}\,C = 100\,\mu\mathrm{s}$, ovvero è doppia rispetto al caso precedente. Poiché tensione (e quindi anche carica) della capacità diminuisce fino a zero, si indichi questa fase come “transitorio di scarica”. Si noti che per via delle differenti costanti di tempo questo transitorio risulta più lento del precedente.



Realizzazione pratica

Si utilizzino le due resistenze da $1\,\mathrm{k}\Omega$, il condensatore da $0.1\,\mu$F ed il pulsante. Le resistenze da $1\,\mathrm{k}\Omega$ sono contrassegnate dalle tre fasce colorate marrone/nero/rosso; il condensatore da $0.1\,\mu$F reca scritto 0.1 oppure 100n. Per quanto riguarda l'interruttore, può essere sostituito dal pulsante. Il pulsante premuto è equivalente all'interruttore chiuso, il pulsante non premuto all'interruttore aperto.

Si imposti sull'alimentatore una tensione stabilizzata pari a 5 V. Si imposti inoltre l'oscilloscopio come segue:

- Canale 1 attivo con sensibilità pari a 0.5 V/div o 1 V/div. Per collegare la sonda alla capacità C, si consiglia di usare un filo metallico, collegandone un capo alla breadboard e l'altro capo alla sonda (è anche possibile collegare la sonda direttamente alla resistenza R_2 essendo C ed R_2 in parallelo, ma stando attenti che eventuali movimenti della sonda non facciano uscire la resistenza dalla breadboard) .
- Canale 2 disattivato.
- Base dei tempi (per il momento) ininfluente.
- Trigger su "Auto".

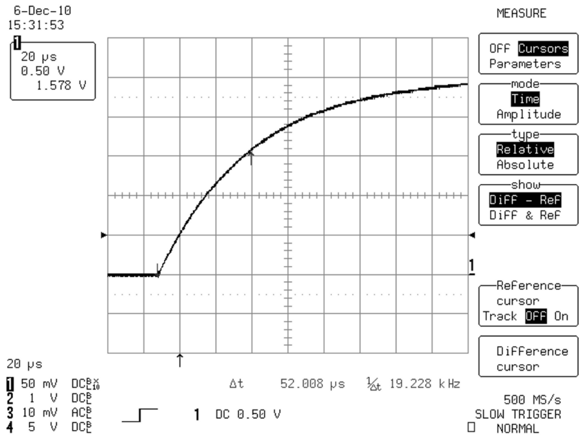
A pulsante aperto, sullo schermo dell'oscilloscopio si dovrebbe vedere una riga continua, la cui posizione sullo schermo dovrebbe corrispondere al livello 0 V. Premendo il pulsante la tensione, dopo un breve transitorio, dovrebbe assestarsi ad un livello pari a 2.5 V.

Sebbene entrambi i transitori (sia di carica che di scarica) siano visualizzati sullo schermo ogni volta che si preme o si rilascia il pulsante, la loro durata è così breve da non poter essere visti ad occhio. Per poterli visualizzare e quindi misurare, è necessario cambiare le impostazioni dell'oscilloscopio in modo che "congeli" sullo schermo l'istante in cui avviene un transitorio.

Per visualizzare e congelare il solo transitorio di carica, si imposti l'oscilloscopio come segue:

- Base dei tempi a $20\,\mu$s/div o $50\,\mu$s/div.
- Trigger impostato sul Canale 1 in modalità "Normal". In questa modalità lo strumento aggiorna lo schermo solo quando rileva che la tensione del Canale 1 ha un transitorio di salita o di discesa in cui la tensione attraversa la soglia impostata. Si controlli che il tipo di transitorio su cui l'oscilloscopio si sincronizzi sia "positivo" (ovvero un transitorio con tensione crescente), e si fissi la soglia ad un valore tra gli 0.5 V e 1 V. Si consiglia questo range di valori per avere una tensione di soglia abbastanza lontana dagli 0 V della soluzione di regime con interruttore aperto (e quindi evitare che l'oscilloscopio aggiorni lo schermo solo per via del rumore sul Canale), ma abbastanza bassa da avere una transizione di tensione sufficientemente ripida.

In questo modo lo schermo dell'oscilloscopio si dovrebbe aggiornare ogni volta che l'interruttore si chiude, ovvero quando viene premuto il pulsante, fissando una immagine simile alla seguente.



Si provi ora a misurare, tramite i cursori dell'oscilloscopio, la costante di tempo del transitorio. Per fare questo, il metodo più semplice è il seguente. Si supponga che la tensione vari esattamente tra $0\,\mathrm{V}$ e $2.5\,\mathrm{V}$, ovvero $\Delta V = 2.5\,\mathrm{V}$ (per una misura più precisa, si può misurare con esattezza il ΔV con il trigger in modalità "Auto" oppure aumentando la scala temporale dello schermo). Dall'analisi teorica, dopo un tempo pari alla costante di tempo τ, il valore della tensione V_C dovrebbe valere

$$V_C(\tau) = \Delta V \left(1 - e^{-1}\right) = 1.58\,\mathrm{V}$$

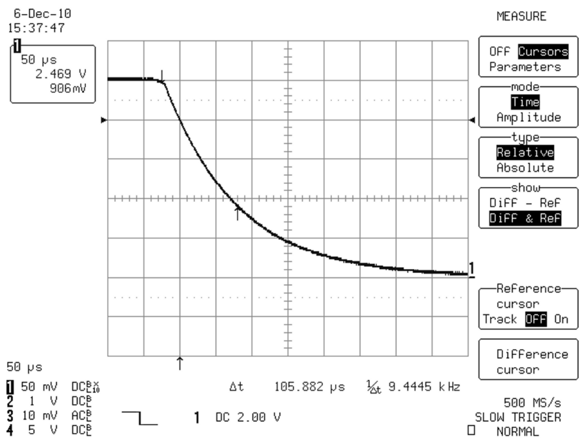
Si imposti il primo cursore (cursore di riferimento) nel punto in cui il transitorio di carica comincia, ed il secondo nel punto in cui la tensione è uguale a $1.58\,\mathrm{V}$. Il Δt tra i due cursori è la misura della costante di tempo τ del transitorio.

NOTA: per via della tolleranza dei componenti (il valore delle resistenze viene assicurato essere entro il 5% del valore nominale, mentre per le capacità la tolleranza è normalmente del 10%), è normale attendersi un valore simile, ma non perfettamente coincidente con quello atteso.

Per congelare sullo schermo l'istante in cui avviene il transitorio di scarica di C, ovvero il transitorio che si ha quando si rilascia il pulsante, è sufficiente cambiare le impostazioni dell'oscilloscopio agendo sulla programmazione del trigger.

- Trigger impostato sul Canale 1 in modalità "Normal", eventualmente cambiare la soglia del trigger con un valore prossimo a $2.5\,\mathrm{V}$ (si consiglia tra $1.5\,\mathrm{V}$ e $2\,\mathrm{V}$ per gli stessi motivi spiegati in precedenza). Si imposti questa volta il fronte del trigger di tipo "negativo".
- Base dei tempi a $50\,\mu\mathrm{s}/\mathrm{div}$ o $100\,\mu\mathrm{s}/\mathrm{div}$, per compensare l'atteso aumento della costante di tempo.

Lo schermo dell'oscilloscopio dovrebbe essere simile al seguente.

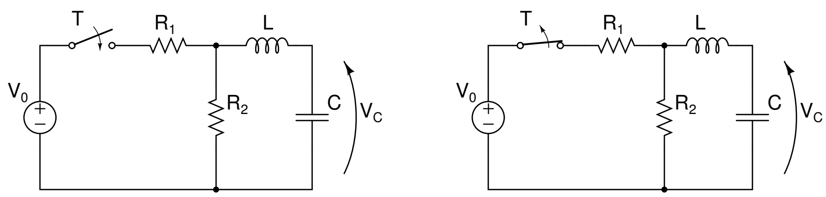


Come nel caso precedente, si provi a calcolare la costante di tempo del transitorio. Dopo un tempo τ dall'inizio del transitorio, la tensione è eguale a

$$V_C(\tau) = \Delta V e^{-1} = 0.92\,\mathrm{V}$$

dove si è assunto $\Delta V = 2.5\,\mathrm{V}$. Si misuri tramite i cursori dello strumento la differenza di tempo tra l'inizio del transitorio e l istante in cui V_C vale $0.92\,\mathrm{V}$. Questo tempo dovrebbe valere attorno ai $100\,\mu\mathrm{s}$.

Esercizio 2 (*facoltativo*)



(a) (b)

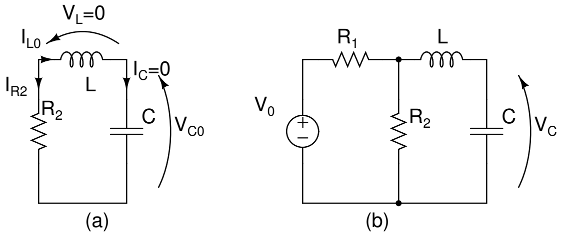
Con riferimento al circuito di figura, si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $C = 0.1\,\mu\mathrm{F}$, $L = 0.5\,\mu\mathrm{H}$, $V_0 = 5\,\mathrm{V}$. Si supponga che per $t < t_0 = 0\,\mathrm{sec}$ il circuito sia a regime.

Si determini:

- l'andamento della tensione $V_C(t)$ supponendo sia che per $t = t_0$ l'interruttore si chiuda (caso (a) in figura) sia che allo stesso istante si apra (caso (b));
- per quali di valori di R_1 ed R_2 (supponendo $R_1 = R_2$) la tensione $V_C(t)$ ha un transitorio di tipo *sottosmorzato*.

Soluzione

Si consideri il primo punto dell'esercizio, analizzando separatamente i due transitori cominciando da quello in cui l'interruttore commuta da aperto a chiuso.

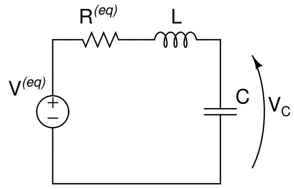


Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T è aperto ed il circuito corrisponde a quello indicato con (a). Dall'ipotesi che sia la capacità sia a regime, ovvero $I_C = 0$, sia l'induttore sia a regime, ovvero $V_L = 0$, si ha che $I_{R2} = 0$ e quindi $V_{C0} = V_{R2} = R_2 I_{R2} = 0\,\mathrm{V}$ e che $I_{L0} = I_C = 0\,\mathrm{A}$.

All'istante $t = 0$ l'interruttore si chiude, ed il circuito si modifica come indicato in (b). Calcolando il circuito equivalente di Thevenin del circuito formato da V_0, R_1 e R_2 si ha

$$V^{(eq)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0 = 2.5\,\mathrm{V}, \quad R^{(eq)} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 500\,\Omega$$

e la tensione $V_C(t)$ può essere espressa considerando il circuito equivalente



che ha un transitorio del secondo ordine, dove la frequenza naturale ed il coefficiente di smorzamento valgono

$$\omega_N = \frac{1}{\sqrt{LC}} \simeq 141.4\,\mathrm{krad/sec}$$

$$\zeta = \frac{R^{(eq)}}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2}\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\sqrt{\frac{C}{L}} = 3.536$$

Il transitorio è dunque sovrasmorzato, e può essere espresso tramite:

$$\sigma_1 = \zeta\omega_N - \omega_N\sqrt{\zeta^2 - 1} \simeq 20.4\,\mathrm{ks}^{-1}$$

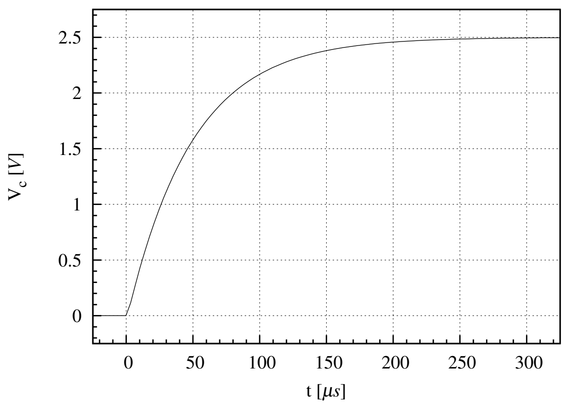
$$\sigma_2 = \zeta\omega_N + \omega_N\sqrt{\zeta^2 - 1} \simeq 979.6\,\mathrm{ks}^{-1}$$

$$V_C(t) = \begin{cases} V_{C0} & t \le t_0 \\ V^{(eq)} + \left(\left(V_{C0} - V^{(eq)}\right)\dfrac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} + \dfrac{I_{L0}}{C\left(\sigma_2 - \sigma_1\right)}\right) e^{-\sigma_1 t} + & \\ \qquad + \left(\left(V_{C0} - V^{(eq)}\right)\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} + \dfrac{I_{L0}}{C\left(\sigma_2 - \sigma_1\right)}\right) e^{-\sigma_2 t} & t > t_0 \end{cases}$$

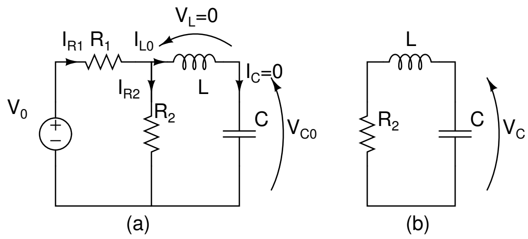
Poiché $\sigma_2 \gg \sigma_1$, tale transitorio si può approssimare con

$$V_C(t) \simeq \begin{cases} V_{C0} & t \le t_0 \\ V^{(eq)}\left(1 - e^{-\sigma_1 t}\right) & t > t_0 \end{cases}$$

ovvero è del tutto simile al precedente transitorio di carica del primo ordine che abbia $\tau \simeq 1/\sigma_1 \simeq 49\,\mu\mathrm{s}$, come si può osservare dalla figura seguente.



Per quanto riguarda il transitorio di scarica, si considerino i seguenti circuiti.



Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{s}$ il circuito da considerare è quello indicato con (a), con l'ipotesi che sia la capacità sia a regime (ovvero $I_C = 0$) sia l'induttore sia a regime (ovvero $V_L = 0$) da cui si ha

$$V_{C0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_0 = 2.5\,\mathrm{V}, \quad I_{L0} = I_{C0} = 0\,\mathrm{A}$$

mentre per il tempo di carica si calcoli il circuito equivalente di Thevenin della resistenza R_2, corrispondente a

$$V^{(eq)} = 0\,\mathrm{V}, \quad R^{(eq)} = R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$$

da cui si possono ricavare in modo analogo al precedente i parametri del transitorio.

$$\omega_N = \frac{1}{\sqrt{LC}} \simeq 141.4\,\mathrm{krad/sec}$$

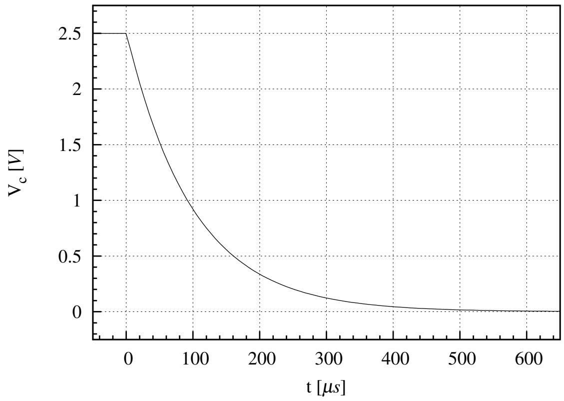
$$\zeta = \frac{R^{(eq)}}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R_2}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = 7.07$$

Anche il transitorio di scarica è sottosmorzato, con

$$\sigma_1 = \zeta\omega_N - \omega_N\sqrt{\zeta^2 - 1} \simeq 10.05\,\mathrm{ks}^{-1}$$

$$\sigma_2 = \zeta\omega_N + \omega_N\sqrt{\zeta^2 - 1} \simeq 1989.9\,\mathrm{ks}^{-1}$$

ed il suo andamento, del tutto simile come nel caso precedente ad un transitorio del primo ordine in cui $\tau \simeq 1/\sigma_1 \simeq 99.5\,\mu\mathrm{s}$, si può osservare nella figura seguente.



Si consideri ora il secondo punto dell'esercizio, ove si chiede di cambiare le due resistenze R_1 ed R_2 in modo da avere un transitorio sottosmorzato. La condizione per cui un transitorio del secondo ordine è sottosmorzato è $0 < \zeta < 1$, ovvero

$$0 < R^{(eq)} < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \simeq 141.4\,\Omega$$

Se si considerano $R_1 = R_2$, ed i valori di $R^{(eq)}$ trovati nei transitori di carica e di scarica, il valore limite di R_1 e R_2 per cui si ha un transitorio di carica sottosmorzato è

$$R_1 = R_2 < 282.8\,\Omega$$

mentre il valore limite per cui anche il transitorio di scarica è

$$R_1 = R_2 < 141.4\,\Omega$$

Si consideri come esempio il transitorio di carica dove $R_1 = R_2 = 100\,\Omega$. In questo caso i due parametri sono

$$\omega_N = \simeq 141.4\,\text{krad/sec}, \quad \zeta = 0.353$$

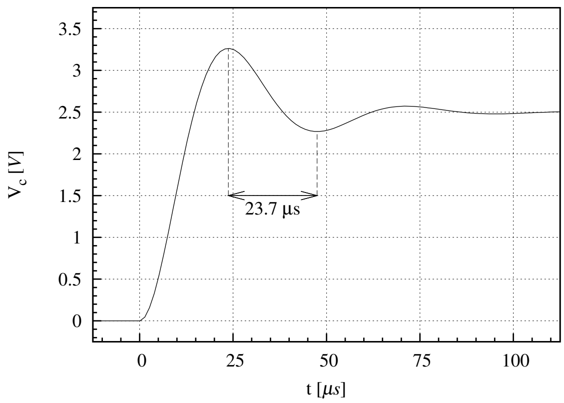
e, ponendo

$$\sigma_0 = \omega_N \zeta = 50\,\text{ks}^{-1}, \quad \omega_0 = \omega_N\sqrt{1-\zeta^2} = 132.3\,\text{krad/s}$$

il transitorio è del tipo

$$V_C(t) = V^{(eq)} + e^{-\sigma_0 t}\left(\left(\frac{I_{L0}}{\omega_0 C} + \frac{\sigma_0}{\omega_0}\left(V_{C0} - V^{(eq)}\right)\right)\sin\omega_0 t + \left(V_{C0} - V^{(eq)}\right)\cos\omega_0 t\right)$$

ed è rappresentato nella figura seguente.



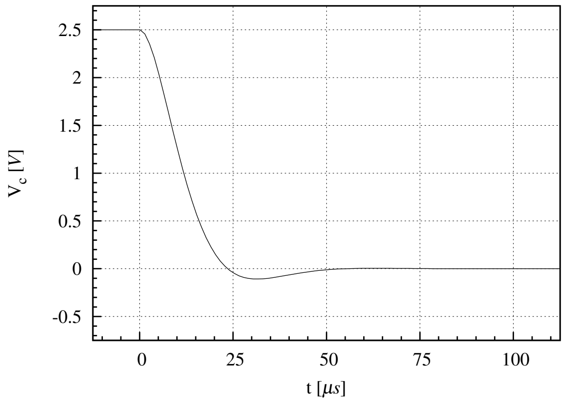
Per quanto riguarda il transitorio di scarica, si ha

$$\omega_N = \simeq 141.4\,\mathrm{krad/sec}, \quad \zeta = 0.707$$

da cui

$$\sigma_0 = \omega_N \zeta = 100\,\mathrm{ks}^{-1}, \quad \omega_0 = \omega_N \sqrt{1-\zeta^2} = 100\,\mathrm{krad/s}$$

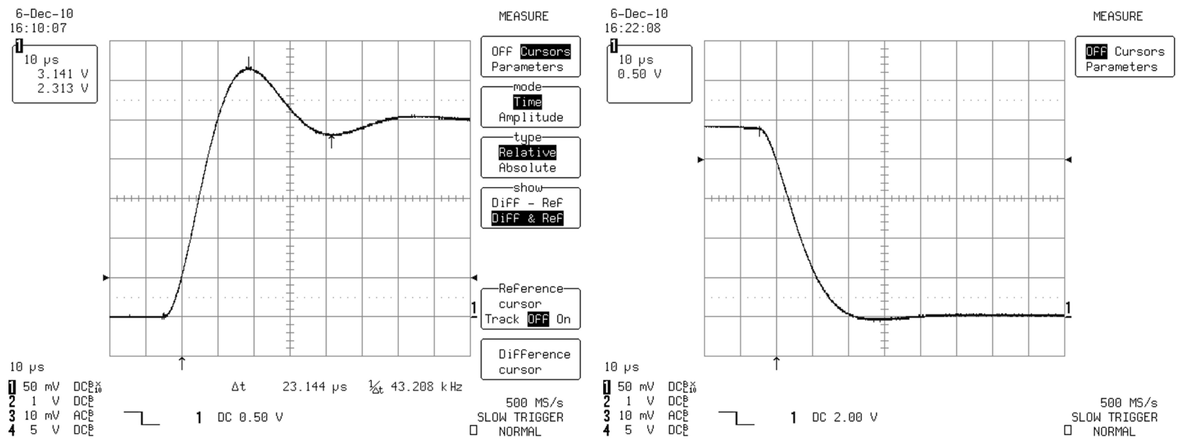
e l'andamento del transitorio è rappresentato nella figura seguente. Si noti che, essendo ζ più prossimo al valore limite $\zeta = 1$ rispetto al caso precedente, la sovraelongazione risulta meno marcata.



Realizzazione pratica

Si implementi il caso più interessante, ovvero il transitorio di carica e scarica sottosmorzato con $R_1 = R_2 = 100\,\Omega$. La realizzazione e le impostazioni degli strumenti per questo esercizio sono in tutto simili a quelle del caso precedente, all'infuori della scala dei tempi dell'oscilloscopio, che conviene diminuire leggermente per meglio visualizzare i due transitori Si ricorda che le due resistenze da $100\,\Omega$ sono contrassegnate dalle tre fasce colorate marrone/nero/marrone.

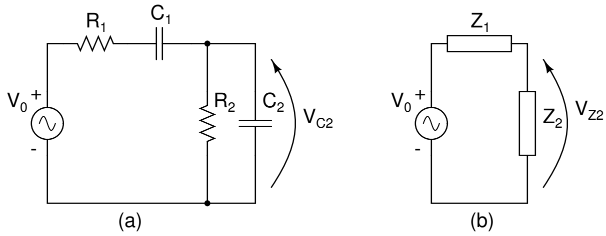
I due transitori, rispettivamente di carica e scarica, dovrebbero apparire simili a quelli in figura.



Effettuare misure del tempo di carica e scarica risulta abbastanza complesso. Interessante risulta invece, nel caso del transitorio di carica (in quanto le oscillazioni sono più marcate), misurare la frequenza di auto-oscillazione ω_0, misurando la distanza tra due picchi (i primi tre sono chiaramente visibili sullo schermo) nel transitorio di tensione. Si misuri attraverso i cursori dell'oscilloscopio la distanza (in tempo) tra il primo picco positivo ed il primo picco positivo, equivalente a metà del periodo di oscillazione. Questo tempo dovrebbe risultare pari a

$$\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2\omega_0} \simeq 23.75\,\mu\mathrm{s}$$

Esercizio 3

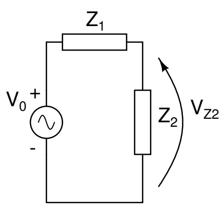


Con riferimento ai due circuiti rappresentati in figura, si assumano i seguenti valori: $f_0 = 1000\,\mathrm{Hz}$, $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C_1 = 0.1\,\mu\mathrm{F}$, $R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C_2 = 0.1\,\mu\mathrm{F}$, $V_0(t) = 1 \cdot \cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{V}$.

- Calcolare l'andamento della tensione $V_{C2}(t)$ nel caso in figura (a). Si indichi se la tensione sinusoidale trovata sia in anticipo, in ritardo, oppure in fase, rispetto alla tensione sinusoidale imposta V_0;
- Il circuito in (b) è una generalizzazione del circuito (a), dove alla serie di R_1 e C_1 è stato sostituito una generico bipolo Z_1, ed al parallelo si R_2 e C_2 un generico bipolo Z_2. Si supponga di poter cambiare arbitrariamente Z_1 e Z_2, ma di doverli realizzare esclusivamente tramite serie oppure parallelo di una resistenza del valore di $1\,\mathrm{k\Omega}$ e di una capacità da $0.1\,\mu\mathrm{F}$. Si determini quando la tensione sinusoidale V_{Z2} è in fase, quando in anticipo e quando in ritardo rispetto a V_0.

Soluzione

Essendo V_0 un generatore sinusoidale, conviene risolvere il circuito (come del resto già suggerito dal punto (b)) nel dominio dei fasori. Si consideri quindi per la soluzione di entrambi i punti il circuito indicato al punto (b)



in cui è immediato calcolare che

$$\tilde{V}_{Z2} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\tilde{V}_0$$

Per il primo punto dell'esercizio, si ha che l'impedenza Z_1 è data dalla serie tra le impedenze associate a R_1 e C_1 e Z_2 dal parallelo tra le impedenze associate a R_2 e C_2, tutte calcolate ad una frequenza pari a $f_0 = 1\,\mathrm{kHz}$, ovvero una frequenza angolare $\omega_0 = 6.28\,\mathrm{krad/s}$. La tensione V_{C2} richiesta può essere calcolata mediante la V_{Z2}.

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = R_1 - j\frac{1}{\omega C_1} \simeq 1\,\mathrm{k\Omega} - j\,1.59\,\mathrm{k\Omega}$$

$$Z_2 = \frac{R_2\frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} = R_2\frac{1}{1 + (\omega R_2 C_2)^2} - jR_2\frac{\omega R_2 C_2}{1 + (\omega R_2 C_2)^2} \simeq 717\,\Omega - j\,450\,\Omega$$

In entrambi i casi, la parte immaginaria dell'impedenza equivalente è sempre negativa. Inoltre si consideri $\tilde{V}_0 = 1\,\mathrm{V}$.

La soluzione cercata è data da

$$\tilde{V}_{Z2} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\tilde{V}_0 \simeq \frac{717 - j\,450}{1720 - j\,2040} V \simeq 0.302\,\mathrm{V} + j0.097\,\mathrm{V} \simeq 0.302\,e^{j\,0.31}$$

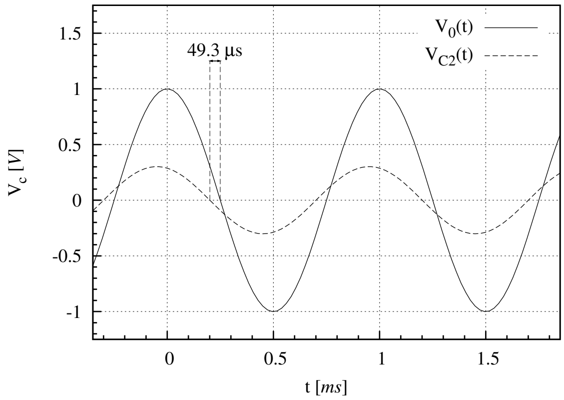
che riscritta come funzione sinusoidale

$$V_{C2}(t) = V_{Z2}(t) \simeq 0.302\, \cos\left(2\pi f_0 t + 0.31\right)\ \mathrm{V}$$

ovvero risulta in *anticipo* approssimativamente di $\varphi_0 \simeq 0.31\,\mathrm{rad}$ rispetto a $V_0(t)$. Poiché un ritardo di fase pari a $2\pi\,\mathrm{rad}$ corrisponde ad un periodo, ovvero un tempo $T = 1\,\mathrm{ms}$ ad una frequenza di $1\,\mathrm{kHz}$, l'anticipo corrisponde a

$$\tau_0 = \frac{\varphi_0}{2\pi} T \simeq 49.3\,\mu\mathrm{s}$$

Le due tensioni $V_0(t)$ e $V_{C2}(t)$ sono rappresentate nella figura seguente.



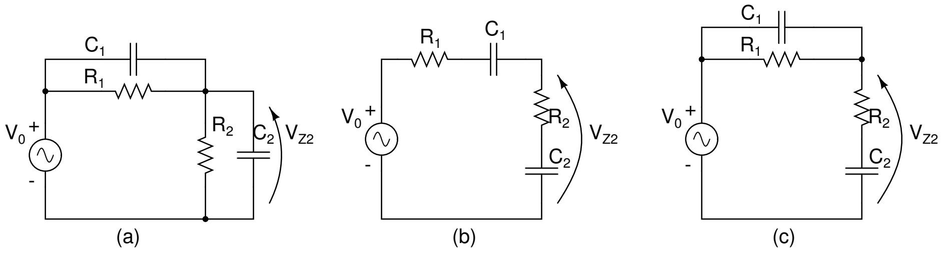
Poiché nel circuito del primo punto si osserva già un anticipo di fase, si cerchi, risolvendo il secondo punto dell'esercizio, un circuito che ottenga un ritardo di fase, ed un uno in cui le due tensioni risultino perfettamente in fase. Il vincolo richiesto dall'esercizio può essere interpretato come la richiesta che Z_1 e Z_2 possano solo realizzate tramite serie o parallelo, rispettivamente, di R_1 e C_1 e di R_2 e C_2. L'impedenza Z_s della connessione serie e quella Z_p della connessione parallelo sono stati calcolati al punto precedente, ovvero:

$$Z_s \simeq 1\,\mathrm{k}\Omega - j\,1.59\,\mathrm{k}\Omega$$

$$Z_p \simeq 717\,\Omega - j\,450\,\Omega$$

Tralasciando la configurazione del punto uno, possono esistere solo tre differenti configurazioni, ovvero $Z_1 = Z_2 = Z_p$, $Z_1 = Z_2 = Z_s$ e $Z_1 = Z_p$, $Z_2 = Z_s$.

Sebbene sia possibile risolvere il problema da un punto di vista strettamente teorico, si considerino per semplicità questi tre casi (indicati in figura con (a), (b) e (c)) separatamente.



- nel caso (a) sia Z_1 che Z_2 sono realizzati tramite un parallelo

$$\tilde{V}_{Z2} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\tilde{V}_0 = \frac{Z_p}{Z_p + Z_p}\tilde{V}_0 = \frac{1}{2}\tilde{V}_0$$

  ovvero $V_{Z2}(t) = 0.5\cos\left(2\pi f_0 t\right)$. Tale tensione è *in fase* con $V_0(t)$.

- nel caso (b) sia Z_1 che Z_2 sono realizzati tramite una serie

$$\tilde{V}_{Z2} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\tilde{V}_0 = \frac{Z_s}{Z_s + Z_s}\tilde{V}_0 = \frac{1}{2}\tilde{V}_0$$

ovvero $V_{Z2}(t) = 0.5\cos(2\pi f_0 t)$. Come nel caso precedente, tale tensione è *in fase* con $V_0(t)$.

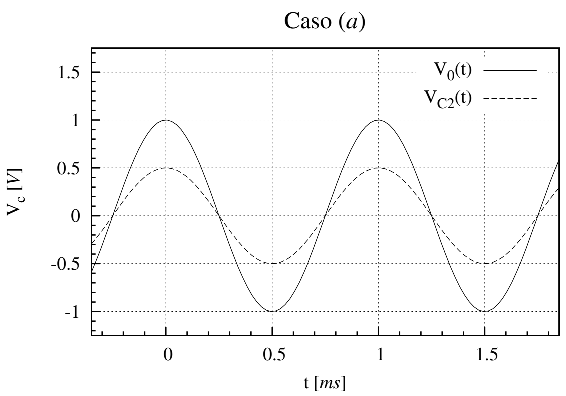
- nel caso (c) si ha $Z_1 = Z_p \simeq 717\,\Omega - j\,450\,\Omega$ e $Z_2 = Z_s \simeq 1\,\mathrm{k}\Omega - j\,1.59\,\mathrm{k}\Omega$. In questo caso

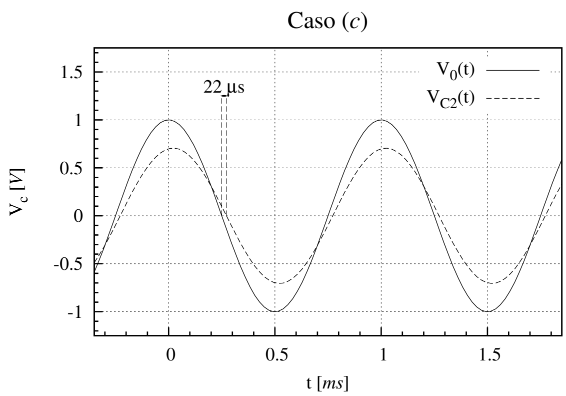
$$\tilde{V}_{Z2} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\tilde{V}_0 = \frac{Z_s}{Z_p + Z_s}\tilde{V}_0 \simeq 0.698\,\mathrm{V} - j\,0.097\,\mathrm{V} \simeq 0.705\,e^{-j\,0.138}\,\mathrm{V}$$

ovvero $V_{Z2}(t) \simeq 0.705\cos(2\pi f_0 t - 0.138)$. Si ha quindi un *ritardo* di fase pari a $\varphi_0 = 0.138\,\mathrm{rad}$, che per $f_0 = 1\,\mathrm{kHz}$ corrispondono ad un tempo pari a

$$\tau_0 = \frac{\varphi_0}{2\pi}T \simeq 22\,\mu\mathrm{s}$$

L'andamento della $V_{Z2}(t)$ nei casi (a) e (c) è rappresentato nelle due figure seguenti.





Realizzazione pratica

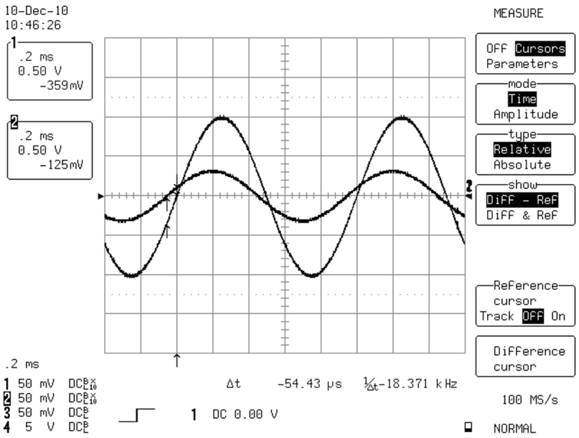
Si utilizzino due resistenze da $1\,\mathrm{k}\Omega$ e due condensatori da $0.1\,\mu\mathrm{F}$. Si utilizzi il generatore di funzioni per generare $V_0(t)$, impostando un'onda sinusoidale di $1\,\mathrm{kHz}$, con una ampiezza di $1\,\mathrm{V}$ (ovvero il cui picco positivo raggiunge $1\,\mathrm{V}$ e il picco negativo raggiunge $-1\,\mathrm{V}$.) Per via della bassa precisione del generatore di funzioni, si consiglia di controllare sia il valore dell'ampiezza che quello della frequenza tramite l'oscilloscopio, collegando la sonda del Canale 1 direttamente al generatore di funzioni. Le impostazioni consigliate per l'oscilloscopio sono le seguenti.

- Canale 1 con sensibilità pari a $0.1\,\mathrm{V/div}$ o $0.5\,\mathrm{V/div}$
- Base dei tempi a $200\,\mu\mathrm{s/div}$ o $500\,\mu\mathrm{s/div}$.
- Trigger in "Auto" oppure "Normal". Sebbene non sia influente per l'esercizio, si consiglia di impostare il tipo di fronte su positivo e una tensione di soglia a $0\,\mathrm{V}$ (dipendentemente dall oscilloscopio usato, con il trigger impostato su "Auto" il valore di tale soglia potrebbe essere non regolabile).

Si realizzi ora il circuito chiesto al primo punto dell'esercizio. Scopo di questa esercitazione è misurare sia l'ampiezza di V_{Z2} che il suo sfasamento rispetto alla tensione V_0. Per questo si lasci la sonda del Canale 1 collegata alla V_0 mentre si colleghi la sonda del Canale 2 alla Z_2. Si imposti sul canale 2 la stessa sensibilità impostata sul Canale 1.

ATTENZIONE: Le due masse dei due canali dell'oscilloscopio (ovvero i due coccodrilli della sonda) sono cortocircuitati all interno dell'oscilloscopio. Pertanto è assolutamente NECESSARIO che, quando si utilizza più di un canale, tutte le masse delle sonde siano connesse allo stesso nodo.

Si usino i cursori dell'oscilloscopio sia per misurare l'ampiezza di V_{Z2}, sia per misurare lo sfasamento tra V_0 e V_{Z2}. Per misurare lo sfasamento, si consiglia di misurare la distanza tra i due istanti di tempo in cui le due sinusoidi passano per gli 0 V. Dipendentemente dalla scala temporale impostata, questi punti potrebbero risultare molto vicini sullo schermo. Per aumentare l'accuratezza della misura, è possibile diminuire a piacere la scala temporale. Il risultato a schermo dovrebbe essere simile al seguente.



Si realizzino ora il caso (a) ed il caso (c) trovati nella seconda parte dell'esercizio. Le procedure per misurare ampiezza e sfasamento delle due sinusoidi V_0 e V_{Z2} sono per tutto simili al caso precedente. Le immagini sull'oscilloscopio dovrebbero essere simili ai due esempi riportati qui sotto.